UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DIGITÁLNE SPRACOVANIE STOCHASTICKÝCH SIGNÁLOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021 Bc. ADAM MITURA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIGITÁLNE SPRACOVANIE STOCHASTICKÝCH SIGNÁLOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Ing. Tomáš Páleník, PhD.

Bratislava 2021 **Bc. Adam MITURA**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Adam Mitura
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Digitálne spracovanie stochastických signálov
Digital Signal Processing of Stochastic Signals

Anotácia: Práca bude venovaná číslicovej analýze náhodných signálov v časovej ako aj frekvenčnej oblasti. Model prenosu signálov bude popísaný s dôrazom na matematický formalizmus. Pomocou štatistických metód budú vyhodnocované vybrané parametre digitálnych signálov využívaných v kontexte moderných digitálnych komunikačných systémov. Pre zisk datasetu a simulovanie skúmaných procesov bude využitý softvér Matlab.

Vedúci: Ing. Tomáš Páleník, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 19.12.2019

Dátum schválenia: 21.12.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Ing. Tomášovi Páleníkovi, PhD. za ochotu, pomoc, odborné rady, podnetné pripomienky a možnosť častej komunikácie, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

MITURA, Adam: Digitálne spracovanie stochastických signálov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Ing. Tomáš Páleník, PhD., Bratislava, 2021, 105 s.

V práci študujeme vybrané aspekty teórie spracovania a prenosu signálov. Prvá kapitola práce poskytuje ucelený prehľad matematického aparátu, ktorý oblasť spracovania signálov využíva. Uvedené sú poznatky všeobecnej Fourierovej analýzy a jej obmien vzhľadom na aplikačné potreby. Rovnako sú stručne uvedené aj základné vlastnosti skúmaného aditívneho bieleho gaussovského šumu z pohľadu teórie náhodných procesov. Poznatky sú aplikované pri detailnom popise prenosovej sústavy v druhej kapitole. Práca disponuje popisom ako modulačnej, tak aj demodulačnej časti prenosovej sústavy, a taktiež objasňuje vybrané náležitosti používané v praktických aplikáciách, ako napríklad typickú voľbu tvaru základného pásma prenosu a iné. Tretia kapitola oboznamuje čitateľa s prechodom medzi idealizovaným prístupom teórie prenosu a praktickými simuláciami za použitia diskrétnych prototypov. Otvára sa tu problém nekonzistentnosti výsledkov týkajúcich sa pravdepodobnosti chyby na bit v prenosových sústavách pri snahe o simulovanie spojitých signálov pomocou diskrétnych. Zároveň na tomto mieste práca otvára hypotézu, že tieto nezrovnalosti pri vzájomnom porovnávaní chybovostí možno odstrániť použitím vhodnej, v práci odvodenej, metriky. Túto hypotézu podporujú výsledky štvrtej kapitoly, kde sa simuluje chybovosť v prenosových sústavách využívajúcich diskrétne prototypy. Simulácie sú konštruované prispôsobenou Monte Carlo metódou s využitím stanovenia požiadavky na počet opakovaní predom, a rovnako s podmienkou na dĺžku výsledného intervalového odhadu skutočnej hľadanej pravdepodobnosti chyby na bit prenosu s diskrétnymi prototypmi.

Kľúčové slová: Signál, Fourierova analýza, Fázová modulácia, AWGN šum, Spriahnutý filter

Abstract

MITURA, Adam: Digital Signal Processing of Stochastic Signals [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Ing. Tomáš Páleník, PhD., Bratislava, 2021, 105 p.

In this thesis we study selected aspects of the signal processing and transmission theory. The first chapter of the thesis provides a comprehensive overview of the mathematical apparatus used by the field of signal processing. General knowledge of Fourier analysis and its variations with respect to application needs are presented. The basic properties of the examined additive white Gaussian noise from the perspective of theory of stochastic processes are also briefly presented. The knowledge is applied in the detailed description of the transmission system in Chapter 2. The thesis disposes of a description of both the modulation and demodulation parts of the transmission system, and also clarifies selected elements used in practical applications, such as the typical choice of the baseband shape and others. The third chapter introduces the reader to the transition between the idealised transmission theory approach and practical simulations using discrete prototypes. This raises a problem of inconsistency of the results concerning bit-error probability within transmission systems when trying to simulate continuous signals using discrete ones. Therewith, at this point, the thesis opens a hypothesis that the error rate intercomparison discrepancies can be eliminated by the use of an appropriate metric, derived in the thesis. This hypothesis is supported by the findings of Chapter 4, where bit-error rate using discrete prototypes is simulated. The simulations are constructed with a adapted Monte Carlo method, using the requirement of number of repetitions set beforehand, as well as a constraint on the resulting interval estimate length of the true sought-after bit-error probability of the transmission with discrete prototypes.

Keywords: Signal, Fourier analysis, Phase-shift keying, AWGN, Matched filter

Obsah

Zoznam použitých symbolov **9**

Úvod **10**

1 Signál ako náhodný proces **12**

1.1 Signál 12

1.1.1 Kategorizácia signálov 12

1.1.2 Digitalizácia 14

1.2 Spektrálna analýza 15

1.3 Výkonová spektrálna hustota a autokorelačná funkcia 19

1.4 Náhodné procesy a ich klasifikácia 22

1.4.1 AWGN šum 23

2 Idealizovaný model prenosu signálov **25**

2.1 Základné pojmy v prenose signálu 25

2.2 Modulácia 28

2.2.1 Základné a preložené frekvenčné pásmo 31

2.2.2 Spektrum NRZ ako pôvodca tvaru základného pásma 33

2.2.3 BPSK ako príklad relativity preloženého pásma 35

2.3 Prenos namodulovaného signálu v AWGN kanáli 38

2.3.1 Vlastnosti AWGN vo vzťahu k prenosu signálu 38

2.3.2 Odstup signálu od šumu 38

2.4 Demodulácia a detekcia 40

2.4.1 Návrat do základného pásma po prenose v preloženom pásme . . . 41

2.4.2 Spriahnutý filter a korelátor 43

2.4.3 Detekcia v prípade binárnej modulácie 45
2.4.4 Odvodenie chybovosti systému s binárnou moduláciou 49
2.4.5 Binárny symetrický kanál 51
2.4.6 Detekcia v prípade M-árnej modulácie 52

3 Aspekty simulovaných prenosov 53
3.1 Domény v jednotlivých častiach prenosovej sústavy 53
3.2 Praktická simulácia AWGN šumu 54
3.3 Vplyv vzorkovacej frekvencie na mieru chybovosti simulovaného prenosu . . 59
3.3.1 Motivácia 59
3.3.2 Korekcia odstupu signálu od šumu pre diskrétnu simuláciu 60

4 Simulácie chybovosti prenosov 64
4.1 Dĺžka simulácie pri rádovom posune pravdepodobnosti 64
4.1.1 Šírka intervalových odhadov BER 64
4.1.2 Monte Carlo intervaly spoľahlivosti 68
4.2 Pravdepodobnosť chyby na bit v simulovanom prenose 74

Záver 87

Zoznam použitej literatúry 90

Príloha A 92

Príloha B 93

Príloha C 94

Príloha D 105

Zoznam použitých symbolov

SKRATKA	SLOVENSKÝ NÁZOV	ANGLICKÝ EKVIVALENT
ACF	Autokorelačná funkcia	Autocorrelation function
AWGN	Aditívny biely gaussovský šum	Additive white Gaussian noise
BER	Bitová chybovosť	Bit-error rate
BPSK	Binárna fázová modulácia	Binary phase-shift keying
$\mathbb{C}$	Množina komplexných čísel	Complex numbers
D	Rozhodnutie	Decision
DFT	Diskrétna Fourierova transformácia	Discrete Fourier transform
DT-FT	FT diskrétnych signálov	Discrete-time Fourier transform
ESD	Energetická spektrálna hustota	Energy spectral density
FS	Fourierov rad	Fourier serie
FT	Fourierova transformácia	Fourier transform
Hz	Hertz	Hertz
LPF	Filter dolnej priepuste	Low-pass filter
MAP	Mapovanie	Mapping
MF	Spriahnutý filter	Matched filter
$\mathbb{N}$	Množina prirodzených čísel	Natural numbers
n.p.	Náhodná premenná	Random variable
PS	Tvarovací filter	Pulse shaping
PSD	Výkonová spektrálna hustota	Power spectral density
PSK	Fázová modulácia	Phase-shift keying
$\mathbb{R}$	Množina reálnych čísel	Real numbers
S	Vzorkovač	Sampling
SNR	Odstup signálu od šumu	Signal-to-Noise ratio
SRC	Zdroj	Source
$\mathbb{Z}$	Množina celých čísel	Integers

Úvod

Svet ako ho poznáme dnes, by nebol tým, čím je, nebyť výdobytkov modernej technológie. Používanie digitálnych zariadení sa pre veľkú časť svetovej populácie stalo dennou rutinou, ba dokonca neodmysliteľnou súčasťou života. Vývoj nových technických zariadení, ktorý rapídne napreduje i dnes, so sebou priniesol aj potrebu zefektívňovania komunikácie medzi nimi. Prenos informácií medzi zariadeniami je súčasťou najbežnejších činností, či už pri práci s počítačom, pri pozeraní televízie alebo platbe kartou a mnohých ďalších.

Základným stavebným prvkom v rámci prenosov informácií je signál, ktorý je spracovávaný takzvanou prenosovou sústavou. Vďaka rozsiahlosti problematiky prenosov signálov, možno túto sféru považovať za samostatné odvetvie vo výskume digitálnych systémov.

Technické vedné odbory skúmajú jednak teoretické vlastnosti signálov a sústav, ale predovšetkým sa zaoberajú implementovaním teoretických zistení do praktickej roviny.

Matematikom sa ponúka štúdium vnútorných procesov prenosových sústav, ktorých výsledkom môže byť napríklad analýza kvantitatívnej i kvalitatívnej efektivity. Na druhej strane, tieto teoretické výsledky môžu byť v praxi aplikované pri vývoji a úprave komunikačných sústav. Samozrejme, nie každý teoretický poznatok je z inžinierskeho pohľadu prakticky implementovateľný, hoci teoretici by namietali. Slovami Lawrencea Berra: *„In theory there is no difference between theory and practice. In practice there is!“*

Prenos signálov je z technického hľadiska pomerne dobre popísaný. Medzi známe práce v rámci odboru nespochybniteľne patrí aj článok C. Shannona v [14], kde, okrem iného, vysvetľuje, že správne chápanie v teórii digitálnych komuníkácií pôvodí v teórii pravdepodobnosti. Viac aplikačný prístup prezentuje napríklad B. Sklar v [15] alebo W. Etten v [6]. Ich prístup často využíva aj výsledky matematickej teórie. Spomeňme napríklad teóriu náhodných procesov, alebo spektrálnu analýzu. Tieto okruhy matematického skúmania sa vyvíjali skôr ako praktická implementácia prenosov signálov. Z tohto pohľadu je teória prenosov relatívne mladou disciplínou, ktorá ale, podobne ako iné, aplikuje široké spektrum matematických výsledkov. Tieto poznatky sú v matematických kruhoch široko známe a v spojitosti so všeobecnou teóriou signálov sú uvedené napríklad v [1] alebo [13].

Za častý problém technickej literatúry považujeme jej miernu nešpecifickosť. Autori

zvyknú pracovať s pojmami, ktoré presne nešpecifikovali, nedefinovali. Prípadne, pri definovaných pojmoch predpokladajú vlastnosti, ktoré nedokazujú, alebo nezdôvodňujú ich vhodnosť. Kvôli orientácii na praktické aplikácie, väčšina dostupnej literatúry nedisponuje dôkladnými, detailnými odvodeniami a zdôvodneniami uvádzaných postupov a záverov.

Možno namietať, že nie je treba komplikovať veci, ktoré v praxi fungujú rozsiahlou teóriou. My sa ale držíme hesla Alberta Einsteina: *„Things should be made as simple as possible, but not any simpler.“* Vzhľadom na uvedené je naším cieľom aj popísať prenosovú sústavu a jej súčasti s dôrazom na špecificitu používaných pojmov.

Skúmať mienime chybovosť prenosu signálov. Do kontrastu postavíme chybovosť prenosov s diskrétnymi signálmi a chybovosť prenosov so spojitými signálmi. Prenosy spojitých signálov sú narozdiel od diskrétnych v literatúre široko popísané. Skúmanie preto vystaviame na informáciach o prenose spojitých signálov a získané závery samostatnou prácou rozšírime o vlastné zistenia týkajúce sa prenosu diskrétnych signálov.

V prvej kapitole uvedieme základný matematický aparát potrebný pre štúdium prenosov signálov: predovšetkým viaceré formy Fourierovej analýzy. Definujeme aj náhodné signály a ich vlastnosti pomocou základov teórie náhodných procesov.

Ťažiskovou bude druhá kapitola práce. Tu detailne popíšeme jeden z prístupov k prenosovým sústavám. Mienime definovať používané, ale v bežnej literatúre nešpecifikované pojmy. Zaujímať sa budeme predovšetkým o bitovú chybovosť teoretických systémov.

V tretej kapitole budeme skúmať rozdiely medzi prenosmi so spojitými signálmi a diskrétnymi. Cieľom tejto kapitoly bude spojiť niektoré z poznatkov z predošlých dvoch kapitol. Je možné, že drobné rozdiely v teórii spektrálnej analýzy v prípade diskrétnych a spojitých signálov môžu spôsobiť nekonzistentnosť v aplikáciách. Preto v prípade, že objavíme také nezrovnalosti medzi prenosom diskrétnych a spojitých signálov, ktoré budú mať vplyv na praktické výsledky, budeme ich ďalej študovať a overovať v štvrtej kapitole.

Cieľom práce je teda dôkladný popis prenosovej sústavy s dôrazom na špecifickosť textu. Rovnako aj hľadanie spojitostí a rozdielov medzi prenosmi prostredníctvom spojitých a diskrétnych signálov s následným, eventuálnym, overením vplyvu týchto potenciálnych rozdielov na praktické aplikácie v prenosoch signálov.

1 Signál ako náhodný proces

V tejto kapitole uvádzame základný matematický aparát, ktorý je potrebný pre objasnenie niektorých súvislostí v technických aplikáciách spracovania signálov. Začíname síce pomerne obšírnou definíciou signálu, ale neskôr sa zameriame na konkrétny typ signálu a jeho transformácie:

1.1 Signál

Definícia 1.1. *[13] Signál je akákoľvek funkcia opisujúca správanie javu v čase alebo priestore.*

Definícia 1.1 z praktického hľadiska predpokladá explicitnosť zápisu signálu ako matematickej funkcie. Signálom možno rozumieť aj fyzikálnu, chemickú alebo vo všeobecnosti merateľnú výstupnú veličinu nejakej sústavy, ktorej aspoň jeden parameter sa môže funkčne meniť [13]. Zaoberáme sa signálmi v časovej doméne.

1.1.1 Kategorizácia signálov

[13, 15] Signál možno kategorizovať:

- podľa typu zdroja: na analógový (signál na spojitej doméne) a digitálny (diskrétny), t.j. reprezentovaný konečnou sekvenciou, resp. diskrétnou funkciou času,
- podľa pôvodu na deterministický (nenáhodný) a stochastický (náhodný),
- podľa periodicity na periodický a neperiodický, v zmysle definície 1.2:

  Definícia 1.2. Periodický signál
  [13, 15]Signál $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je periodický s periódou* $T_0 > 0$*, ak*

$$x(t) = x(t + T_0), \qquad \forall t, \tag{1}$$

- podľa formy na výkonové a energetické v zmysle definícií 1.3, 1.4:

Definícia 1.3. Energia a energetický signál

[1, 15] Signál $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazývame energetický práve vtedy, ak má kladnú, konečnú energiu E_x, kde

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \tag{2}$$

Definícia 1.4. Výkon a výkonový signál

[1, 15] Signál $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazývame výkonový práve vtedy, ak má kladný, konečný výkon P_x, kde

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt. \tag{3}$$

Definícia 1.5. Energia signálu - diskrétny variant

[1, 13] Nech $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je diskrétny signál. Potom definujeme energiu diskétneho signálu x ako:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2. \tag{4}$$

Definícia 1.6. Výkon signálu - diskrétny variant

[1, 13] Nech $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je diskrétny signál. Potom definujeme výkon diskétneho signálu x ako:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2. \tag{5}$$

Definícia 1.7. Diracov impulz

[13, 15] Diracovým impulzom nazývame signál $\delta(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, vyhovujúci podmienkam:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \tag{6}$$

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0. \tag{7}$$

Definícia 1.7, hoci je v literatúre veľmi používaná, nie je matematicky korektná. Funkcia $\delta(t)$ v definícii 1.7 je nulová na celom svojom definičnom obore s výnimkou 1 bodu. Zároveň základné poznatky matematickej analýzy hovoria, že množina miery nula nemá vplyv na rátanie integrálu. Teda po správnosti: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 0$.

Korektnosť pri používaní by sa dosiahla napríklad používaním Diracovej miery alebo limity, nakoľko Diracov impulz v zmysle definície 1.7 možno chápať ako špeciálny, limitný,

prípad normálneho rozdelenia s nulovou šírkou a nekonečnou výškou. Z pohľadu zaužívanej terminológie patrí Diracov impulz do triedy tzv. zovšeobecnených funkcií (ang. distributions) [15].

Definícia 1.8. Jednotkový (Kroneckerov) impulz

[13, 15] Jednotkovým impulzom nazývame diskrétny signál $\delta_1[n]\colon \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ *daný ako:*

$$\delta_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \textit{inak.} \end{cases} \tag{8}$$

Definícia 1.9. Pravouhlý impulz

[13, 15] Pravouhlým impulzom dĺžky $T > 0$ *nazývame signál* $R_T(t)\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ *daný ako:*

$$R_T(t) = \begin{cases} 1, & t \in < 0, T >, \\ 0, & \textit{inak.} \end{cases} \tag{9}$$

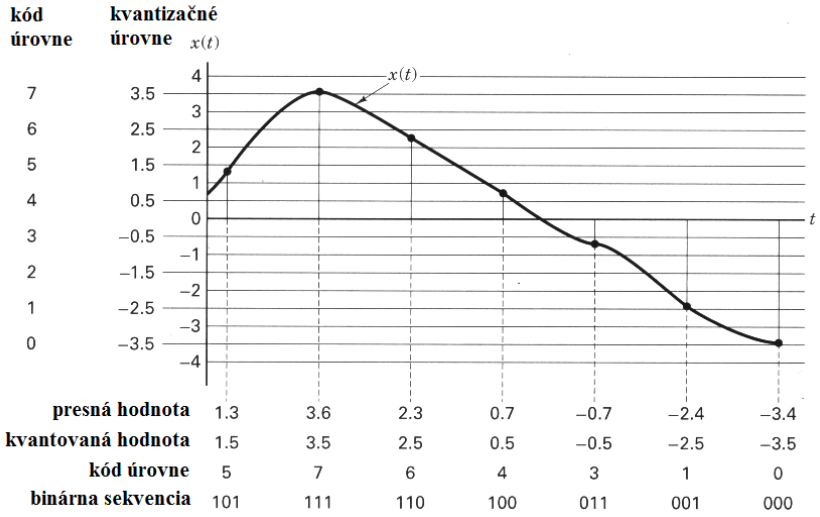
V ďalšom texte budeme pre zápis časového argumentu používať v prípade diskrétneho signálu hranaté zátvorky, v prípade signálu na spojitej doméne oblé, podobne ako v predošlých definíciach. Zdôrazniť je treba, že v technických odboroch sa pre analógové signály používa označenie spojité - to na zdôraznenie spojitosti časovej domény, nie v zmysle spojitosti funkcie. Rovnaký názov preto používame aj my.

1.1.2 Digitalizácia

Digitálny signál možno podľa B. Sklara v [15] získať z analógového formátovaním spočívajúcim v dvoch krokoch:

- vzorkovaním - diskretizáciou nezávislej premennej (času) so zvolenou vzorkovacou periódou T_s, resp. so zvolenou vzorkovacou frekvenciou $f_s = \frac{1}{T_s}$,
- kvantizáciou - diskretizáciou hodnôt, ktoré signál nadobúda vo vzorkách.

Pri vzorkovaní a kvantizácii sa stráca časť informácie úmerne šírke digitalizačnej mriežky, viď obrázok 1. Výsledkom digitalizácie je postupnosť binárnych znakov [15].



Obr. 1: Diskretizácia analógového signálu a prevod na dátový tok, prevzaté z [15]

Poznámka: Kvôli komplexnosti textu uvádzame v tejto kapitole aj niekoľko tvrdení, ktoré využívame v ďalších častiach práce. Nižšie uvedené vety nedokazujeme, dôkazy sú k dispozícii v pri nich uvedenej literatúre.

Veta 1.10. Nyquistovo kritérium
[13, 15] Ak je vzorkovacia frekvencia f_s vyššia než dvojnásobok najväčšej prítomnej frekvencie zložiek spojitého signálu $x(t)$, t.j. ak:

$$f_s > 2f_{x;max}, \tag{10}$$

potom je možné rekonštruovať signál $x(t)$ z jeho navzorkovanej formy.

V širokom spektre literatúry je možné stretnúť sa s neostrou variantou podmienky v nerovnosti (10). Hraničný prípad, kedy $f_s = 2f_{x;max}$ môže v niektorých prípadoch spôsobiť tzv. aliasing, pri ktorom môže byť pôvodný signál niekedy síce rekonštruovaný správne, ale inokedy nie, pre viac viď [1, 15, 16].

1.2 Spektrálna analýza

Signály možno namiesto časovej domény reprezentovať vo frekvenčnej doméne prostredníctvom v signále obsiahnutých frekvenčných zložiek. V závislosti od vlastností (periodicita a spojitosť) signálu rozlišujeme 4 formy Fourierovej analýzy - transformácie sig-

nálu do frekvenčnej domény. Uvádzame poznatky nevyhnutné pre náš ďalší postup. Ďalšie vlastnosti a detaily možno nájsť v [1, 6, 13, 15].

Definícia 1.11. Fourierov rad

[1] Nech $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitý, periodický signál s periódou $T_0 > 0$. Diskrétnu, neperiodickú funkciu $X[k]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, danú ako:

$$X[k] = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-\frac{ik2\pi t}{T_0}} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

nazývame spektrum. Zároveň spektrum nazývame aj koeficienty Fourierovho radu funkcie $x(t)$, pričom Fourierov rad funkcie $x(t)$ je daný ako:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X[k] e^{\frac{ik2\pi t}{T_0}}. \tag{12}$$

Definícia 1.12. Spojitá Fourierova transformácia

[1, 13, 15] Nech $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitý, neperiodický signál. Potom Fourierovou transformáciou signálu $x(t)$ rozumieme spojitú, neperiodickú funkciu vo frekvenčnej oblasti $X(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ danú ako:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt. \tag{13}$$

Inverzná Fourierova transformácia je daná ako:

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df. \tag{14}$$

Definícia 1.13. Fourierova transformácia diskrétnych signálov

[1] Nech $x[n]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je diskrétny, neperiodický signál. Potom jeho Fourierovou transformáciou rozumieme tzv. DT-FT (Discrete-time Fourier transform) transformáciu: spojitú, periodickú funkciu s periódou dĺžky 1 vo frekvenčnej oblasti: $X(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, danú ako:

$$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-i2\pi fn}. \tag{15}$$

Inverzná Fourierova transformácia diskrétnych signálov je daná ako:

$$\dot{x}[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{i2\pi fn} df. \tag{16}$$

Definícia 1.14. Diskrétna Fourierova transformácia

[1] Nech $x[n]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je diskrétny, periodický signál s periódou dĺžky $N \in \mathbb{N}$. Diskrétnou

Fourierovou transformáciou (DFT) signálu $x[n]$ rozumieme periodickú, diskrétnu funkciu s periódou dĺžky N, spektrum vo frekvenčnej oblasti: $X[k]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, danú ako:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}. \tag{17}$$

Inverzná diskrétna Fourierova transformácia je daná ako:

$$\dot{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}}. \tag{18}$$

Veta 1.15. Vlastnosti spektra v závislosti od vstupného signálu

[1, 16] Nech x je signál vstupujúci do jednej zo štyroch foriem Fourierovej analýzy podľa definícií 1.11 až 1.14. Potom možno určiť vlastnosti výstupného spektra na základe vlastností signálu x tak, ako sú uvedené v tabuľke 1.

Vplyv spojitosti a periodicity signálu na výsledné spektrum		
Signál	Používaný názov a skratka	Spektrum
spojitý, periodický	FS - Fourierov rad	diskrétne, neperiodické
spojitý, neperiodický	FT - Fourierova transformácia	spojité, neperiodické
diskrétny, neperiodický	DT-FT Four. trans. diskrétnych signálov	spojité, periodické
diskrétny, periodický	DFT Diskrétna Four. transformácia	diskrétne, periodické

Tabuľka 1: Vlastnosti spektra na základe vlastností vstupného signálu

Poznámka: Dvojice: signál x a jeho spektrum X získané podľa jednej z definícií 1.11 - 1.14 nazývame Fourierove páry a značíme: $x \overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow} X$, $x \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X$, $x \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X$,resp.$x \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X$.

Veta 1.16. Eulerova formula

[13, 15] Nech $\omega \in \mathbb{R}$, potom platia vzťahy:

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega), \qquad e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i\sin(\omega). \tag{19}$$

Veta 1.17. Parsevalova rovnosť a jej varianty

[1, 15] Nech $s(t)$ je spojitý, periodický signál s periódou T_0 a nech $s(t) \overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow} S[k]$. Potom platí Parsevalova rovnosť:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |S[k]|^2. \tag{20}$$

Nech $x(t)$ je spojitý, neperiodický signál a nech $x(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(f)$. Potom platí Parsevalova rovnosť:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \tag{21}$$

Nech $y[n]$ je diskrétny, neperiodický signál s konečnou energiou a nech $y[n] \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} Y(f)$. Potom platí Parsevalova rovnosť:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |Y(f)|^2 df. \tag{22}$$

Nech $z[n]$ je diskrétny, periodický signál s periódou dĺžky $N \in \mathbb{N}$, a nech $z[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} Z[k]$. Potom platí Parsevalova rovnosť:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |z[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |Z[k]|^2. \tag{23}$$

Parsevalove rovnosti predstavujú z praktického hľadiska ďalší nástroj na rátanie energie a výkonu signálu. Pripomeňme definície 1.3 až 1.6. Po uvážení Parsevalových rovností pre spojitý aj diskrétny prípad vo vete 1.17 je zjavné, že energiu a výkon nemusíme nutne rátať v časovej doméne, ale môžeme ich rátať (využitím vhodnej Fourierovej transformácie) vo frekvenčnej doméne. Tomuto aspektu sa bližšie venujeme v kapitole 1.3.

Veta 1.18. Škálovanie časového argumentu

[13] Nech $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je signál a nech $a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$x(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(f) \Rightarrow x(at) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right), \tag{24}$$

a zároveň platí rovnosť:

$$X(-f) = \overline{X(f)}, \tag{25}$$

kde operátor $\bar{\cdot}$ predstavuje komplexne združený prvok.

Veta 1.19. Posun vo frekvenčnej oblasti

[13] Nech $x(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(f)$ a nech $f_0 \in \mathbb{R}$. Potom platia vzťahy:

$$x(t)e^{if_0 t} \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(f - f_0), \tag{26}$$

$$x(t)\cos(f_0 t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\Big[X(f - f_0) + X(f + f_0)\Big], \tag{27}$$

$$x(t)\sin(f_0 t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2i}\Big[X(f - f_0) - X(f + f_0)\Big]. \tag{28}$$

Veta 1.20. Posun časového argumentu

[13] Nech $x(t)$ je signál a nech $x(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X(f)$. Nech ďalej $t_0 \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$x(t - t_0) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X(f)e^{-ift_0}. \tag{29}$$

Veta 1.21. Linearita Fourierovej transformácie

[13] Nech $x(t)$ a $y(t)$ sú signály a nech $x(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X(f)$ a $y(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(f)$. Nech ďalej $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$ax(t) + by(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} aX(f) + bY(f). \tag{30}$$

1.3 Výkonová spektrálna hustota a autokorelačná funkcia

Podľa vzoru z [13] a [15] konštruujeme definíciu výkonovej a energetickej spektrálnej hustoty, ktorú, narozdiel od uvedených autorov, rozširujeme na všetky 4 možné varianty signálu (v závislosti od spojitosti a periodicity), podobne pri vetách 1.23, 1.24 nižšie:

Definícia 1.22. Výkonová a energetická spektrálna hustota

Nech:

$s(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je spojitý, periodický signál s periódou $T_0 > 0$ a $S[k]$ sú koeficienty jeho FS,*

$x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je spojitý, neperiodický signál a $X(f)$ je jeho FT,*

$y[n]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *je diskrétny, neperiodický signál a $Y(f)$ je jeho DTFT,*

$z[n]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *je diskrétny, periodický signál s periódou $N \in \mathbb{N}$ a $Z[k]$ je jeho DFT.*

Energetickou spektrálnou hustotou *signálov $s(t)$, $x(t)$, $y[n]$, $z[n]$ nazývame funkciu $H\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{D}$ je definičný obor spektra príslušného signálu, danú ako:*

$$H_s[k] = T_0\Big|S[k]\Big|^2, \qquad H_x(f) = \Big|X(f)\Big|^2, \qquad H_y(f) = \Big|Y(f)\Big|^2, \qquad H_z[k] = \frac{1}{N}\Big|Z[k]\Big|^2. \tag{31}$$

Nech ďalej P je výkon signálu a nech $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Označme $P^{a,b}$ výkon signálu generovaný frekvenčnými zložkami z intervalu $< a, b >$. **Výkonovou spektrálnou hustotou** *rozumieme funkciu $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ vo frekvenčnej oblasti, kde $\mathbb{D}$ je definičný obor*

spektra príslušného signálu, ktorá v prípade diskrétneho spektra spĺňa:

$$P = \sum_{k \in \mathbb{D}} G[k], \qquad P^{a,b} = \sum_{k \in \mathbb{D} \cap (a,b)} G[k], \tag{32}$$

a v prípade spojitej frekvenčnej domény:

$$P = \int_{\mathbb{D}} G(f)df, \qquad P^{a,b} = \int_{a}^{b} G(f)df. \tag{33}$$

Navyše pre periodické signály možno definovať výkonovú spektrálnu hustotu signálov $s(t)$, $z[n]$ explicitne ako funkciu $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{D}$ je definičný obor spektra príslušného signálu, danú ako:

$$G_s[k] = \left|S[k]\right|^2, \qquad G_z[k] = \frac{1}{N^2}\left|Z[k]\right|^2. \tag{34}$$

Výkonová spektrálna hustota (ang.: Power Spectral Density), ďalej len PSD, je charakteristikou hovoriacou, ako z názvu vyplýva, o rozdelení výkonu na jednotlivých zložkách signálu vzhľadom na frekvenčnú doménu, obdobne pre energiu a energetickú spektrálnu hustotu - ESD (Energy Spectral Density).

Na základe definícií 1.3 až 1.6, vety 1.17 a definície 1.22 konštruujeme nástroj na výpočet energie a výkonu signálu prostredníctvom informácie o jeho frekvenčnom spektre ako vety:

Veta 1.23. Výpočet energie signálu prostredníctvom ESD
Nech sú dané signály a im zodpovedajúce energetické spektrálne hustoty tak, ako je uvedené v definícii 1.22.

Potom energiu signálov možno rátať ako:

$$E_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_s[k], \tag{35}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} H_x(f)df, \tag{36}$$

$$E_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_y(f)df, \tag{37}$$

$$E_z = \sum_{k=0}^{N-1} H_z[k], \tag{38}$$

kde E_s a E_z sú energie jednej periódy príslušných signálov.

Veta 1.24. Výpočet výkonu signálu prostredníctvom PSD

Nech sú dané signály a im zodpovedajúce výkonové spektrálne hustoty tak, ako je uvedené v definícii 1.22.

Potom výkon signálov možno rátať ako:

$$P_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s[k], \tag{39}$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)df, \tag{40}$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)df, \tag{41}$$

$$P_z = \sum_{k=0}^{N-1} G_z[k]. \tag{42}$$

Definícia 1.25. Autokorelačná funkcia

[17] Autokorelačnou funkciou (ACF) signálu $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozumieme funkciu:

$$\rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt, \qquad \forall\tau \in (-\infty, \infty). \tag{43}$$

Veta 1.26. Vlastnosti autokorelačnej funkcie

[5, 15] Nech $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je signál, $H_x(f)$ jeho ESD a $\rho_x(\tau)$ je jeho autokorelačná funkcia v zmysle definície 1.25. Potom platí:

$$\rho_x(\tau) = \rho_x(-\tau), \tag{44}$$

$$\rho_x(\tau) \leq \rho_x(0), \qquad \forall\tau, \tag{45}$$

$$\rho_x(\tau) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} H_x(f), \tag{46}$$

$$\rho_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt. \tag{47}$$

Dôkaz vzťahu (46) **z vety 1.26**

Dokazujeme iba vzťah (46), nakoľko o ostatných predpokladáme, že sú pre čitateľa známe alebo elementárne.

Rátajme Fourierovu transformáciu $\mathbf{P}$ pre autokorelačnú funkciu $\rho_x(\tau)$.

$$\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \Big) e^{-i2\pi f\tau}d\tau =$$

Vnorením fázora do vnútorného integrálu a zámenou poradia integrovania dostávame:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \Big) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)e^{-i2\pi f(t+\tau)}d\tau \Big) x(t)e^{i2\pi ft}dt =$$

Vnútorný integrál predstavuje Fourierovu transformáciu funkcie $x(t+\tau)$, čo je v konečnom dôsledku už iba funkcia frekvencie f, ktorú môžeme vyňať. Zároveň aplikujeme vlastnosť (24) z vety 1.18 a môžeme ďalej písať:

$$= X(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi ft} dt = \left| subst.: \ t = -u \right| = X(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(-u) e^{-i2\pi fu} du = X(f)X(-f)$$

Posledný krok vyplýva z aplikovania vlastnosti (25), čím dôstávame výsledok zhodný s definičným vzťahom (31), a tým je dôkaz kompletný:

$$= X(f)\overline{X(f)} = |X(f)|^2 = H_x(f). \qquad \blacksquare$$

1.4 Náhodné procesy a ich klasifikácia

Definícia 1.27. Náhodný proces

[7, 17] Nech $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech $X(t)\colon \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná premenná pre $\forall t \in T$. Potom proces $\{X(t)\}_{t\in T}$ nazývame náhodný proces a realizáciu tohto náhodného procesu označujeme $\{x(t)\}_{t\in T}$.

Zvyčajne $T = \mathbb{R}$, eventuálne $T = \mathbb{R}^+$. V prípade, že $T = \mathbb{N}$, hovoríme o náhodnej postupnosti. Ak $T = \{1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}\}$ hovoríme o náhodnom vektore.

Definícia 1.28. Slabá stacionarita

[7] Nech $\{X(t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces. Ak zároveň platí:

$$E[X(t)] = \mu, \qquad \forall t \in T, \tag{48}$$

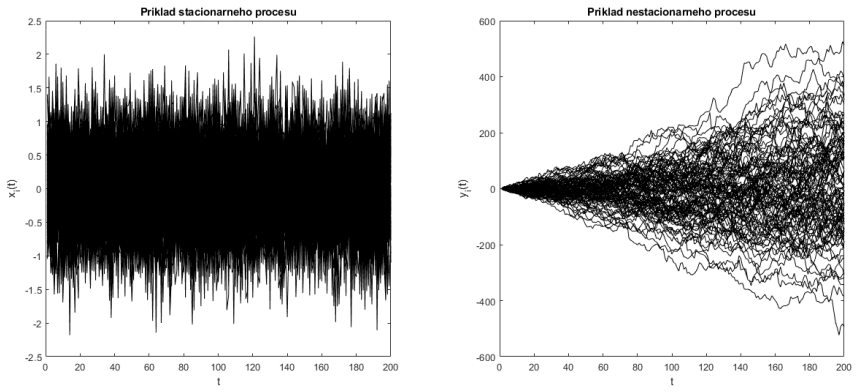
$$Cov[X(t), X(s)] = \gamma(|t-s|), \qquad \forall t, s, \tag{49}$$

potom takýto proces nazývame (slabo) stacionárny.

Poznámka: Náhodný proces sa nazýva silno stacionárny práve vtedy, ak sa združená distribučná funkcia procesu nemení pri posune v čase - takáto definícia je pre technickú prax len málo použiteľná, preto budeme v ďalšom texte stacionaritou rozumieť slabú stacionaritu v zmysle definície 1.28. Pre príklad viď obrázok 2 nižšie [7, 15, 17].

Definícia 1.29. Náhodný signál

Nech signál s je nenáhodný, známy signál definovaný na $T \subseteq \mathbb{R}$ a nech x je realizácia náhodného procesu $\{X\}_T$. Potom signál $y = s+x$ nazývame náhodný, stochastický, signál.



Obr. 2: Príklad 100 realizácií stacionárneho procesu (vľavo) a nestacionárneho procesu (vpravo)

1.4.1 AWGN šum

Definícia 1.30. Biely šum

[7, 15] Náhodný stacionárny proces $\{u(t)\}_{t\in T} \equiv u_t$ *nazývame biely šum, ak sú všetky jeho zložky v rôznych časoch nezávislé náhodné premenné, a ak stredné hodnoty a variancie spĺňajú:*

$$\mathbb{E}\Big[u_t\Big] = 0, \qquad \forall t, \tag{50}$$

$$D\Big[u_t\Big] = \sigma^2, < \infty \qquad \forall t. \tag{51}$$

Definícia 1.31. AWGN šum

[7, 15] Nech $\{\mathscr{N}(t)\}_{t\in T}$ *je biely šum. Nech navyše pravdepodobnostné rozdelenie náhodných premenných* $\mathscr{N}(t)$ *je pre* $\forall t$ *normálne. Potom* $\{\mathscr{N}(t)\}_{t\in T}$ *nazývame Aditívny biely Gaussov šum (Additive white Gaussian noise), ďalej len AWGN.*

Veta 1.32. Vlastnosti bieleho a AWGN šumu

[5, 15, 17] Nech $\{u(t)\}_{t\in T} \equiv u_t$ *je biely šum s varianciou* σ^2*. Potom pre jeho autokorelačnú funkciu platí:*

$$\rho_{u_t}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau), \tag{52}$$

kde $\delta(\tau)$ *je Diracov impulz. Ďalej pre PSD platí:*

$$G_{u_t}(f) = c, \tag{53}$$

kde $c > 0$ *je kladná konštanta.*

Veta 1.33. Vlastnosti vzorkovaného bieleho šumu

[17] Nech $\{u[n]\}_{n\in\mathbb{Z}} \equiv u_n$ *je diskrétny biely šum s varianciou* σ^2*, vzorkovaný so vzorkovacou periódou* $T_s > 0$*. Potom pre autokorelačnú funkciu platí:*

$$\rho_{u_n}[n] = \sigma^2 \delta_1[n], \tag{54}$$

kde $\delta_1[n]$ *je jednotkový impulz, viď vzťah* (8)*.*

AWGN šum je výlučne matematická abstrakcia, šum s týmito vlastnosťami sa v reálnom svete nevyskytuje. Uvážením rovnice (53) a vety 1.24 je zjavne výkon takto definovaného šumu nekonečný. AWGN šum je ale podľa viacerých autorov [15, 17] vhodný na modelovanie reálnych šumov, pri prenosoch signálov, ktorým sa venujeme v ďalšej kapitole.

Veta 1.34. AWGN ako ergodický proces

[8, 17] Nech $\{\mathscr{N}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *je AWGN šum (s nulovou strednou hodnotou a konečnou varianciou) a* $\eta(t)$ *je jeho realizácia. Potom pre teoretické momenty náhodného procesu* $\{\mathscr{N}(t)\}$*platí, že ich možno rátať z tzv. časových priemerov ako:*

$$\mathbb{E}\Big(\{\mathscr{N}(t)\}\Big) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t)dt, \tag{55}$$

$$\mathbb{E}\Big(\{(\mathscr{N}(t))^2\}\Big) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\eta(t)|^2 dt. \tag{56}$$

Zároveň v diskrétnom prípade pre strednú hodnotu a varianciu platí:

$$\mathbb{E}\Big(\{\mathscr{N}[n]\}\Big) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{K} \eta[n], \tag{57}$$

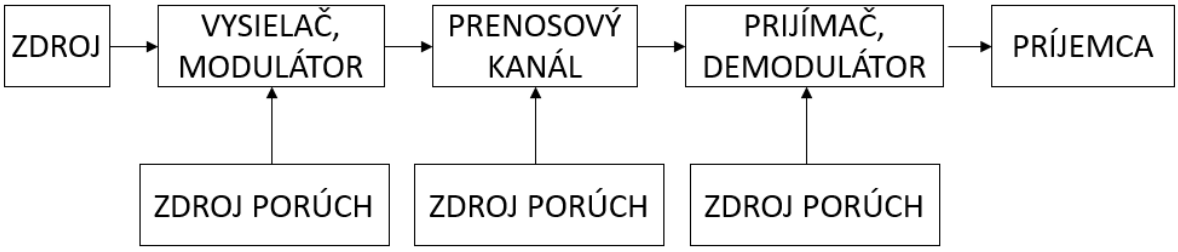
$$D\Big(\{\mathscr{N}[n]\}\Big) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{K} |\eta[n]|^2. \tag{58}$$

Poznámka: Veta 1.34, hoci to v znení nehovorí explicitne, tvrdí, že AWGN šum má vlastnosti ergodických procesov. Ďalšie poznatky týkajúce sa ergodicity neuvádzame, nakoľko pre ďalšiu prácu sú pre nás postačujúce tie uvedené vo vete 1.34.

2 Idealizovaný model prenosu signálov

2.1 Základné pojmy v prenose signálu

Signály slúžia na prenos alebo záznam správ. Je prirodzené vyžadovať, aby jednotlivé časti príslušnej prenosovej sústavy boli uspôsobené na úpravu tohto signálu tak, aby mu zabezpečili vhodné vlastnosti pre prenos a spracovanie v ďalších častiach tejto sústavy. Zjednodušenú schému takejto sústavy možno vidieť na obrázku 3 [13].



Obr. 3: Zjednodušená schéma prenosu signálu, prevzaté z [13]

Hoci na obrázku 3 uvádzame viacero miest, ktoré sú zdrojom porúch, ďalej sa budeme venovať iba poruchám (šumu) pôvodiacim v prenosovom kanáli.

Definícia 2.1. Binárny signál
[15] Nech $x[n]$ je diskrétny signál, taký, že: $x : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$. Potom signál $x[n]$ nazývame bitový tok, binárny signál alebo logický signál.

Výstupom zdroja v systémoch, ktorým sa budeme venovať je vždy binárny signál v zmysle definície 2.1, teda postupnosť binárnych znakov (0 a 1), t.j. bitový tok, logický signál.

Nižšie uvedené definície, pri ktorých nie sú uvedené zdrojové materiály, sú nami zostrojené formálne definície pojmov, ktoré síce prax používa, ale takéto špecifické definície v dostupných textoch chýbajú. Vychádzame predovšetkým z [6, 15].

Definícia 2.2. Digitálna správa, abeceda a reprezentujúce signály
Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $M = 2^k$. Označme $V'_k(\{0, 1\})$ množinu všetkých k-prvkových variácií s opakovaním prvkov množiny $\{0, 1\}$, pričom iste $|V'_k(\{0, 1\})| = M$.

Nech existuje bijekcia $\phi_1 \colon V'_k(\{0,1\}) \to \mathbb{M} = \{m_1, \ldots, m_M\} \subset \mathbb{C}$*, kde* $m_i = m_j \Leftrightarrow i = j$*.*

Potom prvky množiny $V'_k(\{0,1\})$ *nazývame digitálne správy (ang.: digital messagess alebo message symbols). Množinu* $\mathbb{M} = \{m_1, \ldots, m_M\} \subset \mathbb{C}$ *nazývame* M*-znaková (ang.:character) abeceda symbolov a jej prvky* $m_1, \ldots, m_M$ *nazývame symboly. Číslo* k *nazývame počet bitov na symbol.*

Nech $\mathbb{S}_\mathbb{M} = \{s_1(t), \ldots, s_M(t)\}$ *je taká množina signálov, že* $s_i(t) \colon <0, T) \to \mathbb{C}$ $\forall i = 1, \ldots, M$ *a tiež* $s_i(t) = s_j(t) \forall t \Leftrightarrow i = j$*. Nech existuje bijekcia* $\phi_2 \colon \mathbb{M} \to \mathbb{S}_\mathbb{M}$*. Potom množinu* $\mathbb{S}_\mathbb{M}$ *nazývame množina reprezentujúcich signálov abecedy symbolov* $\mathbb{M}$*.*

Poznámka: Zobrazenie prvkov abecedy $\mathbb{M}$ v komplexnej rovine sa zvykne označovať ako konštelácia, resp. konštelačný diagram. Rovnako sa na komplexnú rovinu mapuje tzv. IQ rovina, v ktorej pôvodná reálna os zodpovedá súfaznej zložke (In-phase) $\cos\omega$, a pôvodne imaginárna os kvadratúrnej zložke (Quadrature) $\sin\omega$ signálu. Toto vychádza z používania signálov tvaru $cos(2\pi f_c t + \phi)$, ktoré možno rozložiť na 2 ortogonálne zložky. V praxi sa teda konštelačný diagram využíva na zobrazenie abecedy aj reprezentujúcich signálov. Pre príklad viď obrázok 5.

Pre objasnenie uveďme, že každej z M digitálnych správ zodpovedá práve jeden zvolený reprezentujúci (fyzikálny) signál. Teda postupnosť bitov možno nahradiť postupnosťou správ, ďalej postupnosťou symbolov ako komplexných alebo reálnych čísel ($\mathbb{M}$), a následne postupnosťou reprezentujúcich signálov ($\mathbb{S}_\mathbb{M}$). Postupnosť logických znakov (abstraktný signál) sa takto nahradí fyzickým (merateľným) signálom - teda časovým priebehom prúdov a napätí, ktorých hodnoty reprezentujú práve signály množiny $\mathbb{S}_\mathbb{M}$.

Príklad:

Ako príklad použitia uvedených pojmov v praxi uvádzame obrázok 4, kde zobrazujeme spomínané termíny na príklade 7-bitového ASCII kódovania slova FMFI, viď obrázok 4. Pri použití $k = 2$ bity na symbol, je množina správ daná ako:

$$V'_2(\{0,1\}) = \{00,\ 01,\ 10,\ 11\},$$

zvolená abeceda symbolov je $\mathbb{M} = \{1, i, -1, -i\}$ s definovanou bijekciou ϕ_1:

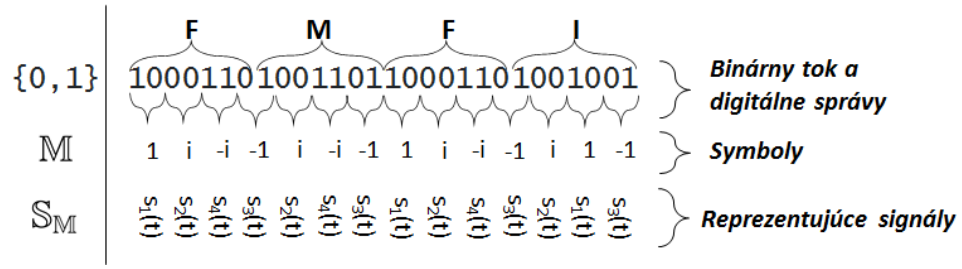
$$\phi_1(00) = i,\ \phi_1(01) = -1,\ \phi_1(10) = 1,\ \phi_1(11) = -i.$$

Ďalej voľbou množiny reprezentujúcich signálov $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$ a bijekciou ϕ_2:

$$\mathbb{S}_{\mathbb{M}} = \left\{ s_j(t) = cos\left(2\pi f_c t + (j-1)\frac{2\pi}{4}\right), \quad j = 1,2,3,4, \quad t \in < 0, T) \right\}, \tag{59}$$

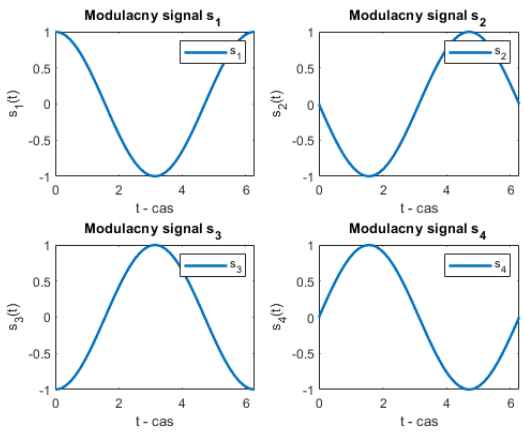
$$\phi_2(i) = s_2(t),\ \phi_2(-1) = s_3(t),\ \phi_2(1) = s_1(t),\ \phi_2(-i) = s_4(t),$$

premapujeme postupnosť bitov na postupnosť reprezentujúcich signálov, viď obrázok 4.

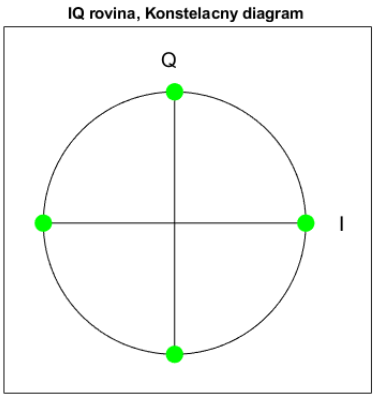


Obr. 4: Príklad vysvetľujúci niektoré z uvedených pojmov, 7-bit-ASCII kódovanie

Poznamenajme, že v praxi sa možno stretnúť aj s inými variantmi mapovania bitového toku pri voľbe 2 bitov na symbol, napríklad aj nami použité mapovanie s dodatočným otočením symbolov na jednotkovej kružnici o $\frac{\pi}{4}$, a ďalšie. Pre nami uvedený príklad uvádzame na obrázku 5 reprezentujúce signály a konštelačný diagram.



(a) Pr.: reprezentujúce signály, $f_c = \frac{1}{2\pi}$, $T = 2\pi$



(b) Pr.: konštelačný diagram

Obr. 5: Príklad - reprezentujúce signály a konštelačný diagram

Definícia 2.3. Charakteristický interval

[15] Nech $\mathbb{S}_{\mathbb{M}} = \{s_1(t), \ldots, s_M(t)\}$ *je množina reprezentujúcich signálov v zmysle definície 2.2. Nech* $s(t)\colon\ < 0, T) \rightarrow \mathbb{C}\ \forall s \in \mathbb{S}_{\mathbb{M}}$*, pre nejaké* $T > 0$*. Potom interval* $< 0, T)$ *nazývame charakteristický interval.*

2.2 Modulácia

Modulácia je časť prenosovej sústavy zodpovedajúca za nelineárnu zmenu (premapovanie) logického signálu na priebeh fyzických signálov, ktoré budú neskôr vyslané cez prenosový kanál do prijímača [1, 15].

Definícia 2.4. Vlnový priebeh postupnosti symbolov

Nech $\mathbb{M} = \{m_1, \ldots, m_M\}$ *je zvolená* M*-znaková abeceda symbolov a nech* $\mathbb{S}_{\mathbb{M}} = \{s_1, \ldots, s_M\}$ *je zodpovedajúca množina reprezentujúcich signálov s charakteristickým intervalom dĺžky* $T > 0$*.*

Nech zobrazenie $\phi\colon \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{M}}$ *priradí každému symbolu abecedy práve jeden reprezentujúci signál. Nech* $\Phi\colon \mathbb{M} \times < 0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ *je zobrazenie dané ako:*

$$\Phi(m_j, t) = s_j(t), \qquad \textit{kde } m_j \textit{ a } s_j \textit{ spĺňajú: } \phi(m_j) = s_j. \tag{60}$$

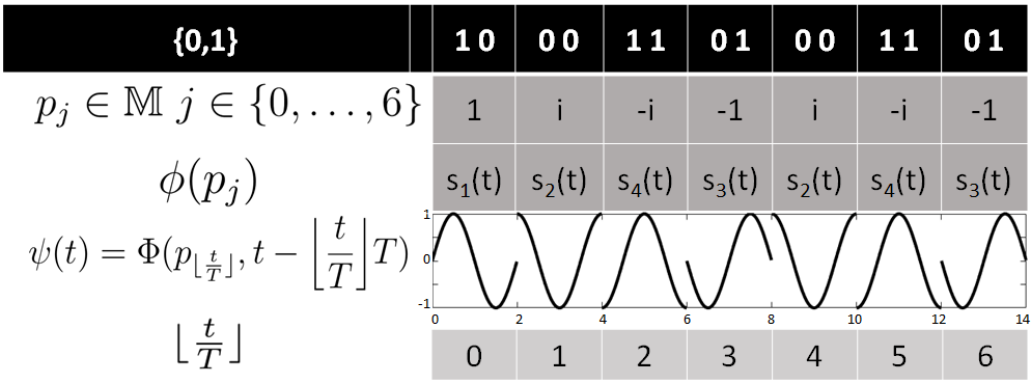
Nech $\{p_j\}_{j=0,\ldots,h-1}$ *je konkrétna postupnosť symbolov* $p_j \in \mathbb{M}\ \forall j \in \{0, \ldots, h-1\}$ *dĺžky* $h \in \mathbb{N}$*. Potom definujeme vlnový priebeh postupnosti symbolov* $\{p_j\}_{j=0,\ldots,h-1}$ *s charakteristickým intervalom dĺžky* T *ako funkciu, resp. signál:* $\psi\colon\ < 0, hT) \rightarrow \mathbb{R}$ *daný ako:*

$$\psi(t) = \Phi\left(p_{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor}, t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right), \tag{61}$$

kde operátor $\lfloor . \rfloor$ predstavuje dolnú celú časť.

Pre objasnenie zápisov použitých v definícii 2.4 uvádzame príklad vlnového priebehu postupnosti symbolov na obrázku 6 nižšie ako pokračovanie príkladov na obrázkoch 4 a 5.

Definícia 2.4 uviedla nový pojem, ktorý síce prax nepoužíva, ale konštruujeme ho



Obr. 6: Vlnový priebeh postupnosti symbolov - písmená FM v 7-bit-ASCII kódovaní, pre $T = 2,\ f_c = \frac{1}{2}$, z (59)

kvôli korektnosti a jednoduchšiemu definovaniu samotného pojmu modulácie v nasledovnej definícii:

Definícia 2.5. ***M*-árna modulácia**

Nech $x[n]\colon \{0,1,2,\ldots,N\} \to \{0,1\}$ *je binárny signál. Nech je zvolená* M*-znaková abeceda symbolov* $\mathbb{M} \subset \mathbb{C}$ *spolu so zodpovedajúcou množinou reprezentujúcich signálov* $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$*, ktorej charakteristický interval je* $< 0, T)$*. Nech je daný počet bitov na symbol* $k \in \mathbb{N}$*, nech* $M = 2^k$*, a zároveň nech* $h = \frac{N+1}{k} \in \mathbb{N}$*.*

Nech $V_k'(\{0,1\})$ *je množina správ a nech je daná bijekcia* $\phi_1\colon V_k'(\{0,1\}) \to \mathbb{M}$*. Nech sa signál* $x[n]$ *fragmentuje na* h *správ:* v_i $i = 0,1,\ldots,h-1$*, ako:*

$$v_i = \{x[n]\}_{n=ik,ik+1,\ldots,(i+1)k-1}.$$

Ak postupnosť h *symbolov* $\phi_1(v_0), \phi_1(v_1), \ldots, \phi_1(v_{h-1})$*, nahradíme vlnovým priebehom postupnosti symbolov s charakteristickým intervalom dĺžky* T *v zmysle definície 2.4, potom hovoríme, že signál* $x[n]$ *bol modulovaný* M*-árnou moduláciou, t.j. moduláciou využívajúcou* M *modulačných signálov, prototypov.*

Poznámka: Modulačné signály (prototypy) v definícii 2.5 zodpovedajú vyššie používanému označeniu reprezentujúce signály. M-árnu moduláciu nazývame aj modulácia M-tého rádu.

Modulácie sa rôznia (a delia) podľa toho, ktorou vlastnosťou sa prototypy - modulačné vlny v prípade vĺn sínusového tvaru líšia. Existujú teda amplitúdové, frekvenčné

a fázové modulácie, prípadne modulácie využívajúce zmeny v kombináciách týchto atribútov [15]. V práci sa ďalej budeme zaoberať fázovými moduláciami.

Definícia 2.6. Fázová modulácia

[15] Nech x je binárny signál a nech je zvolená M-znaková abeceda symbolov. Hovoríme, že signál x je modulovaný M-árnou fázovou moduláciou, ak sú prvky množiny prototypov $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$ dané ako:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + (i-1)\frac{2\pi}{M} + \phi\right), \qquad t \in <0, T), \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{62}$$

kde E_s je energia na symbol, $\phi \in \mathbb{R}$ a $f_c > 0$.

Po zhliadnutí definície 2.6 je zrejmé, že príklad na strane 26 vysvetľujúci pojmy z definície 2.2 je zároveň vďaka definovaniu prototypov v (59) príkladom fázovej modulácie. Ide o moduláciu označovanú skratkou QPSK (ang.: Quaternary Phase-shift keying).

Definícia 2.7. Binárna NRZ modulácia

[6, 15] Nech x je binárny signál a nech je zvolená 2-znaková abeceda symbolov. Nech ďalej $A \in \mathbb{R}$. Hovoríme, že signál x je modulovaný NRZ (Non-return-to-zero) moduláciou, ak sú prvky množiny prototypov $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$ dané ako:

$$s_1(t) = A, \qquad t \in <0, T), \tag{63}$$

$$s_2(t) = -A, \qquad t \in <0, T). \tag{64}$$

Žiada sa uviesť, že ak by sme v definícii 2.6 pripustili $f_c \geq 0$, potom by sa NRZ modulácia dala chápať ako špeciálny prípad binárnej fázovej modulácie pre:

$$f_c = 0, \qquad \phi = 0. \tag{65}$$

Definícia 2.8. Binárna RZ modulácia

[6, 15] Nech x je binárny signál, a nech je zvolená 2-znaková abeceda symbolov. Nech ďalej $A \in \mathbb{R}$ a nech $c \in (0, 1)$. Hovoríme, že signál x je modulovaný RZ (Return-to-zero) moduláciou, ak sú prvky množiny prototypov $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$ dané ako:

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & t \in <0, cT), \\ 0, & t \in <cT, T), \end{cases} \tag{66}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} -A, & t \in < 0, cT), \\ 0, & t \in < cT, T). \end{cases} \tag{67}$$

Definícia 2.9. Modulačná rýchlosť

[15] Nech je signál modulovaný pomocou M-árnej modulácie prototypmi s charakteristickým intervalom dĺžky $T > 0$.

Potom počet prenesených symbolov za jednotku času nazývame modulačná rýchlosť a označujeme R_m, pričom:

$$R_m = \frac{1}{T}. \tag{68}$$

2.2.1 Základné a preložené frekvenčné pásmo

Nižšie uvádzame formálne definície frekvenčných pásiem, vychádzame pritom predovšetkým z [15], kde sa s týmito pojmami pracuje, no bez presnej špecifikácie.

Definícia 2.10. Základné pásmo

[15] Nech $x[n]$ je binárny signál dĺžky $N \in \mathbb{N}$. Nech bol signál $x[n]$ modulovaný $M = 2^k$-árnou moduláciou, kde k je počet bitov na symbol. Nech ďalej charakteristický interval je dĺžky $T > 0$.

Potom dvojstranným základným frekvenčným pásmom nazývame interval $< -f_m, f_m >$, kde $f_m = l\frac{1}{T}$, $l > 0$. Šírkou základného, frekvenčne obmedzeného pásma W nazývame dĺžku tohto intervalu.

Poznámka: V technickej praxi je zvykom pracovať s pásmom, tvaru $< -l\frac{1}{T}, l\frac{1}{T} >$, kde $l \in \mathbb{N}$ a zároveň l je také, pri ktorom sa zachová predom požadovaná časť energie, resp. výkonu signálu. Pre spojitosť výkonu signálu a v signále obsiahnutých frekvencií viď Parsevalove rovnosti vo vete 1.17, prípadne vetu 1.24.

V literatúre možno naraziť aj na základné pásmo tvaru $< 0, f_m >$, kedy hovoríme o jednostrannom spektre. Pri takomto tvare je potom šírka základného pásma $W = f_m$.

Definícia 2.11. Preložené pásmo

[15] Nech $x[n]$ je binárny signál dĺžky $N \in \mathbb{N}$. Nech bol signál $x[n]$ modulovaný $M = 2^k$-árnou moduláciou na signál $y(t)\colon\ < 0, \frac{N}{k}T) \to \mathbb{C}$, kde k je počet bitov na symbol. Nech základné pásmo má šírku W.

Prenosom signálu v preloženom pásme rozumieme prenos signálu $y(t)p(t)$, kde signál $p(t)$ nazývame nosný signál, a volíme ako jednu z troch variánt:

$$p(t) = e^{i(2\pi f_c t + \phi)}, \tag{69}$$

$$p(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi), \tag{70}$$

$$p(t) = \sin(2\pi f_c t + \phi), \tag{71}$$

kde frekvenciu f_c nazývame nosná frekvencia (ang.: carrier).

Preloženým frekvenčným pásmom nazývame zjednotenie tých intervalov vo frekvenčnej doméne, na ktoré sa pri konkrétne zvolenom nosnom signále (69)-(71) *zobrazí základné pásmo podľa vety 1.19.*

Poznámka: Podľa [15] je najčastejšou voľbou v (69), (70), (71) $\phi = 0$.

Posun do preloženého frekvenčného pásma nie je nevyhnutný. Preložené pásmo sa využíva napríklad pri bezdrôtovom prenose signálu, kedy je vhodné dosiahnuť čo najkratšiu dĺžku antény, ktorá je nepriamo úmerná frekvencii vyslaného signálu. Ak bude frekvenčný rozsah rádovo v GHz, potom dĺžka antény môže byť rádovo v centimetroch [15].

Použitie preloženého frekvenčného pásma je teda v niektorých situáciach opodstatnené. Vo všeobecnosti sa ale aj tak môže zdať, že je zbytočné uvažovať frekvenčné pásmo ohraničené. Argumentom pre potrebu ohraničenia frekvenčného pásma je predovšetkým konštantná PSD šumu, viď vetu 1.32. T.j. ak by sme uvažovali celé frekvenčné pásmo, potom by bol výkon prítomného (AWGN) šumu nekonečný.

Aby sme zhrnuli predošlé, nami skonštruované formálne definície, uveďme, že modulácia ako taká, je proces zodpovedný za úpravu pôvodného logického signálu po moment jeho vyslania. Pri predom zvolenej abecede symbolov a pri konkrétnych prototypoch (lí-

šiacich sa v jednej z ich charakteristík, prípadne v kombinácii týchto charakteristík) sa modulácia realizuje v nižšie uvedených krokoch:

- fragmentovanie bitového toku na digitálne správy,
- konverzia digitálnych správ na symboly zvolenej abecedy,
- konverzia postupnosti symbolov na vlnový priebeh (prototyp jedinečný pre každý symbol),
- eventuálny frekvenčný posun (prechod zo základného do preloženého pásma).

Schému popisujúcu proces modulácie pre základné pásmo uvádzame na obrázku 7a a pre preložené pásmo na obrázku 7b, pre vysvetlivky viď prílohu A.32.



(a) Modulácia, základné pásmo **(b)** Modulácia, preložené pásmo

Obr. 7: Schéma vysielača - modulácia v základnom a preloženom pásme

2.2.2 Spektrum NRZ ako pôvodca tvaru základného pásma

Nižšie v stručnosti uvádzame dôvod pre vyššie spomenutú typickú voľbu tvaru šírky základného pásma $< -\frac{l}{T}, \frac{l}{T} >,\ l \in \mathbb{N}$, viď poznámka pod definíciou 2.10. Túto kauzalitu je podľa nás vhodné uviesť, nakoľko vychádza z praktických dôvodov, ktoré v dostupnej literatúre nie sú podrobne uvádzané, i keď výsledok je široko používaný.

Spomínaná voľba tvaru základného pásma súvisí s najintuitívnejším a zároveň najjednoduchším tvarom prototypu - konštantnou funkciou, t.j. NRZ (Non-return-to-zero) prenosom, viď definíciu 2.7. Ten zodpovedá modulačnej schéme, ktorej charakteristiky sú nasledovné:

- $k = 1,\ M = 2,$ abeceda symbolov: $\mathbb{M} = \{-1, 1\}$,
- $\phi_1(0) = -1,\ \phi_1(1) = 1$,

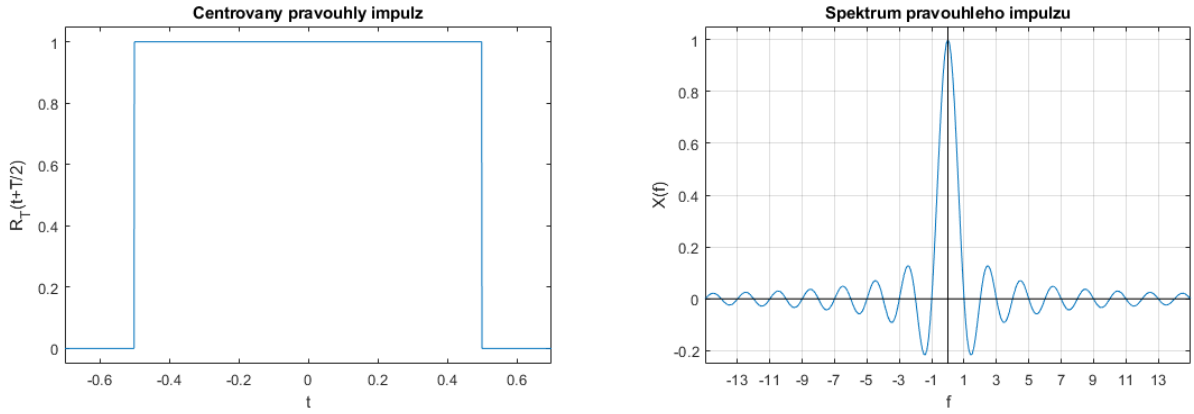
- prototypy: $\mathbb{S}_{\mathbb{M}} = \{s_1(t) = 1, s_2(t) = -1,\ t \in < 0, T)\}$,
- $\phi_2(1) = s_1,\ \phi_2(-1) = s_2$.

Teda prototypy (modulačné signály) možno v tomto prípade chápať ako pravouhlé impulzy, eventuálne ich záporné ekvivalenty, viď definícia 1.9.

Pre pravouhlý impulz na intervale $< -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} >$, t.j. $R_T(t + \frac{T}{2})$ možno ľahko zrátať Fourierovu transformáciu, viď obrázok 8:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(t + \frac{T}{2}) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{-1}{i2\pi f}\left(e^{-i2\pi f\frac{T}{2}} - e^{i2\pi f\frac{T}{2}}\right) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f},$$

kde posledná rovnosť vyplýva z použitia Eulerovej formuly z vety 1.16.



Obr. 8: Pravouhlý centrovaný impulz a jeho spektrum pre $T = 1$

Je zjavné, že namodulovaný signál bude v zmysle vlnového priebehu postupnosti h symbolov $v_0, \ldots, v_{h-1},\ v_i \in \{-1, 1\} = \mathbb{M}\ \forall i$ zodpovedať súčtu h v čase posunutých pravouhlých impulzov alebo ich záporných ekvivalentov. Označme takto namodulovaný signál $S(t)$, potom

$$S(t) = \sum_{k=0}^{h-1} v_k R_T\Big(t + \frac{T}{2} - (kT + \frac{T}{2})\Big). \tag{72}$$

Ďalej podľa tvrdenia vety o posune argumentu 1.20 je Fourierova transformácia pre posunutý pravouhlý impulz $R_T\Big(t + \frac{T}{2} - (kT + \frac{T}{2})\Big)$ nasledovná:

$$\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} e^{-if(kT+\frac{T}{2})}. \tag{73}$$

Pre lineárnu transformáciu posunutých pravouhlých impulzov podľa vety o linearite 1.21 platí, že ich výsledné spektrum je lineárnou transformáciou pôvodných spektier, z čoho spektrum signálu $S(t)$ z (72) je:

$$X_S(f) = \sum_{k=0}^{h-1} v_k \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} e^{-if(kT+\frac{T}{2})} = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \sum_{k=0}^{h-1} v_k e^{-if(kT+\frac{T}{2})}. \tag{74}$$

Nakoľko výraz $\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$ je spoločným činiteľom pre všetky čiastkové spektrá, zabezpečí obdobný tvar spektra, ako na obrázku 8, t.j. nulové hodnoty v bodoch $f = \pm k\frac{1}{T}$ $k \in \mathbb{N}$, medzi ktorými sú netriviálne oblasti frekvenčného spektra, tzv. laloky.

Teda typická voľba šírky základného pásma, viď poznámka pod definíciou 2.10, t.j. pásmo tvaru $< -l\frac{1}{T}, l\frac{1}{T} >$, kde $l \in \mathbb{N}$, zodpovedá $2l$ uvažovaným lalokom pri NRZ. Poznamenajme, že pre takéto dvojstranné spektrum sa v technickej praxi používa aj pojem Null-to-Null pásmo ($l = 1$), práve vďaka nulovým hodnotám spektra v bodoch $\pm\frac{1}{T}$ frekvenčnej oblasti.

Zúženie, resp. aproximácia, teoreticky nekonečného frekvenčného pásma (viď (74) a obrázok 8) na základné pásmo konečnej, praktickej, šírky vychádza z potrieb praxe, detailom sa venujeme nižšie.

Najväčší (plochou i maximálnou amplitúdou) lalok je z pravidla centrovaný nad nosnou frekvenciou signálu. V prípade NRZ je to 0, viď obrázok 8 a vzťah (65). V prípade fázovej modulácie je to frekvencia f_c v zmysle zápisu v (62). To sa zhoduje s našou skoršou poznámkou o vnímaní NRZ ako špeciálneho prípadu binárnej fázovej modulácie pre $f_c = 0$.

2.2.3 BPSK ako príklad relativity preloženého pásma

Prístup č. 1:

BPSK - Binary phase-shift keying je typ binárnej fázovej modulácie, ktorej, prototypy v základnom pásme sú konštanty - NRZ. Ich prenásobením sínusoidou $\sin(2\pi f_c t)$,

viď rovnosť (71) v definícii 2.11, získame signál v preloženom pásme.

V kontexte predošlých definícii (2.2, 2.11) uvádzame charakteristiky tejto modulácie:

- $k = 1,\ M = 2$, abeceda symbolov: $\mathbb{M} = \{-1, 1\}$,
- $\phi_1(0) = -1,\ \phi_1(1) = 1$,
- charakteristický interval dĺžky T (voliteľný parameter),
- prototypy: ${\mathbb{S}_{\mathbb{M}}}^1 = \{s_1(t) = A, s_2(t) = -A,\ \text{pre } A > 0,\ t \in < 0, T)\}$,
- $\phi_2(1) = s_1,\ \phi_2(-1) = s_2$,
- $p(t) = \sin(2\pi \frac{r}{T} t),\ r \in \mathbb{N}$.

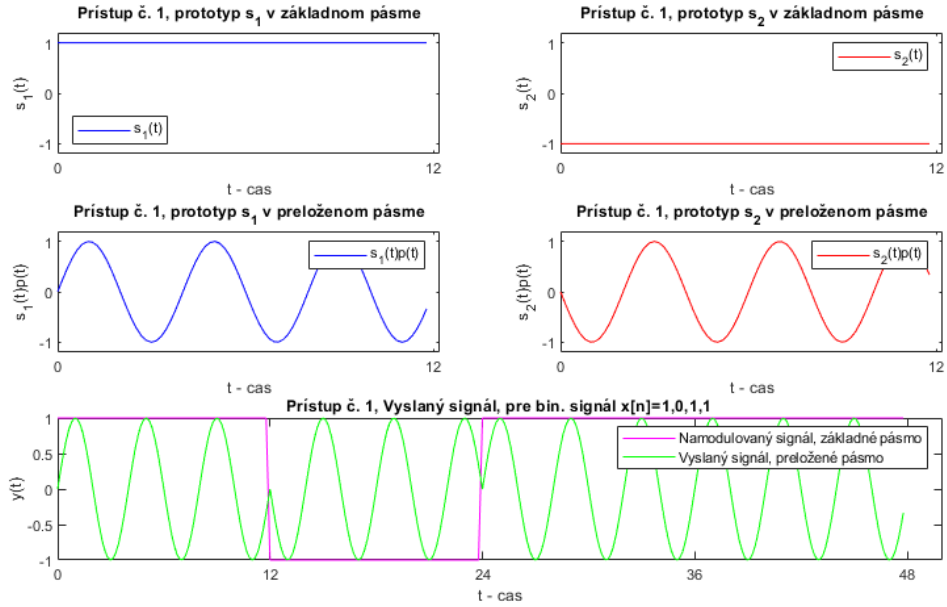
Vo výsledku je teda binárny signál modulovaný NRZ moduláciou v základnom pásme a až následne pomocou prenásobenia harmonickým priebehom signálu $p(t)$ prekladaný do preloženého frekvenčného pásma. Vyslaný signál teda obsahuje postupnosť ± 1-násobkov sínusoidy $p(t)$, čo pri takto definovanej funkcii $p(t)$ zodpovedá sínusoidam bez fázového posunu a s fázovým posunom π, tak ako uvádzame na obrázku 9a nižšie.

Prístup č. 2:

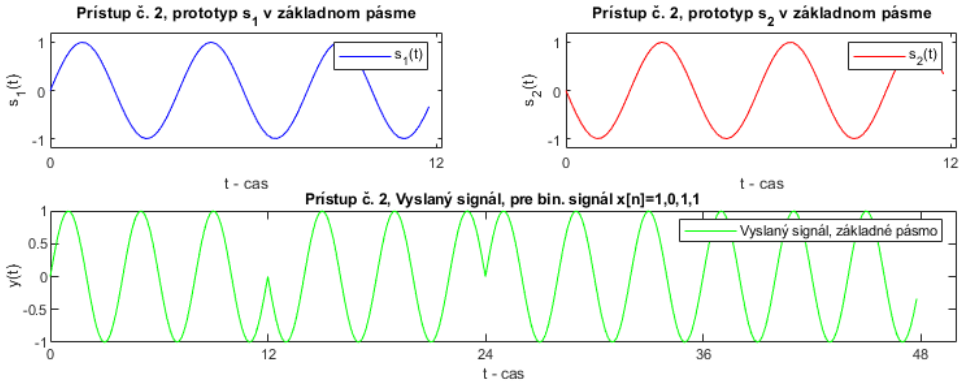
Uvažujme teraz modulačnú schému s nasledujúcimi charakteristikami:

- $k = 1,\ M = 2$, abeceda symbolov: $\mathbb{M} = \{-1, 1\}$,
- $\phi_1(0) = -1,\ \phi_1(1) = 1$,
- charakteristický interval T (voliteľný parameter),
- ${\mathbb{S}_{\mathbb{M}}}^2 = \{s_1(t) = \sin(2\pi \frac{r}{T} t), s_2(t) = \sin(2\pi \frac{r}{T} t + \pi), \text{ pre } r \in \mathbb{N},\ t \in < 0, T)\}$,
- $\phi_2(1) = s_1,\ \phi_2(-1) = s_2$.

Schéma v prístupe č. 2 sa od predošlej líši inou množinou prototypov a neprekladaním do preloženého frekvenčného pásma. Pri pohľade na obrázok 9 nižšie je zjavné, že vyslaný signál namodulovaný pomocou týchto dvoch modulácií je rovnaký. To vyplýva práve z použitia sínusoíd, pre ktoré platí:



(a) BPSK - prístup č. 1 - Prototypy, prototypy v preloženom pásme, vyslaný signál, pre moduláciu bitového toku $\{x\}_n = \{1\ 0\ 1\ 1\}$



(b) BPSK - prístup č. 2 - Prototypy, vyslaný signál, pre moduláciu bitového toku $\{x\}_n = \{1\ 0\ 1\ 1\}$

Obr. 9: BPSK - príklad - prenos v rôznych pásmach, parametre: $A = 1,\ T = 12,\ r = 3$

$$-\sin(\omega) = \sin(\omega + \pi). \tag{75}$$

Toto možno chápať ako istú relativitu pojmu prenos v preloženom pásme. Preložené pásmo je závislé od toho, ako je skonštruovaný konkrétny model modulácie v základnom pásme, čo súvisí aj s implementáciou v hardvéri.

Tento príklad uvádzame aj kvôli objasneniu toho, ako sa s pojmom BPSK bežne pracuje. V technickej literatúre je zvykom pracovať s BPSK tak, ako v prvej časti tohto príkladu, t.j. modulácia v preloženom pásme, kde tvar prenášaných signálov vzniká z NRZ

násobením sínusoidou. To ale nezodpovedá definícii fázovej modulácie 2.6, ktorá pracuje so sínusoidami už v základnom pásme - s touto je v zhode druhý prístup v tomto príklade. Ide o istú nekonzistentnosť pojmov, na ktorú môžeme nanajvýš upozorniť, nakoľko je široko používaná.

2.3 Prenos namodulovaného signálu v AWGN kanáli

2.3.1 Vlastnosti AWGN vo vzťahu k prenosu signálu

V prenosovom médiu, ktoré prenáša signál medzi zdrojom a prijímačom dochádza k zašumeniu prenášaného signálu kvôli vlastnostiam tohto kanálu (napríklad voľné prostredie, koaxiálny kábel, a pod.). Tieto problémy vznikajú napríklad kvôli tepelnému šumu, rušeniu inými používateľmi kanálu, prepínaniu obvodov a pod. [15].

Najväčším praktickým zdrojom šumu je interferencia od iných, nie nutne komunikačných, systémov. Nemožno dopredu určiť, ako presne sa signál znehodnotí. Sú to striktne náhodné zásahy. Ich miera môže mať za následok neschopnosť spracovať prijatý signál v prijímači a vyhodnotiť ho správne [13, 15].

Na modelovanie šumu v prenosovom kanáli sa podľa [15, 17] odporúča AWGN šum, viď definíciu 1.31.

Je nutné zdôrazniť, že AWGN šum je výlučne teoretický koncept. Ak by sme v modeloch predpokladali vplyv AWGN šumu v celej šírke frekvenčného pásma, potom by bol signál ovplyvnený šumom s teoreticky nekonečným výkonom, nakoľko podľa vety 1.32 je PSD AWGN šumu konštantná. Uvažovaním ohraničeného frekvenčného pásma, či už základného alebo preloženého, sa zredukuje výkon šumu negatívne ovplyvnújúceho komunikačný systém na konečnú hodnotu, viď veta 1.24. Toto pásmo je determinované voľbou parametrov signálu [15].

2.3.2 Odstup signálu od šumu

Definícia 2.12. Bitová rýchlosť

[15] Nech $x[n]$ je logický signál. Nech $k \in \mathbb{N}$ je počet bitov na symbol a $M = 2^k$. Nech

je zvolená M-znaková abeceda symbolov $\mathbb{M} \subset \mathbb{C}$ spolu so zodpovedajúcou množinou reprezentujúcich signálov $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$, s dĺžkou charakteristického intervalu $T > 0$, resp. s modulačnou rýchlosťou $R_m = \frac{1}{T}$.

Potom počet bitov signálu $x[n]$, ktoré prenosová sústava spracuje za jednotku času nazývame bitová rýchlosť (ang.: bitrate) a označujeme R_b. Pričom:

$$R_b = kR_m = \frac{k}{T}. \tag{76}$$

Ako sme uviedli, šum je v prenosovej sústave prítomný, ale jeho vplyv je redukovaný v závislosti od šírky pásma. Kvantitatívne jeho vplyv možno vyjadriť pomocou Odstupu signálu od šumu - SNR, resp. pomocou jeho normalizovanej varianty reflektujúcej prenosové charakteristiky sústavy:

Definícia 2.13. SNR

[15] Nech $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je signál a nech P_s je jeho výkon. Nech $k \in \mathbb{N}$ je počet bitov na symbol a $M = 2^k$. Nech je zvolená M-znaková abeceda symbolov $\mathbb{M}$ spolu s množinou reprezentujúcich signálov $\mathbb{S}_{\mathbb{M}}$, s dĺžkou charakteristického intervalu $T > 0$.

Ďalej nech $R_b = \frac{k}{T}$ je bitová rýchlosť sústavy. Nech $2W$ je šírka dvojstranného pásma systému, ktorú možno vyjadriť ako $2l$ násobok fundamentálnej frekvencie $f_0 = \frac{1}{T}$: $2W = 2l\frac{1}{T}$. Nech P_η je výkon šumu prítomného v predmetnej sústave a nech $\frac{N_0}{2}$ je normovaný výkon šumu pre dvojstranné frekvenčné pásmo, spĺňajúci: $\frac{N_0}{2}2W = P_\eta$.

Potom pomer $\frac{P_s}{P_\eta}$ nazývame odstup signálu od šumu (ang. Signal-to-Noise ratio) a označujeme SNR. Pričom platí:

$$SNR = \frac{P_s}{P_\eta} = \frac{\frac{E_s}{T}}{N_0 W} = \frac{\frac{E_s}{T}}{N_0 l\frac{1}{T}} = \frac{E_s}{N_0 l} = \frac{E_b}{N_0}\frac{k}{l}, \tag{77}$$

kde E_s je energia prislúchajúca 1 symbolu a E_b je energia na 1 bit.

Zároveň pomer

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{l}{k}\frac{P_s}{P_\eta} \tag{78}$$

sa nazýva normalizované (alebo normované) SNR [15].

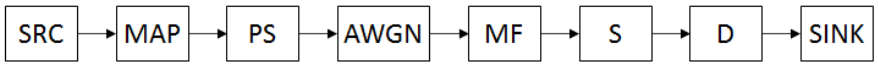
Poznámka: V literatúre sa často používa SNR s predpokladom $l = 1$, čo zodpovedá tzv. null-to-null pásmu. Nami uvedená definícia, je z tohto pohľadu všeobecnejší variant.

Poznámka: V prípade, že by bol v definícii 2.13 ako šum uvažovaný AWGN šum η, potom by normovaný výkon $\frac{N_0}{2}$ predstavoval PSD AWGN šumu: $G_\eta = \frac{N_0}{2}$.

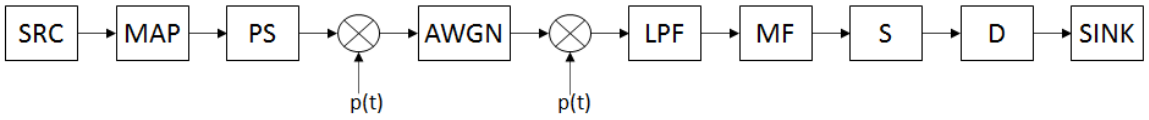
2.4 Demodulácia a detekcia

Po prenose namodulovaného signálu cez prenosové médium do prijímača je potrebné signál opäť transformovať do formy vhodnej pre príjemcu signálu, t.j. demodulovať. Zároveň sa vyslaný signál pri prenose v komunikačnom kanáli znehodnotil, zašumil. Teda je potrebné taktiež správne detekovať prijatý signál, a na základe prijatej chybovej vzorky vyhodnotiť, aký bol pred poškodením.

V našej ďalšej práci budeme uvažovať jednak prenos v základnom pásme, ale i v preloženom. Pre schématický náhľad na demoduláciu v závislosti od voľby pásma viď jeden z možných modelov systému na obrázku 10a, a obrázku 10b, pre vysvetlivky viď prílohu A.32. Dôležité súčasti týchto systémov popisujeme nižšie.



(a) Prenosová sústava, základné pásmo



(b) Prenosová sústava, preložené pásmo

Obr. 10: Schéma prenosovej sústavy v základnom a preloženom pásme

Je vhodné uviesť, že low-pass filter je aj súčasťou spriahnutého filtra. Ich oddelenie na obrázku 10b je jednak kvôli zaisteniu prehľadnosti systému, ale aj kvôli priblíženiu k technickej praxi, kde sa niekedy osamostatňuje tiež. Tieto i ďalšie súčasti popisujeme nižšie.

Uvažujme ďalej prenos iba jedného symbolu - $m_i \in \mathbb{M}$ - pre nejaké pevne zvolené $i \in \{1, \ldots, M\}$, ktorý je reprezentovaný spojitým prototypom s_i. Po modulácii s eventuálnym preložením frekvenčného pásma bol odoslaný signál S_i. Prijatý je následne náhodný signál:

$$r(t) = S_i(t) * h_c(t) + \eta(t), \qquad t \in <0, T), \tag{79}$$

kde $h_c(t)$ je impulzná odozva kanála, $\eta(t)$ je šum a

$$S_i(t) = \begin{cases} s_i(t), & \text{pri prenose v základnom pásme,} \\ s_i(t)p(t), & \text{pri prenose v preloženom pásme (viď def. 2.11).} \end{cases} \tag{80}$$

Toto podľa B. Sklara v [15] ale možno zjednodušiť predpokladom o kanáli bez skreslenia - t.j. konvolúcia s pôvodným signálom signál nezmení. Podľa [15, 17] je zároveň vhodné predpokladať, že pridaný šum $\eta(t)$ je vhodné modelovať AWGN šumom podľa definície 1.31. Teda následne je prijatý znova náhodný signál, ale tvaru:

$$r(t) = S_i(t) + \eta(t), \qquad t \in <0, T). \tag{81}$$

2.4.1 Návrat do základného pásma po prenose v preloženom pásme

V preloženom pásme je prenášaný signál tvaru: $S_i(t) = s_i(t)p(t)$, kde $s_i(t)$ je prototyp a $p(t)$ je jeden zo signálov uvedených v definícii 2.11, ktorý má za následok posun frekvencie do preloženého frekvenčného pásma. Pri demodulovaní sa návrat do základného pásma vykonáva v dvoch krokoch:

- čiastočný návrat do základného pásma opätovným prenásobením signálom $p(t)$,
- odfiltrovanie častí signálu, ktoré nie sú v základnom pásme - lowpass filter.

Tento postup s analytickými úpravami uvádzame detailne, čím dopĺňame stručnejšie informácie predovšetkým z [1, 6, 15], a to vo všetkých troch možnostiach v závislosti od voľby prechodu do preloženého pásma, viď definícia 2.11:

$$s_i(t) \to \otimes \to S_i(t) = s_i(t)p(t) = \left\{ \begin{array}{lll} s_i(t)e^{i2\pi f_c t} & \to \oplus \to s_i(t)e^{i2\pi f_c t} & +\tilde{\eta}(t), \\ s_i(t)\cos(2\pi f_c t) & \to \oplus \to s_i(t)\cos(2\pi f_c t) & +\tilde{\eta}(t), \\ s_i(t)\sin(2\pi f_c t) & \to \oplus \to s_i(t)\sin(2\pi f_c t) & +\tilde{\eta}(t), \end{array} \right\} = r(t), \tag{82}$$

kde 1. vetva v (82) zodpovedá použitiu vzťahu (69), druhá vzťahu (70) a tretia (71) pre voľbu $\phi = 0$. Realizácia šumu $\tilde{\eta}(t)$ je šum v preloženom pásme. Tvar prijatého signálu možno prepísať pomocou šumu v základnom pásme zodpovedajúco vetvám v (82) nasledovne:

$$r(t) = \begin{cases} s_i(t)e^{i2\pi f_c t} & + \eta(t)e^{i2\pi f_c t}, \\ s_i(t)\cos(2\pi f_c t) & + \eta(t)\cos(2\pi f_c t), \\ s_i(t)\sin(2\pi f_c t) & + \eta(t)\sin(2\pi f_c t), \end{cases} \tag{83}$$

kde $\eta(t)$ je realizácia šumu v základnom pásme.

Vzhľadom na vetu 1.19 sa návrat signálu do základného pásma realizuje buď násobením funkciou $e^{-i2\pi f_c t}$ pre 1. prípad v (82), resp. v (83). V 2. a 3. prípade v (82) sa využíva násobenie signálu $r(t)$ rovnakým signálom aký bol použitý pre prechod do preloženého pásma. Zároveň použitím goniometrických identít:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}, \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \tag{84}$$

možno písať:

$$r(t) = \begin{cases} s_i(t)e^{i2\pi f_c t} + \tilde{\eta}(t) & \to \otimes \to s_i(t)e^{i2\pi f_c t}e^{-i2\pi f_c t} + \tilde{\eta}(t)e^{-i2\pi f_p t} & = \\ s_i(t)\cos(2\pi f_c t) + \tilde{\eta}(t) & \to \otimes \to s_i(t)\cos^2(2\pi f_c t) + \tilde{\eta}(t)\cos(2\pi f_p t) & = \\ s_i(t)\sin(2\pi f_c t) + \tilde{\eta}(t) & \to \otimes \to s_i(t)\sin^2(2\pi f_c t) + \tilde{\eta}(t)\sin(2\pi f_p t) & = \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} = s_i(t) + \tilde{\eta}(t)e^{-i2\pi f_c t} & = s_i(t) + \eta(t), \\ = \frac{1}{2}s_i(t) + \frac{\cos(4\pi f_c t)}{2}s_i(t) + \tilde{\eta}(t)\cos(2\pi f_c t) & = \frac{1}{2}\Big(s_i(t)+\eta(t)\Big) + \frac{\cos(4\pi f_c t)}{2}\Big(s_i(t)+\eta(t)\Big), \\ = \frac{1}{2}s_i(t) - \frac{\cos(4\pi f_c t)}{2}s_i(t) + \tilde{\eta}(t)\sin(2\pi f_c t) & = \frac{1}{2}\Big(s_i(t)+\eta(t)\Big) - \frac{\cos(4\pi f_c t)}{2}\Big(s_i(t)+\eta(t)\Big). \end{array} \tag{85}$$

Po tejto transformácii vidieť, že ak sa na prechod do preloženého pásma použije (co)sínusoida, potom po spätnej transformácii získame v základnom pásme $\frac{1}{2}s_i(t)$, ale v súčte s $\frac{\cos(4\pi f_c t)}{2}s_i(t)$ v dvakrát preloženom. Časť signálu teda ostane v základnom pásme, ale zároveň so stratou polovice pôvodnej energie. Rovnakú stratu energie utrpí aj šum v základnom pásme, čím sa zachová odstup signálu od šumu (SNR).

Vzhľadom na zachovanie všetkej prítomnej energie v základnom pásme za použitia komplexnej exponenciály ako nosného signálu, sa naskytá otázka, prečo sa ako nosné signály používajú aj (co)sínusoidy, keďže ich použitie vyústi v stratu energie. Dôvod je praktický - použitie (co)sínusoíd je ľahšie implementovateľné, ako je tomu pri komplexnej exponenciále [15].

Tá časť signálu, ktorá je po takejto transformácii v dvakrát preloženom pásme, respektíve za hranicou základného pásma, sa odfiltruje použitím Low-pass filtra, čím sa získa signál iba v základnom pásme, viď obr. 10.

2.4.2 Spriahnutý filter a korelátor

V tejto časti popisujeme spriahnutý filter (matched filter - MF). Tu, ale i v ďalších častiach práce sa zameriavame na fázovú moduláciu s koherentnou detekciou, t.j. na detekciu, pri ktorej má prijímač k dispozícii informáciu o fázach ϕ prototypov s_i z (62) z definície 2.6.

V podkapitole, pokiaľ nie je uvedené inak, vychádzame predovšetkým z [6, 15].

Pri ďalšej práci, bez ujmy na všeobecnosti, predpokladáme, že vstupom do tejto časti prenosovej sústavy je pri prenose symbolu $m_i \in \mathbb{M}$ reprezentovaného prototypom s_i zašumený signál v základnom pásme, tvaru:

$$r(t) = s_i(t) + \eta(t), \qquad t \in < 0, T). \tag{86}$$

Tento tvar je prirodzený pre prenos v základnom pásme, a v prípade prenosu v preloženom pásme je ho možné dosiahnuť aplikovaním Low-Pass filtra na výsledok transformácie (85), popísanej v kapitole 2.4.1.

Podľa [6, 15] je nutné zostrojiť demodulačnú sústavu tak, aby pri práci so zašumeným signálom bolo výsledkom maximalizovanie SNR. Zároveň je žiadúce, aby sa prijatý signál redukoval z dĺžky T na konečný počet vzoriek, najlepšie na jedinú vzorku, resp. v prípade prenosu h symbolov prostredníctvom signálu tvaru vlnového priebehu postupnosti symbolov dĺžky hT na h vzoriek. Redukcia na vzorky sa prevádza v dvoch krokoch - filtrovaním v spriahnutom filtri a vzorkovaním.

B. Sklar v [15] konštatuje, že je vhodné aby bol predmetný filter lineárny. To predovšetkým kvôli zachovaniu vlastnosti normality predpokladaného šumu $\eta(t)$ v (86). Potom podľa B. Sklara zároveň možno žiadať, aby výsledkom tejto operácie bola pre signál $r(t)$ vzorka z tvaru:

$$z = a_i + n_0, \tag{87}$$

kde a_i je transformácia deterministickej zložky z (86), t.j. transformácia prototypu a n_0 je transformácia náhodnej zložky. Autor následne uvažovaním výkonu signálu a šumu iba v časovom momente, ktorého vzorku chce uchovať a použitím Schwarzovej nerovnosti prichádza k záveru, že optimálnym filtrom, teda filtrom maximalizujúcim SNR pre hodnoty signálov v časovom okamihu vzorky, je filter daný impulznou odozvou tak, ako je uvedená v (88). Pre detaily odvodenia viď [15].

$$h(t) = \begin{cases} qs_i(T-t), & \text{pre } q = const. \text{ a } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{88}$$

Spriahnutý filter sa následne realizuje prostredníctvom operácie konvolúcie, viď (90) pre voľbu

$$q = \frac{1}{\sqrt{E_s}}, \tag{89}$$

kde E_s je energia na symbol, pričom v bode $t = T$ je táto zhodná so škálovanou koreláciou prijatého a nezašumeného signálu koeficientom q, viď (91). Zároveň v tomto čase nevedno, ktorý konkrétny prototyp bol vyslaný a preto je nutné získať vzorky korelátora prijatého signálu so všetkými škálovanými prototypmi $qs_j \ \forall j \in \{1, \ldots, M\}$. Teda signál dĺžky hT sa redukuje na hM vzoriek, kde M je rád modulácie. Na základe ich hodnôt sa vyhodnotí rozhodovací proces, ktorý popisujeme nižšie.

Hodnota energie na symbol E_s je známa, nakoľko je predom definovaná pri voľbe tvaru prototypov sústavy. Škálovanie prototypov súvisí so zobrazením prototypov v priestore signálov, pre detaily viď [15].

$$z_j(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t r(\tau)qs_j(T-t+\tau)d\tau \tag{90}$$

$$z_j(T) = q\left(\int_0^T r(\tau)s_j(\tau)d\tau\right) \tag{91}$$

T.j. vzorka reprezentujúca prijatý signál r po výstupe z korelatóra (pre 1 vyslaný symbol dĺžky T) so škálovaným prototypom qs_j je z_j.

Veta 2.14. Variancia a výkon bieleho šumu
[6, 15] Nech $\{u(t)\}_{t\in T} \equiv u_t$ je biely šum. Nech ďalej pre PSD bieleho šumu pri dvojstrannom frekvenčnom pásme platí $G_{u_t}(f) = \frac{N_0}{2}$.

Potom pre varianciu $\sigma^2_{\int}$ bieleho šumu na výstupe korelátora platí:

$$\sigma^2_{\int} = \frac{N_0}{2} < \infty. \tag{92}$$

2.4.3 Detekcia v prípade binárnej modulácie

Použitie korelátora tak, ako je uvedený v (91), pri binárnej modulácii opisujeme v nasledovnej časti. Vychádzame pritom predovšetkým z [9, 15].

Predpokladáme, že prototypy sú signály $s_1,\ s_2$ buď zodpovedajúco definícii fázovej modulácie tak ako je uvedená v (62), prípadne Non-Return-To-Zero, Return-To-Zero a pod.. V prípade binárnej modulácie NRZ, RZ a BPSK zároveň zjavne platí:

$$s_2(t) = -s_1(t), \qquad \forall t \in <0, T). \tag{93}$$

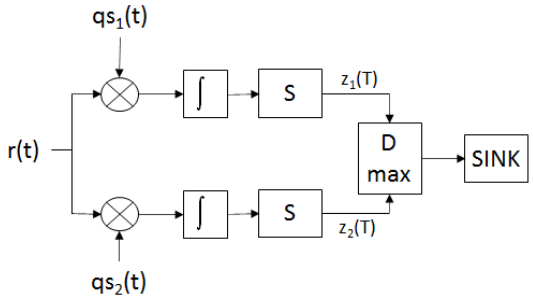
Rovnako ako v (86) aj tu podľa vzoru v [15] predpokladáme prijatý signál tvaru:

$$r(t) = s_i(t) + \eta(t), \qquad t \in <0, T), \tag{94}$$

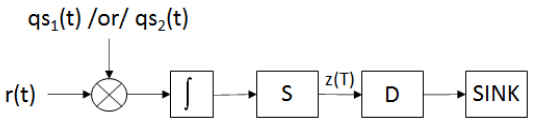
pre nejaké konkrétne pevné $i \in \{1, 2\}$.

Pre rozhodovací proces pri 1 vyslanom symbole sa signál $r(t)$ dĺžky T zredukuje na 2 vzorky pomocou korelátora podľa schémy uvedenej na obrázku 11a nižšie. Táto schéma zodpovedá všeobecnému prístupu M-árnej detekcie pre $M = 2$, viď kapitola 2.4.6.

Zároveň ale pri binárnej modulácii s vlastnosťou prototypov (93) možno podľa [6, 15] tento výber vzorky zjednodušiť na tvar schémy na obrázku 11b nižšie, kde stačí korelovať prijatý signál iba s jedným z prototypov.



(a) Všeobecný prístup



(b) Zjednodušený prístup

Obr. 11: Schéma - korelátor, binárna modulácia, škálované prototypy, prevzaté z [15]

Nižšie zostrojujeme tento rozhodovací proces, pričom, bez ujmy na všeobecnosti, korelujeme prijatý signál s prototypom $s_1(t)$, resp. $qs_1(t)$.

Spomínaná vzorka, ozn. z, môže nadobudnúť dva tvary v závislosti od vyslaného prototypu:

$$z = \int_0^T r(\tau) q s_1(\tau) d\tau = \begin{cases} q\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau & + & q\int_0^T \eta(\tau)s_1(\tau)d\tau, & \text{ak } i=1, \\ -\ q\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau & + & q\int_0^T \eta(\tau)s_1(\tau)d\tau, & \text{ak } i=2. \end{cases} \tag{95}$$

Vzorka z je teda náhodná premenná. Ako vidieť z (95) získaná vzorka má explicitnú nenáhodnú časť a obe potenciálne vzorky majú rovnakú náhodnú časť [15]. Budeme preto, rovnako ako B. Sklar v [15] používať skrátený zápis:

$$z = a_i + n_0, \qquad i \in \{1, 2\}, \tag{96}$$

kde

$$a_i = \begin{cases} q\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau & > 0, & \text{ak } i=1, \\ -q\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau & < 0, & \text{ak } i=2, \end{cases} \tag{97}$$

a zároveň:

$$n_0 = q\int_0^T \eta(\tau)s_1(\tau)d\tau. \tag{98}$$

Nakoľko pôvodná realizácia AWGN šumu $\eta(t)$ je spracovávaná iba korelátorom, je podľa [6, 15] jednak zachovaná normalita šumu vďaka linearite spriahnutého filtra, a tiež

stredná hodnota v (98) je: $\mathbb{E}\Big[n_0\Big] = 0$. Zároveň je nutné zdôrazniť, že variancia vzorky z nie je podmienená tým, ktorý prototyp je vyslaný.

Rátajme ďalej podmienené stredné hodnoty náhodnej vzorky z za predpokladu vyslania konkrétneho prototypu. Pripomeňme, že podľa def. 1.3 platí: $\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau = E_s$. Pri prenose 1 symbolu je E_s energia na symbol. Zároveň uvážením (89): $q = \frac{1}{\sqrt{E_s}}$ možno písať:

$$\mathbb{E}[z|s_1] = \mathbb{E}\left[\int_0^T qs_1^2(\tau)d\tau\right] + \mathbb{E}\left[q\int_0^T \eta(\tau)s_1(\tau)d\tau\right] = q\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau = \sqrt{E_s} = a_1 > 0, \tag{99}$$

$$\mathbb{E}[z|s_2] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T qs_1^2(\tau)d\tau\right] + \mathbb{E}\left[q\int_0^T \eta(\tau)s_1(\tau)d\tau\right] = -q\int_0^T s_1^2(\tau)d\tau = -\sqrt{E_s} = -a_1 < 0, \tag{100}$$

kde E_s je energia na symbol.

T.j. podmienené rozdelenia náhodnej premennej z sa líšia iba v strednej hodnote. Pre názornosť zobrazujeme náčrt týchto podmienených hustôt náhodnej premennej z za podmienky vyslania konkrétneho prototypu na obrázku 12.

Poznamenajme, že výsledok $\mathbb{E}[z|s_1] = -\mathbb{E}[z|s_2]$, resp. $a_2 = -a_1$ vznikol vďaka (93). Pri voľbe iných signálov by vo výsledku nefigurovalo $\pm a_1$, ale všeobecné $a_{1,2}$.

Vďaka doposiaľ uvedeným výpočtom možno zostrojiť samotný rozhodovací proces s (implicitným) využitím Likelihood-ratio-testu [6, 15]. Ak označíme odhad v skutočnosti vyslaného signálu ako $\hat{s}(t)$, potom výsledkom spomínaného rozhodovacieho procesu je prijatie jednej z hypotéz:

$$H_0\text{: } \hat{s}(t) = s_2(t) \qquad \text{vs} \qquad H_1\text{: } \hat{s}(t) = s_1(t). \tag{101}$$

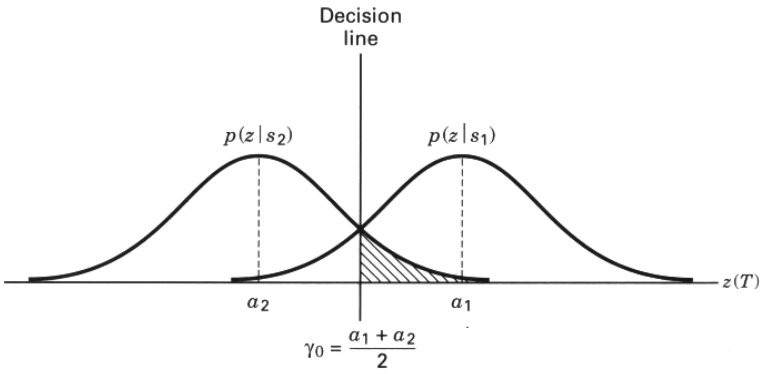
$$\text{Hypotézu } H_0 \text{ podľa [15] zamietame, ak} \qquad P(s_1|z) > P(s_2|z), \tag{102}$$

kde $P(s_1|z)$ je pravdepodobnosť, že bol vyslaný signál s_1 pri podmienke, že získaná vzorka nadobudla hodnotu z a obdobne. Predošlé možno zapísať ekvivalentne pomocou hypotézy o parametri:

$$H_0\text{: } z \text{ je z rozdelenia s hustotou } p(z|s_2) \quad \text{vs} \quad H_1\text{: } z \text{ je z rozdelenia s hustotou } p(z|s_1), \tag{103}$$

kde $p(z|s_1)$ je podmienená hustota náhodnej premennej generujúcej vzorku z za podmienky vyslania prototypu s_1 a obdobne.

Vďaka vlastnostiam vyplývajúcim z obrázku 12 a vzhľadom na fakt, že v našom prípade platí $a_2 = -a_1$ možno ďalej písať:



Obr. 12: Podmienené hustoty n.p. pre získanú vzorku z v závislosti na vyslaných signáloch, BPSK, prevzaté z [15]

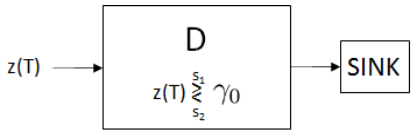
$$\text{Hypotézu } H_0 \text{ zamietame ak} \qquad p(z|s_1) > p(z|s_2) \iff z > \frac{a_1 + a_2}{2} \iff z > 0. \tag{104}$$

Ekvivalentnými úpravami možno získať:

$$\text{Hypotézu } H_1 \text{ zamietame ak} \qquad z < \frac{a_1 + a_2}{2} \iff z < 0, \tag{105}$$

Pokračujeme použijúc rovnaké označenie ako B. Sklar v [15]: $\gamma_0 = \frac{a_1+a_2}{2}$. Predošlé zodpovedá rozhodovacej metodike v [15] uvedenej na obrázku 13, danej ako:

$$\begin{aligned} &\text{Ak } z > \gamma_0 \implies \text{ prijímame hypotézu } H_1, \\ &\text{Ak } z < \gamma_0 \implies \text{ prijímame hypotézu } H_0. \end{aligned} \tag{106}$$



Obr. 13: Schéma - detekčný blok v binárnej modulácii, prevzaté z [15]

Ako sme uviedli vyššie, pravdepodobnostné rozdelenie stochastickej zložky n_0 je známe, normálne a to pri všetkých vyslaných prototypoch s_i $\forall i \in \{1, 2\}$. Rovnako sme uviedli, že sú známe aj podmienené hustoty náhodnej premennej z za podmienky vyslania konkrétneho prototypu:

$$p(z|s_i) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_i}{\sigma_0}\right)^2}, \tag{107}$$

kde σ_0^2 je variancia šumu na výstupe spriahnutého filtra, resp. korelátora [15].

2.4.4 Odvodenie chybovosti systému s binárnou moduláciou

Dôležitou charakteristikou každej prenosovej sústavy je pravdepodobnosť chyby - t.j. pravdepodobnosť chybnej detekcie symbolu P_E a bitu P_b. V prípade BPSK, kde jeden symbol je nositeľom jedného bitu sú tieto pravdepodobnosti rovnaké. Možno teda rátať pravdepodobnosť chyby - označme $P(u|v)$ ako pravdepodobnosť, že bol detekovaný signál u keď bol vyslaný signál v. Stručné odvodenie spomínaných pravdepodobností uvádzame podľa [9, 15]:

$$P_b = P(s_1|s_2)P(s_2) + P(s_2|s_1)P(s_1). \tag{108}$$

Zároveň je podľa [15] vhodné predpokladať rovnakú pravdepodobnosť vyslania bitov 0 a 1, z čoho:

$$P(s_2) = P(s_1). \tag{109}$$

Využitím predpokladu (109) možno písať:

$$P_b = \frac{1}{2}P(s_1|s_2) + \frac{1}{2}P(s_2|s_1). \tag{110}$$

Po náhľade na obrázok 12 a vďaka tomu, že tieto hustoty sú iba rôzne posunuté, ale inak

zhodné, možno ďalej s použitím podmienených hustôt rátať:

$$P_b = \frac{1}{2}\int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} p(z|s_2)dz + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\frac{a_1+a_2}{2}} p(z|s_1)dz = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} p(z|s_2)dz. \tag{111}$$

Využitím hustoty normálneho rozdelenia a následnej substitúcie pokračujeme:

$$P_b = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} p(z|s_2)dz = \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_2)^2}{\sigma_0^2}} dz = \left| u = \frac{z-a_2}{\sigma_0} \right| = \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \tag{112}$$

kde integrand zodpovedá hustote štandardizovaného normálneho rozdelenia. Ak označíme jeho distribučnú funkciu $\Phi(x)$ a zároveň ak definujeme funkciu

$$Q(x) = 1 - \Phi(x), \tag{113}$$

kde konkrétne:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u)^2} du, \qquad Q(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u)^2} du.$$

Potom možno písať:

$$P_b = \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} dz = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right). \tag{114}$$

Pripomeňme, že vďaka (93) podľa (99), (100) platí:

$$a_1 = \sqrt{E_b}, \qquad a_2 = -\sqrt{E_b}. \tag{115}$$

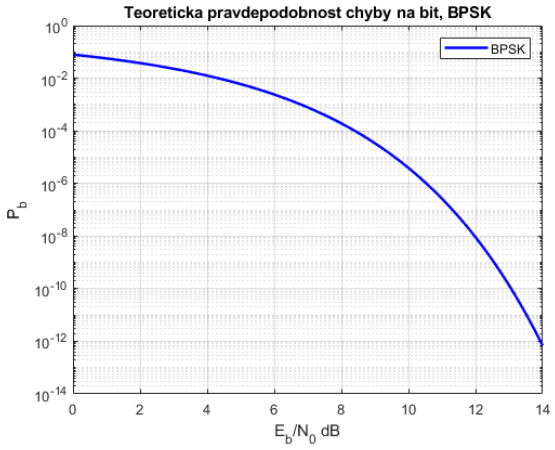
Podľa [6, 15] vo vete 2.14 zároveň pre varianciu výstupu korelátora platí:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}, \tag{116}$$

kde $\frac{N_0}{2}$ je PSD AWGN šumu. Z čoho:

$$P_b = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \tag{117}$$

Krivka reprezentujúca závislosť pravdepodobnosti chyby na bit od normalizovaného odstupu signálu od šumu je znázornená na obrázku 14 a označuje sa ako vodopádová krivka.



Obr. 14: Pravdepodobnosť chybného detekovania bitu, BPSK, vodopádová krivka

2.4.5 Binárny symetrický kanál

Zjednodušením modelu binárnej modulácie s AWGN kanálom je takzvaný binárny symetrický kanál - BSC (ang.: Binary symmetric channel) [11]. Jeho princíp spočíva v definovaní chyby prenosu ako pravdepodobnosti p.

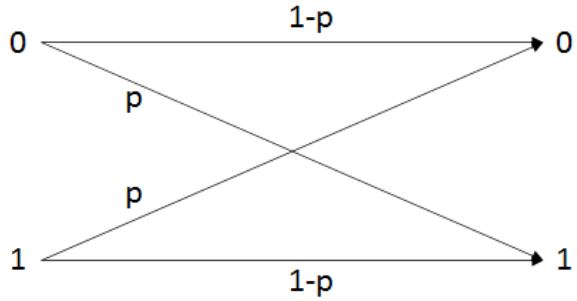
Konkrétne, táto pravdepodobnosť je kvôli jeho jednoduchosti definovaná nasledovne:

- pravdepodobnosť, že ľubovoľný vyslaný bit bude detekovaný nesprávne je p,
- pravdepodobnosť, že vyslaný bit bude detekovaný správne je $1 - p$.

Pre predošlé možno uviesť typickú schému tohto prenosu na obrázku 15.

Takto definovaný, zjednodušený model s binárnym symetrickým kanálom možno pri konkrétnom zvolenom (normovanom) odstupe signálu od šumu použiť na priblíženie zložitejšieho, vyššie popísaného modelu binárnej modulácie s AWGN kanálom, ak bude voľba parametra p nasledovná:

$$p = P_b, \tag{118}$$

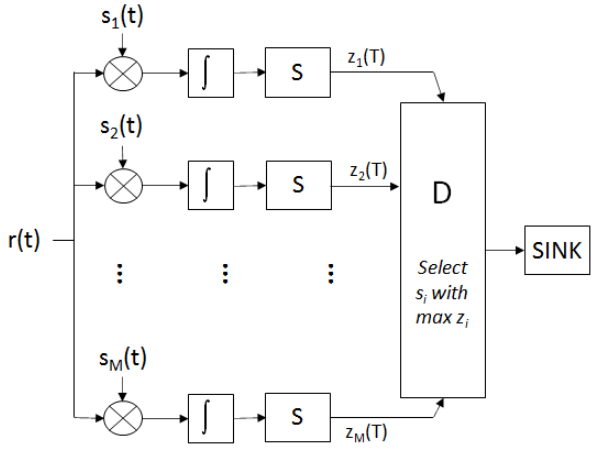


Obr. 15: BSC kanál, prevzaté z [11], Vyslaný bit vľavo, prijatý bit vpravo

kde P_b zodpovedá pravdepodobnosti chyby na bit binárnej modulácie s AWGN kanálom zo (117).

2.4.6 Detekcia v prípade M-árnej modulácie

Pre úplnosť uvádzame na obrázku 16 rozhodovaciu schému pre prípad M-árnej modulácie. Pre detaily viď [15].



Obr. 16: Schéma - rozhodovací proces v M-árnej modulácii, prevzaté z [15]

Poznamenajme, že podľa schémy na obrázku 16 sa prijatý signál koreluje priamo s prototypom, nie s jeho škálovanou verziou ako tomu bolo v schéme na obrázku 11. Vzhľadom na detekčný blok riadiaci sa pravidlom výberu vzorky s najväčšou hodnotou, sú tieto dva prístupy ekvivalentné vďaka vlastnosti: $q = \frac{1}{\sqrt{E_s}} > 0$, resp. $E_s > 0$.

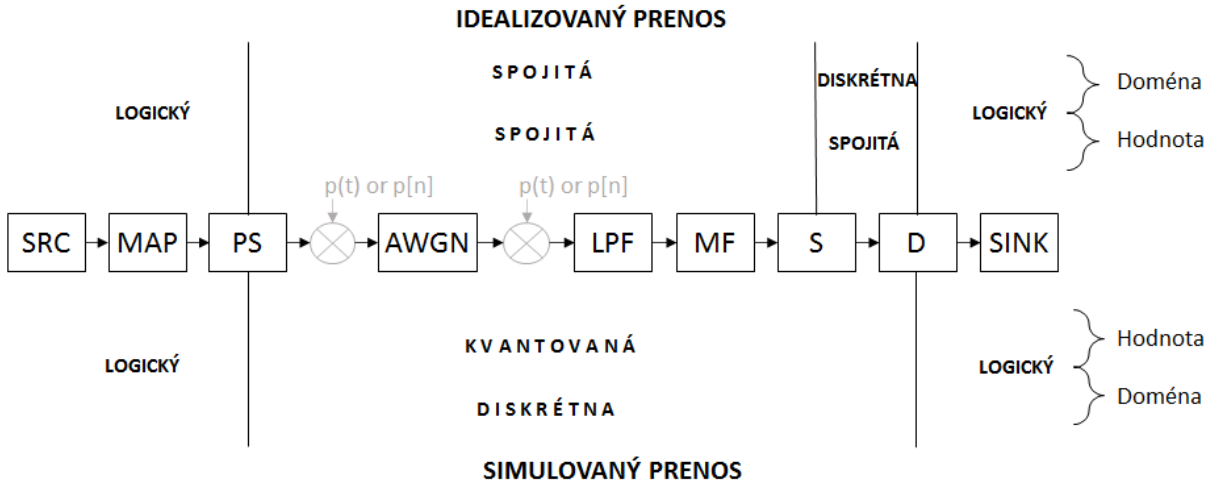
3 Aspekty simulovaných prenosov

V tejto kapitole sa sústredíme na, podľa nás, dôležité aspekty prechodu medzi idealizovanou situáciou popísanou vyššie v kapitole 2 a medzi simulovanou aproximáciou idealizovaného procesu.

V kapitole 2 sme uvažovali, že vyslaný signál tvaru vlnového priebehu postupnosti symbolov je spojitý signál (v zmysle spojitej domény). Toto nemožno predpokladať pri simulácii prenosu na počítači. Nižšie sa venujeme, okrem iného, práve dopadom zmeny domény po prechode z idealizovanej situácie do praktickej simulácie na výsledky simulácií.

3.1 Domény v jednotlivých častiach prenosovej sústavy

Považujeme za nutné zdôrazniť a vyjasniť tento aspekt signálu pri jednotlivých procesoch, nakoľko je to, z nášho pohľadu, kľúčové pri práci s teoretickým i simulovaným prenosom. Kvôli stručnosti zápisu tieto informácie uvádzame v schéme na obrázku 17.



Obr. 17: Schéma - Doména a funkčné hodnoty v idealizovanom a simulovanom prenose

Nutnosť diskretizácie časovej premennej výstupu každého bloku je implicitne daná, nakoľko výpočtová technika dokáže uchovávať výlučne konečnorozmerné vektory, obdobne je tomu pri funkčných hodnotách, ktoré sú v pamäti počítača nahradené vzorkami s konečnou presnosťou, vo formáte IEEE 754 double precission floating point.

3.2 Praktická simulácia AWGN šumu

Nižšie uvádzame výsledky niekoľkých simulácií diskrétneho AWGN šumu. Demonštrujeme predovšetkým konvergenciu výberových charakteristík na základe limitných viet, predovšetkým podľa Zákona veľkých čísel (viď [2, 3]) a podľa vlastností ergodicity, viď vetu 1.34.

Tu, ale aj nižšie pre odhad strednej hodnoty využívame výberový priemer $\bar{X}$ a pre odhad variancie výberový rozptyl S^2, pre náhodný výber:

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \qquad \text{z} \quad N(\mu, \sigma^2), \text{ pre: } k \geq 2,$$

definované ako:

$$\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad S^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{X})^2. \tag{119}$$

J. Anděl v [3] dokazuje, že hoci používanejší odhad S^2 je nevychýlený odhad variancie, odhad M_2 v (120):

$$M_2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{X})^2, \tag{120}$$

je odhad variancie σ^2 s menšou kvadratickou chybou, t.j. pre stredné hodnoty platí:

$$\mathbb{E}\Big[(M_2 - \sigma^2)^2\Big] < \mathbb{E}\Big[(S^2 - \sigma^2)^2\Big]. \tag{121}$$

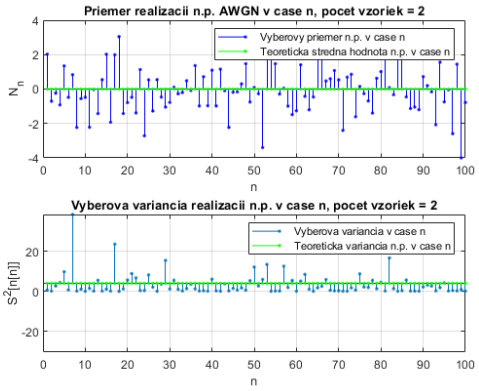
Využívame odhad S^2, ktorý je ako odhad variancie štatistického súboru implementovaný aj v softvéri Matlab. Odhad M_2 uvádzame preto, lebo má pre nás praktický význam, ktorý využijeme v kapitole 3.3.2.

Všetky simulácie vrámci práce sú realizované v softvéri MATLAB verzie R2020b. Pre prístup k zdrojovým kódom simulácií z tejto, ale aj ďalších kapitol viď prílohu D.31.

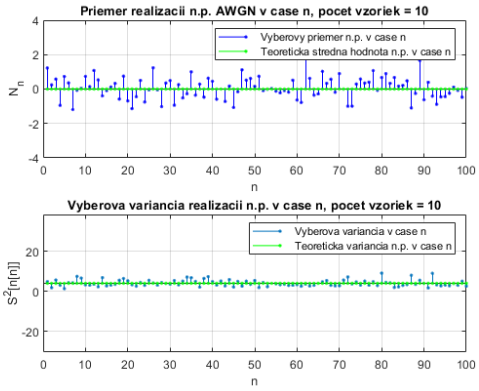
Charakteristiky náhodných premenných $\mathscr{N}[n]$

V tejto simulácii rátame výberové charakteristiky pre jednotlivé náhodné premenné $\mathscr{N}[n]$ diskrétneho AWGN šumu $\{\mathscr{N}[n]\}_{n=1,\ldots,100}$. T.j. zaujímame sa o stredné hodnoty a variancie postupnosti náhodných premenných: $\mathbb{E}\Big(\mathscr{N}[n]\Big), Var\Big(\mathscr{N}[n]\Big)$ pre $n = 1, \ldots, 100$.

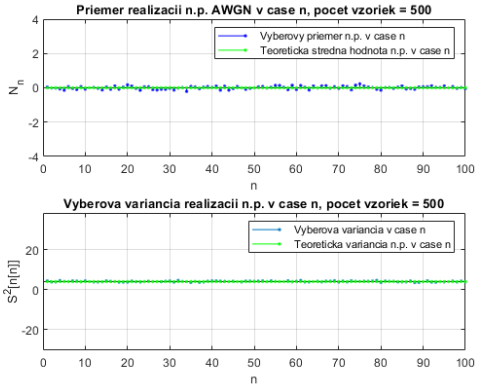
Pracujeme teda s AWGN šumom dĺžky 100 vzoriek a v každom čase rátame charakteristiky príslušnej vytvárajúcej premennej, pričom pre každú z týchto premenných rátame charakteristiky postupne z 2, 10, 500 a z 10 000 realizácií. Výsledky zobrazujeme na obrázku 18.



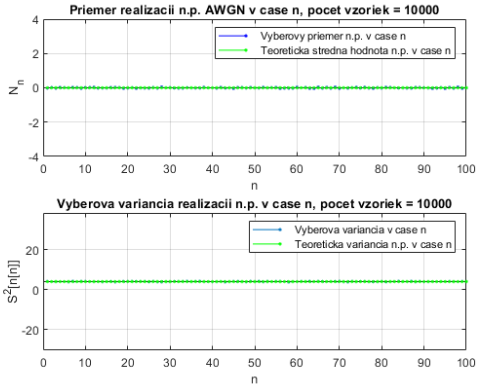
(a) 2 realizácie pre každú n.p.



(b) 10 realizácií pre každú n.p.



(c) 500 realizácií pre každú n.p.



(d) 10 000 realizácií pre každú n.p.

Obr. 18: Výberový priemer a rozptyl jednotlivých náhodných premenných generovaného diskrétneho AWGN, pri voľbe $\sigma^2 = 4$

Ako možno vidieť z grafickej prezentácie na obrázku 18d, už 10 000 realizácií je postačujúcich na relatívne konzistentný výpočet odhadu strednej hodnoty i variancie v tejto konkrétnej simulácii.

Napríklad na obrázku 18d je zobrazených 100 priemerov a rozptylov. Každý z nich prislúcha jednej z náhodných premenných $\mathscr{N}[n]$. Pre každú z týchto premenných sú na tomto obrázku výsledky rátané z 10 000 realizácií. Obdobne na ďalších v obrázku 18.

Pre tento príklad zároveň uvádzame najširšie $95 - \%$-intervaly spoľahlivosti pre

strednú hodnotu pre každý zo 4 uvedených prípadov. Uvádzame vždy iba najširší z intervalov pre každú zo 4 situácií podľa obrázku 18. Rátame využitím Studentovho rozdelenia [2, 3] pre:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S^2}\sqrt{k} \sim t_{k-1}.$$

Na týchto intervaloch spoľahlivosti uvedených v tabuľke 2 je rovnako vidieť, ich zužovanie, teda približovanie sa k očakávanej nulovej teoretickej strednej hodnote každej n.p.:

Najširšie intervaly spoľahlivosti, stredná hodnota náhodných premenných $\mathscr{N}[n]$		
Počet realizácií pre každú n.p.	Najširší interval	Zodpovedajúci obrázok
2	$\mu_1 \in (-345.26, 346.94)$	18a
10	$\mu_2 \in (-5.8304, 7.1847)$	18b
500	$\mu_3 \in (-0.4869, 0.3171)$	18c
10000	$\mu_4 \in (-0.1115, 0.0506)$	18d

Tabuľka 2: Najširšie 95%-intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu náhodných premenných, generujúcich diskrétny AWGN šum, rôzny počet realizácií, voľba $\sigma^2 = 4$

Uvádzame tiež najvyššie horné hranice a najnižšie dolné hranice odhadov 95%-intervalov spoľahlivosti pre varianciu, pre každý zo 4 uvedených prípadov, viď tabuľka 3. Rátame využitím χ^2 rozdelenia [2, 3] pre:

$$\frac{(k-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}.$$

Na týchto je vidieť, rovnako ako vyššie pre μ, ich zužovanie.

Najvzdialenejšie hranice IS, variancia náhodných premenných $\mathscr{N}[n]$			
Počet realizácií pre n.p.	Najnižšia dolná hranica	Najvyššia horná hranica	Obrázok
2	$\sigma_1^2 > 0$	$\sigma_1^2 < 39225$	18a
10	$\sigma_2^2 > 0.6271$	$\sigma_2^2 < 30.3188$	18b
500	$\sigma_3^2 > 3.1238$	$\sigma_3^2 < 5.2003$	18c
10000	$\sigma_4^2 > 3.7227$	$\sigma_4^2 < 4.2530$	18d

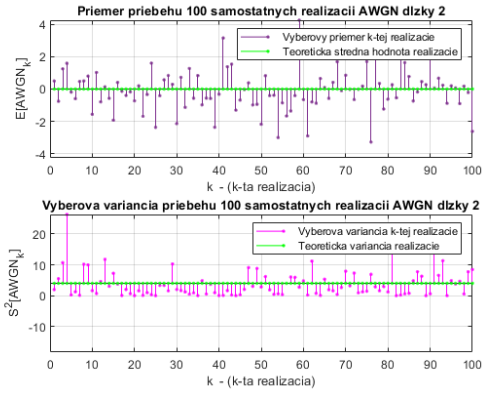
Tabuľka 3: Najširšie 95%-intervaly spoľahlivosti pre varianciu náhodných premenných, generujúcich diskrétny AWGN šum, rôzny počet realizácií, voľba $\sigma^2 = 4$

Charakteristiky časových priemerov realizácií $\{\mathscr{N}[n]\}$

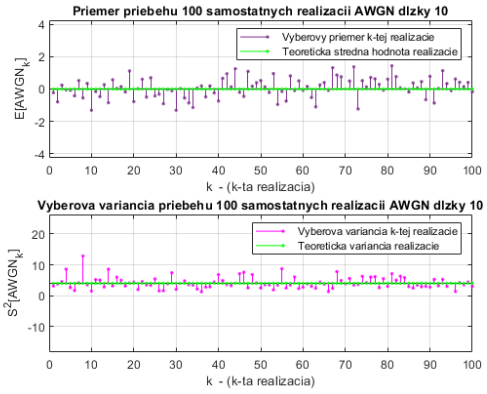
Obdobné výsledky môžeme pozorovať pri rátaní výberových charakteristík pre celkové realizácie tak, ako uvádzame na obrázku 19.

Tu pozorujeme časové priebehy realizácií AWGN šumu štyroch rôznych dĺžok, t.j. charakteristiky realizácií procesov $\{\mathscr{N}[n]\}_{n=1,\ldots,L}$ pre $L \in \{2, 10, 500, 10000\}$. Teraz teda nepozorujeme vplyv Zákona veľkých čísel, ale ergodicity (veta 1.34). Pre každú z dĺžok $L \in \{2, 10, 500, 10000\}$ generujeme 100 realizácií AWGN šumu.

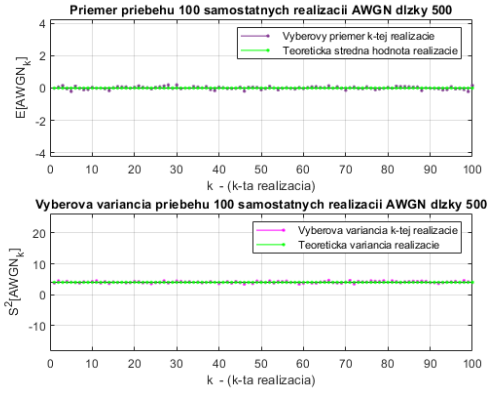
Pre vysvetlenie, napríklad na obrázku 19d je zobrazených 100 priemerov a rozptylov, každý pre 10000 vzoriek dlhú realizáciu AWGN šumu.



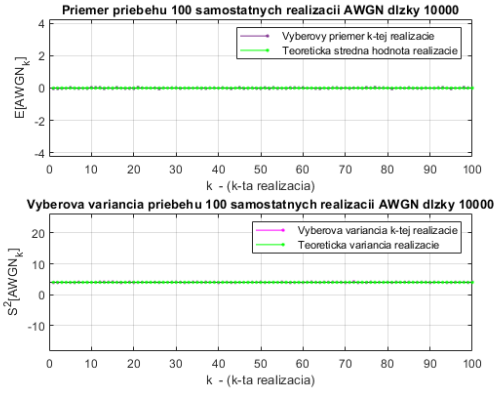
(a) 100 realizácií 2 vzorky dlhého AWGN šumu



(b) 100 realizácií 10 vzoriek dlhého AWGN šumu



(c) 100 realizácií 500 vzoriek dlhého AWGN šumu



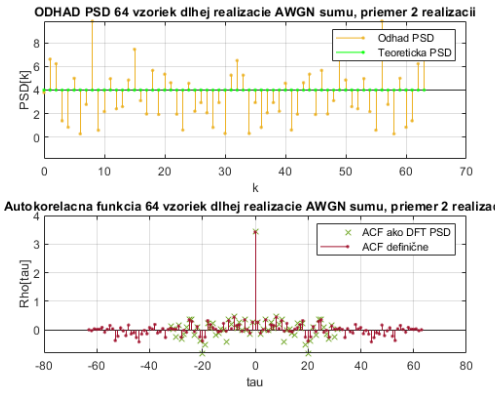
(d) 100 realizácií 10 000 vzoriek dlhého AWGN šumu

Obr. 19: Výberový priemer a rozptyl realizácií AWGN šumu rôznej dĺžky, simulácia pre $\sigma^2 = 4$

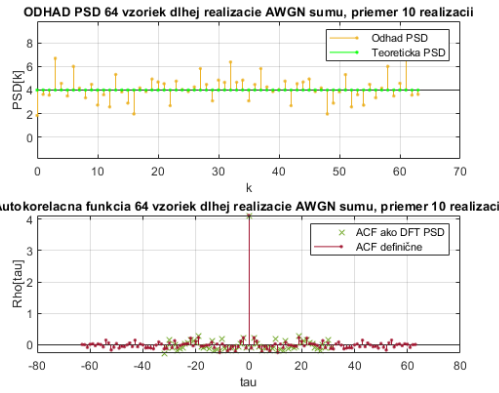
PSD a ACF pre realizácie AWGN šumu $\{\mathcal{N}[n]\}$

Na obrázku 20 uvádzame výsledky pre realizácie AWGN šumu s následným rátaním jednak výkonovej spektrálnej hustoty, autokorelačnej funkcie, ale aj autokorelačnej funkcie rátanej využitím diskrétnej Fourierovej transformácie výkonovej spektrálnej hustoty.

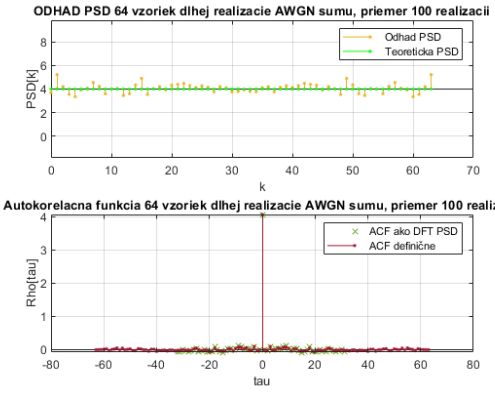
Opäť vďaka Zákonu veľkých čísel pozorujeme, že odhad PSD priemerovaním konverguje k teoretickej hodnote, čo je variancia jednotlivých náhodných premenných, v našom prípade $\sigma^2 = 4$. Poznamenajme, že tak, ako uvádzame vo vete 1.33 je jediný nenulový bod autokorelačnej funkcie v bode 0, a to variancia, v našom prípade: $\sigma^2 = 4$. Je pravda, že na obrázku 20 je pri ACF viacero bodov nenulových, ale hodnoty v bodoch iných ako nula zjavne konvergujú k nule.



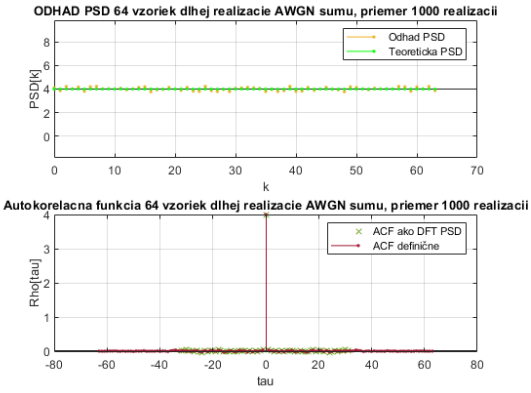
(a) 2 realizácie



(b) 10 realizácií



(c) 100 realizácií



(d) 1000 realizácií

Obr. 20: Odhady výkonovej spektrálnej hustoty a autokorelačnej funkcie, simulácia pre $\sigma^2 = 4$

V diskrétnom prípade sa žiada zdôrazniť jeho limitáciu. T.j. diskretizácia obmedzuje ACF ako Fourierov pár PSD: hoci exaktným výpočtom možno získať ACF celkovej dĺžky,

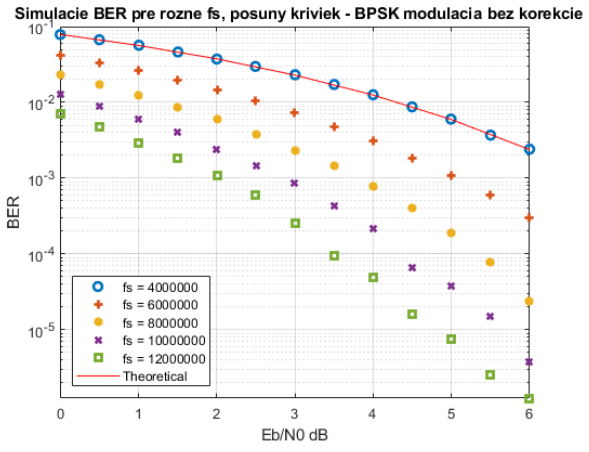
pri výpočte ACF prostredníctvom DFT z PSD je dĺžka ACF limitovaná a zároveň zhodná s dĺžkou PSD, resp. signálu samotného. Pre signál dĺžky l vzoriek je exaktná ACF dĺžky $2l - 1$, ale ACF získaná Fourierovou transformáciou PSD je dĺžky l.

3.3 Vplyv vzorkovacej frekvencie na mieru chybovosti simulovaného prenosu

3.3.1 Motivácia

Námetom pre túto podkapitolu je výsledok simulácie prenosu: *chybovosť v závislosti od odstupu signálu od šumu,* pre rôzne hodnoty vzorkovacej frekvencie f_s. Výsledok simulácií pre binárnu moduláciu viď na obrázku 21. Kvalitatívne obdobné výsledky: pokles krivky chybovosti BER (Bit-error rate) so zvyšujúcou sa vzorkovacou frekvenciou, možno získať aj pre modulácie vyššieho rádu, viď príloha B.33a.

Snaha simulovať prenos so spojitými signálmi pomocou diskrétnych so zachovaním jeho charakteristík ako je voľba počtu lalokov vo frekvenčnom pásme a podobne boli neúspešné vzhľadom na výsledok na obrázku 21, kde zobrazujeme chybovosti pri rôznych voľbách vzorkovacej frekvencie.



Obr. 21: Odhady pravdepodobnosti chyby na bit v závislosti od vzorkovacej frekvencie, bez korekcie, BPSK

Očakávaním mohlo byť, že výsledné krivky si budú bližšie, nakoľko každá voľba vzorkovacej frekvencie má stále reprezentovať ten istý spojitý signál. Výsledné krivky

sú od seba v niektorých bodoch vzdialené takmer o celý rád. Ako je z obrázku 21 vidieť, ukazuje sa, že s rastúcou vzorkovacou frekvenciou klesá odhad pravdepodobnosti chybného detekovania bitu.

Poznámka: Je vhodné rozlišovať medzi pojmami *pravdepodobnosť chyby na bit* a *Bit-error rate - BER*. Zatiaľ čo pravdepodobnosť je teoreticky odvodená hodnota, BER je hodnota, ktorou odhadujeme pravdepodobnosť chyby na bit, získaná simulačne.

Od týchto simulácií požadujeme, aby odhady pravdepodobností chyby na bit boli pre rovnakú moduláciu približne rovnaké, a nie takto systematicky, signifikantne, rádovo (závislá premenná je zobrazovaná v logaritmickej mierke) vychýlené.

V simulácii ide o priblíženie sa idealizovanému reálnemu prenosu, ale očividne metrika $\frac{E_b}{N_0}$, ktorá je na obrázku 21 nezávislou premennou, nie je vhodná, lebo nezachytáva pridané vlastnosti, ktoré simulovaný prenos determinujú, napr. vzorkovacia frekvencia.

Pripomeňme že normovanie SNR na metriku $\frac{E_b}{N_0}$ (t.j. pomer energie signálu na bit voči normovanému výkonu, resp. voči PSD šumu v ideálnom prípade) je podľa B. Sklara v [15] dobrým zovšeobecnením pre porovnávanie rôznych prenosov. Nakoľko zjavne treba prispôsobiť jednotlivé výpočty diskretizovanej situácii, robíme tak v nasledujúcej podkapitole, kde odvádzame obdobnú metriku, ale pre diskrétnu simuláciu prenosu.

3.3.2 Korekcia odstupu signálu od šumu pre diskrétnu simuláciu

Rátajme teraz variantu normovaného odstupu signálu od šumu pre diskrétny (simulovaný) variant prenosu, ktorú označíme $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$.

Pre ďalšie kroky v rámci tejto podkapitoly definujeme označenie:

- $s[n]\colon \{0,1,2,\ldots,V-1\} \to \mathbb{R}, s[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} S[k]$ - skúmaný signál a jeho spektrum,
- $\eta[n]\colon \{0,1,2,\ldots,V-1\} \to \mathbb{R}$ - realizácia diskrétneho AWGN šumu,
- V: počet všetkých vzoriek,
- E_b: energia signálu na bit, E_S: energia signálu na symbol,
- E_{full}: celková energia signálu, P_{full}^{SIGNAL}: celkový výkon signálu,

- κ: počet bitov na symbol,
- h: počet prenášaných symbolov,
- T_s: vzorkovacia perióda, f_s: vzorkovacia frekvencia,
- T: charakteristický interval.

Rátajúc energiu na bit, použitím definície 1.5, Parsevalovej vety (23) a definície ESD a PSD 1.22 možno písať:

$$E_b = \frac{E_S}{\kappa} = \frac{1}{h\kappa} E_{full} = \frac{1}{h\kappa} \sum_{n=0}^{V-1} |s[n]|^2 = \frac{1}{h\kappa} \frac{1}{V} \sum_{k=0}^{V-1} |S[k]|^2 = \frac{1}{h\kappa} \sum_{k=0}^{V-1} H_s[k],$$

nakoľko iste platí:

$$V = hTf_s, \tag{122}$$

môžeme ďalej písať:

$$E_b = \frac{1}{h\kappa} \sum_{k=0}^{V-1} H_s[k] \qquad \Big/ \frac{\kappa}{Tf_s},$$

$$E_b \frac{\kappa}{Tf_s} = \frac{1}{(hTf_s)} \sum_{k=0}^{V-1} H_s[k] = \frac{1}{V} \sum_{k=0}^{V-1} H_s[k] = \sum_{k=0}^{V-1} G_s[k].$$

Použitím (42) z vety 1.24 možno pokračovať:

$$E_b \frac{\kappa}{Tf_s} = P_{full}^{SIGNAL},$$

z čoho:

$$E_b = P_{full}^{SIGNAL} \frac{Tf_s}{\kappa}. \tag{123}$$

Pokračujeme rátaním výkonu prítomnej realizácie diskrétneho šumu, s previazaním, podobne ako v definícii 2.13, na $\frac{N_0}{2}$, čo je tzv. normovaný výkon vzhľadom na obsiahnuté frekvenčné zložky.

Rátajme celkový výkon P_{full}^{NOISE} prítomného šumu: $\eta[n]\colon \{0,1,2,\ldots,V-1\} \to \mathbb{R}$, kde:

$$\eta[n] \sim N(0,\sigma^2), \qquad \forall n \in \{0,1,2,\ldots,V-1\}.$$

Podľa definície 1.6:

$$P_{full}^{NOISE} = \frac{1}{V}\sum_{n=0}^{V-1} |\eta[n]|^2.$$

Nakoľko stredná hodnota AWGN šumu je nulová, potom podľa vzťahu (120) platí, že:

$$P_{full}^{NOISE} = \frac{1}{V}\sum_{n=0}^{V-1} |\eta[n]|^2 = M_2 \approx \sigma^2. \tag{124}$$

Z čoho dostávame:

$$P_{full}^{NOISE} \approx \sigma^2. \tag{125}$$

Vidíme, že výkon šumu v diskrétnom prípade nie je nijako závislý od vzorkovacej frekvencie. Zároveň, kvôli analógii normovaného výkonu z definície 2.13 treba uviesť, že zatiaľ čo v definícii 2.13, resp. v spojitej situácii, sa celkový výkon menil spolu so zmenou šírky pásma, resp. uvažovaného spektra. Tu tomu tak nie je, vďaka (125), resp. vďaka (124).

Výkon šumu závisí výlučne od svojej variancie, čo je dôsledkom ergodicity, viď (58).

Pripomeňme, že diskrétne spektrum, prakticky získané ako DFT šumu, obsahuje V vzoriek, rovnako ako samotný šum. Teda zmenou vzorkovacej frekvencie f_s sa síce zmení počet vzoriek V, viď (122), zmení sa aj počet skúmaných frekvencií spektra, ale nijako sa nezmení výkon diskrétneho šumu, viď (124), čo je v súlade s požiadavkou na to, aby výkon spojitého signálu, ktorý je reprezentovanými diskrétnymi signálmi s rôznymi vzorkovacími frekvenciami, bol rovnaký.

Z tohto možno prehlásiť, že normovaným výkonom šumu vzhľadom frekvenčnú oblasť

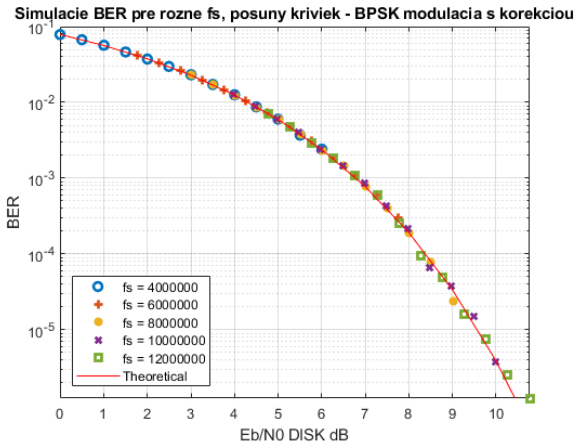
je výkon samotný. Teda hľadané $\frac{N_0}{2}$ je:

$$\frac{N_0}{2} = P_{full}^{NOISE} \approx \sigma^2. \tag{126}$$

Teraz možno vidieť ďalší zo zásadných rozdielov medzi spojitým a diskrétnym prístupom. V spojitom prístupe má šum konštantnú PSD, zatiaľ čo v diskrétnej situácii je konštantný výkon šumu a jeho výkonová spektrálna hustota sa pri zmene spektra mení. Následne spojením (123) s (126) môžeme zrátať hľadané $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK} = \frac{P_{full}^{SIGNAL} T f_s}{P_{full}^{NOISE} 2\kappa}. \tag{127}$$

Použitím metriky $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ je výsledok simulácie z obrázka 21, ktorá bola námetom pre túto časť, konzistentný. Uvádzame ho na obrázku 22 pre BPSK moduláciu, kde je vidieť, že aj napriek použitiu rôznych hodnôt vzorkovacej frekvencie, simulácie, ktoré majú reprezentovať rovnaký idealizovaný proces, dosahujú približne rovnaké výsledky tak, ako sme od simulácií vyžadovali. Podobne pre QPSK v prílohe na obrázku B.33b.



Obr. 22: Simulácia pravdepodobnosti chyby na bit v závislosti od vzorkovacej frekvencie, BPSK, s korekciou

Uvedený výsledok naznačuje, že je možné, že chybovosť idealizovaného prenosu so spojitými signálmi, odvodená v (117) v kapitole 2.4.4 je zhodná alebo blízka chybovosti prenosov s diskrétnymi signálmi. Túto možnosť overujeme v ďalšej kapitole.

4 Simulácie chybovosti prenosov

V predošlej kapitole sme na obrázkoch 21 a 22 uviedli príklady simulácie chybovosti prenosu v závislosti od normovaných variánt odstupu signálu od šumu. Tieto Monte Carlo simulácie poskytli bodové odhady skutočnej pravdepodobnosti chyby na bit diskrétneho prenosu, ktoré sme uviedli bez širšej diskusie. Presné, teoretické hodnoty týchto pravdepodobností nepoznáme, nakoľko v kapitole 2.4 bola pravdepodobnosť chyby na bit odvodená iba pre prenos so spojitými signálmi - prototypmi. Viac sa odhadom pravdepodobnosti chyby na bit pri prenose s diskrétnymi signálmi venujeme v tejto kapitole. Sústredíme sa na rátanie intervalových odhadov, taktiež pomocou Monte Carlo simulácií.

4.1 Dĺžka simulácie pri rádovom posune pravdepodobnosti

4.1.1 Šírka intervalových odhadov BER

V kapitole 2.4.4 sme odvodili teoretickú pravdepodobnosť chyby na bit ako funkciu normovaného odstupu signálu od šumu pre binárnu moduláciu v idealizovanom prenose so spojitými signálmi

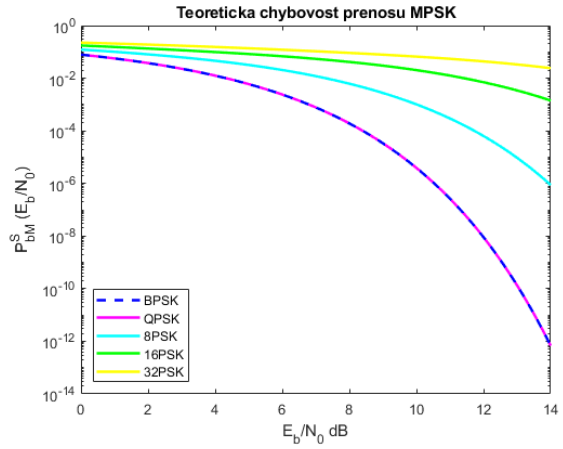
Poznámka: Vyššie použité označenie P_b v (117) pre pravdepodobnosť chyby na bit v idealizovanom prenose so spojitými signálmi je nutné zovšeobecniť. Pri M-árnej modulácii budeme nižšie používať označenie:

- P_{bM}^S - pre teoretickú pravdepodobnosť chyby na bit v idealizovanom prenose so spojitými signálmi,
- P_{bM}^D - pre (neznámu) teoretickú pravdepodobnosť chyby na bit pri prenose s diskrétnymi signálmi.

Prípadne, na zdôraznenie príslušnosti pravdepodobnosti chyby k odstupu normovanému signálu od šumu označíme uvedené pravdepodobnosti ako $P_{bM}^S\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$, respektíve $P_{bM}^D\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$.

Na obrázku 23 nižšie uvádzame teoretické pravdepodobnosti chyby na bit pre prenosy so spojitými signálmi aj pre niektoré modulácie vyšších rádov v AWGN kanáli.

Teoretické hodnoty týchto pravdepodobností možno získať využitím funkcie *bertool* v softvéri Matlab, pre detaily viď [12].



Obr. 23: Teoretická pravdepodobnosť chyby na bit, fázové modulácie vybraných rádov, ideálny prenos spojitých signálov v AWGN kanáli, teoretické hodnoty *bertool*, [12]

Na obrázku 23 možno pozorovať, že pre nami zvolený rozsah nezávislej premennej klesá pravdepodobnosť chyby na bit rádovo z hladiny približne 10^{-1} až pod 10^{-12} v prípade BPSK a QPSK. Menej prudký pokles pozorujeme pri moduláciách vyšších rádov. Napriek tomu, aj tu dochádza k poklesu skúmanej pravdepodobnosti v celých rádoch (závislá premenná je zobrazovaná v logaritmickej mierke).

Teoretické chybovosti zobrazené na obrázku 23 zodpovedajú prenosu so spojitými prototypmi, ktorému sme sa venovali v kapitole 2.

Pri prenose s diskrétnymi prototypmi, čo zodpovedá aj simuláciam prenosu pomocou výpočtovej techniky, tieto pravdepodobnosti chyby na bit nepoznáme. Bolo by preto vhodné tieto pravdepodobnosti odhadnúť. Na to využijeme intervalové odhady. S ich získaním sa vynárajú 2 problémy:

1. Prispôsobenie dĺžok intervalových odhadov pre rôzne $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$

Dôležitým aspektom je, že ak by boli tieto, zatiaľ neznáme, pravdepodobnosti chyby na bit pri diskrétnom prenose zhodné s pravdepodobnosťami idealizovaného prenosu z kapitoly 2 (čo zatiaľ nevieme, ale výsledky kapitoly 3.3 to mierne naznačujú), potom je potrebné regulovať šírku týchto intervalových odhadov v jednotlivých bodoch $\frac{E_b}{N_0}$.

Je prirodzenou požiadavkou, aby dĺžka intervalového odhadu bola, v tomto kon-

krétnom prípade, pri odhadoch menších hodnôt kratšia, ako je tomu pri väčších. Inými slovami, je z nášho pohľadu prijateľné aby mal intervalový odhad pravdepodobnosti dĺžku napríklad $0,01$ ak skutočná hodnota pravdepodobnosti je $0,1$. Toto je ale neprijateľná dĺžka intervalu spoľahlivosti pre pravdepodobnosť v takom bode (normovaného) odstupu signálu od šumu, v ktorom je skutočná hodnota pravdepodobnosti napríklad blízko 10^{-4}. Práve z dôvodu, že krivka BER pokrýva široký rozsah rádov, je z nášho pohľadu nutné uspôsobiť dĺžku intervalov spoľahlivosti v každom bode krivky BER tak, aby klesala spolu s rádom skutočnej (neznámej) hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, a teda rozlíšila hodnoty pravdepodobnosti v rôznych bodoch normovaného SNR.

2. Časová náročnosť ako dôsledok stanovenia požadovanej dĺžky odhadu

Ak by platil predpoklad z predošlej časti, a to, že: pravdepodobnosti chyby na bit v diskrétnom prístupe budú zhodné s pravdepodobnosťami pre idealizovaný prenos so spojitými signálmi, potom, napríklad pri BPSK v bode $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK} = 14dB$, by pre dostatočne úzky požadovaný interval spoľahlivosti bol potrebný nezvykle vysoký počet simulácií. Hoci pri Monte Carlo metódach sa očakáva, že simulácií bude relatívne mnoho, pri predom stanovenej požadovanej dĺžke intervalu spoľahlivosti pre odhad pravdepodobnosti rádovo napríklad 10^{-12} a kontrolovaním aktuálnej dĺžky intervalu po každom simulačnom behu, sa značne zväčší čas potrebný na celú simuláciu. Z tohto dôvodu by bolo vhodné poznať približný odhad potrebného počtu simulácií predom, aby sa ušetril čas venovaný kontrolám dĺžky intervalu spoľahlivosti.

Riešením oboch problémov je zjavne stanovenie počtu potrebných simulácií bitových prenosov predom a dokonca, pre každý intervalový odhad (pre každý bod $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, v ktorom rátame odhad) zvlášť. Otázkou ale ostáva, ako stanoviť požadovanú dĺžku intervalového odhadu v závislosti od toho, v akom bode $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ práve odhadujeme a ako z tejto dĺžky následne stanoviť počet simulácií. Ak by sme poznali skutočné hodnoty pravdepodobností, ktoré odhadujeme, potom by bolo rozumné odvíjať dĺžku odhadov od nich: so zmenšujúcou sa teoretickou pravdepodobnosťou by sme podľa zvoleného pravidla zmenšovali žiadanú dĺžku odhadu.

Stále je ale prítomný problém, že hodnoty pravdepodobností, ktoré majú byť odhad-

nuté intervalovým odhadom nie sú známe. Napokon, ak by známe boli, nemalo by zmysel ich odhadovať. T.j. nevieme, na aké hodnoty je vhodné naviazať skracovanie šírky predmetných intervalových odhadov. Pripomeňme, že naším cieľom v rámci kapitoly je buď podporiť, alebo zamietnuť hypotézu nastolenú v kapitole 3.3, čo za použitia definovaného značenia možno zapísať ako:

$$P_{bM}^{S}\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big) = P_{bM}^{D}\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big). \tag{128}$$

Ak hypotéza z (128) platí, tak určenie požadovanej dĺžky hľadaných intervalových odhadov pre P_{bM}^{D} podľa pravdepodobnosti P_{bM}^{S} s podmienkou, že hodnota dĺžky odhadu je rádovo menšia ako samotná pravdepodobnosť P_{bM}^{S}, vyústi v to, že dĺžka príslušného odhadu bude dostatočne krátka na to aby rozlíšila odhady tých teoretických pravdepodobností, ktoré sa na zvolenom úseku nezávislej premennej $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ líšia rádovo.

Intervalový odhad bude ale vždy zodpovedať hľadanej pravdepodobnosti P_{bM}^{D}. Informácia o P_{bM}^{S} ovplyvní iba dĺžku odhadu, nie jeho polohu.

Poznámka: Hodnotu, pomocou ktorej budeme determinovať dĺžku intervalu spoľahlivosti pri odhade neznámej pravdepodobnosti v bode $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ budeme nižšie označovať pojmom **referenčná hodnota** a označovať ju $\hat{p}\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big)$.

Vyššie sme uviedli, že vzhľadom na obmedzené množstvo informácií budeme ako referenčnú hodnotu používať pre výpočet intervalu spoľahlivosti pre teoretickú pravdepodobnosť chyby prenosu s diskrétnymi signálmi P_{bM}^{D} v bode $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ pravdepodobnosť chyby na bit idealizovaného spojitého procesu v tomto bode, teda:

$$\hat{p}\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big) = P_{bM}^{S}\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big). \tag{129}$$

Zatiaľ nezodpovedanou otázkou ale ostáva, ako pomocou zvolenej referenčnej hodnoty získať hľadaný počet potrebných simulácií pre požadovanú dĺžku intervalového odhadu.

4.1.2 Monte Carlo intervaly spoľahlivosti

Pri využití Monte Carlo simulácií je šírka intervalových odhadov priamo závislá od počtu vykonaných simulácií, t.j. zväčšovaním simulovaného datasetu sa zvyšuje presnosť odhadu, ktorý konverguje k skutočnej hodnote hľadanej charakteristiky. Problematike závislosti dĺžky intervalového odhadu od počtu simulácií BER sa venuje napríklad S. Berber v [4]. Vzťah pre výpočet vhodného počtu realizácií uvádzame, narozdiel od S. Berbera, použitím klasického prístupu Monte Carlo stručne nižšie. Základné poznatky o Monte Carlo simuláciách možno nájsť v [10].

Zvoľme predom značenie:

- p - odhadovaná, neznáma hodnota,
- n - počet simulácií,
- P_i - realizácia náhodnej premennej reprezentujúcej hodnotu p z i-tej simulácie,
- l - dĺžka zrátaného intervalu spoľahlivosti,
- $1-\alpha$ - požadovaná spoľahlivosť,
- $u(x)$ - kvantilová funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Pri odhadovaní číselnej hodnoty p sa pri Monte Carlo simulácii skonštruuje taký náhodný výber $P_1, \ldots, P_n$, pre ktorý platí: $\mathbb{E}\big[P_i\big] = p$ a $D\big[P_i\big] = \sigma^2 < \infty \; \forall i$. Ďalej vieme, že pre priemer $\overline{P_n}$ platí:

$$\overline{P_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i, \qquad \mathbb{E}\big[\overline{P_n}\big] = p, \qquad D\big[\overline{P_n}\big] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Podľa Centrálnej limitnej vety pre priemer $\overline{P_n}$ platí:

$$\overline{P_n} \sim N\Big(p, \frac{\sigma^2}{n}\Big), \qquad \text{resp. že} \qquad (\overline{P_n} - p)\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \sim N\Big(0,1\Big).$$

Podľa [10] za použitia výberového rozptylu:

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(P_i - \overline{P_n}\Big)^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} P_i^2\Big) - \overline{P_n}^2, \tag{130}$$

sa $100(1-\alpha)$-percentný interval spoľahlivosti [10] pre p zráta ako:

$$1-\alpha = \mathbf{P}\left[\overline{P_n} - u\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{M_2}{n}} < p < \overline{P_n} + u\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{M_2}{n}}\right], \tag{131}$$

kde $\pm u\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)$ zodpovedá $\frac{\alpha}{2}100$, respektíve $(1-\frac{\alpha}{2})100$ percentným kvantilom štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Obmenou tohto prístupu je hľadanie intervalu spoľahlivosti pre špeciálny prípad skúmanej charakteristiky p, keď p reprezentuje pravdepodobnosť nejakej udalosti. V našom prípade, kedy pozorujeme chybovosť prenosu signálu, je predmetnou odhadovanou charakteristikou pravdepodobnosť chyby na bit prenosu s diskrétnymi signálmi.

Vo všeobecnosti, ak p má byť odhad pravdepodobnosti nejakej udalosti $\mathbb{A}$, tak ak náhodný výber P_i skonštruujeme tak, že:

$$P_i = \begin{cases} 1, & \text{ak udalosť } \mathbb{A} \text{ nastala,} \\ 0, & \text{inak,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{132}$$

potom iste priemer $\overline{P_n}$ je odhad pravdepodobnosti p, nakoľko pri takto definovanom P_i priemer predstavuje podiel počtu realizácií udalosti $\mathbb{A}$ voči počtu všetkých pokusov, v ktorých udalosť nastať mohla. V našom prípade je P_i výsledkom simulácie prenosu 1 bitu. Ak bol i-tý simulovaný vyslaný bit v detekčnej časti identifikovaný chybne, potom $P_i = 1$, a podobne.

Nakoľko realizácia P_i môže nadobudnúť práve 2 hodnoty: 0, 1, pričom hodnotu 1 nadobúda s pravdepodobnosťou, že nastane skúmaná udalosť, čo je hľadaná pravdepodobnosť p, potom zjavne výbery P_i sú z alternatívneho rozdelenia: $P_i \sim Alt(p)\ \forall i$. Vzhľadom na rovnosť (132) platí: $P_i = P_i^2\ \forall i$, z čoho iste dosadením do (130) platí:

$$M_2 = \overline{P_n} - \overline{P_n}^2.$$

Následne možno prepísať interval spoľahlivosti zo (131) podľa uvedeného ako [10]:

$$1-\alpha = \mathbf{P}\left[\overline{P_n} - u\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{\overline{P_n} - \overline{P_n}^2}{n}} < p < \overline{P_n} + u\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{\overline{P_n} - \overline{P_n}^2}{n}}\right],$$

z čoho dĺžka l intervalu spoľahlivosti je:

$$l = 2u\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{\overline{P_n} - \overline{P_n}^2}{n}},$$

a počet realizácií n spĺňa:

$$n = 4u^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\frac{\overline{P_n} - \overline{P_n}^2}{l^2}. \tag{133}$$

Nakoľko so zvyšujúcim sa n sa odhad hľadanej pravdepodobnosti približuje k jej skutočnej hodnote, potom podľa predošlých úvah za predpokladu platnosti hypotézy (128) volíme referenčnú hodnotu blízku odhadu $\overline{P_n}$:

$$\hat{p}\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big) = P_{bM}^S\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big), \tag{134}$$

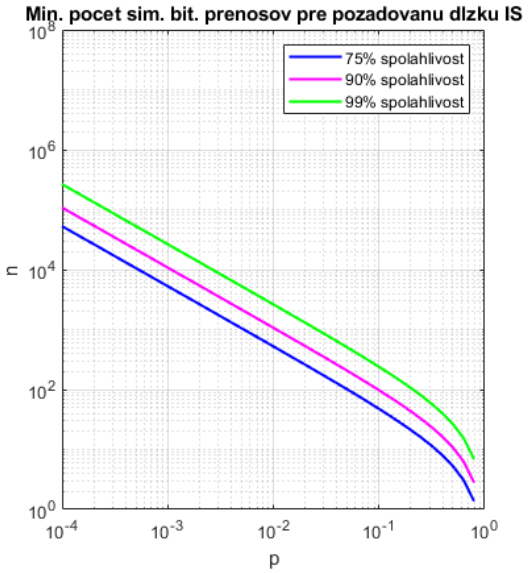
z čoho určujeme vlastnú podmienku, že pri stanovenej dĺžke l, a rátaní odhadu skutočnej pravdepodobnosti P_{bM}^D v bode $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ bude stanovený počet simulácií daný ako:

$$n\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big) = 4u^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\frac{P_{bM}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right) - P_{bM}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)^2}{l^2}. \tag{135}$$

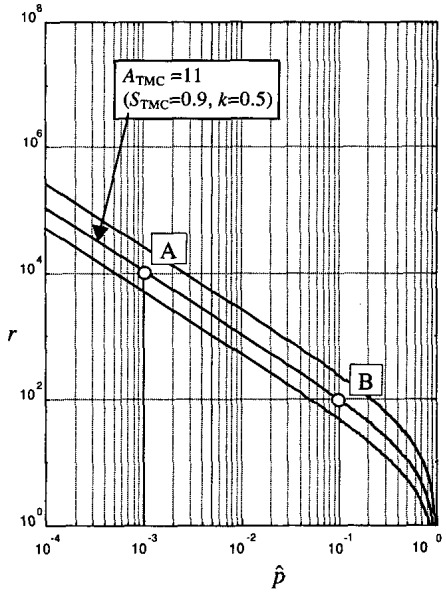
Pripomeňme, že požiadavkou bolo, aby s klesaním pravdepodobnosti nastalo aj skracovanie príslušného intervalu spoľahlivosti. Preto definujeme dĺžku l ako funkciu referenčnej hodnoty:

$$n\Big(\Big(\frac{E_b}{N_0}\Big)^{DISK}\Big) = 4u^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\frac{P_{bM}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right) - P_{bM}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)^2}{l^2\left(P_{bM}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)\right)}. \tag{136}$$

čo je v zhode s výsledkom S. Berbera v [4], viď obr. 24 nižšie.



(a) Počet simulácií n v závislosti od referenčnej hodnoty podľa (136), (137), pre 75, 90, a 99-percentné intervaly spoľahlivosti



(b) Počet simulácií r v závislosti od referenčnej hodnoty, pre 75, 90, a 99-percentné IS, prevzaté z [4]

Obr. 24: Závislosť počtu potrebných simulovaných bitových prenosov od referenčnej hodnoty $\hat{p}$ pre požadovanú šírku intervalu spoľahlivosti, voľba: $l(\hat{p}) = \hat{p}$, s platnosťou (137)

Poznámka: Nižšie používame kvôli stručnosti zápisu referenčnej hodnoty výlučne znak $\hat{p}$, pričom, podobne ako vyššie, pri každej simulácii, nákrese a podobne v celej ďalšej práci počnúc týmto miestom pracujeme s voľbou:

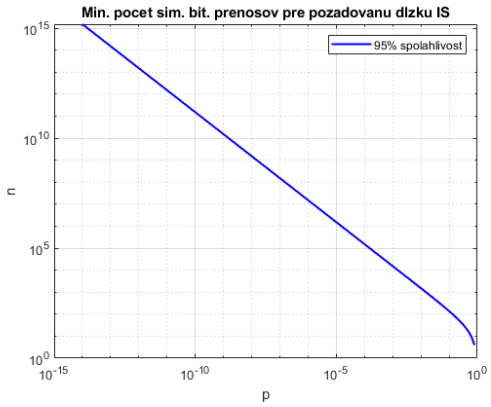
$$\hat{p} \equiv \hat{p}\Big(\big(\frac{E_b}{N_0}\big)^{DISK}\Big) = P_{bM}^{S}\Big(\big(\frac{E_b}{N_0}\big)^{DISK}\Big). \tag{137}$$

Pripomeňme, že tak, ako sme uviedli vyššie, determinovanie počtu simulácií n prostredníctvom nejakého predpokladaného finálneho odhadu pravdepodobnosti $\hat{p}$ nijako neovplyvní bodový odhad, resp. polohu intervalového odhadu skutočnej pravdepodobnosti, ale iba šírku tohto intervalového odhadu.

Ak ale hypotéza (128) platí, potom vďaka tomu, že poloha 95-percentného intervalu spoľahlivosti nie je ničím ovplyvnená, a zároveň jeho dĺžka je (práve vďaka uplatneniu hypotézy) dostatočne krátka, tak získaný odhad zahrnie s 95-percentnou pravdepodobnosťou, teoretickú hodnotu pravdepodobnosti pre spojité signály. Ak bude voľba šírky intervalu spoľahlivosti dostatočne prísna, potom bude možné prehlásiť, že výsledok hypo-

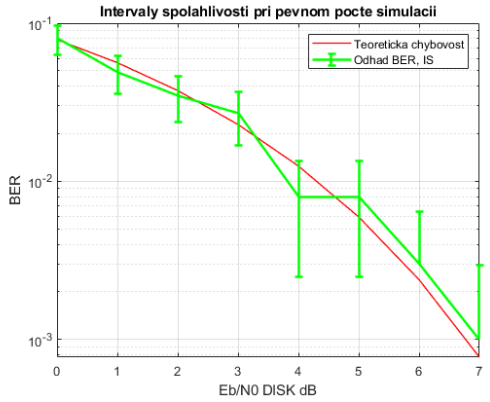
tézu podporil.

Zaujímavý náhľad je aj na obrázku 25, kde v porovnaní s obrázkom 24 zobrazujeme širší rozsah referenčnej pravdepodobnosti $\hat{p}$ - t.j. zobrazujeme veľmi nízke hodnoty tejto pravdepodobnosti, až do 10^{-14} vrátane, pri voľbe $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$.

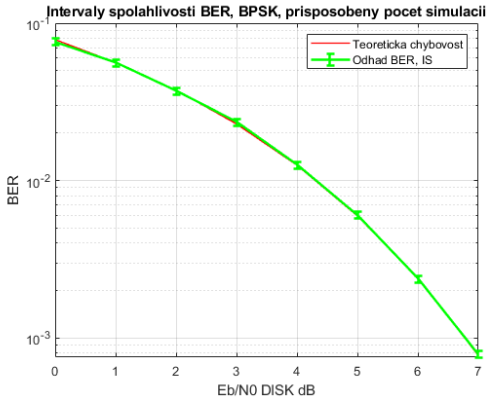


Obr. 25: Potrebný počet simulácií n bitových prenosov závislosti od referenčnej hodnoty $\hat{p}$, pre 95-percentný interval spoľahlivosti, voľba: $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$, s platnosťou (137)

Výsledkom predošlej práce je princíp zobrazený na obrázku 26 kde staviame do kontrastu prístup založený na pevnom počte simulácií so simulovaním využívajúcim prispôsobenie počtu simulácií. Zvolená vzorkovacia frekvencia: $f_s = 4\frac{1}{T}$, kde T je char. interval.



(a) Pevný počet simulácií, voľba: $n = 10^3$



(b) Premenlivý počet simulácií, podľa (136)

Obr. 26: Príklad: 95-percentné intervaly spoľahlivosti pre pravdepodobnosť chyby na bit simulovaného BPSK prenosu, prístup s pevným počtom simulácií (a); a s prispôsobeným počtom simulácií podľa (136) pre $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$ a platnosťou (137) v (b)

Na obrázku 26a môžeme pozorovať, že pri pevnom počte 10^3 simulovaných prenosov

je interval spoľahlivosti pri hodnotách pravdepodobnosti vzdialenejších od nuly dostatočne úzky. Nie je tomu tak pri nižších hodnotách BER. Graf je znázornený v logaritmickej mierke, nakoľko je to jednak zvykom pri vodopádových krivkách, ale teraz to zároveň odráža proporcionalitu medzi dĺžkami intervalov spoľahlivosti v rôznych bodoch grafu (vzhľadom na rád pravdepodobnosti, ktorú ohraničujú).

Prirodzenou požiadavkou je, aby sa v takejto situácii dĺžky intervalov spoľahlivosti skracovali, a to spolu s príslušnou pravdepodobnosťou, ktorej zodpovedajú. Na grafe s logaritmickou mierkou to znamená vizuálnu rovnosť dĺžok intervalov spoľahlivosti. To je možné pozorovať na obrázku 26b, ktorý je výsledkom simulácie využívajúcej vzťah (136) pre voľbu $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$, za voľby (137). S rastúcim normovaným odstupom signálu od šumu sa zvyšoval aj počet simulovaných prenosov bitov.

Poznamenajme, že pri simuláciach reprezentujúcich prenos 1 bitu v 1 simulačnom behu, je trvanie výpočtu uvedených intervalov spoľahlivosti na obrázku 26 (pri bežnej záťaži počítača) v prípade pevného počtu simulácií 0,62 sekundy a v prípade premenlivého počtu simulácií 8653,89 sekúnd, čo zodpovedá približne 2 hodinám a 20 minútam. Tento rozdiel je zapríčinený tým, že pri premenlivom počte simulovaných bitov sa pre jednotlivé body v rámci nami uvedenej simulácie pre rozsah $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK} \in \{0dB, 1dB, \ldots, 7dB\}$ ráta interval postupne z prenosu 18000 bitov, až po takmer 2.10^6 bitov.

Tento čas je možné značne skrátiť využitím simulácie prenosu viacerých bitov naraz, t.j. simulácií kedy 1 simulačný beh reprezentuje prenos celého dátového bloku. Namiesto cyklických operácií sa následne pracuje s maticovými operáciami, ktoré sú časovo úspornejšie. Pri voľbe 800000 bitov v simulačnom behu sa skráti čas výpočtu intervalu spoľahlivosti v situácii s premenlivým počtom simulácií na 1.327306 sekundy, čo je rapídne zníženie oproti pôvodným 8653 sekundám. Takýto razantný rozdiel vo výpočtovom čase zabezpečil návrh samotného prostredia Matlab, ktorý je optimalizovaný práve vo vzťahu k maticovým funkciám s rôznymi optimalizačnými funkciami, kde na rozdiel od cyklických, využíva tzv. vektorové rozšírenie procesora.

4.2 Pravdepodobnosť chyby na bit v simulovanom prenose

V tejto časti prezentujeme výsledky Monte Carlo simulácií, ktorých cieľom bolo podporiť hypotézu zo (128), že pravdepodobnosti chyby na bit diskrétneho prenosu ako funkcia metriky $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ odvodenej v kapitole 3.3.2 sú zhodné s chybovosťou idealizovaného prenosu so spojitými signálmi.

V idealizovanej situácii, je podľa B. Sklara v [15] vhodné porovnávať chybovosť prenosov práve voči pomeru $\frac{E_b}{N_0}$ z definície 2.13. Ten zohľadňuje počet bitov na symbol a uvažované laloky pásma. Pri simulácii spojitého prenosu diskrétnymi signálmi nestačí podľa výsledku na obrázku 21 predpokladať takto normalizovanú SNR, ale v kapitole 3.3.2 sme na obrázku 22 naznačili, že sa zdá byť vhodnejšie zrátať ekvivalentnú metriku pre simulovaný prenos pomocou definícií príslušných charakteristík pre diskrétne signály.

Treba zdôrazniť, že rovnosť v (128) je ale naozaj iba hypotéza. Ohľadne chybovosti diskétnych prenosov nemáme zatiaľ žiadnu informáciu, nakoľko všetky vlastnosti a výsledky týkajúce sa teoretickej pravdepodobnosti chyby na bit z kapitoly 2.4 vznikli z predpokladu spojitých prototypov. Objektom nášho záujmu v nasledovnej časti je predovšetkým podporenie alebo vyvrátenie hypotézy (128).

Rátame preto intervaly spoľahlivosti pre skutočnú chybovosť v diskrétnom prenose. Tieto intervaly budeme rátať vo vybraných bodoch $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ a pre rôzne hodnoty vzorkovacej frekvencie, čo porovnáme s teoretickými hodnotami chybovosti ideálneho prenosu.

Výsledkom našich simulácií sú 95%-intervaly spoľahlivosti, s predom definovanou dĺžkou. Využívame prístup z predošlej kapitoly: počet simulácii volíme predom podľa pravidiel (136), (137).

Pracujeme s voľbou dĺžky intervalu spoľahlivosti v závislosti od referenčnej hodnoty pravdepodobnosti:

$$l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}. \tag{138}$$

Všetky simulácie v tejto kapitole boli realizované s pevnou bitovou rýchlosťou (viď definíciu 2.12):

$$R_b = 10^6 \; bit/s,$$

ktorá determinuje odvodené charakteristiky prenosu ako modulačná rýchlosť $R_m = \frac{R_b}{k}$, dĺžka charakteristického intervalu $T = \frac{1}{R_m}$ a tzv. fundamentálnu frekvenciu $f_0 = \frac{1}{T}$.

Simulácie zahŕňajú bitové prenosy pri normovaných odstupoch signálu od šumu v bodoch $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK} = 0, 1, \ldots, 10$, pre vzorkovacie frekvencie určené ako 2,3,4,5,6,7 a 8-násobok fundamentálnej frekvencie f_0.

Vplyv Nyquistovho kritéria

Diskrétne prototypy konštruujeme diskretizáciou spojitých prototypov z (62) pre voľbu $\phi = 0$, čo je podľa [15] najčastejšia voľba pre ϕ. Žiada sa tu zdôrazniť obmedzenie pri zvolení vzorkovacej frekvencie ako: $f_s = 2f_0$. Podľa Nyquistovho kritéria z vety 1.10 a poznámky pod ním, nie je pre voľbu $f_s = 2f_0 = 2\frac{1}{T}$ zaručená dostatočne presná reprezentácia spojitého prototypu diskrétnymi vzorkami. Pri voľbe $\phi = 0$ v (62) sú pri binárnej modulácii získané 2 jedinečné prototypy. Pri rovnakej voľbe v prípade modulácií s dvoma a troma bitmi na symbol (ozn. QPSK, 8PSK) dochádza pri voľbe $\phi = 0$ v (62) k získaniu nešpecifických prototypov.

Pre vysvetlenie uveďme problematiku aj z pohľadu vzorkovacej periódy. Ak:

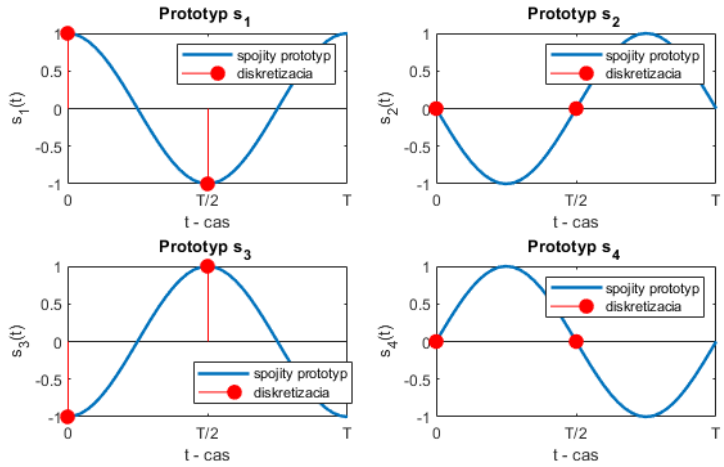
$$f_s = 2f_0 = 2\frac{1}{T}, \tag{139}$$

kde T je charakteristický interval prototypov, potom pre vzorkovaciu periódu T_s platí:

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{2}. \tag{140}$$

Z obrázka 27 je zjavné, že iba tri zo štyroch diskrétnych prototypov sú v prípade QPSK modulácie pri voľbe hraničnej vzorkovacej frekvencie $f_s = 2f_0$ jedinečné.

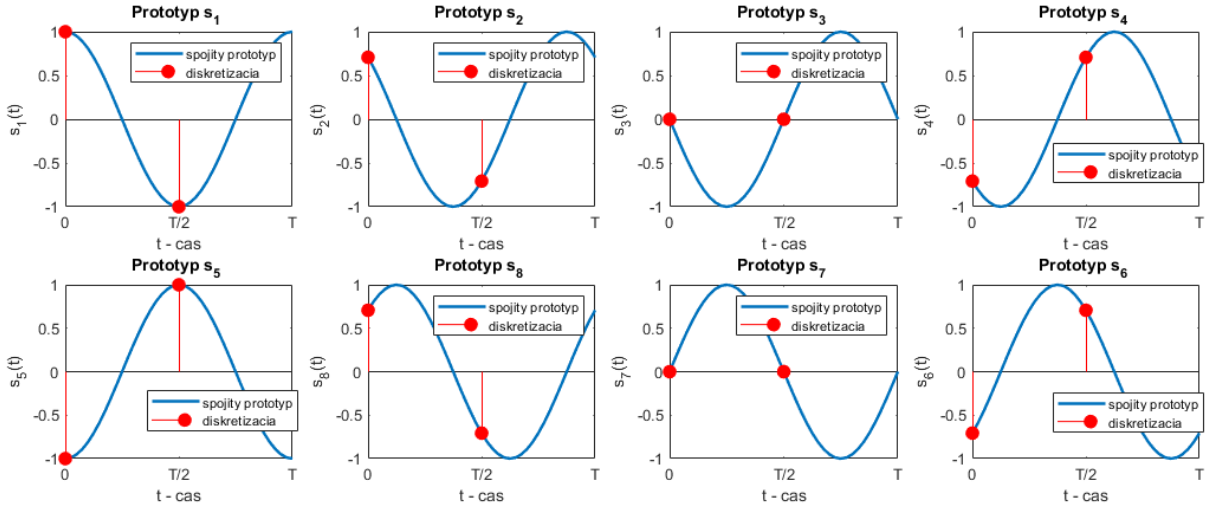
Pre vhodnú reprezentáciu je potrebná vyššia hodnota vzorkovacej frekvencie, prípadne iná voľba $\phi = 0$ z (62). Nakoľko rôzne symboly budú v takomto prenose reprezentované rovnakými prototypmi, nemožno očakávať dobré výsledky pre odhady chybovosti.



Obr. 27: Diskretizácia spojitých prototypov QPSK, vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2f_0 = 2\frac{1}{T}$

Prototypy v prípade BPSK majú rovnaký tvar ako dva z prototypov v QPSK (s_1, s_3 v obrázku 27). Tieto sú v rámci dvojice jedinečné a preto pri BPSK modulácii pri našej voľbe $\phi = 0$ z (62) a $f_s = 2f_0 = 2\frac{1}{T}$ neočakávame komplikácie.

Pri modulácii s troma bitmy na symbol (ďalej aj 8PSK) sú 4 z ôsmych prototypov zhodné s prototypmi modulácie QPSK, takže už teraz, rovnako ako pri QPSK, aj v prípade 8 PSK vieme, že simulácia prenosu pri voľbe $\phi = 0$ z (62) a $f_s = 2f_0 = 2\frac{1}{T}$ nebude úspešná. Okrem týchto štyroch prototypov modulácia 8PSK pracuje navyše s ďalšími prototypmi zobrazenými na obrázku 28, kde pozorujeme, že žiaden z nich nie je jedinečný, čo taktiež zvýši chybovosť prenosu pri spomínanej voľbe.



Obr. 28: Diskretizácia spojitých prototypov 8PSK, vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2f_0 = 2\frac{1}{T}$

Simulácia a výsledky - BPSK

Pre BPSK je v príslušnom bode $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ pri stanovení požadovanej dĺžky intervalu spoľahlivosti $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$ s využitím referenčnej hodnoty pravdepodobnosti podľa (137) pre voľbu $M = 2$ potrebný počet simulácií $n\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$ uvedený v tabuľke 4:

Počet simulácií bitových prenosov, BPSK		
$(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}\ dB$	$P_{b2}^{S}\left((\frac{E_b}{N_0})^{DISK}\right)$	$n\left((\frac{E_b}{N_0})^{DISK}\right)$
0	$7.864.10^{-2}$	$1.8001.10^{4}$
1	$5.628.10^{-2}$	$2.5765.10^{4}$
2	$3.750.10^{-2}$	$3.9433.10^{4}$
3	$2.287.10^{-2}$	$6.5627.10^{4}$
4	$1.250.10^{-2}$	$1.2138.10^{5}$
5	$5.953.10^{-3}$	$2.5655.10^{5}$
6	$2.388.10^{-3}$	$6.4185.10^{5}$
7	$7.726.10^{-4}$	$1.9871.10^{6}$
8	$1.909.10^{-4}$	$8.0473.10^{6}$
9	$3.362.10^{-5}$	$4.5693.10^{7}$
10	$3.872.10^{-6}$	$3.9683.10^{8}$

Tabuľka 4: Počet simulácií bitových prenosov pre 95-percentné intervaly spoľahlivosti v závilosti od normovaného odstupu signálu od šumu pri zvolenej referenčnej hodnote podľa (137), BPSK

1.stĺpec: skúmané $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$ v dB, 2. stĺpec: teoretická pravdepodobnosť chyby na bit v bode $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, 3. stĺpec: potrebný počet bitových prenosov pri stanovenej dĺžke l podľa (138)

Zrátané 95%-intervaly spoľahlivosti pre vybrané body $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\ dB$ podľa tabuľky 4 uvádzame pre simuláciu so vzorkovacou frekvenciou $f_s = 2\frac{1}{T} = 2.10^6$ v tabuľke 5. Vďaka jedinečnosti prototypov pri tejto hraničenej hodnote vzorkovacej frekvencie sú výsledky v tomto prípade konzistentné. Rovnako pre vyššie hodnoty vzorkovacej frekvencie - tieto tabuľky s výsledkami uvádzame v prílohe: tabuľky C.13 až C.18.

Každá z tabuliek obsahuje v 1. stĺpci príslušný bod $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ v dB, v ktorom interval spoľahlivosti rátame. V druhom stĺpci teoretickú hodnotu pravdepodobnosti chyby

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 63.5125 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07326417	0.08106059	0.00779642	1
1.00	0.05628195	0.05717983	0.06298318	0.00580335	0
2.00	0.03750613	0.03669582	0.04049840	0.00380258	1
3.00	0.02287841	0.02272422	0.02506099	0.00233678	1
4.00	0.01250082	0.01176822	0.01301284	0.00124462	1
5.00	0.00595387	0.00571532	0.00631371	0.00059839	1
6.00	0.00238829	0.00222951	0.00246632	0.00023681	1
7.00	0.00077267	0.00072060	0.00079718	0.00007658	1
8.00	0.00019091	0.00018387	0.00020309	0.00001922	1
9.00	0.00003363	0.00003132	0.00003465	0.00000333	1
10.00	0.00000387	0.00000365	0.00000404	0.00000039	1

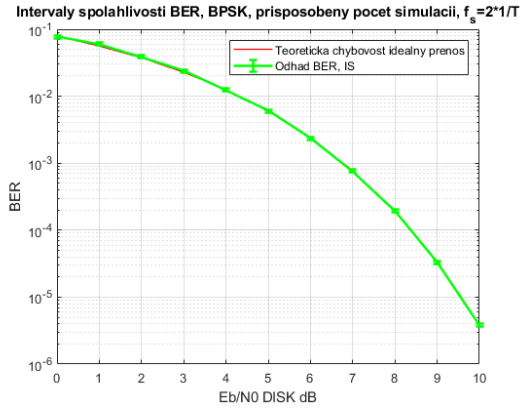
Tabuľka 5: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 2-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

na bit pre idealizovaný prenos v tomto bode: $P_{bM}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$. 3. a 4. stĺpec obsahujú hranice zrátaného 95%- intervalu spoľahlivosti pre hľadanú neznámu pravdepodobnosť $P_{bM}^D\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$ pri premenlivom počte simulácií podľa (136) a (137). V 5. stĺpci uvádzame dĺžku tohto intervalu a posledný, 6. stĺpec má binárny charakter: hodnota 1 označuje, že teoretická pravdepodobnosť z 2. stĺpca je vnútri zrátaného intervalu spoľahlivosti, hodnota 0 opak. Uvedený počet bitov v 1 simulácii predstavuje maximálny počet bitov, ktoré mohli byť simulované v 1 simulačnom cykle. V prípade, že potrebný počet simulácií bol podľa tabuľky 4 nižší, simuloval sa tento počet z tabuľky 4.

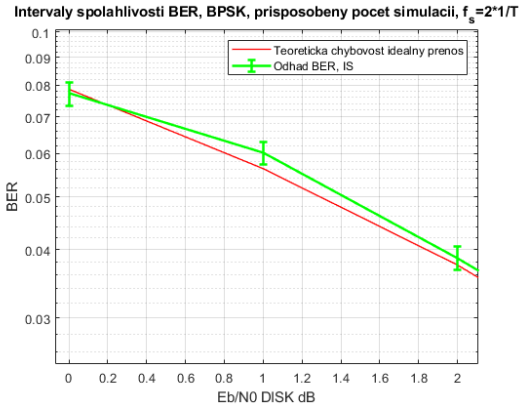
Výsledky z tabuľky 5 dopĺňame o grafické znázornenie na obrázku 29 nižšie.

Ako možno v tabuľkách 5, C.13 až C.18 vidieť, vo väčšine prípadov sa potvrdilo, že teoretická hodnota pravdepodobnosti chyby na bit v idealizovanom prístupe so spojitými prototypmi je vo vnútri 95%-intervalu spoľahlivosti pre pravdepodobnosť chybného detekovania bitu diskrétneho prenosu.

Zároveň ale v 6 prípadoch označených v 6. stĺpci spomínaných tabuliek červenou far-



(a) Náhľad na všetky skúmané body



(b) Detail vybranej oblasti

Obr. 29: 95% - intervaly spoľahlivosti, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 2-násobok fundamentálnej frekvencie

bou, príslušný interval túto teoretickú hodnotu nezahŕňal. Pre vizualizáciu problému viď obr. 29b. Pre tieto body rátame presnejšie intervaly spoľahlivosti, s požadovanou dĺžkou podľa (141). Výsledok, ktorý dopĺňa pôvodné výsledky z tabuľky 5 uvádzame v tabuľke 6. Ostatné výsledky, t.j. intervaly spoľahlivosti spresňujúce uvedené problematické body z tabuliek C.13 až C.18 uvádzame v prílohe, v tabuľke C.19.

$$l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{100}. \tag{141}$$

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2000000$		Charakteristicky interval: $T = 1e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 2576495		Trvanie simulacie: 0.54948 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
1.00	0.05628195	0.05577202	0.05633376	0.00056174	1

Tabuľka 6: 95% - intervaly spoľahlivosti stanovenej dĺžky podľa (136), (137) a (141), BPSK modulácia, rozšírenie nezrovnalosti z tabuľky 5

Užšie intervaly spoľahlivosti sú síce, čo sa týka výpočtu, časovo náročnejšie, ale vďaka vyššiemu počtu realizácii sú presnejšie. Ako možno pozorovať v tabuľkách 6 a C.19, tieto presnejšie intervaly v bodoch, ktoré boli pri širších intervaloch problematické, teraz už zahŕňajú teoretické pravdepodobnosti chyby na bit idealizovaného prenosu.

Simulácia a výsledky - QPSK

Obdobným postupom ako pri BPSK vyššie, postupujeme aj pri rátaní intervalov spoľahlivosti pre skutočnú hodnotu pravdepodobnosti chyby na bit pri prenose s diskrétnymi prototypmi v prípade QPSK modulácie. T.j. odhadujeme skutočnú hodnotu P_{b4}^{D}. Opäť pracujeme podľa vyššie zvolených pravidiel, teda s požiadavkou na dĺžku intervalu zo (138): $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$. Rovnako využívame referenčnú hodnotu pravdepodobnosti podľa (137), ale pre voľbu $M = 4$.

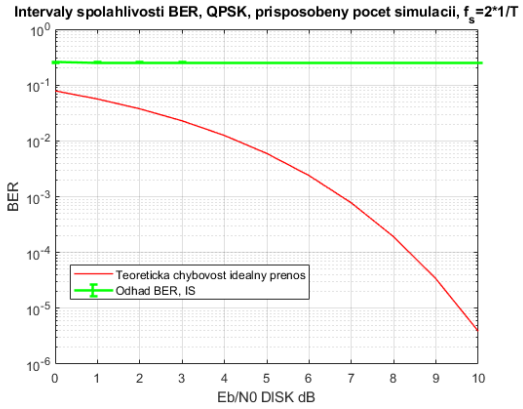
Nakoľko teoretické pravdepodobnosti chyby na bit pri prenose so spojitými signálmi sú pre QPSK a BPSK rovnaké [15], t.j. $P_{b4}^{S} = P_{b2}^{S}$, potom sú referenčné hodnoty pravdepodobnosti pri QPSK rovnaké ako pri BPSK. Z toho vyplýva, že aj potrebné počty simulovaných bitových prenosov sú pri QPSK rovnaké ako je tomu pri BPSK, pri rovnakej požiadavke na výslednú dĺžku intervalu spoľahlivosti. Pre požiadavku podľa (138): $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$, sú potrebné počty simulovaných bitových prenosov uvedené v tabuľke 4.

Aj v tomto prípade rátame 95-percentné intervaly spoľahlivosti v bodoch $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK} = 0, 1, \ldots, 10$, pre vzorkovacie frekvencie určené ako 2,3,4,5,6,7 a 8-násobok fundamentálnej frekvencie f_0.

Ako sme vyššie uviedli, diskretizované prototypy pre QPSK moduláciu nie sú jedinečné pri voľbe vzorkovacej frekvencie $f_s = 2f_0$. Vyššie sme uviedli, že predpokladáme nárast chybovosti zapríčinený tým, že rôzne správy, resp. symboly sú pri tejto voľbe reprezentované rovnakým prototypom. Očakávanie sa potvrdilo, nakoľko v porovnaní s inými voľbami vzorkovacej frekvencie pri QPSK, sú simulované odhady pravdepodobnosti chyby na bit pre $f_s = 2f_0$ razantne vyššie. Výsledok zobrazujeme v tabuľke 7 a na obrázku 30. Takéto značné odchýlenie od teoretickej pravdepodobnosti chyby na bit pre prenos so spojitými signálmi nepovažujeme za vyvrátenie našej hypotézy zo (128), ale vnímame ho výlučne ako dôsledok nesplnenia Nyquistovej podmienky z vety 1.10.

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 1000000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 121.3652 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
0.00	0.07864960	0.25130462	0.26408256	0.01277795	0
1.00	0.05628195	0.24812357	0.25874595	0.01062237	0
2.00	0.03750613	0.24962205	0.25821382	0.00859177	0
3.00	0.02287841	0.24834070	0.25498105	0.00664034	0
4.00	0.01250082	0.24825383	0.25313021	0.00487638	0
5.00	0.00595387	0.24853055	0.25188263	0.00335208	0
6.00	0.00238829	0.24943230	0.25155236	0.00212006	0
7.00	0.00077267	0.24933811	0.25054212	0.00120402	0
8.00	0.00019091	0.24961425	0.25021253	0.00059828	0
9.00	0.00003363	0.24979061	0.25004168	0.00025108	0
10.00	0.00000387	0.24987626	0.24996145	0.00008520	0

Tabuľka 7: Vplyv Nyquistovho kritéria, 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 2-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, požadovaná dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)



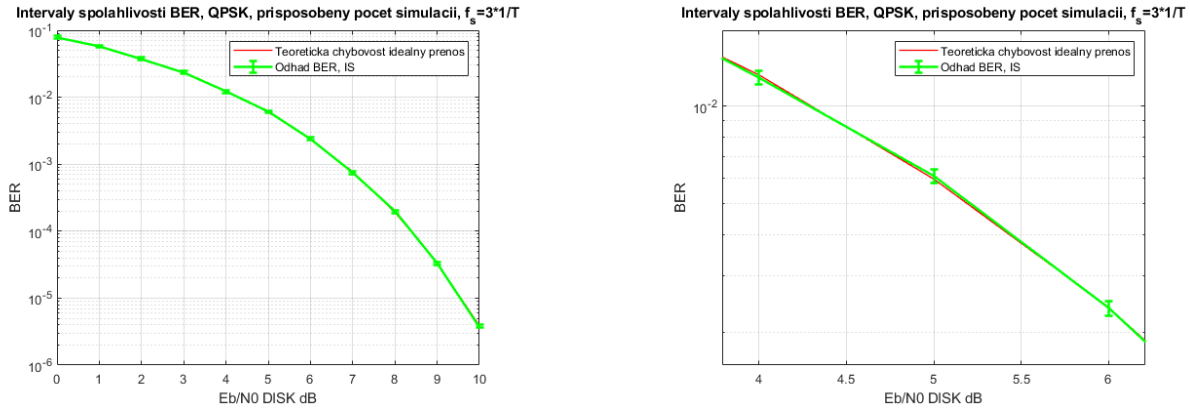
Obr. 30: Vplyv nesplnenia Nyquistovho kritéria na 95% - intervaly spoľahlivosti, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 2-násobok fundamentálnej frekvencie

V tabuľke 8 uvádzame výsledky simulácie pri voľbe vzorkovacej frekvencie ako 3-násobku fundamentálnej. V týchto možno pozorovať, že opäť odhady intervaly spoľahlivosti pokrývajú aj teoretické pravdepodobnosti chyby na bit pri prenose so spojitými signálmi.

Získané intervaly spoľahlivosti z tabuľky 8 zobrazujeme na obrázku 31.

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 1500000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 157.1696 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^{S}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^{S} v IS
0.00	0.07864960	0.07510539	0.08298815	0.00788276	1
1.00	0.05628195	0.05475058	0.06043998	0.00568940	1
2.00	0.03750613	0.03550671	0.03925112	0.00374441	1
3.00	0.02287841	0.02218849	0.02449890	0.00231041	1
4.00	0.01250082	0.01166369	0.01290298	0.00123929	1
5.00	0.00595387	0.00576850	0.00636958	0.00060108	1
6.00	0.00238829	0.00225685	0.00249506	0.00023821	1
7.00	0.00077267	0.00070687	0.00078273	0.00007586	1
8.00	0.00019091	0.00018545	0.00020475	0.00001930	1
9.00	0.00003363	0.00003161	0.00003496	0.00000335	1
10.00	0.00000387	0.00000363	0.00000402	0.00000038	1

Tabuľka 8: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 3-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)



(a) Náhľad na všetky skúmané body

(b) Detail vybranej oblasti

Obr. 31: 95% - intervaly spoľahlivosti, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 3-násobok fundamentálnej frekvencie

Numerické výsledky intervalov spoľahlivosti pre vyššie hodnoty vzorkovacej frekvencie pre QPSK zobrazujeme v prílohe, v tabuľkách C.20 až C.24. V týchto tabuľkách zároveň pozorujeme dva prípady, v ktorých získaný interval spoľahlivosti neobsahuje hodnotu teoretickej pravdepodobnosti chyby na bit prenosu so spojitými signálmi. Pre tieto prípady rátame, podobne ako pri simuláciach BPSK vyššie, intervaly spoľahlivosti s vyš-

šou presnosťou podľa pravidla $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{100}$. Výsledky zobrazujeme v prílohe v tabuľke C.25.

V týchto simuláciach pre spomínané dva problematické prípady, sa pri tejto, prísnejšej, požiadavke na dĺžku intervalu spoľahlivosti, rovnako ako pri BPSK vyššie, ukázalo, že teoretická pravdepodobnosť je vnútri zrátaného intervalu spoľahlivosti.

Simulácia a výsledky - 8PSK

Poslednou moduláciou, ktorú simulujeme je fázová modulácia s 3 bitmi na symbol, ktorú označujeme 8PSK. Potrebné počty simulovaných prenesených bitov zobrazujeme v tabuľke 9 pri voľbe referenčnej hodnoty podľa (137) a požiadavke na dĺžku intervalu spoľahlivosti podľa (138): $l(\hat{p}) = \frac{\hat{p}}{10}$.

Počet simulácií bitových prenosov, 8PSK		
$(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}\ dB$	$P_{b8}^{S}\left((\frac{E_b}{N_0})^{DISK}\right)$	$n\left((\frac{E_b}{N_0})^{DISK}\right)$
0	$1.2269.10^{-1}$	$1.0989.10^{4}$
1	$1.0079.10^{-1}$	$1.3710.10^{4}$
2	$8.0609.10^{-2}$	$1.7529.10^{4}$
3	$6.2245.10^{-2}$	$2.3151.10^{4}$
4	$4.5894.10^{-2}$	$3.1947.10^{4}$
5	$3.1861.10^{-2}$	$4.6692.10^{4}$
6	$2.0481.10^{-2}$	$7.3488.10^{4}$
7	$1.1952.10^{-2}$	$1.2702.10^{5}$
8	$6.1810.10^{-3}$	$2.4706.10^{5}$
9	$2.7481.10^{-3}$	$5.5760.10^{5}$
10	$1.0113.10^{-3}$	$1.5177.10^{6}$

Tabuľka 9: Počet simulácií bitových prenosov pre 95-percentné intervaly spoľahlivosti v závilosti od normovaného odstupu signálu od šumu pri zvolenej referenčnej hodnote podľa (137), 8PSK

1.stĺpec: skúmané $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$ v dB, 2. stĺpec: teoretická pravdepodobnosť chyby na bit v bode $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, 3. stĺpec: potrebný počet bitových prenosov pri stanovenej dĺžke l podľa (138)

Výsledky simulácií pri 8PSK modulácii majú rovnaký charakter ako predošlé simu-

lácie. Pri vzorkovacej frekvencii zvolenej ako 2-násobok fundamentálnej je opäť výsledok vychýlený, a pri vyšších hodnotách vzorkovacej frekvencie sú výsledky simulácií prenosov s 8PSK optimistické. S výnimkou jedného prípadu sa všade potvrdilo, že teoretická pravdepodobnosť chyby na bit v prenose so spojitými prototypmi je vnútri 95-percentného intervalu spoľahlivosti pre skutočnú hodnotu pravdepodobnosti chyby na bit prenosu s diskrétnymi signálmi

Výsledky pre voľbu hraničnej vzorkovacej frekvencie $f_s = 2f_0$ zobrazujeme v tabuľke 10.

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 666666.6667$			Charakteristicky interval: $T = 3e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 0.99407 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}_{dB}$	$P^S_{b8}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P^S_{b8} v IS
0.00	0.12269276	0.32506194	0.34269673	0.01763479	0
1.00	0.10079852	0.32333986	0.33909632	0.01575646	0
2.00	0.08060941	0.32312027	0.33704289	0.01392262	0
3.00	0.06224564	0.33293721	0.34513285	0.01219564	0
4.00	0.04589492	0.32707279	0.33740275	0.01032996	0
5.00	0.03186144	0.33016762	0.33872640	0.00855878	0
6.00	0.02048197	0.32968075	0.33649604	0.00681528	0
7.00	0.01195290	0.33001017	0.33519216	0.00518199	0
8.00	0.00618106	0.33103394	0.33475036	0.00371642	0
9.00	0.00274813	0.33180218	0.33427626	0.00247408	0
10.00	0.00101140	0.33241018	0.33390992	0.00149974	0

Tabuľka 10: Vplyv Nyquistovho kritéria, 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 2-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, požadovaná dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

V tabuľke 11 zobrazujeme výsledky pre simuláciu s voľbou vzorkovacej frekvencie: $f_s = 8f_0$, kde zároveň nastal jediný problematický bod v rámci simulácií 8PSK modulácie, a to, že teoretická hodnota pravdepodobnosti chyby na bit pre prenos so spojitými prototypmi nie je vnútri zrátaného intervalu spoľahlivosti pre skutočnú hodnotu pravdepodobnosti chyby na bit v diskrétnom prípade.

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2666666.6667$		Charakteristicky interval: $T = 3e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 2.0397 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^S v IS
0.00	0.12269276	0.11769216	0.13001009	0.01231794	1
1.00	0.10079852	0.09890166	0.10912168	0.01022002	1
2.00	0.08060941	0.07618899	0.08423088	0.00804189	1
3.00	0.06224564	0.06014402	0.06641639	0.00627237	1
4.00	0.04589492	0.04102830	0.04548999	0.00446169	0
5.00	0.03186144	0.02991994	0.03308871	0.00316877	1
6.00	0.02048197	0.01966793	0.02172659	0.00205866	1
7.00	0.01195290	0.01116903	0.01235483	0.00118580	1
8.00	0.00618106	0.00606504	0.00669289	0.00062786	1
9.00	0.00274813	0.00254364	0.00281500	0.00027136	1
10.00	0.00101140	0.00092805	0.00102750	0.00009945	1

Tabuľka 11: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 8-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Zvýšením požiadavky na presnosť intervalu spoľahlivosti sa tento problém odstránil, viď tabuľka 12.

Simulácie 8PSK modulácie pre ostatné hodnoty vzorkovacej frekvencie viď v prílohe: tabuľky C.26 až C.30.

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2666666.6667$		Charakteristicky interval: $T = 3e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 3194391		Trvanie simulacie: 2.8128 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^S v IS
4.00	0.04589492	0.04575310	0.04621247	0.00045937	1

Tabuľka 12: 95% - intervaly spoľahlivosti stanovenej dĺžky podľa (136), (137) a (141), 8PSK modulácia, pre vybrané body a frekvencie podľa zamietnutia v simuláciách s nižšou presnosťou

Zhrnutie výsledkov uvedených simulácií

Výsledky vyššie uvedených simulácií ukázali, že teoretická pravdepodobnosť chyby na bit v prenosoch so spojitými signálmi je vo väčšine simulácií vnútri 95-percentných in-

tervalov spoľahlivosti pre skutočnú hodnotu pravdepodobnosti chyby na bit diskrétnych prenosov, pri voľbe, že dĺžka intervalu spoľahlivosti bude desatina referenčnej pravdepodobnosti pri voľbe podľa (137).

V bodoch, kde tomu tak nebolo sa overením pre prísnejšiu požiadavku na dĺžku intervalu spoľahlivosti ukázalo, že spomínané teoretické pravdepodobnosti sú obsiahnuté v týchto intervaloch.

Zároveň sa pri simulovaní s hraničnými hodnotami vzorkovacej frekvencie $f_s = 2f_0$ prejavilo Nyquistovo kritérium z tvrdenia 1.10, ktorého nesplnenie spôsobilo na viacerých miestach nezhodu teoretickej pravdepodobnosti s hľadanými intervalovými odhadmi, čo sme bližšie popísali vyššie.

Možno teda konštatovať, že výsledky podporujú našu hypotézu o zhode medzi teoretickou pravdepodobnosťou chybného detekovania bitu v idealizovanom prenose a medzi pravdepodobnosťou chyby na bit v diskrétnom prípade pri BPSK, QPSK a 8PSK moduláciach. Metrika $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ sa ukázala byť vhodnou na porovnávanie diskretizovaných signálov s rôznymi vzorkovacími frekvenciami, ktoré spĺňajú Nyquistovo kritérium. Touto analýzou diskrétneho modelu prenosu signálov sa prejavila konvergencia jeho chybovosti k hodnotám chybovosti idealizovaného prenosu so spojitými signálmi.

Záver

Naša práca mala za cieľ vysvetliť a matematicky popísať vybrané časti obšírnej teórie spracovania a prenosu signálov, a zároveň skúmať prípadné nezrovnalosti medzi použitím prístupov využívajúcich spojité a diskrétne signály.

Určitú drobnú nekonzistentnosť a nešpecifickosť niektorých pojmov, s ktorými prax v oblasti spracovania signálov pracuje sme napravili v prvých dvoch kapitolách práce. Do prvej kapitoly sme sústredili poznatky matematickej teórie. Počnúc všeobecnou definíciou signálu sme všetky ďalšie informácie uvádzali práve v spojitosti s jeho kontextom a s presnou logickou nadväznosťou. Poznatky Fourierovej analýzy sme spracovali s prispôsobením voči všetkým eventuálnym typom signálov. Tieto sme doplnili o potrebné súvisiace tvrdenia, predovšetkým podľa [13]. Rovnako sme uviedli poznatky ohľadne náhodných procesov, predovšetkým AWGN šumu, ktoré sa často mylne považujú za samozrejmé.

Náš prínos v rámci kapitoly, okrem sumarizácie potrebných poznatkov, spočíva aj v rozšírení konceptu výkonovej spektrálnej hustoty. Zvykom, ktorý okrem iných využil aj B. Sklar v [15], je definovať PSD iba pre jeden typ signálov a jej vlastnosti predpokladať i pre iné signály. My sme postupovali presnejšie. PSD sme v definícii 1.22 rozšírili pre rôzne varianty signálov, čo sme zúžitkovali aj neskôr, v kapitole 3.3.2, kde sme vďaka uvedenému získali praktický záver, že hoci PSD spojitého AWGN šumu je konštantná, v diskrétnom prístupe to neplatí, hoci jej význam je v oboch prípadoch zhodný.

V druhej kapitole práce sme preformulovali podstatnú časť poznatkov ohľadne modelu prenosovej sústavy. Uviedli sme problematiku vo forme definícií a podobne, spolu s príkladmi, kde už nie je priestor na nepresnosti a mylnú interpretáciu pojmov. Narozdiel, od niektorých dostupných textov sme teóriu vystavali využitím prechodu od definícií jednoduchších pojmov po zložitejšie, čo sa môže zdať samozrejmosťou, ale množstvo dostupnej literatúry tento prístup nevyužíva. Ako príklad možno uviesť pojem fázovej modulácie v kapitole 2.2. Aby bolo možné ju korektne definovať, predchádzali jej nami zostrojené definície 2.2 až 2.5, s tým, že sme zároveň zaviedli nové pojmy, napríklad vlnový priebeh postupnosti symbolov a i..

Ďalej sme v rámci kapitoly vysvetlili niektoré zvyklosti technickej praxe spracovania signálov, s orientáciou predovšetkým na fázové modulácie. Spomeňme napríklad vysvetlenie zaužívanej terminológie binárnej fázovej modulácie v kontexte základného a preloženého pásma v podkapitole 2.2.3, alebo exaktné, detailné zdôvodnenie pôvodu používanej typickej voľby tvaru základného frekvenčného pásma v podkapitole 2.2.2. Aj tu sa ukázalo, že presné znenie využitých tvrdení, predovšetkým z kapitoly 1.2, vyústilo vo väčšiu prehľadnosť kauzality v praxi používaných záverov.

Druhú kapitolu sme uzavreli odvodením pravdepodobnosti chyby na bit v idealizovanom modeli so spojitými signálmi a AWGN šumom podľa [6, 15]. Chybovosť skúmaných systémov považujeme za jednu z podstatných charakteristík v prenose signálov. V ďalších kapitolách sme sa jej preto venovali s dôrazom na prenosy diskrétnych signálov.

V tretej kapitole sme na začiatku pomocou simulácií v softvéri Matlab demonštrovali niekoľko základných vlastností na počítači generovanej aproximácie AWGN šumu. Nosnou časťou tejto kapitoly je ale naša práca pri nastolení hypotézy rovnosti pravdepodobností chyby na bit pri prenosoch s diskrétnymi a spojitými signálmi.

Naše úsilie v podkapitole 3.3.1 sme sústredili na štúdium chybovosti simulácií spojitých prenosov. Snažili sme sa simulovať prenos so spojitými signálmi, so zachovaním charakteristík ako je napríklad determinovanie počtu lalokov spektra pri uvažovaní základného pásma prenosu. Výsledok na obrázku 21 ukázal systematické vychýlenie chybovosti pri takomto priblížení spojitým signálom, pri rôznej voľbe vzorkovacej frekvencie. T.j. tento prístup sa ukázal byť nevhodný práve kvôli spomínanej nekonzistentnosti teórie ohľadom PSD pre spojité a diskrétne signály. Zatiaľ čo v skutočom prenose so spojitými signálmi platí, že PSD prítomného AWGN šumu je konštantná, ukázali sme, že pri diskrétnom priblížení sa táto mení spolu so vzorkovacou frekvenciou.

Vzhľadom na uvedené, bolo nutné opustiť takýto koncept simulácie spojitých signálov a venovať sa výlučne simulácii prenosov s diskrétnymi prototypmi. O týchto prenosoch sme v tomto kroku mali minimum informácií, nakoľko pri popise idealizovaného modelu prenosu signálov v druhej kapitole, sme sa venovali výlučne prenosom so spojitými prototypmi. Obrázok 21 zároveň ukázal potrebu hľadania ekvivalentnej metriky normalizovaného odstupu signálu od šumu pre diskrétnu simuláciu (označenú $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$), ktorú sme

odvodili v kapitole 3.3.2.

Zobrazenie simulácie chybovosti diskrétneho prenosu voči metrike $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$ a teoretickej chybovosti prenosu so spojitými signálmi na obrázku 22 vyústilo v hypotézu (128), že skutočné pravdepodobnosti chyby na bit pri spojitom a diskrétnom prenose sú zhodné.

Štvrtá kapitola je venovaná stochastickým simuláciam Monte Carlo, ktorými sme podporili hypotézu nastolenú v tretej kapitole. Kvôli potrebe poznania počtu simulácií predom, odôvodnenej v kapitole 4.1.1, a rovnako kvôli požiadavke na obmenu potrebnej dĺžky intervalových odhadov, sme odvodili, ako sa ukázalo vo výsledku, ale aj na obrázku 26, vhodný postup voľby týchto parametrov. Pri zvolení vlastných požiadaviek podľa (136) a (138) sa nám vo výsledku skúmanú hypotézu podarilo podporiť pre prípad BPSK, QPSK a 8PSK modulácií pomocou intervalov spoľahlivosti pre skutočné hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit prenosu s diskrétnymi signálmi. Výsledky simulácií sme uviedli v prehľadných tabuľkách.

Pre ďalšie skúmanie je otvorená otázka presného dôkazu platnosti skúmanej hypotézy, že pravdepodobnosť chyby na bit pri prenosoch so spojitými a diskrétnymi signálmi je rovnaká, eventuálne obdobné podporenie hypotézy aj pri moduláciách vyšších rádov.

Za kľúčové prínosy práce považujeme ucelenosť, komplexnosť a špecificitu informácií širšieho spektra potrebné pre prípadné ďalšie skúmania problematiky, ale predovšetkým praktické výsledky, pozorovania a závery týkajúce sa vzťahov medzi chybovosťou prenosov využívajúcich spojité a diskrétne prototypy. Vzhľadom na uvedené výsledky považujeme predom stanovené ciele práce za splnené.

Zoznam použitej literatúry

[1] Akan, A., Chaparro, L.: *Signals and Systems Using MATLAB*, Academic Press Elsevier, Burlington, 2019

[2] Anděl, J.: *Statistické metody*, matfyzpress, Praha, 2019

[3] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, matfyzpress, Praha, 2011

[4] Berber, S.: *An automated method for BER characteristics measurement*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 53 (2004), 575-580

[5] Deneire, L., Aliferis, I.: *Processus Aléatoires*, Université de Nice, Nice, 2009

[6] Etten, W.: *Introduction to Random Signals and Noise*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2005

[7] Forbelská, M.: *Stochastické modely casových řad*, Učebné texty, Prírodovedecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno, 2011, dostupné na internete (13.12.2020) `https://is.muni.cz/el/sci/podzim2011/M5201/M5201_2011.pdf?lang=cs`

[8] Gavin, H.: *Random Processes*, Učebné texty, Duke University, Durham, 2020, dostupné na internete (3.1.2021) `http://people.duke.edu/~hpgavin/StructuralDynamics/RandomVibration.pdf`

[9] Gray, R., Davisson, L.: *An Introduction to Statistical Signal Processing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004

[10] Harman, R., Rosa, S.: *Stochastické simulačné metódy*, Učebné texty, KAMŠ, FMFI UK, Bratislava, 2019, dostupné na internete (8.4.2021) `http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Harman/SSMp.pdf`

[11] MacKay, D.: *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003

[12] MathWorks: *Communications Toolbox Reference R2021a*, Sprievodná dokumentácia k verzii R2021a, The MathWorks, Inc., Natick, 2021, dostupné na internete (2.4.2021) `https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/comm/comm_ref.pdf`

[13] Ondráček, O.: *Signály a sústavy*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Bratislava, 2008

[14] Shannon, C.: *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal 27 (1948), 379–423, 623–656

[15] Sklar, B.: *DIGITAL COMMUNICATIONS: Fundamentals and Applications*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 2001

[16] Smith, S.: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing, San Diego, 1999

[17] Tuma, J.: *Složité systémy řízení 1. Díl*, Fakulta strojní Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 1997

Príloha A

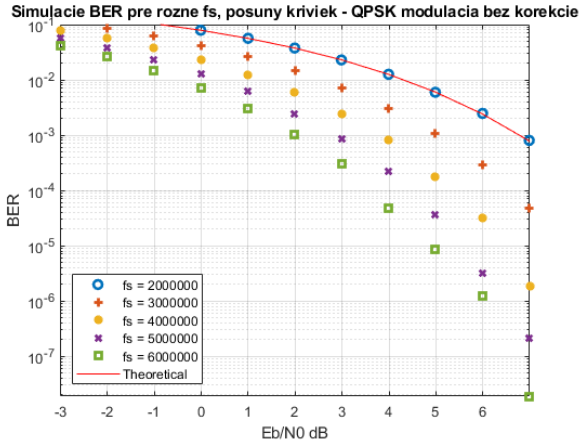
VYSVETLIVKY POUŽITÝCH SCHÉMATICKÝCH SYMBOLOV

BLOK	NÁZOV	VSTUP	VÝSTUP
AWGN	AWGN kanál	s(t)	s(t) + n(t)
D	Rozhodovací blok	$z_1, z_2, ..., z_M$	Optimálne s_i
LPF	Filter dolnej priepuste	s(t)	s(t) frekv. obmedzený
MAP	Mapovanie	Digitálna správa	Komplexný symbol
MF	Spriahnutý filter	r(t)	$z_1, z_2, ...,z_M$
PS	Tvarovací filter	Komplexný symbol	Spojitý signál
S	Vzorkovač	z(t)	z(T)
SINK	Výstup	Bitový tok	---
SRC	Zdroj	---	Binárny signál
∫	Korelátor (Binárna operácia)	Prijatý signál, prototyp	Vzorka
Σ	Súčet (Binárna operácia)	a,b	a + b
⊗	Multiplikátor (Binárna operácia)	x(t), y(t)	x(t)y(t)
⊕	Sumátor (Binárna operácia)	x(t), y(t)	x(t) + y(t)

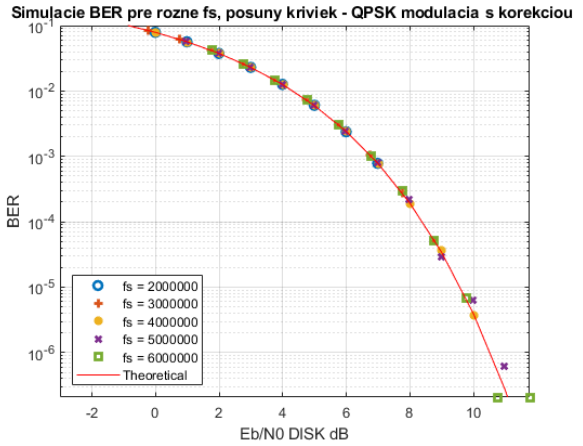
Obr. A.32: Vysvetlivky použitých schématických symbolov

Príloha B

Simulácia BER pre QPSK v závislosti od vzorkovacej frekvencie



(a) Odhady pravdepodobnosti chyby na bit v závislosti od vzorkovacej frekvencie, bez korekcie, QPSK



(b) Odhady pravdepodobnosti chyby na bit v závislosti od vzorkovacej frekvencie, s korekciou, QPSK

Obr. B.33: Odhad prravdepodobnosti chyby na bit, simulovaný prenos s QPSK moduláciou, kontrast výstupov simulácii bez a s korigovaním normalizovaného odstupu od šumu, rôzne vzorkovacie frekvencie

Príloha C

Podrobné výsledky simulácií, intervaly spoľahlivosti, BPSK

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 3000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 88.4436 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07299284	0.08077639	0.00778355	1
1.00	0.05628195	0.05232707	0.05789998	0.00557291	1
2.00	0.03750613	0.03585412	0.03961567	0.00376155	1
3.00	0.02287841	0.02212935	0.02443685	0.00230750	1
4.00	0.01250082	0.01158346	0.01281864	0.00123519	1
5.00	0.00595387	0.00563169	0.00622583	0.00059414	1
6.00	0.00238829	0.00217636	0.00241041	0.00023405	1
7.00	0.00077267	0.00073777	0.00081523	0.00007746	1
8.00	0.00019091	0.00017963	0.00019863	0.00001900	1
9.00	0.00003363	0.00003270	0.00003610	0.00000340	1
10.00	0.00000387	0.00000370	0.00000409	0.00000039	1

Tabuľka C.13: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 3-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 4000000$		Charakteristicky interval: $T = 1e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 116.9053 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07326417	0.08106059	0.00779642	1
1.00	0.05628195	0.05342600	0.05905217	0.00562617	1
2.00	0.03750613	0.03721583	0.04104349	0.00382766	1
3.00	0.02287841	0.02248625	0.02481136	0.00232511	1
4.00	0.01250082	0.01135055	0.01257373	0.00122318	1
5.00	0.00595387	0.00558609	0.00617789	0.00059180	1
6.00	0.00238829	0.00217636	0.00241041	0.00023405	1
7.00	0.00077267	0.00073434	0.00081162	0.00007728	1
8.00	0.00019091	0.00017297	0.00019163	0.00001866	1
9.00	0.00003363	0.00003266	0.00003606	0.00000340	1
10.00	0.00000387	0.00000344	0.00000381	0.00000037	0

Tabuľka C.14: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 4-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 5000000$		Charakteristicky interval: $T = 1e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 146.3191 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07559817	0.08350410	0.00790593	1
1.00	0.05628195	0.05623156	0.06199083	0.00575926	1
2.00	0.03750613	0.03701772	0.04083585	0.00381813	1
3.00	0.02287841	0.02132661	0.02359392	0.00226731	1
4.00	0.01250082	0.01215394	0.01341801	0.00126407	1
5.00	0.00595387	0.00549108	0.00607799	0.00058691	1
6.00	0.00238829	0.00223711	0.00247430	0.00023720	1
7.00	0.00077267	0.00068480	0.00075950	0.00007470	0
8.00	0.00019091	0.00018327	0.00020245	0.00001919	1
9.00	0.00003363	0.00003206	0.00003543	0.00000337	1
10.00	0.00000387	0.00000358	0.00000396	0.00000038	1

Tabuľka C.15: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 5-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 6000000$		Charakteristicky interval: $T = 1e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 163.9166 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07478386	0.08265183	0.00786797	1
1.00	0.05628195	0.05297123	0.05857544	0.00560421	1
2.00	0.03750613	0.03481473	0.03852486	0.00371014	1
3.00	0.02287841	0.02278371	0.02512340	0.00233968	1
4.00	0.01250082	0.01231470	0.01358678	0.00127208	1
5.00	0.00595387	0.00596249	0.00657328	0.00061079	0
6.00	0.00238829	0.00224318	0.00248069	0.00023751	1
7.00	0.00077267	0.00073041	0.00080749	0.00007708	1
8.00	0.00019091	0.00018775	0.00020717	0.00001942	1
9.00	0.00003363	0.00003151	0.00003485	0.00000334	1
10.00	0.00000387	0.00000368	0.00000407	0.00000039	1

Tabuľka C.16: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 6-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 7000000$		Charakteristicky interval: $T = 1e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 175.6296 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07093126	0.07861598	0.00768472	0
1.00	0.05628195	0.05425988	0.05992603	0.00566616	1
2.00	0.03750613	0.03642348	0.04021284	0.00378936	1
3.00	0.02287841	0.02229292	0.02460851	0.00231559	1
4.00	0.01250082	0.01229058	0.01356147	0.00127089	1
5.00	0.00595387	0.00557468	0.00616590	0.00059122	1
6.00	0.00238829	0.00229483	0.00253499	0.00024015	1
7.00	0.00077267	0.00068284	0.00075744	0.00007460	0
8.00	0.00019091	0.00018654	0.00020589	0.00001935	1
9.00	0.00003363	0.00003243	0.00003581	0.00000339	1
10.00	0.00000387	0.00000364	0.00000403	0.00000039	1

Tabuľka C.17: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 7-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 8000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 453728397		Trvanie simulacie: 196.062 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07261301	0.08037849	0.00776547	1
1.00	0.05628195	0.05376711	0.05940968	0.00564257	1
2.00	0.03750613	0.03612640	0.03990129	0.00377488	1
3.00	0.02287841	0.02217396	0.02448367	0.00230971	1
4.00	0.01250082	0.01207357	0.01333361	0.00126005	1
5.00	0.00595387	0.00568111	0.00627776	0.00059665	1
6.00	0.00238829	0.00225989	0.00249826	0.00023837	1
7.00	0.00077267	0.00073139	0.00080852	0.00007713	1
8.00	0.00019091	0.00017491	0.00019366	0.00001876	1
9.00	0.00003363	0.00003341	0.00003684	0.00000344	1
10.00	0.00000387	0.00000385	0.00000424	0.00000040	1

Tabuľka C.18: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, BPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 8-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER BPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 4000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 39683229837		Trvanie simulacie: 9023.30 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
10.00	0.00000387	0.00000385	0.00000389	0.00000004	1
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 5000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 198711831		Trvanie simulacie: 54.1315 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
7.00	0.00077267	0.00076903	0.00077676	0.00000773	1
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 6000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 25654502		Trvanie simulacie: 8.4453 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
5.00	0.00595387	0.00591825	0.00597776	0.00005951	1
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 7000000$			Charakteristicky interval: $T = 1e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 800000		Pocet bitov spolu: 200511881		Trvanie simulacie: 78.3518 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b2}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b2}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07829171	0.07907837	0.00078666	1
7.00	0.00077267	0.00076877	0.00077649	0.00000773	1

Tabuľka C.19: 95% - intervaly spoľahlivosti stanovenej dĺžky podľa (136), (137) a (141), BPSK modulácia, pre vybrané body a frekvencie podľa zamietnutia v simuláciách s nižšou presnosťou

Podrobné výsledky simulácií, intervaly spoľahlivosti, QPSK

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2000000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 183.1155 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07266323	0.08043087	0.00776764	1
1.00	0.05628195	0.05448521	0.06016200	0.00567679	1
2.00	0.03750613	0.03746254	0.04130198	0.00383944	1
3.00	0.02287841	0.02221823	0.02453011	0.00231188	1
4.00	0.01250082	0.01146288	0.01269186	0.00122898	1
5.00	0.00595387	0.00550624	0.00609393	0.00058769	1
6.00	0.00238829	0.00233585	0.00257808	0.00024223	1
7.00	0.00077267	0.00073237	0.00080956	0.00007718	1
8.00	0.00019091	0.00018630	0.00020564	0.00001934	1
9.00	0.00003363	0.00003232	0.00003570	0.00000338	1
10.00	0.00000387	0.00000360	0.00000398	0.00000038	1

Tabuľka C.20: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 4-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2500000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 256.2415 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07320583	0.08099926	0.00779343	1
1.00	0.05628195	0.05300707	0.05861290	0.00560583	1
2.00	0.03750613	0.03560570	0.03935499	0.00374929	1
3.00	0.02287841	0.02177220	0.02406190	0.00228970	1
4.00	0.01250082	0.01210562	0.01336726	0.00126165	1
5.00	0.00595387	0.00552904	0.00611790	0.00058887	1
6.00	0.00238829	0.00225533	0.00249346	0.00023813	1
7.00	0.00077267	0.00078539	0.00086524	0.00007985	0
8.00	0.00019091	0.00018060	0.00019965	0.00001905	1
9.00	0.00003363	0.00003132	0.00003465	0.00000333	1
10.00	0.00000387	0.00000355	0.00000393	0.00000038	1

Tabuľka C.21: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 5-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 3000000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 265.1446 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07222919	0.07997612	0.00774693	1
1.00	0.05628195	0.05202195	0.05757985	0.00555789	1
2.00	0.03750613	0.03516025	0.03888753	0.00372728	1
3.00	0.02287841	0.02134115	0.02360918	0.00226803	1
4.00	0.01250082	0.01257187	0.01385665	0.00128478	0
5.00	0.00595387	0.00553664	0.00612590	0.00058926	1
6.00	0.00238829	0.00229483	0.00253498	0.00024015	1
7.00	0.00077267	0.00073581	0.00081317	0.00007736	1
8.00	0.00019091	0.00017636	0.00019519	0.00001883	1
9.00	0.00003363	0.00003100	0.00003431	0.00000331	1
10.00	0.00000387	0.00000355	0.00000393	0.00000038	1

Tabuľka C.22: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 6-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 3500000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 290.7374 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07646265	0.08440836	0.00794571	1
1.00	0.05628195	0.05562263	0.06135323	0.00573061	1
2.00	0.03750613	0.03431905	0.03800432	0.00368527	1
3.00	0.02287841	0.02214388	0.02445208	0.00230820	1
4.00	0.01250082	0.01147092	0.01270031	0.00122939	1
5.00	0.00595387	0.00584835	0.00645344	0.00060509	1
6.00	0.00238829	0.00226748	0.00250624	0.00023876	1
7.00	0.00077267	0.00073434	0.00081162	0.00007728	1
8.00	0.00019091	0.00017963	0.00019863	0.00001900	1
9.00	0.00003363	0.00003198	0.00003534	0.00000336	1
10.00	0.00000387	0.00000353	0.00000391	0.00000038	1

Tabuľka C.23: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 7-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 4000000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 453728412		Trvanie simulacie: 271.2113 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
0.00	0.07864960	0.07423693	0.08207903	0.00784210	1
1.00	0.05628195	0.05217349	0.05773879	0.00556530	1
2.00	0.03750613	0.03602647	0.03979642	0.00376995	1
3.00	0.02287841	0.02166814	0.02395263	0.00228449	1
4.00	0.01250082	0.01176813	0.01301274	0.00124461	1
5.00	0.00595387	0.00561265	0.00620581	0.00059316	1
6.00	0.00238829	0.00229331	0.00253338	0.00024007	1
7.00	0.00077267	0.00074660	0.00082451	0.00007791	1
8.00	0.00019091	0.00017866	0.00019761	0.00001895	1
9.00	0.00003363	0.00003164	0.00003498	0.00000335	1
10.00	0.00000387	0.00000378	0.00000417	0.00000039	1

Tabuľka C.24: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, QPSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 8-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER QPSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2500000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 198711832		Trvanie simulacie: 85.2203 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
7.00	0.00077267	0.00076886	0.00077659	0.00000773	1
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 3000000$			Charakteristicky interval: $T = 2e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 1600000		Pocet bitov spolu: 12138208		Trvanie simulacie: 6.023 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b4}^S\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b4}^S v IS
4.00	0.01250082	0.01248388	0.01260911	0.00012523	1

Tabuľka C.25: 95% - intervaly spoľahlivosti stanovenej dĺžky podľa (136), (137) a (141), QPSK modulácia, pre vybrané body a frekvencie podľa zamietnutia v simuláciách s nižšou presnosťou

Podrobné výsledky simulácií, intervaly spoľahlivosti, 8PSK

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 1000000$			Charakteristicky interval: $T = 3e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 1.1197 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^{S}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^{S} v IS
0.00	0.12269276	0.11564413	0.12787212	0.01222799	1
1.00	0.10079852	0.09405132	0.10405225	0.01000093	1
2.00	0.08060941	0.07942309	0.08761439	0.00819131	1
3.00	0.06224564	0.06039720	0.06668154	0.00628434	1
4.00	0.04589492	0.04460256	0.04924037	0.00463781	1
5.00	0.03186144	0.02960652	0.03275962	0.00315310	1
6.00	0.02048197	0.01881848	0.02083426	0.00201578	1
7.00	0.01195290	0.01154527	0.01275012	0.00120486	1
8.00	0.00618106	0.00598607	0.00660996	0.00062389	1
9.00	0.00274813	0.00263106	0.00290692	0.00027585	1
10.00	0.00101140	0.00099293	0.00109570	0.00010277	1

Tabuľka C.26: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 3-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 1333333.3333$			Charakteristicky interval: $T = 3e-06$		
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 1.4282 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^{S}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^{S} v IS
0.00	0.12269276	0.11697973	0.12926651	0.01228678	1
1.00	0.10079852	0.09119997	0.10106845	0.00986848	1
2.00	0.08060941	0.07613325	0.08417253	0.00803928	1
3.00	0.06224564	0.05972207	0.06597444	0.00625237	1
4.00	0.04589492	0.04408297	0.04869570	0.00461273	1
5.00	0.03186144	0.03140403	0.03464583	0.00324179	1
6.00	0.02048197	0.01872560	0.02073663	0.00201103	1
7.00	0.01195290	0.01139936	0.01259686	0.00119751	1
8.00	0.00618106	0.00598607	0.00660996	0.00062389	1
9.00	0.00274813	0.00262057	0.00289589	0.00027532	1
10.00	0.00101140	0.00096466	0.00106600	0.00010134	1

Tabuľka C.27: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 4-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 1666666.6667$		Charakteristicky interval: $T = 3e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 1.7003 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^{S}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^{S} v IS
0.00	0.12269276	0.11991892	0.13233333	0.01241441	1
1.00	0.10079852	0.09440784	0.10442513	0.01001730	1
2.00	0.08060941	0.07702521	0.08510612	0.00808091	1
3.00	0.06224564	0.06039720	0.06668154	0.00628434	1
4.00	0.04589492	0.04524451	0.04991309	0.00466857	1
5.00	0.03186144	0.03169678	0.03495275	0.00325597	1
6.00	0.02048197	0.01928296	0.02132231	0.00203935	1
7.00	0.01195290	0.01112297	0.01230641	0.00118345	1
8.00	0.00618106	0.00597028	0.00659337	0.00062309	1
9.00	0.00274813	0.00267129	0.00294918	0.00027789	1
10.00	0.00101140	0.00096787	0.00106937	0.00010150	1

Tabuľka C.28: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 5-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2000000$		Charakteristicky interval: $T = 3e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 1.7673 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^{S}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^{S} v IS
0.00	0.12269276	0.12080982	0.13326244	0.01245262	1
1.00	0.10079852	0.09276804	0.10270971	0.00994167	1
2.00	0.08060941	0.07925576	0.08743943	0.00818368	1
3.00	0.06224564	0.05887831	0.06509042	0.00621211	1
4.00	0.04589492	0.04408297	0.04869570	0.00461273	1
5.00	0.03186144	0.02900071	0.03212325	0.00312254	1
6.00	0.02048197	0.01864599	0.02065294	0.00200695	1
7.00	0.01195290	0.01086201	0.01203202	0.00117001	1
8.00	0.00618106	0.00581239	0.00642745	0.00061506	1
9.00	0.00274813	0.00271678	0.00299696	0.00028018	1
10.00	0.00101140	0.00097109	0.00107275	0.00010166	1

Tabuľka C.29: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 6-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Simulacia Monte Carlo BER 8PSK					
Vzorkovacia frekvencia: $f_s = 2333333.3333$		Charakteristicky interval: $T = 3e-06$			
Pocet bitov v 1 sim.: 2400000		Pocet bitov spolu: 2666928		Trvanie simulacie: 2.8477 sekund	
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}^{DISK}$	$P_{b8}^{S}\left(\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{DISK}\right)$	Dolná hr.	Horná hr.	Dĺžka IS	P_{b8}^{S} v IS
0.00	0.12269276	0.11573316	0.12796508	0.01223192	1
1.00	0.10079852	0.09519224	0.10524540	0.01005316	1
2.00	0.08060941	0.07775003	0.08586455	0.00811451	1
3.00	0.06224564	0.05799254	0.06416201	0.00616947	1
4.00	0.04589492	0.04331902	0.04789455	0.00457553	1
5.00	0.03186144	0.02981546	0.03297902	0.00316356	1
6.00	0.02048197	0.01999987	0.02207502	0.00207515	1
7.00	0.01195290	0.01109226	0.01227414	0.00118187	1
8.00	0.00618106	0.00590712	0.00652701	0.00061989	1
9.00	0.00274813	0.00263981	0.00291610	0.00027630	1
10.00	0.00101140	0.00094410	0.00104438	0.00010028	1

Tabuľka C.30: 95% - intervaly spoľahlivosti a informácia o ich zahrnutí teoretickej hodnoty pravdepodobnosti chyby na bit, 8PSK modulácia, vzorkovacia frekvencia ako 7-násobok fundamentálnej, vybrané hodnoty $(\frac{E_b}{N_0})^{DISK}$, dĺžka intervalu podľa (136), (137), (138)

Príloha D

Zdrojové kódy simulácií

Všetky zdrojové kódy k vykonaným simuláciám sú umiestnené na úložiskách:

`https://drive.google.com/drive/folders/1o3JSuReUNq8saxEDIJ8eCZo1xUDztzC2?usp=sharing`

`https://drive.google.com/drive/folders/1JQXmuBdJDwS_dhUfeXzPPD77E0YUv7Ds?usp=sharing`

Nemennosť na úložisku je zaistená pomocou MD5 Hash uvedených v tabuľke D.31:

Zoznam priložených zdrojových kódov a ich MD5 Hash kód		
Názov súboru	Popis	MD5 Hash
BPSK_KOREKCIA_DATAf	funkcia, simulácia BPSK modulácie	d72dbe4e4912a7caa5e279258183ff43
QPSK_KOREKCIA_DATAf	funkcia, simulácia QPSK modulácie	eebde98be4719bd2f3e6a94d00776095
MPSK_KOREKCIA_DATAf	funkcia, simulácia 8PSK modulácie	7b17081017eaf53925482b338fb01dc9
ISMonteCarloBPSK	Interval spľahlivosti kap. 4.2 BPSK	42671e991c11c3e1abb1c189c88a92cc
ISMonteCarloQPSK	Interval spľahlivosti kap. 4.2 QPSK	7ecc45e9a24467668f4683fff1dcc337
ISMonteCarloMPSK	Interval spľahlivosti kap. 4.2 8PSK	42852747be299e63c86b0b28e566ebde
Simulacia_AWGN	Simulácia AWGN šumu, kap. 3.2	f8df174c6888021cf3e8ccc67e758407
SimulaciaPevnyVSPrisposobeny	Premenlivý počet bit. prenosov, obr. 26	373f46a138a0bed139f538f7cdd2863b

Tabuľka D.31: Priložené zdrojové kódy simulácií a ich MD5 Hash pre overenie nemennosti na úložisku