UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MATEMATICKÉ MODELY PRE RIADENIE ÚVEROVÉHO RIZIKA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021 Bc. Dominika SUROVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MATEMATICKÉ MODELY PRE RIADENIE ÚVEROVÉHO RIZIKA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko - finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

Bratislava 2021 **Bc. Dominika SUROVÁ**



70588582

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dominika Surová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Matematické modely pre riadenie úverového rizika
Mathematical models for credit risk management

Anotácia: Riadenie úverového rizika sa v dnešnej bankovej činnosti stáva čoraz dôležitejším. Je dôležité, aby banka vedela dobre predpovedať očakávanú stratu. Avšak privysoké rezervy znižujú možný zisk, ktorý by mohol byť dosiahnutý použitím peňazí na iné účely. Nízke rezervy môžu spôsobiť nutný predaj aktív, čo môže mať za následok straty. Na predpovedanie očakávaných strát sa používajú matematické modely, ktorým bude venovaná pozornosť v tejto práci.

Vedúci: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 17.12.2019

Dátum schválenia: 21.12.2019 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Moje poďakovanie patrí vedúcej diplomovej práce, Mgr. Soni Kilianovej, PhD., ktorá mi napriek súčasnej zložitej situácii bola vždy ochotná pomôcť. Ďakujem aj svojmu manželovi a celej rodine za podporu pri písaní.

Abstrakt v štátnom jazyku

Surová, Dominika: Matematické modely pre riadenie úverového rizika [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2021, 68 s.

Zameraním tejto diplomovej práce je tématika kreditného rizika a jeho spôsoby merania. Táto problematika nestráca na svojej dôležitosti ani rôznymi inováciami. Práca predstavuje čitateľovi dva komerčne využívané modely - KMV a CreditMetrics, ktorými dokážeme posúdiť či už situáciu, v ktorej sa jednotlivé protistrany nachádzajú alebo mieru investorom podstupovaného rizika. Práca definuje pojmy z danej problematiky, taktiež formuluje predpoklady a vstupy týchto modelov. KMV model určuje riziko z pohľadu pravdepodobnosti zlyhania protistrany. CreditMetrics model za riziko považuje nielen zlyhania, ale taktiež zhoršenie kreditnej kvality protistrany. KMV model aplikujeme na dáta dvoch reálnych spoločností s cieľom posúdiť ich diametrálne odlišnú situáciu prostredníctvom pravdepodobnosti zlyhania. Pri druhej spoločnosti odhadneme hodnotu aktív a ich volatilitu iteračnou metódou, ktorá nám poskytne presnejšie výsledky. CreditMetrics model aplikujeme na fiktívne portfóliá a výsledné riziko kvantifikujeme pomocou štatistických veličín. Výsledky týchto modelov sa nedajú navzájom porovnať, no ich jednotlivé výstupy sú v úverových inštitúciách nepostrádateľné.

Kľúčové slová: zlyhanie dlhopisu, zmena ratingu, KMV model, CreditMetrics model, Monte Carlo simulácie, očakávaná strata, ekonomický kapitál

Abstract

Surová, Dominika: Mathematical models for credit risk management [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2021, 68 p.

The focus of this thesis is credit risk and its methods of measurement. This issue does not lose its importance even through various innovations. The work presents the reader two commercially used models - KMV and CreditMetrics, with which we can assess either the situation in which the individual counterparties find themselves or the degree of risk taken by the investor. In thesis, terms from credit risk topic are defined, also assumptions and inputs of these models are formulated. The KMV model determines the risk in terms of the probability of counterparty default. The CreditMetrics model considers the risk not only the default, but also worsening of the credit quality of the counterparty. We apply the KMV model to the data of two real companies in order to assess their diametrically different situation through the probability of default. For the second company, we estimate the value of the assets and their volatility using an iterative method that will give us more accurate results. We apply the CreditMetrics model to fictitious portfolios and quantify the resulting risk using statistical values. The results of these models cannot be compared mutually, but their individual outputs are indispensable in credit institutions.

Keywords: default of bond, rating change, KMV model, CreditMetrics model, Monte Carlo simulation, expected loss, economic capital

Obsah

Úvod **8**

1 Základné pojmy z oblasti kreditného rizika **10**

1.1 Kreditné riziko 10

1.2 Pojmy spojené s kreditným rizikom 10

1.3 Meranie kreditného rizika 12

1.4 Modely kreditného rizika 13

2 KMV model **14**

2.1 Úvod 14

2.2 Odhad hodnoty aktív spoločnosti a ich volatility 15

2.3 Určenie bodu zlyhania 19

2.4 Výpočet vzdialenosti do defaultu 19

2.5 Výpočet pravdepodobnosti zlyhania 19

3 Implementácia KMV modelu **23**

3.1 Tesla, Inc. 23

3.2 Pacific Gas and Electric Corporation 26

3.2.1 Výpočet iteračnou metódou 29

4 CreditMetrics model - simulačný spôsob **31**

4.1 Vstupy modelu 32

4.2 Medze prechodu (Thresholds) 37

4.3 Výpočet východiskovej hodnoty portfólia 40

4.4 Monte Carlo simulácie 40

4.5 Výpočet novej hodnoty portfólia založenej na simuláciách 42

4.6 Hodnota v riziku (VaR) 43

4.7 Očakávaná a neočakávaná strata 45

5 Aplikácia CreditMetrics modelu na fiktívne portfólio **48**

5.1 Základné portfólio 48

5.2 Vplyvy na odhad kreditného rizika 55
5.3 Hraničné prípady 58

Záver **62**

Zoznam použitej literatúry **65**

Úvod

Problémy vyplývajúce z laxných úverových štandardov pre dlžníkov, zlé riadenie rizika portfólia, či nedostatočná pozornosť na zmeny správania protistrany v dôsledku ekonomických udalostí patria medzi problémy, ktorým čelia úverové inštitúcie už niekoľko desaťročí. Ani inovácie v oblasti merania kreditného rizika neuberajú na jeho významnom postavení, ktorému je venovaná podstatne veľká pozornosť v každej úverovej inštitúcii. Obavy úverovej inštitúcie vyplývajú z neistoty v schopnosť, resp. ochotu protistrany splatiť záväzky. Príliš konzervatívne správanie bankovej inštitúcie ale nie je riešením, nakoľko má za následok obrovské rezervy, ktoré by mohli priniesť zisk použitím na iné učely.

Oblasť merania kreditného rizika čoraz viac napreduje s cieľom zdokonaľovania identifikácie protistrany a situácie, v ktorej sa nachádza, čo vedie k inováciám v používaných modeloch. Zámerom je v konečnom dôsledku dobre predikovať očakávanú stratu úverovej spoločnosti.

Hlavným cieľom práce je predstaviť niektoré z matematických modelov riadenia kreditného rizika, ktoré sú aktuálne využívané v komerčnej sfére. Samozrejme nepôjde iba o teoretický prístup k danej téme, ale v praktickej časti práce budú jednotlivé modely aplikované na reálne dáta vybraných spoločností a neskôr na fiktívne vytvorené portfóliá. Pridanou hodnotou práce je nahradenie klasického výpočtu hodnoty aktív a ich volatility iteračnou metódou, ktorá v určitých situáciách dáva presnejší odhad a taktiež zahrnutie rôznych rozširujúcich vlastností dlhopisov do odhadu rizika portfólia.

Prvá kapitola diplomovej práce má za cieľ uviesť čitateľa do problematiky kreditného rizika a jeho merania. Definujeme v nej základné pojmy z danej oblasti, určíme rizikové parametre a rozdelíme modely na meranie kreditného rizika.

Druhá kapitola je venovaná KMV modelu. Kľúčovým zdrojom tejto kapitoly je publikácia [3], vydaná spoločnosťou Moody's Corporation, ktorá v praxi využíva a vlastní tento model. Po oboznámení čitateľa o vývoji tohto modelu v čase a definovaní jeho predpokladov stanovíme štyri medzikroky vo výpočte pravdepodobnosti zlyhania zvolenej spoločnosti. K týmto krokom uvádzame podrobné odvodenia, ktoré v literatúre často absentujú.

Nasledujúcu tretiu kapitolu radíme medzi praktické, nakoľko odvodenú teóriu týkajúcu sa KMV modelu aplikujeme na reálne dáta dvoch spoločností nachádzajúcich sa v

diametrálne odlišnej ekonomickej situácii. Podrobne rozoberieme, v niektorých prípadoch aj graficky reprezentujeme jednotlivé výstupy KMV modelu pre každú spoločnosť. Pre druhú zvolenú spoločnosť porovnáme výstupy modelu, ak zmeníme spôsob výpočtu druhého medzikroku. Tým uzavrieme tému KMV modelu a prejdeme k druhému vybranému modelu.

Ďalším vybraným modelom, prezentovaným v štvrtej kapitole, je CreditMetrics model. Sú známe dva prístupy k tomuto modelu - analytický a simulačný. Z dôvodu kritéria využitia v praxi sa venujeme výlučne simulačnému spôsobu. Východiskovým zdrojom teoretických poznatkov uvedených v tejto kapitole je technická dokumentácia ku CreditMetrics modelu [9]. Od definovania vstupov modelu prejdeme k jednotlivým krokom výpočtu. Dôležitým medzikrokom odhadu rizika sú Monte Carlo simulácie, prostredníctvom ktorých získame možné scenáre vývoja jednotlivých aktív v portfóliu. Následne ohodnotíme portfólio ako celok. Predstavíme vybrané štatistiky kvantifikujúce kreditné riziko portfólia a z toho vyplývajúce povinnosti pre vlastníka portfólia.

Poslednou, piatou kapitolou je aplikácia CreditMetrics modelu na nami vytvorené fiktívne portfóliá s cieľom predstaviť čitateľovi praktické fungovanie tohto modelu. Uvažujeme v portfóliu dlhopisy s rôznymi podrobnejšími vlastnosťami ako odvetvie či seniorita, ktoré nám v nemalej miere ovplyvňujú výsledné odhadnuté riziko. Odhad rizika spravíme vo viacerých krokoch. Súčasťou kapitoly sú aj rôzne parametrické analýzy s cieľom poukázania vplyvu rôznych subjektívne volených faktorov na výsledné kreditné riziko či čas odhadu. Súčasťou poslednej podkapitoly sú hraničné príklady portfólií, ktoré poukazujú na nebezpečenstvo nediverzifikovaného portfólia či chyby, ktorej sa dopúšťame zanedbaním seniority dlhopisu. Väčšina výsledkov odhadu rizika či jednotlivých analýz je ilustrovaná aj na vložených obrázkoch či tabuľkách.

1 Základné pojmy z oblasti kreditného rizika

V úvodnej kapitole zavedieme pojmy z oblasti kreditného rizika, ktoré sú nevyhnutné pre pochopenie ďalších častí práce. Záviasiac od toho, ako pozeráme na udalosť zlyhania spoločnosti, rozdelíme modely riadenia kreditného rizika na dva typy. Túto kapitolu tvoria zo značnej časti voľne prerozprávané poznatky z [12], [23].

1.1 Kreditné riziko

Spomedzi rôznych druhov rizík v bankovom sektore, ktorými sú napríklad

- operačné riziko,
- obchodné riziko (reputačné riziko),
- trhové riziko,
- riziko likvidity ,

sa v súčasnosti stáva čoraz dôležitejším *kreditné riziko*. Možno ho inak nazvať aj riziko zlyhania protistrany a z toho dôvodu následnej straty, nakoľko protistrana nedokáže alebo nechce splniť svoje záväzky [12].

Zjednodušene povedané, v bankovom sektore kreditné riziko predstavuje zlyhanie klienta, ktorému bol poskytnutý úver. Teda klient porušil podmienky vyplývajúce zo zmluvy medzi bankou a ním. Nedodržal dohodnutú výšku splátky počas určeného obdobia. Táto situácia môže byť spôsobená neochotou klienta splácať, ale aj ekonomickou situáciou. Za kreditné riziko sa považuje aj prísľub banky na poskytnutie úveru klientovi, no následné zhoršenie finančnej situácie u klienta, ktorý úver ešte nenačerpal. Nejedná sa však iba o úvery, kreditné riziko sa týka aj cenných papierov, či derivátov.

Kreditné riziko teda predstavuje pre všetky úverové spoločnosti potenciálne nebezpečenstvo, a preto mu venujú podstatne veľkú pozornosť.

1.2 Pojmy spojené s kreditným rizikom

S kreditným rizikom je spojených viacero pojmov, s ktorými pracuje teória i prax. V tejto kapitole zadefinujeme a vysvetlíme niektoré základné pojmy podľa [7].

Default

Default (inak aj zlyhanie) protistrany je stav, ktorý spôsobí úverovej spoločnosti určitú finančnú stratu. Je to v dôsledku toho, že protistrana (klient, spoločnosť, atď.) nesplní záväzky vyplývajúce zo zmluvy, napríklad nesplatí úroky alebo istinu, protistrana vyhlási bankrot a pod.

Pravdepodobnosť defaultu

Nedá sa s istotou povedať, ktorá spoločnosť skončí defaultom. Dá sa však odhadnúť pravdepodobnosť, s akou spoločnosť skončí defaultom v stanovenom časovom horizonte. Táto premenná *pravdepodobnosť defaultu (PD)* je pre každú spoločnosť iná, no pre priemernú firmu sa pohybuje okolo 2% pre časový horizont 1 rok.

Očakávaná strata

Pod pojmom očakávaná strata (expected loss EL) si možno predstaviť množstvo peňazí, resp. sumu, ktorú úverová spoločnosť stratí tým, že protistrana zlyhá. Intuitívne sa táto suma rovná expozícii v čase defaultu (exposure at default EAD), t.j. hodnote, ktorú protistrana v čase zlyhania ešte dlží úverovej spoločnosti vynásobenej pravdepodobnosťou defaultu (PD). Avšak default protistrany nespôsobí plnú stratu expozície pri zlyhaní. Úverová inštitúcia je schopná časť expozície opätovne získať, napr. vymáhaním a pod. Preto je výsledná očakávaná strata daná vzťahom

$$EL = EAD \cdot PD \cdot LGD, \tag{1}$$

kde LGD (loss given default) percento expozície, ktoré úverová spoločnosť nedokáže získať späť.

Neočakávaná strata

Neočakávaná strata (unexpected loss UL) uvažuje volatilitu očakávanej straty. Intuitívne je to teda suma, ktorú úverová spoločnosť stratí neočakávaným odchýlením sa od očakávanej straty. Avšak vytvorenie rezervy ako súčtu očakávanej a neočakávanej straty sa v skutočnosti ukazuje ako nepostačujúca ochrana voči defaultu, nakoľko existuje možnosť, že strata spoločnosti túto hodnotu prekročí a spoločnosť sa stane insolventnou.

Rating

Úverovú solventnosť, resp. kvalitu jednotlivca či spoločnosti možno posudzovať na základe kreditného ratingu. V praxi sú najčastejšie využívané kreditné ratingy vydané známymi ratingovými agentúrami ako sú Moody's, Standard & Poor's, Fitch či DBRS. Vydané sú na základe scóringových pravidel a historických dát. Každá ratingová agentúra má vlastnú ratingovú škálu a svoje interné pravidlá alebo rôzne predikcie na pridelenie konkrétneho ratingu. Avšak jednotne platí, že vyššie ratingy značia menšie riziko, rovnaké alebo podobné stupne znamenajú približne rovnakú mieru rizika.

Samozrejme možnosťou je určiť si rating spoločnosti sám. Aby hodnotenie bolo čo najpresnejšie, je potrebná rozsiahla historická databáza. Každý záznam musí obsahovať vlastnosti spoločnosti a rating, ktorý mu bol priradený. Pomocou určitej klasifikácie je následne určený rating novej spoločnosti.

1.3 Meranie kreditného rizika

História merania kreditného rizika na medzinárodnej úrovni siaha do roku 1974, kedy guvernéri centrálnych bánk skupiny *Group of Ten - G10* vytvorili výbor na zlepšienie bankového dohľadu, nakoľko došlo k porušeniam na medzinárodnom bankovom trhu. Nemali síce právnu moc, no ich odporúčania a usmernenia mohli jednotlivé národné inštitúcie implementovať, čo v značnej miere robili postupne krajiny po celom svere. Týmto výborom bola vytvorená Bazilejská kapitálová dohoda, ktorá bola viackrát vylepšená a upravovala okrem iného aj štandardy pre meranie kreditného rizika [21].

Oblasť merania kreditného rizika čoraz viac napreduje. Dôvodom je hlavne počas finančnej krízy zvyšujúci sa počet zlyhaných spoločností, čo má za následok obrovské straty pre spoločnosti, ktoré im poskytli úver. Je čoraz ťažšie identifikovať, či sa protistrana nachádza v problémoch a vyhodnotiť vážnosť situácie. Preto dochádza k inováciám aj v modeloch pre riadenie kreditného rizika.

Základom modelovania kreditného rizika je identifikovať udalosť defaultu. Pri zvyšujúcej sa pravdepodobnosti defaultu banka zvyšuje množstvo rezerv (opravné položky) na pokrytie strát zo zlyhaných úverov. Z tohto dôvodu úverové inštitúcie pravidelne počítajú ich očakávané a následne neočakávané straty, definované v predchádzajúcej podkapitole. Je dôležité, aby úverová inštitúcia držala dostatočné množstvo kapitálu na pokrytie aj

neočakávaných strát [12].

1.4 Modely kreditného rizika

V závislosti od toho, ako sa pozeráme na udalosť defaultu, sa modely kreditného rizika delia na dva druhy [22]:

- štrukturálne,
- redukované.

Názov štrukturálne modely vychádza z toho, že tieto modely využívajú kapitálovú štruktúru spoločnosti na odhlad jej reálneho stavu a následne určenia pravdepodobnosti defaultu danej spoločnosti. Využívajú sa napríklad hodnoty publikované vo výročnej správe spoločnosti. Predpokladá sa teda, že človek modelujúci udalosť defaultu má informácie o všetkých záväzkoch, teda pasívach aj aktívach spoločnosti, ako akcionári či manažéri danej spoločnosti. Štrukturálne modely uvažujú, že k defaultu spoločnosti dôjde, ak sa hodnota aktív spoločnosti dostane pod určitú predvolenú hodnotu. Táto hodnota nie je rovnaká vo všetkých modeloch.

Základnou myšlienkou redukovaných modelov je uvažovať udalosť defaultu ako exogénnu náhodnú premennú, teda závisiacu od externých faktorov ako napríklad zmena HDP, zmena nezamestanosti a pod. To, čo spôsobí default spoločnosti, je nešpecifikované a default nemožno predvídať. Udalosť defaultu je najčastejšie modelovaná pomocou Poissonovho procesu, resp. jeho variácií [22].

2 KMV model

V tejto kapitole sa budeme venovať KMV modelu. Je využívaný ako jeden zo spôsobov na kvantifikovanie kreditného rizika, resp. poskytuje jeden zo vstupov pri odhade rizika. Poznatky uvedené v tejto kapitole boli čerpané najmä z [3]. Doplnené sú ďalšími, nižšie citovanými zdrojmi.

2.1 Úvod

Prvým vybraným, v praxi využívaným modelom pre riadenia kreditného rizika, je *KMV model*. Názov tvoria iniciály priezvisiek pánov S.Kealhofera, J.McQuowna a O.Vašička.

Históriu tohto modelu možno datovať od roku 1973, t.j. od vzniku Mertonovho modelu (viď. Mertonovu publikáciu [14]), ktorý tvorí základ KMV modelu. Detailné spracovanie Mertonovho modelu možno nájsť v diplomovej práci [24]. Až v roku 1984 McQuown a Vašiček prišli s vylepšením Mertonovho modelu a v roku 1989 založili spolu s Kealhoferom spoločnosť KMV Company. Vylepšený Mertonov model pomenovali podľa názvu spoločnosti. Model možno nájsť aj pod názvom Moody's model, nakoľko ho v roku 2002 odkúpila ratingová agentúra Moody's Corporation [2].

KMV model zaraďujeme medzi štrukturálne modely. Ako sme uvádzali v predošlej kapitole, model využíva trhové hodnoty spoločnosti na určenie pravdepodobnosti zlyhania. Hranica toho, či dôjde k defaultu, je hodnota dlhu spoločnosti.

Základ modelovania tvoria nasledovné tri trhové údaje o spoločnosti, prostredníctvom ktorých odhadneme výslednú pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti [3]:

- *Hodnota aktív (Asset value)* V_A - trhová hodnota aktív spoločnosti,
- *Riziko hodnoty aktív* - hodnota majetku firmy je odhadovaná, a teda neistá. Preto by sa mala hodnota aktív spoločnosti udávať v kontexte obchodného rizika spoločnosti.
- *Páka (Leverage)* - pomer dlhu a vlastného kapitálu spoločnosti.

Pravdepodobnosť defaultu (PD) určíme podľa [2] v 4 krokoch, ktoré si postupne bližšie rozoberieme:

1. *Odhad hodnoty aktív spoločnosti a ich volatility*

2. *Určenie bodu zlyhania*

3. *Výpočet vzdialensti do defaultu*

4. *Výpočet pravdepodobnosti zlyhania*

2.2 Odhad hodnoty aktív spoločnosti a ich volatility

Postup odhadu hodnoty aktív spoločnosti a ich volatility je takmer rovnaký ako v Mertonovom modeli. Základným predpokladom oboch modelov (Mertonov, KMV) je uvažovanie akciovej spoločnosti obchodovateľnej na burze.

V modeli budeme pracovať s nasledujúcimi premennými:

- hodnota aktív $V_A(t)$,
- záväzky spoločnosti $X(t)$,
- hodnota vlastného kapitálu spoločnosti $V_E(t)$,
- suma vyplatená veriteľom $Y(t)$.

Všetky premenné uvažujeme v čase t, kde $t \in [0, T]$. Na začiatku sa na dlh spoločnosti budeme pozerať ako na celkovú hodnotu záväzkov spoločnosti reprezentovanú jedným dlhopisom bez kupónu s maturitou T. Súvaha (Balance sheet) spoločnosti vyzerá nasledovne:

Aktíva	**Pasíva**
Aktíva spoločnosti $V_A(t)$	Dlhy spoločnosti $X(t)$
	Vlastný kapitál spoločnosti $V_E(t)$

Tabuľka 1: Súvaha (Balance sheet) spoločnosti

To, čím firma disponuje, je teda jej vlastný kapitál a to, čo si požičala. Vyjadruje to nasledujúci vzťah:

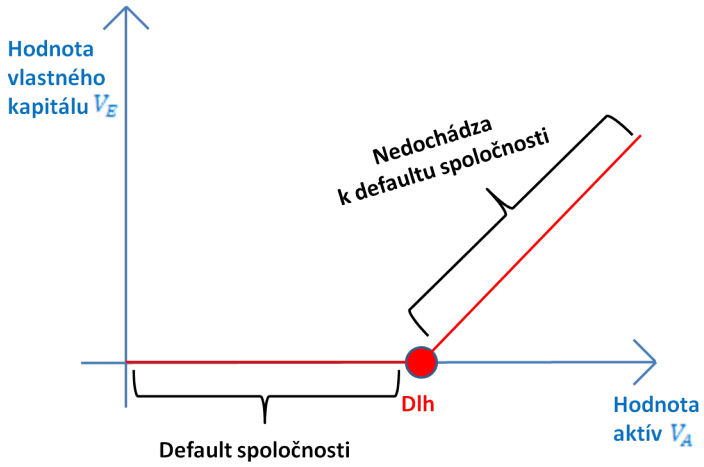
$$V_A(t) = V_E(t) + X(t). \tag{2}$$

K zlyhaniu môže prísť v čase splatnosti dlhu T, ak

$$V_A(T) < X(T), \tag{3}$$

t.j. ak hodnota aktív spoločnosti bude nižšia ako hodnota dlhu.

Udalosť defaultu, resp. zlyhanie možno pretransformovať ako uplatnenie kúpnej opcie. Hodnota vlastného kapitálu spoločnosti bude call opcia na hodnotu aktív spoločnosti. Túto call opciu vlastnia akcionári spoločnosti. Tí majú právo uplatniť ju, čo v tomto prípade značí vyplatiť dlh. Realizačnou cenou je hodnota dlhu [23]. Ilustrujeme si to na obrázku 1:



Obr. 1: Vlastné imanie ako call opcia na hodnotu aktív spoločnosti

V čase splatnosti dlhu sa môže spoločnosť ocitnúť v dvoch situáciách:

1. $V_A(T) < X(T)$, t.j. hodnota aktív je menšia ako hodnota dlhu, a teda firma nemá na dostátie svojich záväzkov. Tejto situácii zodpovedá ľavá časť obrázka 1. Dochádza k defaultu spoločnosti. Veriteľom vyplatí spoločnosť maximum z toho, čo má, t.j. $Y(T) = V_A(T)$. Hodnota vlastného imania spoločnosti bude nulová, t.j. $V_E(T) = 0$.

2. $V_A(T) \geq X(T)$, teda hodnota aktív spoločnosti je väčšia, resp. rovná hodnote záväzkov (pravá časť obrázka 1). Firma v čase splatnosti vyplatí dlh veriteľom a zisk, t.j. rozdiel $V_A(T) - X(T)$, je rozdelený medzi akcionárov spoločnosti. Teda $V_E(T) = V_A(T) - X(T)$.

Z obrázku a prislúchajúceho popisu vyplývajú nasledovné vzťahy:

$$Y(T) = \max(X(T), V_A(T)), \tag{4}$$

$$V_E(T) = \max(0, V_A(T) - X(T)). \tag{5}$$

Hodnota call opcie je daná hodnotou vlastného imania spoločnosti V_E, a jeho volatilitu σ_E si vypočítame z historických dát. Cieľom je vypočítať cenu podkladového aktíva a jej volatilitu, čo je v našom prípade hodnota aktív spoločnosti V_A a ich volatilita σ_A.

Nasledujúce odvodenia sú kombináciou poznatkov z [3] a [23], ktoré sme doplnili o viaceré medzikroky v odvodeniach, resp. o podrobnejší komentár.

Základ tvorí Black-Scholesov model oceňovania opcií, z ktorého získame prvú rovnicu:

$$V_E(t) = V_A(t)N(d_{t,1}) - e^{-r(T-t)}XN(d_{t,2}), \tag{6}$$

kde r je bezriziková úroková miera a

$$d_{t,1} = \frac{\ln(\frac{V_A(t)}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}, \tag{7}$$

$$d_{t,2} = \frac{\ln(\frac{V_A(t)}{X}) + (r - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}} = d_{t,1} - \sigma_A\sqrt{T-t}, \tag{8}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du. \tag{9}$$

K predpokladom Black-Scholesovho modelu patrí, že hodnota aktív sleduje stochastický proces daný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dV_A(t) = \mu_A V_A(t)dt + \sigma_A V_A(t)dW(t). \tag{10}$$

Následne aplikujeme Itôvu lemu [13] na rovnicu (10):

$$dV_E(t) = \left(\frac{\partial V_E(t)}{\partial t} + rV_A(t)\frac{\partial V_E(t)}{\partial V_A(t)} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 V_A^2(t)\frac{\partial^2 V_E(t)}{\partial V_A^2(t)}\right)dt + \sigma_A V_A(t)\frac{\partial V_E(t)}{\partial V_A(t)}dW(t). \tag{11}$$

Ak predpokladáme, že aj hodnota vlastného kapitálu spoločnosti sleduje stochastický proces daný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dV_E(t) = \mu_E V_E(t)dt + \sigma_E V_E(t)dW(t) \tag{12}$$

a porovnáme premenné pri stochastických členoch rovníc (11) a (12), dostávane ďalšiu rovnicu, ktorú musí hodnota aktív V_A a volatilita σ_A spĺňať, t.j.

$$\sigma_E V_E(t) = \sigma_A V_A(t)\frac{\partial V_E(t)}{\partial V_A(t)}. \tag{13}$$

Z teórie Black-Scholesovho modelu vieme, že $\frac{\partial V_E(t)}{\partial V_A(t)} = N(d_{t,1})$, a teda vzťah (14) vieme napísať nasledovne:

$$\sigma_E V_E(t) = N(d_{t,1})\sigma_A V_A(t). \tag{14}$$

Odvodeniami sme dospeli k dvom rovniciam, ktoré neznáme V_A a σ_A musia spĺňať. Máme systém dvoch nelineárnych rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} V_E(t) &= V_A(t)N(d_{t,1}) - e^{-r(T-t)}XN(d_{t,2}), \\ \sigma_E V_E(t) &= N(d_{t,1})\sigma_A V_A(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Riešením nelineárneho systému, napríklad Newtonovou metódou, získame hľadané riešenie V_A a σ_A.

Existuje aj iný algoritmus získania hodnoty aktív V_A a ich volatility σ_A, a to takzvanou iteračnou metódou [8]. Východiskovou rovnicou je rovnica z Black-Scholesovho modelu:

$$V_E(t) = V_A(t)N(d_{t,1}) - e^{-r(T-t)}XN(d_{t,2}). \tag{16}$$

Postup si vysvetlíme na fiktívnom príklade. Uvažujme spoločnosť so záväzkami reprezentovanými jedným bezkupónovým dlhopisom s maturitou 1 rok, t.j. 252 obchodovateľných dní. Poznáme historické hodnoty vlastného imania spoločnosti počas 252 dní predschádzajúceho kalendárneho roka. Získame systém 252 nelineárnych rovníc tvaru (16). V iteráciách pre $k = 0, 1, 2, \ldots$ postupujeme nasledovne:

- $k = 0$

  V nultej iterácii určíme štartovaciu, resp. počiatočnú hodnotu pre každú z 252-tich rovníc, t.j.

  $$V_A^0(j) = V_E(j) + X, \quad j = 1, ..., 252. \tag{17}$$

  Určíme volatilitu σ_A^0 tohto časového radu, ktorá je vstupom do ďalšej iterácie.

- $k = 1, 2, \ldots.$

  Opäť vypočítame hodnoty aktív pre všetky obchodovateľné dni $V_A^k(j)$, kde $j = 1, \ldots, 252$, na základe vzorca (16). Následne určíme volatilitu σ_A^k k-teho radu.

V iterovaní pokračujeme, pokiaľ výsledná volatilita σ_A^k nebude spĺňať nami zvolenú presnosť. Časový rad hodnôt $V_A^k(j)$, ktorý nám poskytuje dostatočne presnú volatilitu σ_A^k, použijeme spolu s výslednou volatilitou na výpočet pravdepodobnosti zlyhania.

2.3 Určenie bodu zlyhania

Jedným z odlišných znakov Mertonovho a KMV modelu je pohľad na záväzky spoločnosti. V Mertonovom modeli sme dlh spoločnosti považovali za jeden bezkupónový dlhopis s maturitou T. Realita je však celkom iná. Zloženie dlhov spoločnosti je podstatne komplikovanejšie. Záväzky spoločnosti sú napríklad pôžičky od bankových inštitúcií, záväzky voči inými spoločnostiam, vydané dlhopisy a pod. Každý záväzok má navyše dohodnutý vlastný spôsob vyplatenia, či už ako celková suma v čase maturity alebo intervalové splátky počas celej doby do maturity záväzku. KMV model sa snaží aspoň o čiastočné rozlíšenie typov záväzku [12].

Z rozsiahlej analýzy Moody's corporation vyplynulo, že vo všeobecnosti spoločnosť zlyhá, ak hodnota aktív klesne pod účtovnú hodnotu jej celkových záväzkov. Avšak niektoré spoločnosti v tomto momente nezlyhajú, ale dokážu ďalej obchodovať a splácať dlhy, ktoré sú z pohľadu maturity dlhodobé. Z tohto dôvodu Moody's corporation určila bod zlyhania (default point DP) niekde medzi celkovými a krátkodobými záväzkami [3], teda

$$DP = STD + \alpha LTD, \quad \alpha \in [0, 1], \tag{18}$$

kde STD je účtovná hodnota krátkodobých a LTD účtovná hodnota dlhodových záväzkov spoločnosti. Moody's corporation v praxi využíva $\alpha = \frac{1}{2}$, nakoľko táto hodnota pri spomínanej analýze najlepšie predikovala reálny bod zlyhania [16].

2.4 Výpočet vzdialenosti do defaultu

Ďalším medzikrokom pri výpočte pravdpodobnosti zlyhania spoločnosti je určiť, ako vzdialená je spoločnosť od defaultu (t.j. distance to default - DD). Túto vzdialenosť môžeme vyjadriť ako

$$DD = \frac{V_A - DP}{V_A \sigma_A}. \tag{19}$$

2.5 Výpočet pravdepodobnosti zlyhania

Výpočet pravdepodobnosti zlyhania je problematický, nakoľko nie je známe budúce pravdepodobnostné rozdelenie hodnoty aktiv. Tomuto problému sa budeme venovať v

tejto kapitole podľa [23], pričom poznatky doplníme o chýbajúce odvodenia a vlastný komentár.

Uvažujme najskôr situáciu, že toto rozdelenie poznáme a $p(x)$ je hustota tohto rozdelenia pravdepodobnosti (probability density function PDF). Pravdepodobnosť zlyhania vypočítame v tomto prípade priamo t.j. integrovaním plochy bod funkciou hustoty $p(x)$ po hodnotu DP.

V reálnom svete však predchádzajúcu situáciu nemožno uvažovať. Rozdelenie pravdepodobnosti hodnoty aktív je neznáme. Môžeme mať ale k dispozícii databázu historických výskytov defaultov. Z celkového počtu spoločností s rovnakou vzdialenosťou do defaultu k rovnakému dátumu vyberieme počet tých, u ktorých prišlo k defaultu v nasledujúcom roku. Opakovaním tohto postupu pre všetky hodnoty DD a všetky dátumy získame pre každú hodnotu DD počet zlyhaných spoločností k celkovému počtu spoločností, čo je samotná pravdepodobnosť zlyhania pre spoločnosť s určeným DD [1].

Najreálnejšou je situácia, že nepoznáme rozdelenie pravdepodobnosti hodnoty aktív ani nemáme k dispozícii databázu historických výskytov defaultov. Pravdepodobnosť zlyhania je pravdepodobnosť, že hodnota aktív klesne pod hodnotu záväzkov spoločnosti. Pre čas t možeme písať:

$$PD(t) = P[V_A(t) < DP]. \tag{20}$$

Keďže funkcia $\ln(x)$ je rastúca, možno predchádzajúcu rovnosť zapísať nasledovne:

$$PD(t) = P[\ln(\ V_A(t)\ ) < \ln(DP)]. \tag{21}$$

Ďalej využijeme predpoklad, že hodnota aktív sleduje stochastický proces daný stochastickou diferenciálnou rovnicou [3]:

$$dV_A(t) = \mu_A V_A(t)dt + \sigma_A V_A(t)dW(t), \tag{22}$$

kde μ_A je očakávaný výnos aktív spoločnosti a $W(t)$ je Wienerov proces, t.j. $W(t) \sim N(0,t)$.

Nech $V_A(t)$ je Itôv proces. Nech $g(t,x) = \ln(t,x) \in C^2([0,\infty] \times R)$. Potom $Y(t) = \ln(V_A(t))$ je tiež Itôv proces a podľa Itôvej lemy [13] platí:

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, V_A(t))dt + \frac{\partial g}{\partial V_A(t)}(t, V_A(t))dV_A(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial V_A^2(t)}(t, V_A(t))\sigma_A^2 V_A^2(t)dt \\
&= 0 + \frac{1}{V_A(t)}dV_A(t) - \frac{1}{2V_A^2(t)}\sigma_A^2 V_A^2(t)dt \\
&= -\frac{1}{2}\sigma_A^2 dt + \frac{1}{V_A(t)}\left(\mu_A V_A(t)dt + \sigma_A V_A(t)dW(t)\right) \\
&= \mu_A dt + \sigma_A dW(t) - \frac{1}{2}\sigma_A^2 dt.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Integrovaním dostávame:

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \mu_A t + \sigma_A W(t) - \frac{1}{2}\sigma_A^2 t + Y(0), \\
\ln(V_A(t)) &= \left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A W(t) + \ln(V_A(0)).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Ak $\epsilon \sim N(0,1)$, potom $\sqrt{t}\epsilon \sim N(0,t)$. Wienerov proces $W(t) \sim N(0,t)$ v (24) možno nahradiť $\sqrt{t}\epsilon$, kde ϵ je náhodná premenná s normálnym rozdelením na intervale $(0,1)$,t.j.

$$
\ln(V_A(t)) = \left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A\sqrt{t}\epsilon + \ln(V_A(0)). \tag{25}
$$

Na základe odvodených vzťahov upravíme (21):

$$
PD(t) = P\left[\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A\sqrt{t}\epsilon + \ln(V_A(0)) < \ln(DP)\right]. \tag{26}
$$

Osamostatníme náhodnú premennú ϵ a dostaneme finálny vzťah pre výpočet pravdepodobnosti defaultu [3]:

$$
PD(t) = P\left[\epsilon \leq -\frac{\ln\left(\frac{V_A(0)}{DP}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A\sqrt{t}}\right] = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{V_A(0)}{DP}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A\sqrt{t}}\right). \tag{27}
$$

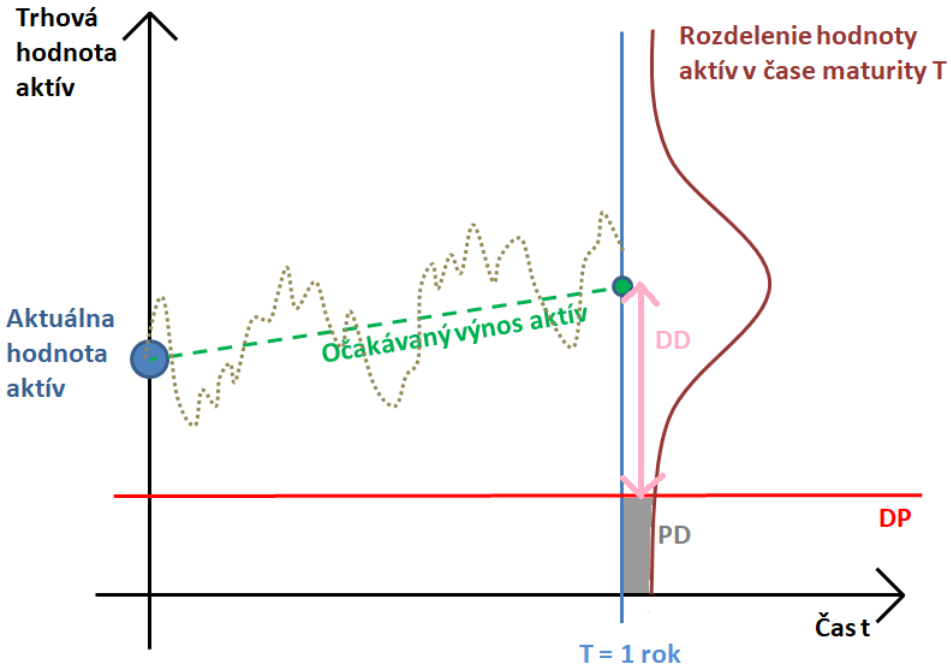
Vzdialenosť do defaultu možno interpretovať aj ako počet štandardných odchýlok, o ktoré je spoločnosť vzdialená od zlyhania.

$$
DD(t) = \frac{\ln\left(\frac{V_A(0)}{DP}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A\sqrt{t}}. \tag{28}
$$

Pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti v čase maturity T môžeme potom vyjadriť ako:

$$
PD(T) = N(-DD(T)). \tag{29}
$$

Na obrázku 2 sú graficky reprezentované vyššie spomínané premenné KMV modelu a vzťah medzi nimi.



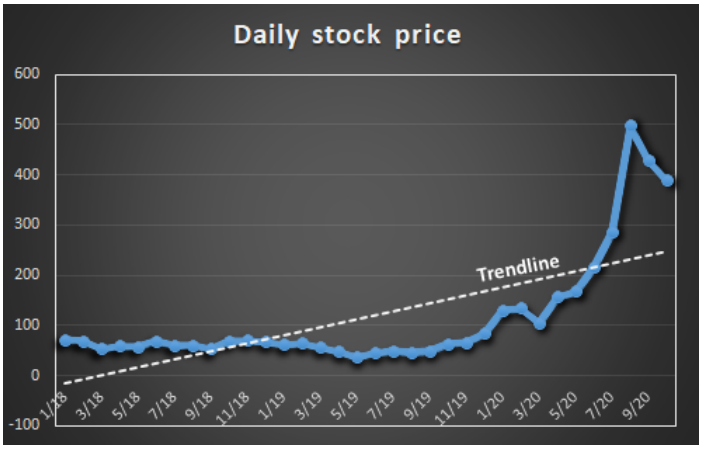
Obr. 2: Grafická reprezentácia premenných KMV modelu

3 Implementácia KMV modelu

Nadobudnuté teoretické poznatky zhrnuté v predchádzajúcej kapitole teraz využijeme pri aplikácii na reálnych dátach vybraných spoločností s cieľom predikovať ich zlyhanie. Všetky nami vybrané spoločnosti sú americké a obchodovateľné na burze. Na prvej zvolenej spoločnosti si postupne prejdeme všetky medzikroky vo výpočte pravdepodobnosti defaultu.

3.1 Tesla, Inc.

Tesla je americká spoločnosť sídliaca v Kalifornii. Založená bola v roku 2003 (pôvodne ako Tesla Motors) s cieľom urýchliť nástup udržateľnej elektrodopravy. V súčasnosti ich výroba nie je orientovaná iba na elektromobily, ale orientuje sa aj na produkty na výrobu čistej energie, t.j. bez potreby fosílnych palív. V posledných 2 rokoch táto spoločnosť prekvapuje svojím ziskom a hodnota jej akcií má rastúci trend, viď obrázok 3.



Obr. 3: Vývoj ceny akcií spoločnosti Tesla, zdroj: www.finance.yahoo.com

V prvej časti nás bude zaujímať pravdepodobnosť zlyhania tejto spoločnosti v roku 2020. Pravdepodobnosť defaultu spoločnosti v roku 2020 určíme v niekoľkých krokoch, a to z historických dát a údajov o spoločnosti z roku 2019. Vstupné premenné sme získali z týchto zdrojov:

- ceny akcií spoločnosti pochádzajú zo stránky https://finance.yahoo.com/,
- počet vydaných akcií spoločnosťou sme získali z internetovej stránky https://www.macrotrends.net/,

- hodnota záväzkov spoločnosti pochádza z vydaných reportov spoločnosti, ktoré reportuje firma na kvartálnej i ročnej báze.

Odhad hodnoty aktív a ich volatility

Prvou zo vstupných premenných pre odhad hodnoty aktív spoločnosti a ich volatility je hodnota vlastného kapitálu spoločnosti $V_E(t)$, $t = 1, ..., 252$. Túto premennú vypočítame podľa vzťahu

$$\text{vlastné imanie} = \#\text{ spoločnosťou vydaných akcií} \cdot \text{cena akcie}.$$

Hodnota zodpovedajúca času $t = 1$ je údaj z obchodovateľného dňa 2.1.2019 a čas $t = 252$ zodpovedá dňu 31.12.2019. Z takto vzniknutého časové radu vypočítame volatilitu vlastného kapitálu spoločnosti, v našom prípade rovnú $\sigma_E = 49.06\%$.

V teórii opcií možno hodnoty V_e a σ_E interpretovať ako hodnotu call opcie a jej volatilitu. V ďalšom kroku využijeme Black - Scholesov model a budeme riešiť spomínaný nelineárny systém 2 rovníc (15), do ktorého vstupuje navyše aj hodnota záväzkov spoločnosti a bezriziková úroková miera. Za bezrizikovú úrokovú mieru považujeme úrokovú mieru pre 1-ročné americké vládne dlhopisy, nakoľko analyzujeme americkú spoločnosť. Jej hodnota ku dňu 31.12.2019 je $r = 1.55\%$ [25]. Hodnota záväzkov spoločnosti (total liabilities) získaná z ročného reportu spoločnosti Tesla je $X = 26199 \cdot 10^6$ dolárov. Systém dvoch nelineárnych rovníc (15) s dosadenými vyššie uvedenými hodnotami riešime v programe MATLAB funkciou *fsolve*. Výstupom je trhová hodnota aktív spoločnosti V_A a ich volatilita σ_A ku dňu 31.12.2019:

- $V_A = 99840 \cdot 10^6$ a $\sigma_A = 36.39\%$.

Bod zlyhania

Ako sme definovali v podkapitole 2.3, spoločnosť Moody's corporation vychádza z predpokladu, že k defaultu dochádza, ak hodnota aktív spoločnosti klesne pod hodnotu tzv. default pointu (bodu zlyhania). Ten vypočítame nasledovne:

- $DP = STD + \frac{1}{2}LTD = (10667 + \frac{1}{2}15532) \cdot 10^6 = 18433 \cdot 10^6$.

Pravdepodobnosť defaultu spoločnosti Tesla

Do vzťahu pre výpočet pravdepodobnosti zlyhania (27) vstupuje hodnota μ_A, t.j. očakávaný výnos aktív spoločnosti. Túto hodnotu získame z časového radu vypočítaných trhových hodnôt aktív $V_A(t), t = 1, 2, ..., 252$ spoločnosti Tesla: $\mu_A = 0.28$.

Nakoľko už poznáme všetky potrebné premenné a parametre, na základe vzťahov (28) a (29) vypočítame hľadanú vzdialenosť do defaultu a pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti Tesla. Uvažujme výslednú pravdepodobnosť zlyhania pre 2 prípady. V prvom predpokladáme, že k defaultu spoločnosti dôjde, ak hodnota aktív klesne pod celkovú hodnotu dlhu X a v druhom prípade uvažujeme rovnaký predpoklad ako spoločnosť Moody's corporation, teda default nastane, ak hodnota aktív klesne pod bod zlyhania DP. Uvedieme získané výsledky pre oba prípady:

(a) X: $DD = 4.26$, $PD = 0.001\%$,

(b) DP: $DD = 5.23$, $PD = 0.00001\%$.

Rozdiel medzi výslednými pravdepodobnosťami defaultu je približne 2 rády. Intuitívne sa dalo očakávať, že v druhom prípade bude pravdepobnosť defaultu nižšia. Tým, že hodnota dlhu sa zníži, obsah šedej plochy PD na obrázku 2 sa zmenší. Pravdepodobnosť defaultu spoločnosti Tesla je pomerne nízka, na základe tohto parametra ju možno radiť medzi menej rizikové spoločnosti.

Analýza výsledkov

K výhodám KMV modelu bezpochyby patrí jeho schopnosť pomerne rýchlo odzrkadliť zmenu (zlepšenie alebo zhoršenie) finančnej situácie spoločnosti, ktorá bola zachytená vo vývoji ceny akcií. Ak sú ale zmeny v cenách akcií výrazné, vypočítané pravdepodododobnosti zlyhania spoločnosti môžu byť rôzne vychýlené, čo ale nemusí súvisieť so zmenami situácie spoločnosti, ale napríklad so zmenou správania účastníkov trhu [12].

Spoločnosť Tesla, Inc. je toho príkladom. Mnohí analytici sa zhodujú, že ide o nafúknutú bublinu, ktorá môže kedykoľvek prasknúť. Ani optimistické očakávania nedokážu zdôvodniť ich súčasnú cenu. Podľa každého tradičného ukazovateľa vyzerajú akcie spoločnosti Tesla nadhodnotené. Navyše sa očakáva ďalší rast, nakoľko nový prezident USA John Biden uviedol, že chce, aby sa USA stalo svetovým lídrom vo výrobe elektromobilov a plánuje to podporiť značnými investíciami.

Takmer nulová pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti Tesla môže byť teda odzrkadlením nadhodnotených cien akcií tejto spoločnosti.

3.2 Pacific Gas and Electric Corporation

Pacific Gas and Electric Corporation (skr. PG&E Corporation) je americká energetická spoločnosť so sídlom v San Franciscu v Kalifornii. Jej história siaha do roku 1854. Pôvodne vznikla spojením viacerých malých elektrických, vodárenských a plynárenských spoločností. Do 80.tych rokov 20. storočia bola jednou z troch najväčších energetických spoločností v USA. V súčasnosti má viacero dcérskych spoločností a dodáva elektrinu a plyn do väčšiny domácností na severe Kalifornie [10]. Jej najväčšia dcérska spoločnosť PG&E Company stojí za historicky najväčšími požiarmi v štáte Kalifornia v roku 2018 (tzv. Camp Fire 2018). Táto skutočnosť mala za následok prepad cien akcií PG&E Corporation a taktiež väčšie zadĺženie tejto spoločnosti. Nakoľko spoločnosť čelila stovkám súdnych sporov s obeťami požiarov, ktorí od spoločnosti žiadali desiatky miliárd dolárov, v januári 2019 spoločnosť požiadala o ochranu pred veriteľmi počas bankrotu.

Dňa 15.11.2018 spoločnosť Moody's znížila rating tejto spoločnosti z Baa2 na Baa3 a dňa 14.1.2019 dokonca na C. Prvé zníženie ratingu Moody's corporation odôvodnila zvyšujúcimi sa potenciálnymi záväzkami spoločnosti spojenými s Camp Fire 2018 a neistotou s vymáhaním záväzkov. Druhé zníženie je odôvodnené vysokou pravdepodobnosťou vyhlásenia bankrotu materskej a dcérskej spoločnosti.

Na základe spomínaných informácií je v tomto prípade zaujímavé pozrieť sa na pravdepodobnosť zlyhania tejto spoločnosti v roku 2019. Opäť budeme využívať jednoročné historické dáta o spoločnsoti PG&E Corporation, t.j. z roku 2018. Zdroje historický dát sú rovnaké ako pri prvej analyzovanej spoločnosti Tesla.

Odhad hodnoty aktív spoločnosti PG&E Corporation a ich volatility vstupujúcich do výpočtu pravdepodobnosti zlyhania vykonáme dvojako. Najprv rovnako ako pri predchádzajúcej spoločnosti Tesla, t.j. riešením systému 2 nelineárnych rovníc. V druhom prípade tieto hodnoty vypočítame iteračnou metódou uvedenou v podkapitole 2.2. Predpokladáme, že k defaultu spoločnosti dôjde, keď trhová hodnota aktív spoločnosti klesne pod bod zlyhania DP definovaný spoločnosťou Moody's. Celková hodnota záväzkov spoločnosti k 31.12.2018 má hodnotu $X = 64092 \cdot 10^6$ dolárov a úroková miera pre 1-ročné americké vládne dlhopisy k rovnakému dátumu je $r = 2.54\%$.

Výpočet V_A a σ_A riešením systému 2 nelineárnych rovníc

Nakoľko postupujeme rovnako ako pri odhade hodnoty aktív a volatility spoločnosti Tesla,

nebudeme uvádzať podrobnejší komentár k jednotlivým krokom.

Na základe historických dát vypočítame hodnotu vlastného kapitálu spoločnosti $V_E(t)$, $t = 1, ..., 251$. Čas $t = 1$ je 2.1.2018 a $t = 251$ je 31.12.2018. Volatilita vlastného kapitálu spoločnosti je $\sigma_E = 67.37\%$.

Funkciou *fsolve* v softvéri MATLAB riešime nelineárny systém. Výstupom je trhová hodnota aktív PG&E Corporation $V_A = 74522 \cdot 10^6$ a ich volatilita $\sigma_A = 11.82\%$ k dňu 31.12.2018.

Bod zlyhania DP vypočítame z hodnoty krátkodobých a dlhodobých záväzkov PG&E Corporation:

$$DP = (41695 + \frac{1}{2}22397) \cdot 10^6 = 52893.5 \cdot 10^6.$$

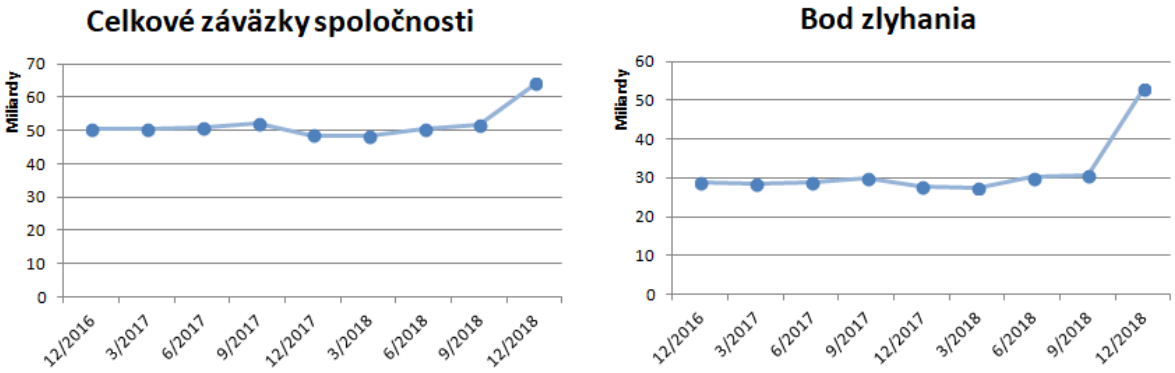
Z trhových hodnôt aktív V_A pre jednotlivé obchodovateľné dni roka 2018 získame očakávaný výnos aktív $\mu_A = -0.13$.

Vypočítali sme, že spoločnosť PG&E Corporation je vzdialená 1.73 štandardných odchýlok od defaultu a pravdepodobnosť zlyhania je teda $PD = 4.14\%$.

Pozrime sa na dáta tejto spoločnosti z dlhodobejšieho hľadiska (od roku 2016). Získané dáta graficky znázorníme na nasledujúcich obrázkoch:



Obr. 4: Vývoj ceny akcií spoločnosti PG&E Corporation, zdroj: www.finance.yahoo.com

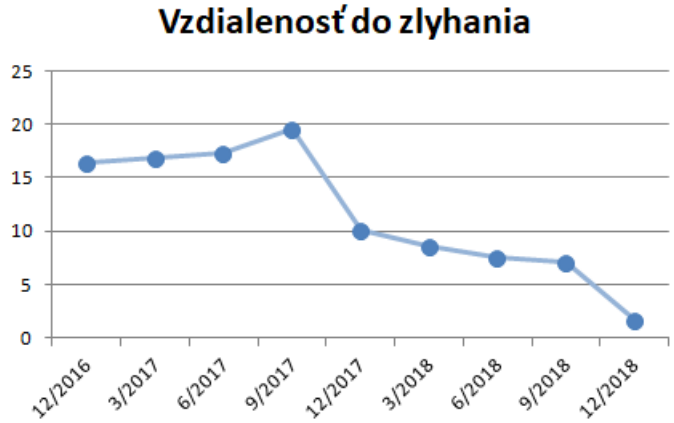


Obr. 5: Spoločnosťou reportovaná celková výška záväzkov (vľavo) a nami vypočítaný bod zlyhania (vpravo)

Vzhliadnuc na vývoj cien akcií spoločnosti PG&E Corporation (obr. 4) možno usudzovať, že vypočítanú vyššiu pravdepodobnosť zlyhania má za následok prudký pokles cien akcií v novembri 2018 a rast záväzkov spoločnosti, čím sa samozrejme zvýšila aj hodnota bodu zlyhania, viď. obrázok 5.

Prudký prepad cien akcií a väčšie zadĺženie spoločnosti spôsobilo zainteresovanie spoločnosti PG&E Corporation v spomínaných kalifornských požiaroch v novembri 2018. Požiar vznikol z chybného elektrického vedenia patriaceho spoločnosti PG&E Corporation. Je teda zaujímavé pozrieť sa, akú vzdialenosť do defaultu dosahovala spoločnosť pred zapríčinením kalifornských požiarov.

Kedže hodnota záväzkov spoločnosti je reportovaná na štvrťročnej báze, zobrazíme si vypočítané vzdialenosti do zlyhania po kvartáloch (od 4Q 2016 do 4Q 2018):



Obr. 6: Vypočítané vzdialenosti do zlyhania spoločnosti PG&E Corporation

Z obrázka 6 vidíme, že počet štandardných odchýlok, o ktoré je firma vzdialená od

zlyhania, má klesajúci trend. Porovnaním obrázkov 4 a 6 zase vidieť, že krivka vzdialenosti do zlyhania dobre reflektuje situáciu na trhu, t.j. zmena ceny akcií vyvolá zmenu vzdialenosti do zlyhania.

3.2.1 Výpočet iteračnou metódou

Opäť chceme zistiť, aká je pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti PG&E Corporation v roku 2019. Teraz však zvolíme iný spôsob výpočtu trhovej hodnoty aktív spoločnosti, čo bude mať samozrejme za následok inú výslednú pravdepodobnosť zlyhania. Trhovú hodnotu aktív spoločnosti a ich volatilitu možno získať iteračnou metódou spomínanou v podkapitole 2.2.

Uvažujeme rovnako ceny akcií spoločnosti PG&E Corporation počas 251 obchodovateľných dní roku 2018. Dostávame systém 251 nelineárnych rovníc z Black-Scholesovho modelu. Postupujeme iteračne rovnako ako vo fiktívnom príklade v podkapitole 2.2, t.j. pokiaľ výsledná volatilita vzniknutého časového radu trhových hodnôt akcií nebude spĺňať nami zvolenú presnosť 10^{-10}. Vstupom do výpočtu je taktiež celková hodnota záväzkov spoločnosti k 31.12.2018, a to $X = 64092 \cdot 10^6$ dolárov a úroková miera pre 1-ročné americké vládne dlhopisy k rovnakému dátumu $r = 2.54\%$. Bod zlyhania je $52893.5 \cdot 10^6$.

Na to, aby výsledná volalita trhových hodnôt aktív spĺňala zvolenú presnosť, vykonalo sa v našom programe 13 iterácií. Výsledná volatilita má hodnotu $\sigma_A = 13.85\%$ a hľadaná trhová hodnota aktív spoločnosti má hodnotu $V_A = 74285 \cdot 10^6$ dolárov. Z trhových hodnôt aktív spoločnosti pre každý obchodovateľný deň roku 2018 vypočítame očakávaný výnos aktív $\mu_A = -0.13$. Zo všetkých vypočítaných hodnôt určíme vzdialenosť do zlyhania a pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti PG&E Corporation v roku 2019 a to $DD = 1.44$ a $PD = 7.53\%$.

Iteračný spôsob získania trhovej hodnoty aktív spoločnosti V_A a ich volatility σ_A sa v niektorých prípadoch považuje za lepší v porovnaní s riešením systému dvoch rovníc o dvoch neznámych. Problémom spôsobu riešenia systému dvoch rovníc o dvoch neznámych je predpoklad konštantnosti volatility vlastného kapitálu spoločnosti σ_E. Prejaví sa to hlavne v prípade spoločností s rýchlo klesajúcimi hodnotami aktív, kedy sa volatilita vlastného kapitálu rapídne zvyšuje v dôsledku zmien pákového efektu. Volatilita trhovej hodnoty aktív spoločnosti σ_A získaná riešením nelineárneho systému bude pod-

hodnotená [15].

Z vývoja cien akcií spoločnosti PG&E Corporation na obrázku 4 vidieť, že výpočet trhovej hodnoty aktív spoločnosti a ich volatility iteračnou metódou dá presnejšie výsledky. Teda aj takto vypočítaná pravdepodobnosť zlyhania je presnejšia.

4 CreditMetrics model - simulačný spôsob

V predchádzajúcich kapitolách sme predstavili kreditné riziko z pohľadu defaultu spoločnosti. No vo všeobecnosti sa za kreditné riziko považuje nielen zlyhanie, ale aj zhoršenie kreditnej kvality protistrany, čo môže mať za následok stratu u veriteľa.

Model, ktorý predstavíme v tejto kapitole, slúži na odhad kreditného rizika portfólia zapríčineného zmenou hodnoty jednotlivých dlhopisov s prihliadaním na ich vzájomnú koreláciu. Podstatná časť poznatkov uvedená v tejto kapitole je čerpaná zo zdrojov [9] a [1].

Uvažujme, že hodnota jednotlivých dlhopisov sa mení v čase výlučne v dôsledku zmien úverovej kvality protistrany. Ako sme definovali v podkapitole 1.2, kvalitu spoločnosti odzrkadluje kreditný rating spoločnosti vydaný ratingovými agentúrami. Napríklad pravdepodobnosť zlyhania spoločnosti počítaná v podkapitole 2.5 je jedným zo základným vstupov pre pridelenie ratingu spoločnosťou Moody's.

CreditMetrics model bol vytvorený investičnou nadnárodnou bankou JPMorgan sídliacou v New Yorku v roku 1997. Od roku 1999 sa tento model stal súčasťou riadenia kreditného rizika takmer pre všetky väčšie banky. Samozrejme od svojho vzniku sa neustále vyvíja a vylepšuje, aby dostatočne pružne reagoval na vývoj trhu. V praxi môže byť využitý na portfóliá zložené nielen z dlhopisov, ale aj z iných investičných nástrojov (swapy, forwardy, atď.).

Výpočet kreditného rizika portfólia je v CreditMetrics modeli založený na kreditných ratingoch a pravdepodobnostiach prechodu medzi nimi. Uvažujme viacero ratingových stupňov (počet označme $S, S \in \mathbb{N}$) a portfólio zložené z viacerých dlhopisov (ozn. $k, k \in \mathbb{N}$). V čase, v ktorom meriame kreditné riziko portfólia, ratingové ohodnotenie dlhopisov v portfóliu môže mať S^k možností. Pre vyššie hodnoty S, k je analytický výpočet kreditného rizika CreditMetrics modelom časovo veľmi náročný. Toto je hlavným dôvodom voľby simulačného spôsobu odhadu kreditného rizika portfólia.

Analytický spôsob odhadu kreditného rizka je vhodný pre pochopenie fungovania CreditMetrics modelu. Odporúčame si ho preštudovať pred použítím simulačného spôsobu. No nakoľko je spracovaný v mnohých publikáciách aj diplomových prácach študentov našej fakulty, budeme sa venovať rovno simulačného spôsobu. Analytický spôsob je podrobne spracovaný a vysvetlený na konkrétnych príkladoch napríklad v publikácii [9] alebo [19].

Simulačný spôsob je tiež využívaný v praxi, čo je kritérium našich zvolených modelov. Výstupom simulačného spôsobu odhadu kreditného rizika je hodnota v riziku (VaR), čo sa analytickým spôsobom dá určiť len pre menšie portfólia.

V nasledujúcich podkapitolách si definujeme vstupy a predpoklady tohto modelu a taktiež jednotlivé kroky odhadu kreditného rizika CreditMetrics modelom.

4.1 Vstupy modelu

Portfólio

Prvým samozrejmým vstupom do modelu je dataset zložený z jednotlivých dlhopisov obsiahnutých v našom portfóliu. Každý riadok datasetu podáva informáciu o jednom dlhopise. Dlhopis má svoj identifikátor ID, nominálnu hodnotu F, maturitu T, kupón C, odvetvie, senioritu (podriadenosť), kreditný rating a počet takýchto dlhopisov v portfóliu.

Rating, matica pravdepodobností prechodu medzi ratingami

Predpokladom CreditMetrics modelu je, že sú známe všetky počiatočné ratingy pre dlhopisy obsiahnuté v portfóliu. Rating týchto dlhpisov možno získať dvojako:

1. ratingovou agentúrou (S&P, Moody's,...)
2. vlastným ohodnotením.

Prideliť vlastný kreditný rating vyžaduje rozsiahlu analýzu informácií o dlžníkovi. Ak by bol dlžníkom jednotlivec, posudzovali by sa napríklad jeho príjmy, nesplatené záväzky, majetok (nehnuteľnosti) a pod. V prípade spoločností by išlo najmä o analýzu pomerových ukazovateľov či odvetvia.

Každá inštitúcia (napr. komerčná banka) využíva rôzne druhy predikcií na určenie ratingu svojich klientov a taktiež má vlastnú ratingovú škálu. Väčšie inštitúcie majú pre väčšinu produktov, ako napríklad bezúčelové úvery, či kreditné karty zautomatizovaný výpočet ratingu.

Ak by sme chceli my určiť rating pre každý dlhopis v našom portfóliu, potrebovali by sme databázu historických informácií s jednotlivými vlastnosťami dlžníka a konečný rating, ktorý mu bol pridelený. Na základe zvoleného klasifikátora (napr. klasifikačné stromy) by sme dlhopisu pridelili rating. Nakoľko takéto vhodné databázy nie sú bežne dostupné, rozhodli sme sa pre ratingy vydané ratingovou agentúrou.

Je dôležité poznamenať, že pridelené ratingy musia byť navzájom konzistentné. Musia byť vydané práve jednou ratingovou agentúrou alebo samostatne vypočítané. Kombinácie ratingov viacerých ratingových agentúr, či kombinácie s vlastným výpočtom sú nevhodné.

Zmeny v hodnote aktív spoločnosti neznamenajú iba inú pravdepodobnosť zlyhania, ako sme si ukázali pri KMV modeli, ale taktiež možný prechod do iného ratingu. Predpoklady o možnom prechode do iného ratingu vyjadrujú pravdepodobnosti prechodu zobrazované v matici, ktorá je požadovaným vstupom do CreditMetrics modelu.

Pravdepodobnosti prechodu sú viazané k určitému časovému horizontu. Konvenciou je 1 rok. Počítané sú z historických migrácií dlhopisov medzi ratingami. Matice pravdepodobností prechodu medzi ratingami pre rôzne časové horizonty sú vydávané ratingovými agentúrami a sú voľne dostupné. Niektoré ratingové agentúry rozlišujú matice pravdepodobností prechodu pre rôzne odvetvia či územia.

V našej práci sme využívali jednoročnú maticu pravdepodobností prechodu vydanú ratingovou agentúrou $S\&P$. Najaktuálnejšia verzia je z roku 2019, viď obrázok 7.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	89,83	9,37	0,55	0,05	0,12	0,03	0,05	0
AA	0,51	90,78	8,06	0,5	0,05	0,06	0,02	0,02
A	0,03	1,74	92,49	5,27	0,28	0,12	0,02	0,05
BBB	0,01	0,09	3,59	91,83	3,73	0,47	0,11	0,17
BB	0,01	0,03	0,12	5,23	86,06	7,27	0,6	0,68
B	0	0,02	0,08	0,18	5,43	85,38	5,1	3,81
CCC	0	0	0,13	0,22	0,69	15,33	51,61	32,02

Obr. 7: Matica pravdepodobností prechodu, zdroj www.spglobal.com

Ratingy v prvom stĺpci matice vyjadrujú východiskový rating dlhopisu. Ratingy v prvom riadku zobrazujú rating rovnakého dlhopisu po uplynutí jedného roka. Posledný stĺpec matice vyjadruje pravdepodobnosť, že dôjde k defaultu. Najpravdepodobnejšie je, že dlhopis zostane vo východiskovom ratingu, čo možno pozorovať z diagonály matice, na ktorej sú najvyššie pravdepodobnosti.

Miery vymožiteľnosti (Recovery rates)

Ako sme spomínali v prvej kapitole, zlyhanie emitenta dlhopisu neznamená automaticky

stratu plnej hodnoty aktíva. Časť hodnoty môže byť opätovne získaná. CreditMetrics model za túto spätne získanú hodnotu považuje nominálnu hodnotu vynásobenú vymožiteľnosťou pohľadávky RR, $RR \in [0, 1]$. Vymožiteľnosť pohľadávky nie je ale explicitne určená.

Najjednoduchšou možnosťou je subjektívne určiť nejakú hodnotu. Samozrejme treba uvažovať senioritu dlhopisu. Vyššia seniorita by mala znamenať vyššiu vymožiteľnosť.

Druhou možnosťou je uvažovať mieru vymožiteľnosti ako náhodnú premennú. V praxi sú tieto hodnoty najčastejšie generované z Beta rozdelenia s určenými parametrami [1]. Z historických informácií zlyhaných dlhopisov rôznych seniorít je vypočítaná pre každú senioritu priemerná miera vymožiteľnosti a štandardná odchýlka. Mieru vymožiteľnosti pre náš konkrétny dlhopis definovanej seniority vygenerujeme z Beta rozdelenia s takými parametrami α, β, ktoré zabezpečia požadovanú strednú hodnotu μ a štandardnú odchýlku σ Beta rozdelenia. Úpravou vzťahov (30) a (31) vypočítame požadované parametre α, β nasledovne:

Uvažujme $X \sim Beta(\alpha, \beta)$. Z [11] vieme, čomu sa rovná stredná hodnota μ a disperzia σ^2 tejto náhodnej premennej:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \tag{30}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \tag{31}$$

Keďže hodnoty μ, σ^2 poznáme, riešením systému dvoch rovníc o dvoch neznámych vyjadríme parametre α, β. Označme súčet $\alpha + \beta = v$. Potom dostávame:

$$\alpha = \mu \cdot v, \tag{32}$$

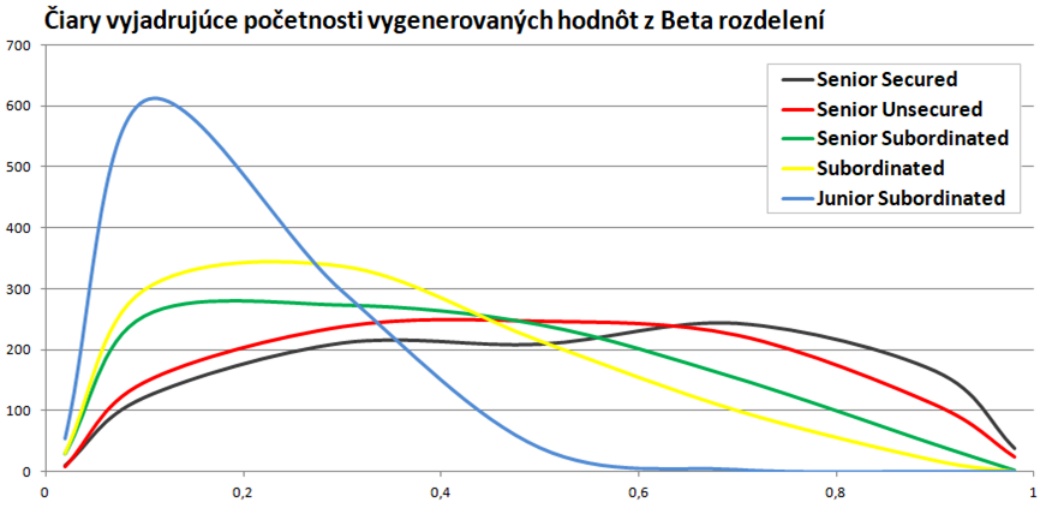
$$\beta = (1 - \mu) \cdot v. \tag{33}$$

Uvažujeme 5 seniorít dlhopisov. V nasledujúcej tabuľke si zobrazíme stredné hodnoty a štandardné odchýlky mier vymožiteľnosti pre tieto seniority. Seniority sú zoradené zostupne na základe priemernej miery vymožiteľnosti. Dáta sme získali zo zdroja [9], doplnené sú o vypočítané parametre α, β na základe (32) a (33).

Miery vymožiteľnosti	μ	σ	α	β
Senior Secured	53.80%	26.86%	1.3155	1.1297
Senior Unsecured	51.13%	25.45%	1.4612	1.3966
Senior Subordinated	38.52%	23.81%	1.2239	1.9534
Subordinated	32.74%	20.18%	1.443	2.9645
Junior Subordinated	17.09%	10.9%	1.8673	9.0588

Tabuľka 2: Miery vymožiteľnosti pre jednotlivé seniority a odvodené parametre Beta rozdelenia

Pre lepšiu predstavu vygenerujeme 1000 hodnôt z každého Beta rozdelenia s parametrami α, β zobrazenými v tabuľke 2. Na obrázku 8 zobrazíme histogramy vygenerovaných hodnôt, namiesto stĺpcovej repreztácie použijeme čiarovú reprezentáciu vyjadrujúcu taktiež početnosti vygenerovaných hodnôt pre všetky seniority. Z uvedeného obrázka je dobre vidieť, z ktorých intervalov sú čísla najčastejšie generované pre jednotlivé druhy dlhopisov.



Obr. 8: Početnosti vygenerovaných hodnôt z Beta rozdelení

Korelačná matica

Vzťah medzi každými dvomi spoločnosťami emitujúcimi dlhopis možno kvantitatívne vyjadriť prostredníctvom korelácií. Ideálne by sme chceli poznať korelácie medzi každými dvoma rôznymi dlhopismi v našom portfóliu. Z nich by sme vytvorili korelačnú maticu dlhopisov v portfóliu. Pre portfólio s veľkým množstvom dlhopisov je to prakticky nemožné. Jedným spôsobom je určiť korelácie medzi emitentami z trhových cien akcií všetkých emi-

tentov, t.j. určiť ich výnos a následne korelácie medzi výnosmi. Problémom je častokrát nedostatok údajov na určenie daných korelácií, či samotná veľkosť následne vzniknutej korelačnej matice.

V praxi využívaným spôsobom riešiacim spomínaný problém je uvažovať korelácie jednotlivých odvetví [19]. Tieto korelácie možno nazvať medzisektorové. Navyše aj v rámci jedného odvetvia je určitá korelovanosť, nazývaná vnútrosektorová. Pre jednoduchosť ju budeme uvažovať konštantnú a budeme ju značiť $corr$.

V našej práci budeme uvažovať 10 odvetví na základe indexu $S\&P$ 500, do ktorých radíme dlhopisy. Medzisektorové korelácie zobrazíme v korelačnej matici, viď obrázok 9 a graficky ilustrujeme na obrázku 10. Zdrojom medzisektorových korelácií je report Global Applications of $S\&P$ 500 Sectors [6] spoločnosti $S\&P$.

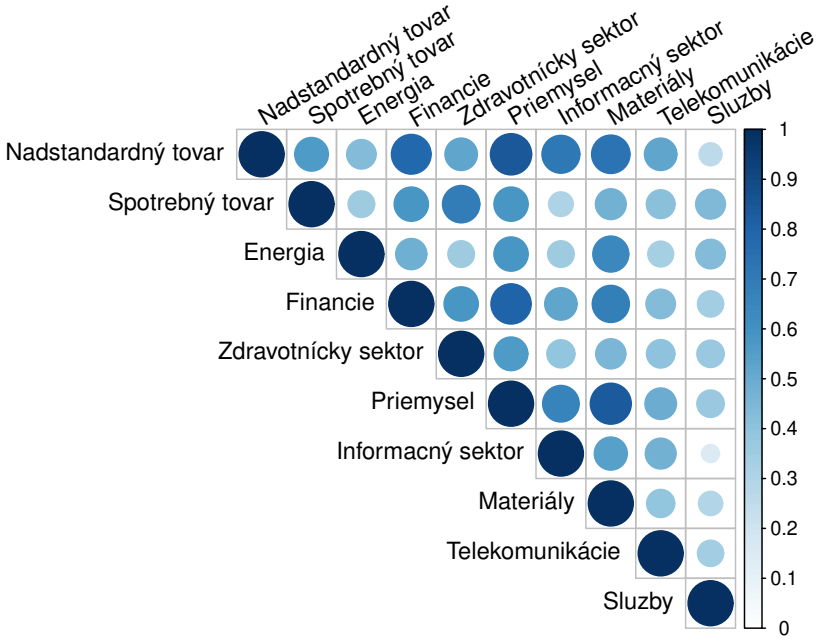
	Nadštandardný tovar	Spotrebný tovar	Energia	Financie	Zdravotnícky sektor	Priemysel	Informačný sektor	Materiály	Tele-komunikácie	Služby
Nadštandardný tovar	1	0.56	0.43	0.78	0.52	0.84	0.71	0.73	0.52	0.26
Spotrebný tovar	0.56	1	0.35	0.58	0.69	0.58	0.3	0.47	0.41	0.44
Energia	0.43	0.35	1	0.48	0.35	0.58	0.35	0.64	0.33	0.43
Financie	0.78	0.58	0.48	1	0.58	0.8	0.52	0.68	0.43	0.34
Zdravotnícky sektor	0.52	0.69	0.35	0.58	1	0.56	0.39	0.45	0.4	0.37
Priemysel	0.84	0.58	0.58	0.8	0.56	1	0.66	0.83	0.49	0.37
Informačný sektor	0.71	0.3	0.35	0.52	0.39	0.66	1	0.54	0.47	0.16
Materiály	0.73	0.47	0.64	0.68	0.45	0.83	0.54	1	0.39	0.29
Tele-komunikácie	0.52	0.41	0.33	0.43	0.4	0.49	0.47	0.39	1	0.34
Služby	0.26	0.44	0.43	0.34	0.37	0.37	0.16	0.29	0.34	1

Obr. 9: Korelačná matica odvetví indexu $S\&P$

Korelácie významne ovplyvňujú riziko portfólia. Intuitívne sa zdá byť menej rizikové držať v portfóliu dlhopisy z rôznych odvetví. Ak by sa totiž portfólio skladalo z dlhopisov jedného odvetvia, prípadná nižšia výkonnosť tohto odvetvia, t.j. zníženie jeho kvality by znamenalo pokles hodnoty každého aktíva v portfóliu, a teda prudký pokles hodnoty celého portfólia. Dôležitosť diverzifikácie portfólia si ukážeme v praktickej časti tejto práce.

Úrokové sadzby

Ďalšími vstupnými hodnotami sú úrokové sadzby, ktoré budú využité pri diskontovaní budúcich peňažných tokov. Treba ale rozlišovať úrokové sadzby zodpovedajúce kreditným kvalitám emitentov dlhopisov. Aby sme docielili rozlíšenie úrokovej sadzby pre rôzne ratingy, využijeme kombináciu (súčet) forwardových úrokových sadzieb a kreditných pri-



Obr. 10: Grafická vizualizácia korelačnej matice

rážok, viď [1]. V našej práci sme využili výnosy US Government Bonds pre výpočet forwardových sadzieb a kreditné prirážky pre rôzne ratingy zo zdroja [4].

4.2 Medze prechodu (Thresholds)

CreditMetrics model, rovnako ako KMV model z predošlých kapitol vychádza z Mertonovho modelu, ktorého základ tvorí Black-Scholesov model oceňovania opcií. V CreditMetrics modeli uvažujeme, že hodnota aktív spoločnosti riadi zmenu ratingu alebo samotný default spoločnosti, ktorá je emitentom dlhopisu. Dôležité je stanoviť medze, resp. prahy, ktoré ak hodnota spoločnosti prekročí, zmení sa jej kreditný rating. Tu vidieť istú analógiu s KMV modelom a bodom zlyhania [23].

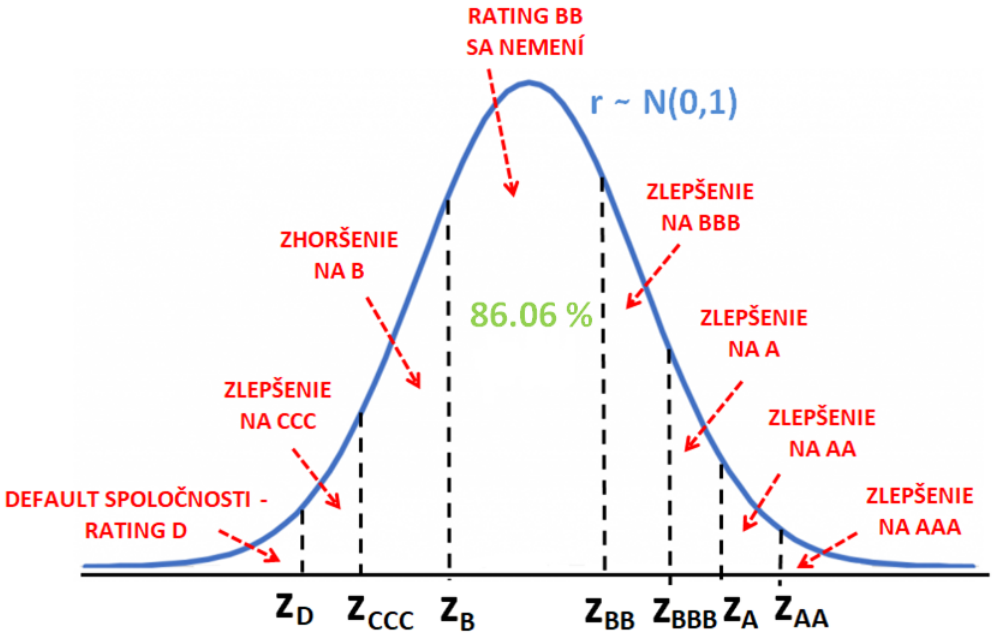
Rovnako ako v KMV modeli, za hodnotu spoločnosti budeme považovať logaritmický výnos z jej aktív, ozn. R, ktorý sa riadi normálnym rozdelením $R \sim N(\mu, \sigma)$. Ak uvažujeme ratingové stupne agentúry $S\&P$, t.j. množinu $\{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC\}$, postupnosť medzí prechodu, v ktorých sa mení rating spoločnosti s výnosom aktív R, označíme $\{Z_{AA}, Z_A, Z_{BBB}, Z_{BB}, Z_B, Z_{CCC}, Z_D\}$.

Ak výnos aktív R spoločnosti emitujúcej dlhopis klesne pod hodnotu Z_D $(R < Z_D)$, považuje sa to za default spoločnosti a dlhopisu v portfóliu je pridelený rating D (default).

Ak naopak výnos aktív R prekročí medzu Z_{AA}, dlhopisu bude pridelený najlepší rating AAA. Ak sa hodnota R bude nachádzať napríklad v intervale $Z_{CCC} < R < Z_B$, spoločnosti bude pridelený rating B atď.

Obdobne možno určiť medze prechodu aj pre štandardizovaný logaritmický výnos $r = \frac{R-\mu}{\sigma}$ [23], ktoré značíme $\{z_{AA}, z_A, z_{BBB}, z_{BB}, z_B, z_{CCC}, z_D\}$.

Graficky si vyššie popísané skutočnosti znázorníme na príklade dlhopisu aktuálne ohodnoteného kreditným ratingom BB, viď. obrázok 11. Je zrejmé, že najviac pravdepodobná je situácia, že k zmene ratingu nedôjde, spoločnosť a v našom prípade aj dlhopis si zachovajú pôvodný rating BB. Dôvodom tejto situácie je 86.06% pravdepodobnosť v matici pravdepodobností prechodov ($BB- > BB$), čo zapríčiní pokrytie 86.06% plochy pod funkciou hustoty normálneho rozdelenia $N(0, 1)$. Zvyšné percentuálne pokrytia pri zmenách ratingu sme na obrázku 11 neuviedli, no možno ich nájsť v piatom riadku tabuľky na obrázku 7.



Obr. 11: Grafická vizuálizácia možných prechodov ratingu dlhopisu. Upravená verzia obrázka z [19].

Ak sú teda známe pravdepodobnosti prechodu medzi ratingami, vieme pomocou nich a distribučnej funkcie normálneho rozdelenia Φ tieto medze prechodu presne vypočítať. Ukážeme si to opäť na príklade dlhopisu s ratingom BB. Vzorovo vypočítame medzu prechodu z_A, obdobný výpočet bude aj pre ostatné medze. Nech C_0 označuje aktuálny

rating dlhopisu (t.j. $C_0 = BB$) a C_1 rating toho istého dlhopisu o 1 rok. Potom platia nasledovné vzťahy, ktoré možno pozorovať aj na obrázku 11:

$$\begin{aligned} &P(C_1 = A|C_0 = BB) = P(z_{BBB} < r < z_A) = \phi(z_A) - \phi(z_{BBB}) = 0.12 \\ &\Rightarrow \phi(z_A) = 0.12 + \phi(z_{BBB}) \\ &\Rightarrow z_A = \phi^{-1}(0.12 + \phi(z_{BBB})). \end{aligned} \tag{34}$$

Ako vidieť, na výpočet hodnoty z_A potrebujeme pravdepodobnosť $P(C_1 = A|C_0 = BB)$ z matice pravdepodobností prechodu a hodnotu z_{BBB} (medzu prechodu o 1 rating nižšiu). Podobné vzťahy vieme vyjadriť pre všetky medze prechodu. Postupným výpočtom hodnôt $z_D, z_{CCC}, z_B, z_{BB}, z_{BBB}, z_A, z_{AA}$ získame všetky tieto hodnoty.

Medzu prechodu z_A a obdobne ostatné medze možno vypočítať aj iným spôsobom nezávisle na predchádzajúcich medziach. Z obrázka 11 vidieť, že

$$\begin{aligned} \phi(z_A) &= P(C_1 = D|C_0 = BB) + P(C_1 = CCC|C_0 = BB) + P(C_1 = B|C_0 = BB) + \\ &+ P(C_1 = BB|C_0 = BB) + P(C_1 = BBB|C_0 = BB) + P(C_1 = A|C_0 = BB) = \\ &= 0.0068 + 0.006 + 0.0727 + 0.8606 + 0.0523 + 0.0012 = 0.9996 \Rightarrow \\ z_A &= \phi^{-1}(0.9996) = 3.3528 \end{aligned} \tag{35}$$

Pomocou matlabovskej funkcie *norminv* a matice pravdepodobností prechodu (obr. 7) vypočítame medze prechodu medzi ratingami pre každý možný počiatočný rating. Vypočítané hodnoty $\{z_{AA}, z_A, z_{BBB}, z_{BB}, z_B, z_{CCC}, z_D\}$ zobrazíme na obrázku 12.

	z_{AA}	z_A	z_{BBB}	z_{BB}	z_B	z_{CCC}	z_D
AAA	-1,27	-2,41	-2,81	-2,88	-3,16	-3,29	-∞
AA	2,57	-1,36	-2,48	-2,97	-3,09	-3,35	-3,54
A	3,43	2,10	-1,58	-2,60	-2,89	-3,20	-3,29
BBB	3,72	3,09	1,79	-1,70	-2,43	-2,77	-2,93
BB	3,72	3,35	2,95	1,61	-1,37	-2,23	-2,47
B	∞	3,54	3,09	2,77	1,58	-1,35	-1,77
CCC	∞	∞	3,01	2,70	2,31	0,98	-0,47

Obr. 12: Medze prechodu pre každý rating

4.3 Výpočet východiskovej hodnoty portfólia

Keďže sme sa postupne oboznámili so všetkými vstupmi modelu, máme k dispozícii všetky potrebné informácie na výpočet východiskovej hodnoty nášho portfólia. Poznať túto hodnotu je dôležité v momente, keď budeme chcieť určovať straty spôsobené zmenami ratingov.

Začneme výpočtom hodnoty každého dlhopisu obsiahnutého v portfóliu. Túto hodnotu určíme ako súčasnú hodnotu budúcich cash flowov dlhopisu [13]. Uvažujeme nominálnu hodnotu F dlhopisu, jeho ročný kupón C a maturitu T. Výpočet realizujeme na základe vzorca:

$$PV = C + \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{F}{(1+r_T)^T}, \tag{36}$$

kde PV je súčasná hodnota dlhopisu (present value), r_t pre $t = 1, ..., T$ sú úrokové sadzby opísané v podkapitole 4.1, teda súčet forwardových úrokových sadzieb a kreditných prirážok pre rôzne ratingy. Východisková hodnota portfólia je následne súčtom hodnôt všetkých dlhopisov v portfóliu. Ak máme viac rovnakých dlhopisov v portfóliu, uvažujeme hodnotu tohto dlhopisu vynásobenú ich počtom.

4.4 Monte Carlo simulácie

Postupne prichádzame k samotným simuláciám, ktoré sú len krokom od určenia nového ratingu pre každú protistranu. Uvažujme logaritmický výnos aktív riadiaci sa normálnym rozdelením $r \sim N(0,1)$ a odvodené medze prechodu pre jednotlivé ratingy. Primárna myšlienka je generovať čísla z normálneho rozdelenia a potom na základe východiskového ratingu a intervalu $(z_i, z_{i-1}), \quad i = z_{AA}, z_A, z_{BBB}, z_{BB}, z_B, z_{CCC}, z_D$, do ktorého vygenerovaná hodnota padne, určiť nový rating. V tejto podkapitole sa budeme venovať samostatne generovaniu hodnôt. Uvažujúc nezávislosť medzi dlhopismi, stačilo by generovať pre každý dlhopis, resp. jeho emitujúcu spoločnosť náhodné čísla jednotlivo. Avšak ak odhadujeme riziko portfólia ako celku, je nutné uvažovať korelácie medzi spoločnosťami emitujúcimi dlhopisy. Nakoľko nemáme ani korelačnú maticu všetkých dlhopisov v portfóliu, lebo je to, ako sme spomínali v podkapitole 4.1, pre veľké portfóliá v praxi nereálne, budeme pracovať s korelačnou maticou jednotlivých odvetví a vnútrosektorovou koreláciou $corr$.

Postupovať budeme nasledovne. Chceme vytvoriť subjektívne veľké množstvo scenárov (ozn. M), aby bola zaručená dostatočná presnosť odhadu rizika portfólia. Preto v prvom kroku vygenerujeme súbor náhodných čísel korelovaných podľa odvetvia v každom zo zvoleného počtu scenárov. Aby sme zabezpečili požadovanú vnútro- aj medzisektorovú korelovanosť, využili sme v ďalšom kroku nižšie uvedené vzťahy, ale uvažované vo viacrozmere z [18]:

Nech Z_1 a $Z_2 \sim N(0,1)$ sú náhodné premenné, ktoré majú štandardné normálne rozdelenie a sú navzájom nezávislé. Nech X, Y sú náhodné premenné:

$$\begin{aligned} X &= \sigma_X Z_1 + \mu_X, \\ Y &= \sigma_Y \cdot (\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_Y. \end{aligned} \tag{37}$$

Určíme ich marginálne rozdelenie:

$$\begin{aligned} X &= \sigma_X Z_1 + \mu_X = \sigma_X N(0,1) + \mu_X = N(\mu_X, \sigma_X^2), \\ Y &= \sigma_Y(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_Y = \sigma_Y[\rho N(0,1) + \sqrt{1-\rho^2} N(0,1)] + \mu_Y \\ &= \sigma_Y(N(0,\rho^2) + N(0,1-\rho^2)) + \mu_Y = \sigma_Y N(0,1) + \mu_Y = N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{aligned} \tag{38}$$

Ukážeme, že koeficient korelácie náhodných premenných tohto tvaru je ρ, predtým treba ešte určiť kovarianciu náhodných premenných X, Y:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E[(\sigma_X Z_1 + \mu_X - \mu_X)(\sigma_Y[\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2] + \mu_Y - \mu_Y)] \\ &= E[(\sigma_X Z_1)(\sigma_Y[\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2])] \\ &= \sigma_X \sigma_Y E[\rho Z_1^2 + \sqrt{1-\rho^2} Z_1 Z_2] = \sigma_X \sigma_Y \rho E[Z_1^2] = \sigma_X \sigma_Y \rho. \end{aligned} \tag{39}$$

Spomínanú koreláciu vypočítame nasledovným vzťahom:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \rho. \tag{40}$$

Prezentovaným spôsobom vieme zohľadniť korelácie medzi emitentami dlhopisov a generovať vhodné náhodné premenné. Generovaním modelujeme možný budúci výnos spoločností a tým celého portfólia.

4.5 Výpočet novej hodnoty portfólia založenej na simuláciách

Pridelenie nového ratingu

Ďalším krokom je k vygenerovaným náhodným premenným z predchádzajúceho kroku, reprezentujúcim budúci výnos spoločnosti, priradiť rating. Tento krok možno nazvať aj mapovanie výnosu aktív na kreditné ratingy. K tomu je potrebné poznať východiskový rating dlhopisu, resp. jeho emitujúcej spoločnosti a medze prechodu odvodené v podkapitole 4.2.

Nech $\widetilde{r}$ je vygenerovaná hodnota pre spoločnosť s východiskovým ratingom AA. Ak pre hodnotu $\widetilde{r}$ platí:

$$z_i^{AA} < \widetilde{r} < z_{i-1}^{AA}, \tag{41}$$

nový rating spoločnosti bude $i-1$, kde $i = AA, A, BBB, BB, B, CCC, D$. Rovnako to platí pre všetky východiskové ratingy.

Nová hodnota dlhopisov

V tejto časti ohodnotíme pre každý scenár všetky dlhopisy. Postupovať budeme obdobne ako v podkapitole 4.3, t.j. využijeme vzťah (36) na nové ohodnotenie dlhopisu.

Pri novom ohodnotení dlhopisov treba navyše uvažovať možnosť, že niektoré z dlhopisov v stanovenom časovom horizonte zlyhali, t.j. bol im priradený nový rating D. Neznamená to implicitne, že nová hodnota dlhopisu bude nulová, vieme totiž, že časť nominálnej hodnoty môže byť opätovne získaná. Veľkosť tejto časti je ale náhodná premenná - miera vymožiteľnosti. Mieru vymožiteľnosti vygenerujeme z Beta rozdelenia s vypočítanými parametrami uvedenými v tabuľke 2. Parametre vyberáme z tabuľky závisiac od seniority dlhopisu, ktorého hodnotu práve počítame.

Výpočet opätovne získanej hodnoty zdefaultovaného dlhopisu ilustrujeme na konkrétnom príklade. Uvažujme dlhopis najvyššej seniority (Senior Secured), ktorému bol na základe vygenerovanej hodnoty reprezentujúcej budúci výnos priradený nový rating D. Miera vymožiteľnosti RR bude vygenerovaná z Beta rozdelenia s parametrami $\alpha = 1.3155$ a $\beta = 1.1297$. Potom súčin

$$NV = F \cdot RR, \tag{42}$$

kde F je nominálna hodnota dlhopisu, bude nová hodnota dlhopisu.

Ak je naše portfólio zložené z $k, k \in \mathbb{N}$ dlhopisov a zvolili sme počet scenárov $M, M \in$

$\mathbb{N}$, vznikla nám matica rozmeru $k \cdot M$ nových kreditných ratingov a následne nových hodnôt dlhopisov.

Ohodnotenie portfólia

Ak poznáme prvky matice $k \cdot M$ nových hodnôt dlhopisov, tak následne súčtom prvkov tejto matice po stĺpcoch získame M nových hodnôt portfólia založených na simuláciách. Tieto hodnoty možno porovnávať voči východiskovej hodnote portfólia a na základe ich rozdielu určiť veľkosť straty, resp. zisku spôsobenej zmenami ratingových ohodnotení.

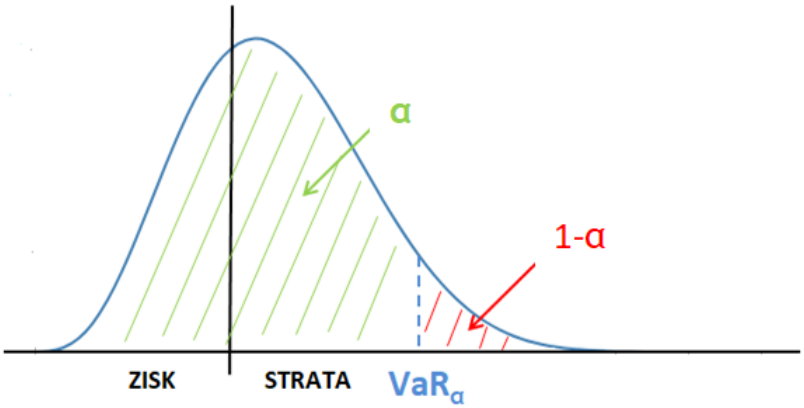
Aby sme získali intuíciu o rozložení vypočítaných rozdielov, distribúcia veľkosti straty, resp. zisku pre jednotlivé simulácie sa ilustruje najčastejšie prostredníctvom stĺpcového histogramu. Avšak táto distribúcia nám nehovorí až tak veľa o rizikovosti portfólia.

4.6 Hodnota v riziku (VaR)

Definujeme si štatistiku, ktorou kvantifikujeme úroveň rizika v rámci portfólia, je ňou hodnota v riziku (VaR - ValueAtRisk). Túto štatistiku daného portfólia možno interpretovať ako hodnotu, ktorú strata nepresiahne s pravdepodobnosťou α alebo väčšou.
Na základe [20] uvedieme presnú definíciu hodnoty v riziku. Nech $\alpha \in (0, 1)$. VaR_α náhodnej veličiny X definujeme ako

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x | P(X \leq x) > \alpha\}. \tag{43}$$

Teda hodnota v riziku je definovaná ako jednostranný α-kvantil možných strát hodnoty portfólia počas definovaného časového horizontu. Situáciu si ilustrujeme na obrázku 13.



Obr. 13: Význam hodnoty v riziku

Vo všeobecnosti môže byť VaR_α určený pre rôzne časové horizonty a rôzne hladiny spoľahlivosti α. Najčastejšie je uvažovaný časový horizont jeden rok a hladina spoľahlivosti 99%. Samozrejme, že uprednostňované sú vysoké hladiny spoľahlivosti, aby bola zaručená solventnosť.

Uvedieme si taktiež konkrétny príklad významu hodnoty v riziku. Ak máme 95-percentný VaR portfólia rovný 100 000 peňažným jednotkám, tak s 95-percentnou pravdepodobnosťou hodnota straty nepresiahne 100 000 peňažných jednotiek v danom časovom horizonte.

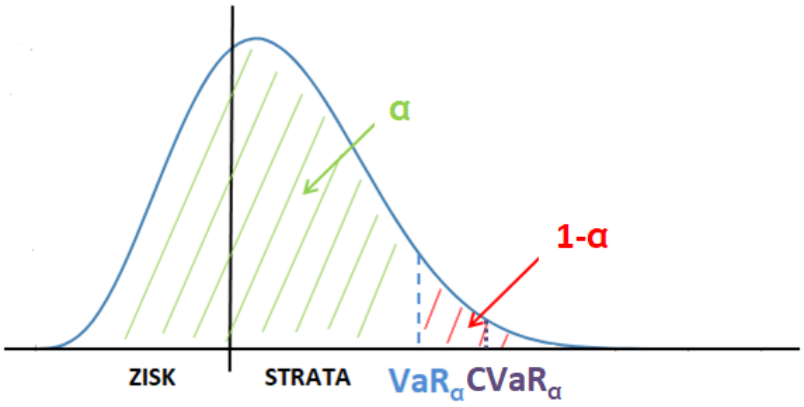
Podmienená hodnota v riziku (CVaR)

Čoraz viac do popredia vystupuje podmienená hodnota v riziku (CVaR - Conditional ValueAtRisk) a stáva sa stále viac používanejšiou. V niektorej literatúre sa vyskytuje s názvom Mean ValueAtRisk, Expected Shortfall alebo Tail VaR. V súčasnosti sa využíva hlavne ako doplnok k hodnote VaR. Opäť uvedieme definíciu $CVaR_\alpha$ na základe [20] a rozoberieme jej výhody vzhľadom na VaR_α.

Nech $\alpha \in (0, 1)$. $CVaR_\alpha$ náhodnej veličiny X definujeme ako

$$CVaR_\alpha(X) = E[X|X \geq VaR_\alpha(X)]. \tag{44}$$

Ide teda o strednú hodnotu strát prevyšujúcich hodnotu v riziku VaR. Z uvedenej definície je evidentné, že sa uvažuje aj veľkosť strát za hranicou VaR, čo je plusom oproti VaR, ktorá nepodáva žiadne informácie o stratách prevyšujúcich hodnotu v riziku. Ilustrujeme to na nasledujúcom obrázku:



Obr. 14: Podmienená hodnota v riziku

Ďalšou výhodnou oproti klasickej hodnote v riziku VaR je vlastnosť subaditivity. Vlastnosť subaditivity hovorí o tom, že miera rizika celku je menšia alebo rovná súčet mier rizík jeho jednotlivých častí [20], t.j.

$$\rho(\sum_{i=1}^{n} X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i). \tag{45}$$

Táto vlastnosť umožňuje spraviť horný odhad rizika. Predstavme si jednu materskú spoločnosť (pr. RBI Group) s množstvom dcérskych spoločností (Tatra banka - Slovensko, Raiffeisenverband Salzburg, atď.). Každá zo spoločností si zodpovedá za riadenie rizika samostatne. Vďaka vlastnosti subaditivity regulátor rizika RBI Group je schopný zhora odhadnúť podstupované riziko. Riziko RBI Group by nemalo prekročiť súčet rizík jednotlivých dcérskych spoločností. Rovnako to možno interpretovať na vlastníkovi viacerých portfólií. Ak na odhad rizika jednotlivých portfólií využije podmienenú hodnotu v riziku CVaR, vie zhora odhadnúť celkové podstupované riziko.

Z definície $CVaR_\alpha$ je zaručené, že hodnota v riziku VaR_α nepriesiahne podmienenú hodnotu v riziku $CVaR_\alpha$ na rovnakej hladine α, t.j.

$$VaR_\alpha \leq CVaR_\alpha. \tag{46}$$

Pre rozdelenia s ťažkými chvostami je najväčší rozdiel medzi hodnotami VaR_α a $CVaR_\alpha$ [20].

4.7 Očakávaná a neočakávaná strata

Pri meraní kreditného rizika je dôležité nielen odhadnúť kreditné riziko, ale taktiež vyvodiť závery, ktoré z toho vyplývajú. Hlavnými zdrojmi tejto podkapitoly sú knihy [17] a [19].

Očakávaná strata (EL)

Ďalším krokom v meraní kreditného rizika je určiť očakávanú stratu nášho portfólia. Podrobný opis tejto veličiny možno nájsť v podkapitole 1.2. Využitím vzťahu (1) vypočítame očakávanú stratu pre každý dlhopis v portfóliu. Očakávanú stratu celého portfólia získame zosumovaním jednotlivých očakavaných strát, t.j.

$$EL = \sum_{i=1}^{k} PD_i \cdot EAD_i \cdot LGD_i, \tag{47}$$

kde k je celkový počet dlhopisov v portfóliu. Za pravdepodobnosť defaultu i-teho dlhopisu vezmeme hodnotu zo stĺpca D a riadku zodpovedajúcemu východiskovému ratingu i-teho dlhopisu matice pravdepodobností prechodu. Pre účely tejto diplomovej práce postačí, ak za hodnotu EAD dosadíme nominálnu hodnotu i-teho dlhopisu. Hodnotu $LGD_i = 1 - RR_i$ získame vygenerovaním miery vymožiteľnosti RR z Beta rozdelenia s parametrami zodpovedajúcimi seniorite i-teho dlhopisu.

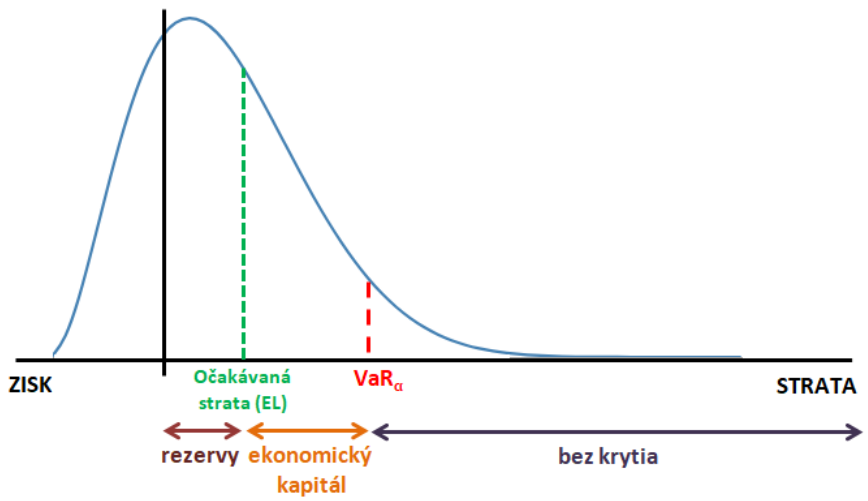
Na úroveň portfólia je výška očakávanej straty známa, a preto nepredstavuje priamo riziko, ale skôr nákladovú zložku, ktorá býva v určitej miere zohľadnená v úrokových sadzbách úverových inštitúcií. Na očakávané straty sú banky povinné vytvárať opravné položky, resp. rezervy [17].

Neočakávaná strata (UL) a ekonomický kapitál (EC)

Neočakávané straty, teda vychýlenie reálnej straty od očakávanej, sú kryté ekonomickým kapitálom. Keďže ide o vychýlenie od očakávanej straty, na výpočet ekonomického kapitálu sa v praxi využíva očakávaná strata a hodnota v riziku VaR, nakoľko je potrebné poznať hodnotu, ktorú strata nepresiahne s určenou pravdepodobnosťou. Intuitívne je ekonomický kapitál rozdielom týchto dvoch hodnôt:

$$EC_\alpha = VaR_\alpha - EL. \tag{48}$$

Graficky si očakávanú stratu a ekonomický kapitál znázorníme na obrázku 15.



Obr. 15: Očakávaná a neočakávaná strata

Uvažujme časový horizont 1 rok. Zvoľme si $\alpha = 99\%$. Hodnotu $EC_{0.99}$ možno interpretovať tak, že je to primeraná výška kapitálu, ktorá pokryje neočakávané straty s 99-percentnou pravdepodobnosťou, inak povedané existuje pravdepodobnosť, že jednu zo sto možných strát spoločnosť nebude môcť pokryť pre nedostatok kapitálu, čo bude mať za následok stratu jej solventnosti.

Investor, resp. banka by mali držať kapitál vo výške minimálne rovnej, pre ich portfólio vypočítanému, ekonomickému kapitálu EC_α, aby po dobu jedného roka mali zaručenú solventnosť s pravdepodobnosťou $\alpha \cdot 100\%$ [19].

5 Aplikácia CreditMetrics modelu na fiktívne portfólio

V úvode tejto praktickej kapitoly si predstavíme portfólio, s ktorým budeme po celý čas pracovať. V niektorých častiach bude vstupné portfólio podľa potreby upravené z dôvodu ukážky rôznych okrajových prípadov. O týchto skutočnostiach a zmene vstupných hodnôt čitateľa v jednotlivých častiach kapitoly informujeme.

5.1 Základné portfólio

Vstupné portfólio (ozn. $P1$) je fiktívne a zostrojené výlučne pre potreby tejto diplomovej práce. Je v ňom obsiahnutých 700 dlhopisov s rôznymi vlastnosťami. Dlhopis jedného typu môžeme mať v portfóliu viackrát. Pre lepšiu predstavu hlavičku vstupného portfólia uvedieme na obrázku 16.

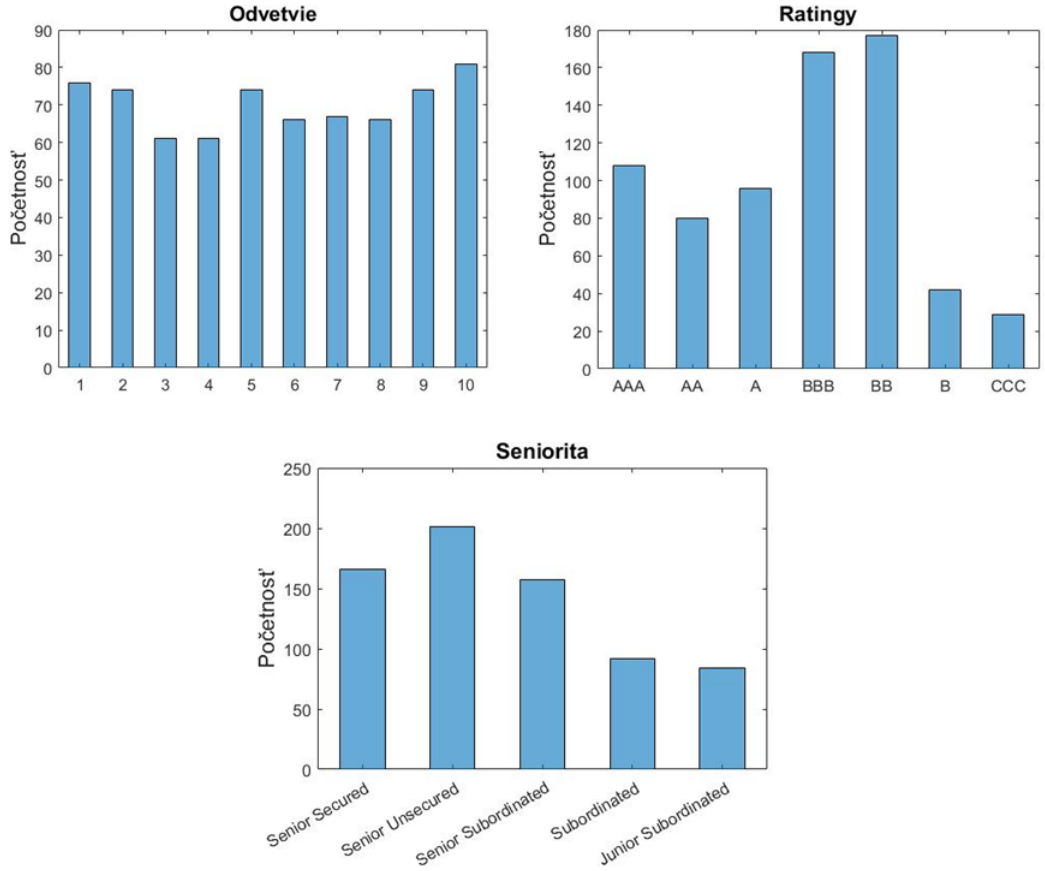
ID	F	T	C	Odvetvie	Seniorita	Rating	Počet
1	100 EUR	15.2.2025	8,5%	4	Subordinated	BB	100
2	100 EUR	1.5.2026	6,0%	3	Subordinated	AA	300
3	100 EUR	10.5.2026	5,0%	10	Senior Subordinated	AA	800
4	100 EUR	1.3.2024	8,5%	1	Subordinated	AAA	100
5	100 EUR	15.11.2023	9,0%	5	Senior Unsecured	CCC	100
6	100 EUR	20.7.2026	8,0%	9	Senior Subordinated	BB	300

Obr. 16: Hlavička vstupného portfólia

V tabuľke je ukážka rôznych vlastností a informácií o dlhopisoch v portfóliu. Každému dlhopisu je priradený práve jeden rating (od spoločnosti $S\&P$), taktiež práve jedno odvetvie a seniorita. Uvažujeme, že kupóny sú vyplácané ročne.

Tieto informácie a vlastnosti môžu mať v nemalej miere vplyv na výsledné kreditné riziko, preto je vhodné priblížiť zloženie portfólia na základe týchto vlastností. Nakoľko veľkosť $k = 700$ neumožňuje tieto vlastnosti vypísať, zobrazíme si rozloženie niektorých charakteristík v histogramoch na obrázku 17.

Predstavili sme prvý hlavný vstup CreditMetrics modelu - portfólio dlhopisov, no okrem portfólia je pre odhad kreditné rizika tohto porfófia CreditMetrics modelom potrebných niekoľko ďalších vstupov. Tieto vstupy sú podrobne predstavené a zadefinované



Obr. 17: Početnosti jednotlivých odvetví a seniorít v portfóliu

v podkapitole 4.1.

Pri odhade kreditného rizika uvažujeme časový horizont jeden rok. V prvotnom určovaní kreditného rizika portfólia $P1$ volíme $Corr = 0.5$, t.j. strednú, resp. miernu pozitívnu koreláciu.

Poznámka: V jazyku, resp. prostredí R je vytvorený balíček (package) CreditMetrics s jednotlivými predprogramovanými funkciami na výpočet rizika CreditMetrics modelom. No nakoľko zanedbáva niektoré predpoklady modelu a neuvažuje odvetvia, či seniority dlhopisov, ide skôr o hrubý a v praxi nedostatočný odhad rizika. Jednotlivé výpočty a simulácie v tejto práci sme preto realizovali v prostredí MATLABu.

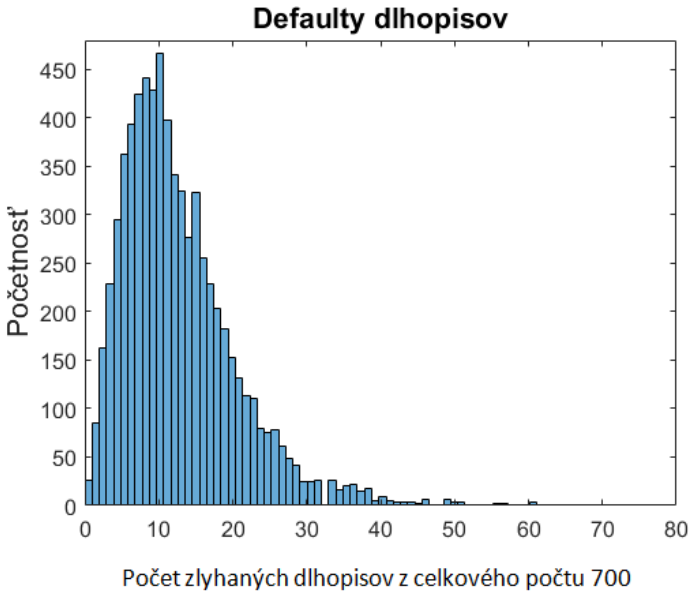
Samotný odhad kreditného rizika začne výpočtom hodnoty každého dlhopisu v portfóliu podľa vzťahu (36) a následným súčtom týchto hodnôt na získanie východiskovej hodnoty portfólia. Východisková hodnota portfólia $P1$ je rovná $2.54 \cdot 10^7$€.

Kedže sa v tejto práci venujeme výlučne simulačnému spôsobu CreditMetrics modelu,

ďalším krokom sú Monte Carlo simulácie. Vygenerujeme hodnoty reprezentujúce výnos aktív, tak aby bola zabezpečená korelovanosť pomocou vzťahov (37) a (40). Požadovaná je čo najväčšia presnosť odhadu, z toho dôvodu vytvárame množstvo scenárov M. Volíme počet scenárov $M = 10000$, nakoľko tento počet na ukázal byť optimálnym na základe parametrickej analýzy opísanej v podkapitole 5.2. Matica vygenerovaných výnosov aktív je v tomto prípade rozmeru $700 \cdot 10000$.

Následne dochádza k tzv. mapovaniu výnosov aktív na kreditné ratingy. Ako predprípravu samotných simulácií sme si zo vstupej matice pravdepodobností prechodu a funkcie *norminv* v MATLABe vypočítali medze prechodu pre každý východiskový rating, viď. obrázok 12 a vzorec (35). Východiskový rating a interval, do ktorého východisková hodnota patrí, určia nový rating dlhopisu. Novovzniknutá matica nových ratingov je opäť rozmeru $700 \cdot 10000$. Stĺpce tejto matice hovoria o novom ratingovom rozložení portfólia, no 10000 možných scenárov neumožňuje rovnakú grafickú ilustráciu ako na obrázku 17.

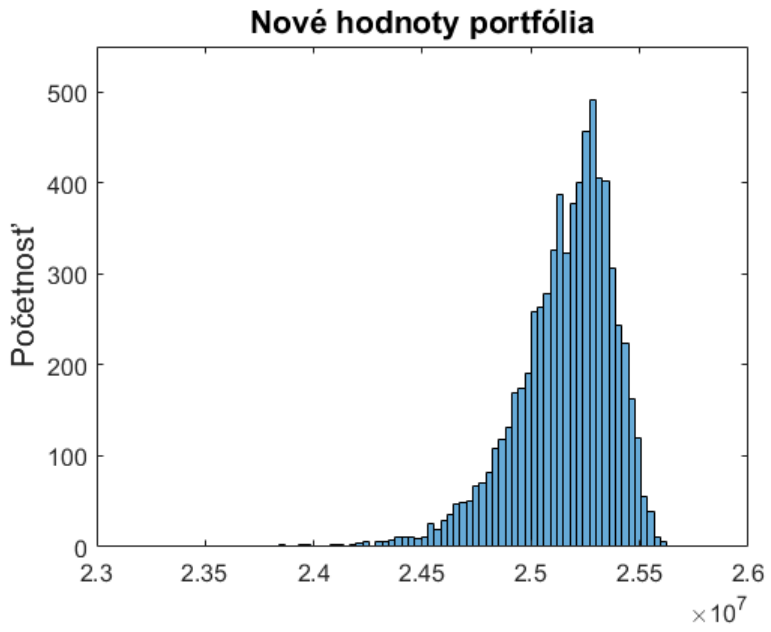
Nový rating dlhopisu implikuje jeho novú hodnotu. Pre ratingy rôzne od defaultu D je postup nového ohodnotenia dlhopisu obdobný ako jeho východiskové ohodnotenie, t.j. podľa vzťahu (36). Nakoľko sú v našom portfóliu obsiahnuté aj dlhopisy s východiskovým ratingom CCC, ktorých pravdepodobnosť defaultu v horizonte jedného roka je pomerne vysoká, očakávame situáciu, že nový rating niektorých dlhopisov bude D. Nasledujúci histogram ilustruje tieto početnosti defaultov.



Obr. 18: Histogram počtu defaultov v rámci simulácií

Maximálny počet zlyhaných dlhopisov v 10000 scenároch je 77 dlhopisov z celkového počtu 700. Najčastejšie zlyhá 10 zo 700 dlhopisov. Zlyhané dlhopisy ohodnotíme podľa vzťahu (42), kde miera vymožiteľnosti RR je vygenerovaná z Beta rozdelenia s parametrami α, β na základe seniority dlhopisu. Tu by som chcela upozorniť na chybu, ktorá sa vyskytuje v niektorých záverečných prácach. Generovať čísla z Beta rozdelenia, aby bola zabezpečená požadovaná stredná hodnota μ a štandardná odchýlka σ, nie je totožné s generovaním hodnôt z $Beta(\mu, \sigma)$. Parametre α, β musia byť vypočítané na základe vzťahov (32) a (33), aby sme zabezpečili požadovanú strednú hodnotu a štandardnú odchýlku.

Výslednú maticu nových hodnôt dlhopisov rozmeru $700 \cdot 10000$ zosumujeme po stĺpcoch, čím dostávame 10000 nových možných hodnôt nášho portfólia. Opäť pre predstavu zobrazíme histogram možných nových hodnôt portólia.



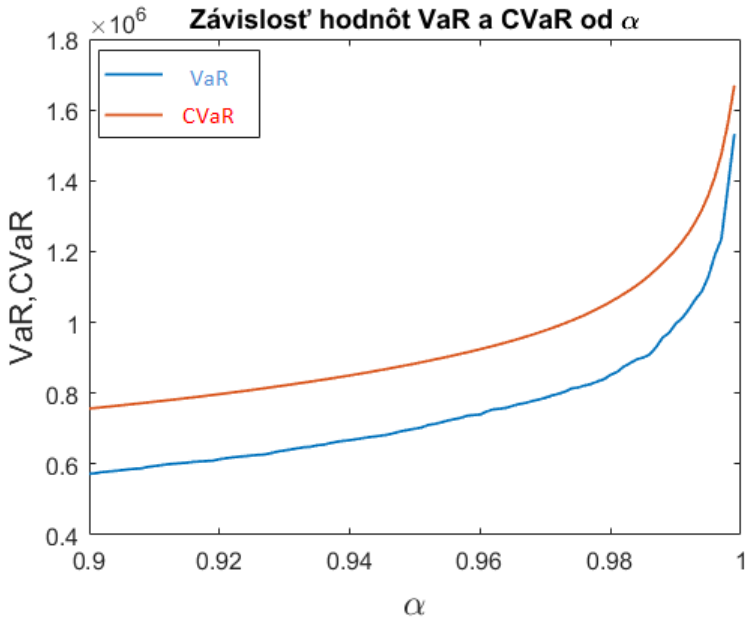
Obr. 19: Histogram nových hodnôt portfólia na základe simulácií

K dispozícii už máme všetky potrebné údaje pre kvantifikovanie kreditného rizika portfólia $P1$. Prvými štatistikami, ktorými kvantifikujeme riziko, budú hodnota v riziku VaR_α a podmienená hodnota v riziku $CVaR_\alpha$ definované v podkapitole 4.6.

Štatistika VaR_α vyjadruje stratu hodnoty portfólia, ktorá s $\alpha \cdot 100$-percentnou pravdepodobnosťou nebude presiahnutá. Intuitívne volíme hodnotu α čo najbližšiu k 100%, no privysoká hodnota implikuje veľké objemy rezerv a ekonomického kapitálu, ktorý je nutné držať.

Podobné zdôvodnenie platí aj pre hodnotu $CVaR_\alpha$. Prestavme si situáciu, keď investor vlastní niekoľko portfólií. Vysoké hodnoty $CVaR^i_\alpha, i = 1, 2, 3, ...$ spôsobia, že horný odhad celkového podstupovaného rizika investora je privysoký.

Nasledujúci obrázok vyjadruje závislosť (podmienenej) hodnoty v riziku od α.



Obr. 20: Závislosť hodnoty VaR_α a $CVaR_\alpha$ od α

Kým pri hladinách spoľahlivosti medzi 0.9 a 0.94 je rast (podmienenej) hodnoty v riziku veľmi mierny a pomalý, pri hladinách nad 0.98 sa hodnoty v riziku zvyšujú oveľa rýchlejšie. V tabuľke sú vypočítané hodnoty v riziku a podmienené hodnoty v riziku pre vybrané hodnoty α. Posledné dva stĺpce vyjadrujú tieto hodnoty ako percentá z východiskovej hodnoty, čo dáva lepšiu predstavu o týchto hodnotách.

α	VaR_α	$CVaR_\alpha$	VaR_α % **PV**	$CVaR_\alpha$ % **PV**
90%	5.72×10^5	7.57×10^5	2.25%	2.98%
95%	6.99×10^5	8.84×10^6	2.75%	3.48%
97%	7.87×10^5	9.77×10^5	3.1%	3.84%
99%	9.96×10^5	1.21×10^6	3.92%	4.74%
99.5%	1.13×10^6	1.36×10^6	4.44%	5.34%
99.9%	1.53×10^6	1.67×10^6	6.02%	6.57%

Tabuľka 3: Hodnoty VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre vybrané α

Z odhadu kreditného rizika portfólia vyplývajú aj isté povinnosti pre investora (napríklad pre komerčnú banku) vo forme držania rezerv a ekonomického kapitálu.

Objem povinných rezerv je vo výške očakávanej straty, viď. podkapitola 4.7. Výška očakávanej straty nášho portfólia $P1$ je $2.77 \cdot 10^5$, čo predstavuje približne 1% východiskovej hodnoty portfólia. Očakávaná strata nijakým spôsobom nezávisí od hladiny spoľahlivosti α, teda ani od hodnoty VaR_α či $CVaR_\alpha$.

Naopak ekonomický kapitál, ktorý pokrýva s $\alpha \cdot 100$-percentnou pravdepodobnosťou všetky neočakávané straty, je závislý od α. Vyššia hodnota α zabezpečí vyššiu istotu solventnosti.

Opäť si graficky znázorníme tieto popísané vzťahy na obrázku 21.



Obr. 21: Závislosť očakávanej straty a ekonomického kapitálu od α

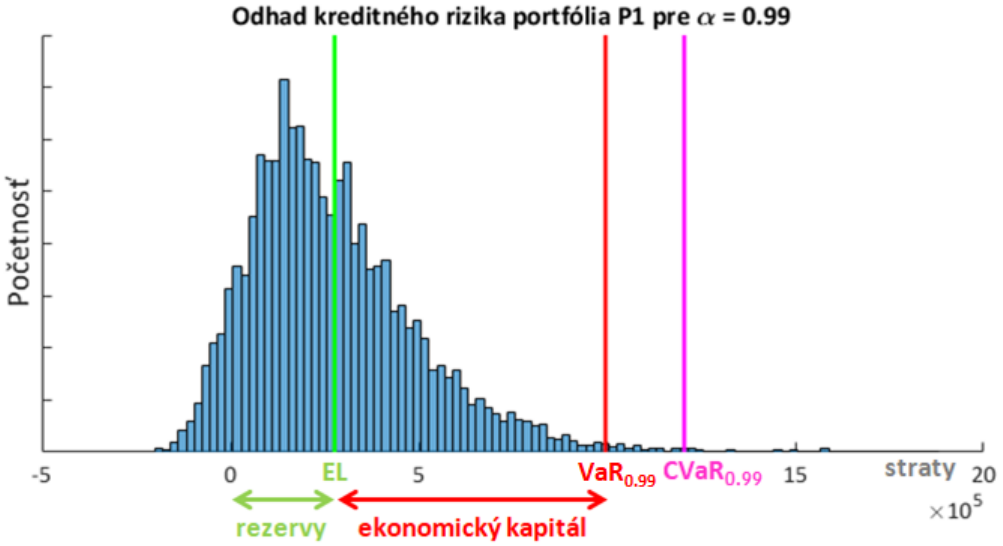
Pre vybrané hladiny spoľahlivosti si hodnotu ekonomického kapitálu zobrazíme v tabuľke 4.

α	**EC**	**EC % PV**
90%	2.95×10^5	1.16%
95%	4.23×10^5	1.7%
97%	5.1×10^5	2.01%
99%	7.19×10^5	2.83%
99.5%	8.52×10^5	3.35%
99.9%	1.25×10^6	4.93%

Tabuľka 4: Ekonomický kapitál pre rôzne hladiny spoľahlivosti

Zhrnutie

V našej práci sme zvolili hladinu spoľahlivosti 99%, s ktorou budeme pracovať po zvyšok práce. Pre túto hladinu si všetky štatistiky, ktorými kvantifikujeme riziko, zobrazíme na histograme možných ziskov a strát portfólia 22.



Obr. 22: Grafická reprezentácia odhadu kreditného rizika portfólia $P1$

Je nutné vytvárať rezervy (opravné položky) v hodnote 1% východiskovej hodnoty. Na pokrytie neočakávaných strát s 99-percentnou pravdeposobnosťou je nutné držať kapitál v hodnote 2.83% východiskovej hodnoty.

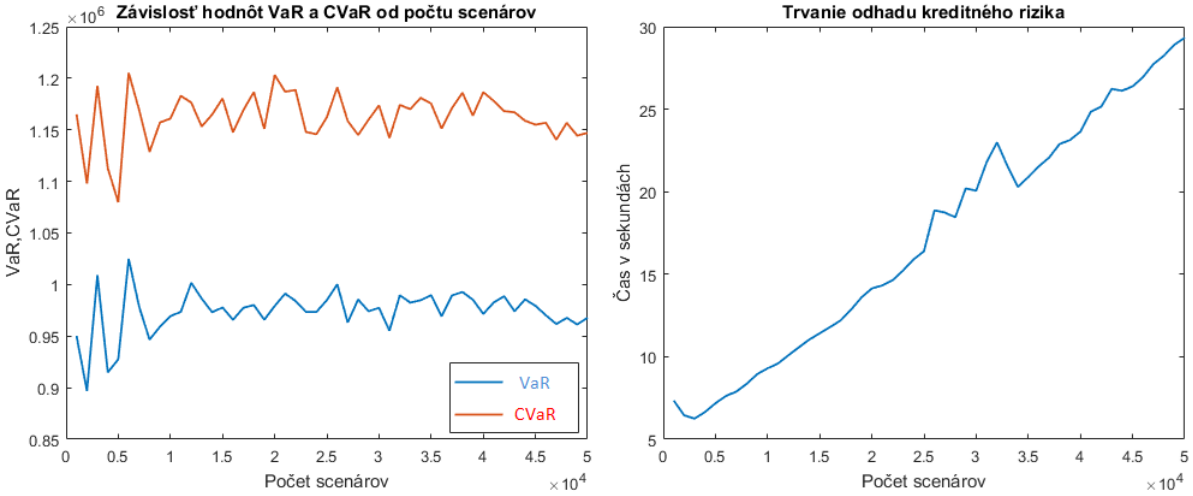
V nasledujúcej podkapitole si rozoberieme rôzne vplyvy na odhad rizika.

5.2 Vplyvy na odhad kreditného rizika

Počet scenárov

Zaujímavé je pozrieť sa na to, ako zvyšujúce sa množstvo scenárov, teda následne aj simulácií má vplyv na odhad rizika portfólia a samozrejme čas výpočtu.

Uvažovali sme opäť portfólio $P1$, $Corr = 0.5$ a hladinu spoľahlivosti 0.99. Počet scenárov M sme zvyšovali z hodnoty 1000 na hodnotu 50000 s krokom 1000. Na nasledujúcich dvoch obrázkoch ukážeme, ako sa menili hodnoty VaR a $CVaR$ s rastúcim počtom scenárov aj to, ako sa menila dĺžka výpočtu týchto hodnôt.



Obr. 23: Vplyv zvyšovania počtu scenárov na riziko portfólia a čas výpočtu

Z prvého obrázka je vidieť, že nízky počet simulácií spôsobuje akoby nestabilitu odhadu. Vo vyšších simuláciách sa odhad pomerne ustáli. Z druhého obrázka pozorujeme, že dĺžka trvania odhadu rizika v závislosti od poštu simulácií rastie takmer lineárne. Vychýlenie v oblasti 30000 simulácií mohlo byť spôsobené napr. externým procesom v počítači.

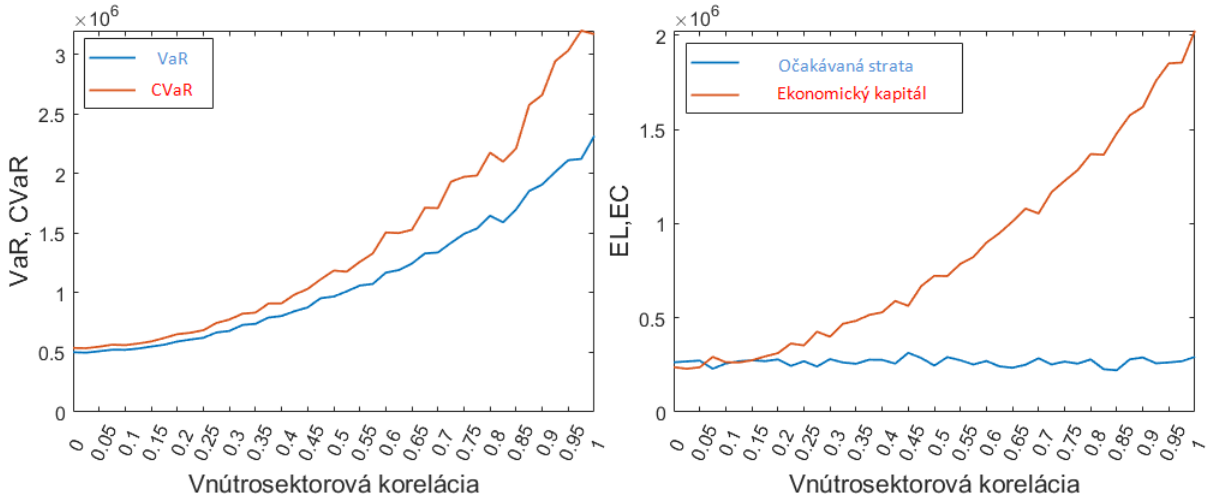
Z časového hľadiska by bolo optimálne zvoliť počet simulácií okolo 4000, no pre nevychýlený odhad je optimálne voliť počet okolo 10000.

Vnútrosektorová korelácia

Ďalším parametrom, ktorý ovplyvňuje výšku rizika portfólia a bol subjektívne zvolený, je vnútrosektorová korelácia $Corr$. Skutočnú hodnotu tohto parametra nemožno nájsť. V našich predchádzajúcich odhadoch rizika sme jej hodnotu zvolili $Corr = 0.5$, no jej skutočná hodnota môže byť rôzna. Predpokladá sa pozitívna korelovanosť [9].

Intuitívne očakávame, že vyššia korelácia medzi dlhopismi zapríčiní vyššiu rizikovosť portfólia. Jednoduchým odôvodnením je skutočnosť, že default jednej emitujúcej spoločnosti zapríčiní default alebo prinajmenšom zníženie ratingu takmer všetkým spoločnostiam, ktoré s ňou silno korelovali. Naopak, výnos aktív a vývoj nekorelovaných spoločností je nezávislý, teda default niektorej zo spoločností nemá vplyv na vývoj ostatných.

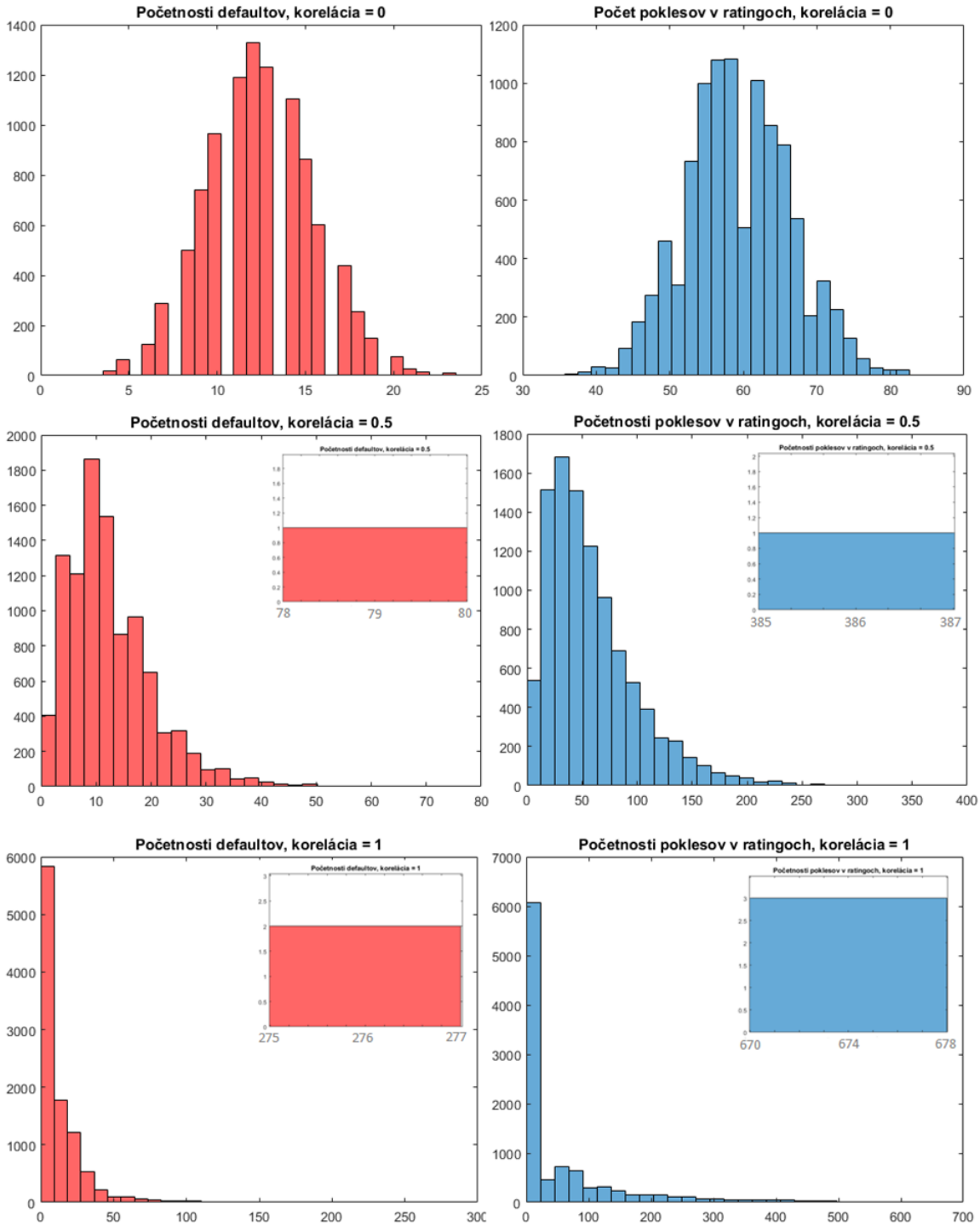
Opäť uvažujeme portfólio $P1$. Jediný parameter, ktorý meníme, je hodnota $Corr$. Túto hodnotu postupne zvyšujeme z $Corr = 0$ na hodnotu $Corr = 1$ s krokom 0.05. Graficky znázorníme štatistiky ($VaR_{0.99}$,$CVaR_{0.99}$, EL, EC) kvantifikujúce kreditné riziko na nasledujúcich obrázkoch.



Obr. 24: Vplyv zvyšovania vnútrosektorovej korelácie na riziko portfólia

Naše intuitívne očakávania o raste rizika portfólia s rastom vnútrosektorovej korelácie sa potvrdili. Všetky štatistiky majú rastúci trend, okrem očakávanej straty. Jej výpočet totiž nezávisí od parametra $Corr$. Mierne vychýlenia z konštantnej hodnoty očakávanej straty sú spôsobené vždy novým náhodným generovaním pre každú vnútrosektorovú koreláciu.

CreditMetrics model predpokladá, že k zvýšeniu kreditného rizika dôjde výlučne znížením ratingu dlhopisov. Početnosti defaultov a poklesov kreditných ratingov v jednotlivých scenároch pre vybrané hodnoty $Corr$ zobrazíme v histogramoch 25 nižšie. V tabuľke 5 zosumarizujeme dôležité číselné hodnoty týkajúce sa početnosti defaultov a poklesov pre rôzne korelácie.



Obr. 25: Početnosti defaultov a poklesov kreditných ratingov pre vybrané vnútrosektorové korelácie

Corr	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
0	25	91	12	1329	59	1114
0.5	79	386	$7-9$	1862	$25-32$	1683
1	274	677	$0-4$	5828	$0-11$	6073

Tabuľka 5: Štatistiky týkajúce sa defaultov a poklesov pre vybrané *Corr*

Význam jednotlivých stĺpcov v tabuľke 5 je nasledovný:

- A1 - maximálny počet zlyhaných dlhopisov spomedzi počtu zlyhaných dlhopisov pre každý scenár
- A2 - maximálny počet poklesov (t.j. znížení ratingov dlhopisov) spomedzi poklesov ratingov pre každý scenár
- A3 - najčastejší počet zlyhaných dlhopisov
- A4 - početnosť A3
- A5 - najčastejší počet poklesov (t.j. zníženia ratingov dlhopisov)
- A6 - početnosť A5

Hoci z histogramov na obrázku 25 na môže zdať, že pri korelácii $Corr = 1$ je najčastejší počet zlyhaných dlhopisov a vo všeobecnosti počet dlhopisov so zníženým ratingom veľmi blízky nule, čo by malo znamenať nízku rizikovosť portfólia, opak je pravdou. Odôvodnenie vidieť v tabuľke 5. Kým pri korelácii $Corr = 0$ zlyhá maximálne 25 dlhopisov a rating klesne najviac 91 dlhopisom zo celkového počtu 700, pri $Corr = 1$ vznikajú aj scenáre kedy dôjde k zlyhanuiu aj 274 dlhopisov zo 700 a rating klesne u 677 dlhopisov zo 700. Tieto extrémne nepríjemné scenáre nastávajú z celkového počtu scenárov len zopárkrát, no majú zásadný vplyv na zvýšenie rizika portfólia.

5.3 Hraničné prípady

Neuvažovanie rôznych seniorít

Na prvom hraničnom príklade demonštrujeme situáciu, kedy môže dôjsť k podhodnoteniu rizika portfólia zanedbaním určitých vlastností dlhopisov. Vlastnosť dlhopisu, ktorá je

v mnohých prípadoch zanedbaná, je seniorita. Táto vlastnosť poskytuje informáciu o miere vymožiteľnosti daného dlhopisu. Ako bolo prezentované v podkapitole 4.1, miera vymožiteľnosti býva v mnohých prípadoch subjektívne zvolená alebo generovaná z Beta rozdelenia s rovnakými parametrami pre všetky dlhopisy.

Na nasledujúcom príklade si ukážeme, ako je riziko portfólia podhodnotené, ak uvažujeme výlučne jednu senioritu dlhopisov s najvyššou strednou hodnotou vymožiteľnosti. Vytvoríme si nové portfólio $P2$, ktoré sa od pôvodného portfólia $P1$ líši výlučne senioritami, ktoré sú upravené na typ Senior Secured. Štatistiky kvantifikujúce riziko portfólia spolu s objemom peňazí, ktoré je nutné držať pre zabezpečenie solventnosti zobrazíme v tabuľke 6. Pre názorné porovnanie rozdielu rizík uvedieme tieto hodnoty opäť aj pre portfólio $P1$.

	Portfólio $P2$		Portfólio $P1$	
	Objem(€)	$\%PV$	Objem(€)	$\%PV$
$VaR_{0.99}$	8.44×10^5	3.3%	9.96×10^5	3.92%
$CVaR_{0.99}$	1.03×10^6	4.05%	1.21×10^6	4.74%
EL	1.98×10^5	0.7%	2.77×10^5	1.1%
EC	6.47×10^5	2.54%	7.19×10^5	2.83%

Tabuľka 6: Štatistiky kvantifikujúce riziko portfólia $P1$ a $P2$

Z hodnôt uvedených v tabuľke je vidieť, že rozdiel je rádovo 150000 eur, ktoré treba držať navyše pre zabezpečenie solventnosti, či vo forme povinných rezerv. Predstavuje to približne 0.6% východiskovej hodnoty.

Za mieru vymožiteľnosti považovať jednu subjektívne určenú hodnotu, povedzme 0.4 je nesprávne, hoci sa s týmto spôsobom možno stretnúť. Usudzujeme, že výsledky takéhoto zjednudušenia netreba ani uvádzať.

Investovanie do jedného odvetvia

Druhý hraničný príklad slúži ako ukážka potreby diverzifikácie dlhopisov do viacerých odvetví, t.j. vyvarovať sa investovaniu do dlhopisov jedného odvetvia, či vo všeobecnosti do dlhopisov, ktorú sú diverzifikované v málo odvetviach.

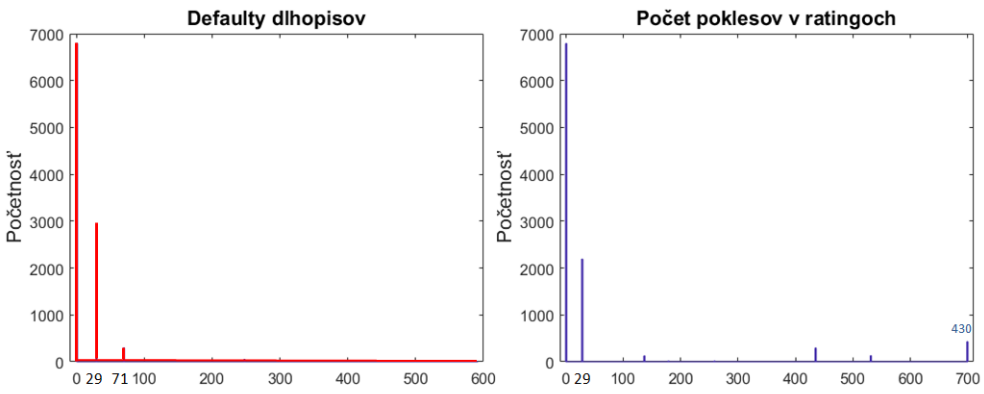
Vytvoríme si dve nové fiktívne portfóliá $P3$ a $P4$, ktorých rizikovosť porovnáme s pôvodným portfóliom $P1$. Pri oboch nových portfóliách uvažujeme iba jedno odvetvie,

môže byť ľubovoľné, napr. financie. Portfóliá sa líšia iba vnútrosektorovými koreláciami. V portfóliu $P3$ volíme koreláciu medzi dlhopismi v rámci odvetvia $Corr = 0.5$ a v portfóliu $P4$ koreláciu $Corr = 1$. Ostatné vlastnosti dlhopisov ostavajú v porovnaní s portfóliom $P1$ nemenné. Opäť uvedieme v tabuľke 7 základné štatistiky:

	Portfólio $P3$		Portfólio $P4$		Portfólio $P1$	
	Objem(€)	$\%PV$	Objem(€)	$\%PV$	Objem(€)	$\%PV$
$VaR_{0.99}$	1.24×10^6	4.89%	2.29×10^6	8.99%	9.96×10^5	3.92%
$CVaR_{0.99}$	1.56×10^6	6.14%	5.45×10^6	21.44%	1.21×10^6	4.74%
EC	1.01×10^6	3.93%	2.02×10^6	7.95%	7.19×10^5	2.83%

Tabuľka 7: Štatistiky kvantifikujúce riziko portfólia $P1$,$P3$ a $P4$

Vo všeobecnosti platí, že s rastúcou koreláciou aktív v portfóliu rastie pri danej hladine spoľahlivosti aj veľkosť neočakávanej straty. Veľkosť neočakávanej straty v našom prípade odzrkadľuje hodnota ekonomického kapitálu. Uvedená závislosť sa potvrdila aj v tomto príklade. Kým pri vcelku dostatočnej diverzifikácii portfólia $P1$ veľkosť neočakávanej straty tvorila 2.83% východiskovej hodnoty portfólia, pri korelácii aktív v portfóliu $P3$ to bolo o viac ako jedno percento navyše a v portfóliu $P4$ až o viac ako päť percent navyše. Taktiež priemerná hodnota strát prevyšujúcich hodnotu v riziku tvorí viac ako pätinu východiskovej hodnoty portfólia. Z uvedených hodnôt vidieť enormné nebezpečenstvo v investovaní do silno korelovaných dlhopisov. Takéto investovanie možno prirovnať s investovaním celej expozície do jedného dlhopisu. Početnosti poklesov kreditných ratingov a defaultov v rámci scenárov pre portfólio $P4$ sú zobrazené na obrázku 26.



Obr. 26: Početnosti defaultov a poklesov kreditných ratingov v portfóliu $P4$

Ak sa pozrieme iba na početnosti defaultov, výrazné peaky vidieť pri hodnotách 0 a 29. Je takmer 70% pravdepodobnosť, že žiaden z dlhopisov v portfóliu nezlyhá a takmer 30% pravdepodobnosť, že zlyhá práve 29 dlhopisov. Hodnota práve 29 je v dôsledku toho, že v portfóliu máme 29 dlhopisov s ratingom CCC. Pravdepodobnosť defaultu tohto dlhopisu je podľa matice pravdepodobností prechodu 32%. Taktiež možno pozorovať situáciu, kedy zlyhá približne 80% aktív v portfóliu. No riziko portfólia neplynie iba zo zlyhaní aktív, ale taktiež z poklesu ich ratingov o čom nám podáva informácie obrázok vpravo. Z neho vidieť opäť takmer 70% pravdepodobnosť, že v portfóliu nedôjde k žiadnemu poklesu ratingu. Nebezpečenstvo vidieť vo vyše 4% pravdepodobnosti poklesu všetkých dlhopisov v portfóliu. Taktiež vidieť síce nízke pravdepodobnosti poklesu veľkého počtu dlhopisov v portfóliu, no v súčte tvoria pomerne veľké riziko.

Záver

Hlavným cieľom našej práce bolo predstaviť čitateľovi vybrané matematické modely riadenia kreditného rizika. Kritérium pre výber modelov bolo ich používanie v praxi.

V úvodnej kapitole sme definovali kreditné riziko, zaviedli pojmy z tejto oblasti nevyhnutné pre pochopenie jednotlivých častí práce a popísali historický vývoj merania kreditného rizika. S ohľadom na to, či pozeráme na udalosť zlyhania spoločnosti ako na exogénnu alebo endogénnu náhodnú premennú, rozdelili sme modely riadenia kreditného rizika na štrukturálne a redukované.

V druhej kapitole sme predstavili prvý komerčne využívaný model riadenia kreditného rizika - KMV model, vlastnený spoločnosťou Moody's Corporation. Ako sme uviedli v podkapitole 2.1, patrí k štrukturálnym modelom a je akousi nadstavbou známeho Mertonovho modelu. Celá kapitola je venovaná teoretickému prístupu k tomuto modelu. V počiatku sme definovali predpoklady modelu a štyri medzikroky vo výpočte hľadanej pravdepodobnosti zlyhania a následne sme ich systematicky odvodili. Základ tvoril Black - Scholesov model oceňovania opcií, ďalej sme využili poznatky o stochastických diferenciálnych rovniciach a teóriu pravdepodobnosti. V podkapitole 2.2 sme predstavili dvojaký spôsob odhadu hodnoty aktív a ich volatility - riešením systému dvoch rovníc a iteračnú metódu.

Tretia kapitola je praktickou aplikáciou doposiaľ nadobudnutých teoretických poznatkov o kreditnom riziku a KMV modeli. KMV model sme aplikovali na dáta dvoch spoločností. Prvou bola spoločnosť Tesla, Inc. a druhou spoločnosť Pacific Gas and Electric Corporation. Ich diametrálne odlišnú ekonomickú situáciu možno pozorovať z vývoja ceny akcií oboch spoločností ilustrovaných na obrázkoch 3 a 4 a taktiež z ich celkovej hodnoty záväzkov. Pre obe spoločnosti sme krok po kroku odvodili hľadanú pravdepodobnosť ich zlyhania. Z dôvodu rýchlo klesajúcej hodnoty aktív spoločnosti PG&E Corporation sme použili iteračnú metódu na odhad hodnoty aktív a ich volatility, čo dáva v tomto prípade presnejšie výsledky ako riešenie systému dvoch rovníc o dvoch neznámych. Pri analýze vývoja spoločnosti Tesla, Inc. a výsledkov získaných z KMV modelu sme usúdili, že výsledná nízka pravdepodobnosť zlyhania nemusí odzrkadlovať reálnu situáciu spoločnosti, ale môže byť reakciou na príliš nadhodnotené ceny akcií.

V štvrtej kapitole bol najmä po teoretickej stránke predstavený model CreditMetrics,

ktorý za riziko považuje nielen default, ale taktiež zhoršenie kreditnej kvality vyjadrenej kreditným ratingom. V práci sme sa venovali výlučne simulačnému spôsobu, nakoľko analytický spôsob je pre väčšie portfóliá len ťažko použiteľný. Po úvodných informáciách o vývoji tohto modelu v čase sme v podkapitole 4.1 predstavili vstupné dáta modelu s informáciami o ich získaní. Plynulo sme prešli k opisu základných krokov výpočtu. Významným krokom pre odhad rizika boli Monte Carlo simulácie podrobne opísané v podkapitole 4.4. Výstupom tohto kroku je matica možných budúcich hodnôt jednotlivých aktív. Z týchto hodnôt a medzí prechodu je následne odvodený nový rating dlhopisov a tým nové možné hodnoty celého portfólia. V podkapitole 4.6 sme definovali štatistiky $VaR, CVaR$, ktorými možno kvantifikovať riziko portfólia a v poslednej podkapitole boli opísané veličiny určujúce povinnosti pre investora (objem rezerv a ekonomického kapitálu) vyplývajúce z odhadnutého rizika. Niektoré medzikroky spolu so štatistikami kvantifikujúcimi riziko boli pre lepšiu názornosť doplnené o grafickú reprezentáciu.

V záverečnej kapitole sme odhadovali kreditné riziko nami vytvorených portfólií spravidla skladajúcich sa zo 700 dlhopisov s rôznymi vlastnosťami. Portfóliá boli vytvárané každé s cieľom poukázať na zmenu, ktorú to vyvolá v odhade rizika. Vlastnosti dlhopisov obsiahnutých v portfóliu boli reprezentované prostredníctvom histogramov. Na základe analýzy sme za optimálne zvolili vykonať 10000 scenárov. Uviedli sme všetky medzikroky výpočtu spolu s hodnotami medzikrokov či grafickou reprezentáciu niektorých hodnôt. Na histograme možných strát, resp. ziskov portfólia sme zakresli výsledné štatistiky kvantifikujúce riziko portfólia, rezervy aj ekonomický kapitál, viď obr. 22. Súčasťou kapitoly bolo aj niekoľko parametrických analýz týkajúcich sa hladiny spoľahlivosti, počtu scenárov, vnútrosektorovej korelácie a ich vplyvu na výsledný odhad rizika. V podkapitole 5.3 sme na fiktívnych portfóliách poukázali na mieru nepresnosti, ktorej sa dopúšťame, ak neuvažujeme vlastnosť seniority dlhopisov a nebezpečenstvo vyplývajúce z nedostatočne diverzifikovaného portfólia, teda napríklad investovanie do dlhopisov výlučne jedného odvetvia. Veľmi podobným spôsobom by bolo možné uvažovať aj vlastnosť číslo regiónu, v ktorom spoločnosť emitujúca daný dlhopis sídli. Potrebné by bolo získať novú vhodnú korelačnú maticu odvetví a regiónov.

Za prínos práce považujeme systematické a ucelené spracovanie teórie KMV a CreditMetrics modelu s podrobnými odvodeniami jednotlivých krokov, ktoré častokrát v litera-

túre absentujú. Ďalším prínosom je praktická aplikácia vybraných modelov či už na reálne dáta spoločností alebo fiktívne portfólia s analýzou získaných výsledkov, poukázaním na výhody modelu a vhodnosť použitia niektorého z postupov na odhad hodnoty aktív a ich volatility, zakomponovanie podrobnejších vlastností dlhopisov do odhadu rizika či rôzne analýzy podávajúce informáciu o optimálnej hodnote subjektívne volených parametrov.

Zoznam použitej literatúry

[1] Allen, L., Saunders, A: *Credit Risk Measurement: New Approaches to Value-at-Risk and Other Paradigms*, John Wiley & Sons, 2002

[2] Chen, Y., Chu, G: *Estimation of Default Risk Based on KMV Model—An Empirical Study for Chinese Real Estate Companies*, School of Statistics and Management, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai, China, 2014, dostupné na internete (6.11.2020): https://pdfs.semanticscholar.org/821c/de67de9e321c5dfc7abcbd2295281730a85c.pdf

[3] Crosbie, P., Bohn, J: *Modeling default risk*, Moody's KMV Company, 2003, dostupné na internete (9.11.2020): https://www.moodysanalytics.com/-/media/whitepaper/before-2011/12-18-03-modeling-default-risk.pdf

[4] Current credit spreads, NAIC, dostupné na internete (10.2.2021): https://content.naic.org/pbr_data.htm

[5] Deoras, A.: *CreditRisk Modeling*, 2021, dostupné na internete (15.3.2021): https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27847-credit-risk-modeling-with-matlab

[6] Edwards, T., Lazzara, C., Preston, H.: *Global Applications of S&P 500 Sectors*, S&P Global, 2018, dostupné na internete (24.2.2021): https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/research/research-global-applications-of-sp-500-sectors.pdf

[7] Frankfurt School: *Certified Expert in Risk Management*, 2.edition 09/2018, dostupné na internete (23.10.2020): https://www.frankfurt-school.de/dam/jcr:d16c538f-b7f0-4950-b2da-4804de3b4f10/Sample%20Reading_CERM_U4.1.pdf

[8] Goswin, T.: *A Structural Approach to Default Prediction*, Deutsche Bundesbank, dostupné na internete (16.11.2020): https://www.bot.or.th/Thai/FinancialInstitutions/Highlights/IFRS9_Doc/The%20Merton%20Model.pdf

[9] Gupton, G., Finger, C., Bhatia, M.: *CreditMetrics – Technical Document*, 1997, dostupné na internete (17.2.2021): http://www.angelvila.eu/documents/CREDITMETRICSDOCUMENTOTECNICO_000.pdf

[10] *História spoločnosti Pacific Gas & Electric*, dostupné na internete (27.11.2020): https://www.pgecorp.com/aboutus/history/

[11] Janková, K.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Univerzita Komenského Bratislava, 2012

[12] Jurča, P.: *Riadenie rizík*, učebné texty, FMFI UK Bratislava, 2020, dostupné na internete 22.10.2020: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/jurca/qrm/qrm.htm#literatura

[13] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, 2005

[14] Merton, R.: *On the Pricing of Corpoate Debt*, dostupné na internete (1.4.2021): https://mathtube.org/sites/default/files/lecture-notes/Merton_Robert(repeat).pdf

[15] Munves, D., Smith, A., Hamilton, D.: *Banks and their EDF measures now and through the credit crisis*, Moody's Analytics, 2010, dostupné na internete 17.12.2020: https://www.moodysanalytics.com/-/media/whitepaper/before-2011/10-15-12-banks-and-their-edf-measures-now-and-through-the-credit-crisis.pdf

[16] Nazeran, P., Dwyer, D: *Credit Risk Modeling of Public Firms: EDF9*, Moody's Analytics, 2015, dostupné na internete (9.11.2020): https://www.moodysanalytics.com/-/media/whitepaper/2015/2012-28-06-public-edf-methodology.pdf

[17] Ong, M: *Internal Credit Risk Models : Capital Allocation and Performance Measurement*, Risk Books, 1999

[18] Rundel, C.: *Statistics*, slajdy z prednášok, 2012, dostupné na internete 1.3.2021: https://www2.stat.duke.edu/courses/Spring12/sta104.1/Lectures/Lec22.pdf

[19] Saita, F.: *Value at Risk and Bank Capital Management*, Elsevier, edition 1, 2007

[20] Sarykalin, S. et al: *Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*, INFORMS, 2008

[21] The Basel Committee: *History of The Basel Committee*, dostupné na internete (22.10.2020): https://www.bis.org/bcbs/history.htm

[22] Toto, A.: *Reduced-form and Structural models of correlated defaults*, Università G. d'Annunzio, Department of Business Economics, Pescara, 2016, dostupné na internete (23.10.2020): https://www.researchgate.net/publication/314229227_Reduced-form_and_Structural_models_of_correlated_defaults_two_tales_of_the_same_phenomenon

[23] Truksová, L.: *Kreditné riziko*, MFF UK Praha, 2009, dostupné na internete (23.10.2020): https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/44308/?lang=en

[24] Vodička, P.: *Simulation of Bond Portfolio Development with Default Risk*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2017, dostupné na internete (23.10.2020): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2017/vodicka/diplomovka.pdf

[25] U.S. Department of the treasury: *Úrokové miery pre americké štátne dlhopisy*, dostupné na internete (25.11.2020): https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billrates

Prílohy

Dostupné v elektronickej podobe.

1. KMV model, riešenie pomocou systému dvoch nelineárnych rovníc - kód MATLAB
2. KMV model, riešenie iteračnou metódou - kód MATLAB
3. CreditMetrics model, kód MATLAB