UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



NELINEÁRNE VIBRÁCIE AKUSTICKÝCH MEMBRÁN

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2022 Bc. Dominik BOLERÁC

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NELINEÁRNE VIBRÁCIE AKUSTICKÝCH MEMBRÁN

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

Bratislava 2022 **Bc. Dominik BOLERÁC**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dominik Bolerác
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Nelinárne vibrácie akustických membrán
Nonlinear vibrations of acoustic membranes

Anotácia: Nelineárne efekty zohrávajú významnú úlohu v oblasti hudobnej akustiky bicích nástrojov. Dôležitou súčasťou bicích nástrojov sú membrány. Niektoré experimentálne práce naznačujú prítomnosť jemných mechanizmov prenosu mechanickej vibračnej energie medzi rôznymi frekvenčnými rozsahmi. Diplomová práce je zameraná na konštrukciu a numerickú analýzu modelu membrány, ktorý bude zahŕňať nelineárnu väzbu medzi planárnymi a transverzálnymi posunutiami. Pozornosť bude venovaná frekvenčnej odozve rôznych typov nelineárnych modelov pre vibrácie membrán.

Vedúci: doc. RNDr. Peter Guba, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 13.01.2021

Dátum schválenia: 17.01.2021 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie: Touto cestou sa chcem poďakovat môjmu vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD. za obrovskú trpezlivosť, ľudskosť, ochotu a pomoc počas celého procesu písania, dôkladné čítanie a veľmi podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej priateľke a rodine za ich pomoc s korektúrou, trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

BOLERÁC, Dominik: Nelineárne vibrácie akustických membrán [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Peter Guba, PhD., Bratislava, 2022, 67 str.

V našej práci sa venujeme riešeniu biharmonickej rovnice a formulácii von Kármánovho modelu v diskretizovanej forme. Práca nadväzuje na bakalársku prácu [6], avšak popisuje správanie membrány v nelineárnom svete. V prvej kapitole zavedieme základné pojmy z teórie elasticity a odvodíme biharmonickú rovnicu v troch rozmeroch. S predpokladom osovej symetrie sa biharmonická rovnica zredukuje o členy obsahujúce ϕ, vďaka čomu je možné nájsť aj uzavreté riešenia biharmonickej rovnice. Na formuláciu a odvodenie všeobecného riešenia osovo-symetrického prípadu je zameraná kapitola 2. V tretej kapitole sa venujeme diskretizácii biharmonickej rovnice aplikáciou metódy konečných diferencií. Následnou implementáciou v programovacom jazyku Python riešime úlohy z kapitoly 2 pre rôzne osovo-symetrické statické zaťaženia. Okrem osovo-symetrického prípadu formulujeme aj dvojrozmerný prípad. V štvrtej kapitole uvádzame alternatívny prístup riešenia biharmonickej rovnice pomocou prevodu na systém obyčajných diferenciálnych rovníc a využitím metódy typu Runge–Kutta. Posledná kapitola je zameraná na diskretizáciu von Kármánovho modelu a návrh postupu riešenia tohto modelu.

Kľúčové slová: biharmonická rovnica, metóda konečných diferencií, diskretizácia, von Kármán, Python

Abstract

BOLERÁC, Dominik: Nonlinear Vibrations of Acoustic Membranes [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Peter Guba, PhD., Bratislava, 2022, 67 p.

In our thesis, we focus on solving a biharmonic equation and on describing von Kármán model in a discrete form. Based on the bachelor thesis [6], this thesis describes a membrane's behaviour in non-linear conditions. In the first chapter, we describe basic terms of the plate analysis and we derive the biharmonic equation in three dimensions. With the assumption of axis-symmetry, elements with ϕ are omitted, and therefore we can find solutions of the biharmonic equation in closed forms. In the second chapter, we formulate and derive general solution of the axis-symmetric case. Third chapter is focused on the discretization of the biharmonic equation by the application of finite-difference schemes. Consequently, we implement this formulation in programming language Python and solve the axis-symmetric equation with different types of static load. Except for the axis-symmetric case, we describe also two-dimensional case. The fourth chapter, we solve the axis-symmetric biharmonic equation by an alternative way - using Runge–Kutta method for a system of ordinary differential equations. The last chapter focuses on discretization of von Kármán model and suggestion on how to proceed when solving this model.

Keywords: biharmonic equation, finite-difference method, discretization, von Kármán, Python

Obsah

Zoznam použitých symbolov **8**

Úvod **9**

1 Základné typy dosiek **11**

1.1 Odvodenie rovnice membrány 12

1.2 Diferenciálna rovnica pre kruhové membrány 16

1.2.1 Laplacián v polárnych súradniciach 16

1.2.2 Biharmonický operátor v polárnych súradniciach 18

1.2.3 Ohybové momenty a šmykové sily 18

2 Kruhové membrány a ich klasické riešenia **19**

2.1 Homogénne statické zaťaženie 19

2.2 Osovo-symetrické statické zaťaženie 21

2.2.1 Riešenie biharmonickej homogénnej rovnice pre osovo-symetrický prípad 22

3 Metóda konečných diferencií v polárnej geometrii **24**

3.1 MKD: Interpolačný prístup 24

3.2 Diskretizácia biharmonickej rovnice 26

3.2.1 Osovo-symetrický prípad 27

3.3 Riešenie prípadu s homogénnym statickým zaťažením 30

3.4 Riešenie prípadu s radiálne závislým statickým zaťažením 30

3.5 Dvojrozmerný prípad 32

4 Riešenie algebraického systému (3.44) **35**

4.1 Metóda typu Runge–Kutta 35

4.1.1 Konštantné $\boldsymbol{p_z(r)}$ 36

4.1.2 Lineárne $\boldsymbol{p_z(r)}$ 38

4.1.3 Kvadratické $\boldsymbol{p_z(r)}$ 38

4.1.4 Logaritmické $\boldsymbol{p_z(r)}$ 41

5 Von Kármánove rovnice pre kruhové membrány **43**

5.1 Von Kármánov model: Úvodné poznámky a jeho diskretizácia 43

5.2 Diskrétna formulácia 45

Záver **47**

Zoznam použitej literatúry **49**

Príloha A **51**

Príloha B **55**

Príloha C **59**

Príloha D **64**

Zoznam použitých symbolov

D	tuhosť v ohybe [Pa m^3]
E	Youngov modul elasticity [Pa]
ϵ_x	normálové napätie v smere X
h	hrúbka dosky
L	dĺžka dosky
$\mathcal{L}(.)$	diferenciálny operátor
m_x	ohybový moment na jednotku dĺžky v karteziánskej sústave súradníc
m_{xy}	moment sily na jednotku dĺžky v karteziánskej sústave súradníc [N m]
M_x	lokalizovaný a/alebo vonkajší moment
ν	Poissonovo číslo
∇^2	Laplaceov operátor
∇^4	biharmonický operátor
∇_r^4	osovo-symetrický biharmonický operátor
p_x	záťaž na jednotku plochy v karteziánskej sústave súradníc
P_x	koncentrované sily v karteziánskej sústave súradníc
q_r, q_φ	šmykové napätie na jednotku dĺžky vo valcovej sústave súradníc
q_x	šmykové napätie v karteziánskej sústave súradníc
r, ϕ	polárne súradnice
ρ	hustota membrány
σ_x	normálové napätie
τ	šmykové napätie
u, v, w	vychýlenie v smere X, Y, Z
w_H, w_P	homogénne a partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice
x, y, z	karteziánske súradnice

Úvod

Základy matematického popisu kmitania elastických membrán boli položené v roku 1766 matematikom L. Eulerom. Ako bližšie uvádzame v našej bakalárskej práci [6], dôležitý prínos mal v ďalšom období J. B. J. Fourier, ktorý navrhol riešenie pre kmitanie lineárne-elastickej struny v tvare nekonečného harmonického radu (Fourierov rad). Ďalší impulz výskumu vibrácií dosiek pochádza od E. F. F. Chladneho, ktorý ako prvý klasifikoval rôzne vibračné módy priestorových vibrácií dvojrozmerných elastických membrán. Parciálna diferenciálna rovnica pre vibráciu dosiek bola prvýkrát odvodená S. Germainovou v roku 1811, s následnými modifikáciami J. L. Lagrangea a L. D. Poissona. Bežne používaná verzia tejto rovnice (porovnaj (1.15)) pochádza od Naviera (1823). [21]

Problematike vzťahu medzi hudbou a matematikou sa venujú napr. práce [5, 12, 17]. Matematickému popisu kmitania membrán bicích nástrojov v kontexte lineárnej elasticity sme sa venovali v práci [6]. Základným cieľom tejto diplomovej práce je formulácia, numerické riešenie problému kmitania kruhovej membrány v troch rozmeroch a aplikácia metódy konečných diferencií v polárnej sústave pre biharmonickú rovnicu. Implementáciu sme realizovali v programovacom jazyku Python.

V prvej kapitole zavedieme základné pojmy z teórie elasticity a odvodíme potrebné vzťahy a biharmonickú rovnicu v troch rozmeroch pomocou analýzy silových rovnováh pôsobiacich na membránu. Súčasťou tejto kapitoly je aj odvodenie biharmonického operátora v troch rozmeroch pre polárny systém (detaily v Prílohe A).

Druhá kapitola je zameraná na riešenie redukovaných prípadov biharmonickej rovnice, pre ktoré možno nájsť uzavreté riešenia trojrozmernej elasticity. Zaoberáme sa dvoma redukovanými prípadmi: (i) homogénne statické zaťaženie membrány a (ii) osovo-symetrické statické zaťaženie membrány.

V kapitole 3 sa venujeme diskretizácii biharmonickej rovnice aplikáciou metódy konečných diferencií. Diskrétnu verziu biharmonickej rovnice implementujeme pre získanie numerických riešení modelových príkladov uvedených v kapitole 2 a následne formulujeme všeobecný diskretizovaný systém bez osovej symetrie.

V kapitole 4 uvádzame alternatívny prístup k riešeniu okrajovej úlohy, pomocou prevedenia diferenciálnej rovnice 4. rádu na systém obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu. Následným použitím *solve_bvp* funkcie v Pythone vyriešime okrajové úlohy

pre konštantné, lineárne, kvadratické a logaritmické zaťaženie.

V poslednej kapitole sa venujeme popísaniu a diskretizovaniu von Kármánovho modelu, ktorý obsahuje nelineárna biharmonická rovnica (von Kármánova rovnica), a spolu s rovnicou obsahujúcou Airyho funkciu napätia tvoria systém viazaných rovníc 8. rádu. Na záver navrhujeme iteračný prístup k riešeniu tohto systému.

1 Základné typy dosiek

Diplomová práca nadväzuje na bakalársku prácu [6], preto budeme predpokladať znalosť pojmov vysvetlených v tejto práci - z matematického aj bubenníckeho hľadiska. V tejto kapitole budeme vychádzať primárne z [3] a [21].

Na úvod našej diplomovej práce považujeme za nevyhnutné definovať, čo vo všeobecnosti chápeme pod pojmom „doska“. Tenkou doskou nazývame trojrozmerné teleso s rovinnou stredovou plochou. Stredová plocha je miesto, v ktorom sú body hornej a spodnej plochy dosky od tejto plochy rovnako vzdialené (pozri obrázok 1). Ak na dosku pôsobí sila len v jednej rovine, inak povedané, je namáhaná len v jednej rovine, ide o membránové namáhanie dosky klasickou rovinnou napätosťou. Ak ide o zaťaženie len v priečnom smere, doska sa namáha ohybom a krútením. Vo všeobecnosti platí, že je doska namáhaná kombináciou oboch zaťažení [3].

Dosky môžeme deliť podľa pomeru hrúbky h k dĺžke L:

1. Tuhé dosky - $\frac{h}{L} = \frac{1}{50} - \frac{1}{10}$.
2. Membrány - $\frac{h}{L} < \frac{1}{50}$.
3. Stredne hrubé dosky - $\frac{h}{L} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$.
4. Hrubé dosky - $\frac{h}{L} > \frac{1}{5}$.

Keďže bubenícke blany sú kruhové membrány, budeme detailne rozoberať práve 2. kategóriu.

Matematické modelovanie membrán si vyžaduje riešenie problému trojrozmernej elasticity. Takýto problém je však vo všeobecnosti, až na pár výnimiek, matematicky ťažko trakovateľný. Preto sa často využívajú napr. Kirchhoffove alebo von Kármánove modely, o ktorých budeme neskôr hovoriť. Pri odvodzovaní rovníc urobíme niekoľko predpokladov:

1. Materiál je homogénny, izotropický (materiálové charakteristiky sú vo všetkých smeroch rovnaké) a lineárne elastický - podlieha Hookovmu zákonu.
2. Membrána je pred deformáciou nezakrivená.
3. Stredová plocha membrány zostáva počas ohybu bez napätia.

4. Konštantná hrúbka membrány h je malá v porovnaní s ostatnými rozmermi, t.j.

$$h \leq \frac{x}{10}, \text{ resp. } h \leq \frac{y}{10}.$$

5. Priečne deformácie $w(x, y)$ sú malé v porovnaní s hrúbkou membrány h, t.j.

$$w(x, y) \leq \frac{h}{10}.$$

1.1 Odvodenie rovnice membrány

Vďaka vyššie spomenutým predpokladom môžeme pôvodnú trojrozmernú elasticitu zjednodušiť na dvojrozmernú. Pre modelovanie lineárnych tenkých membrán s relatívne malým priehybom je vhodný najmä Kirchhoffov model, ktorý zanedbáva energiu šmykových napätí a predpokladá nezávislosť ohybového a membránového zaťaženia. Pri modelovaní geometricky nelineárnych membrán s väzbou stenového a ohybového napätia sa však môžeme oprieť o von Kármánov model. Pri oboch modeloch sa využívajú Kirchhoffove predpoklady [22]:

1. Každá normála na stredovú plochu zostane normálou aj pri zaťažení.
2. Rotačná zotrvačnosť, pozdĺžne napätie a šmykové napätie sú zanedbané.
3. Materiál je lineárny (t.j. relatívna deformácia elastickej membrány je lineárnou funkciou napätia), homogénny a izotropický.

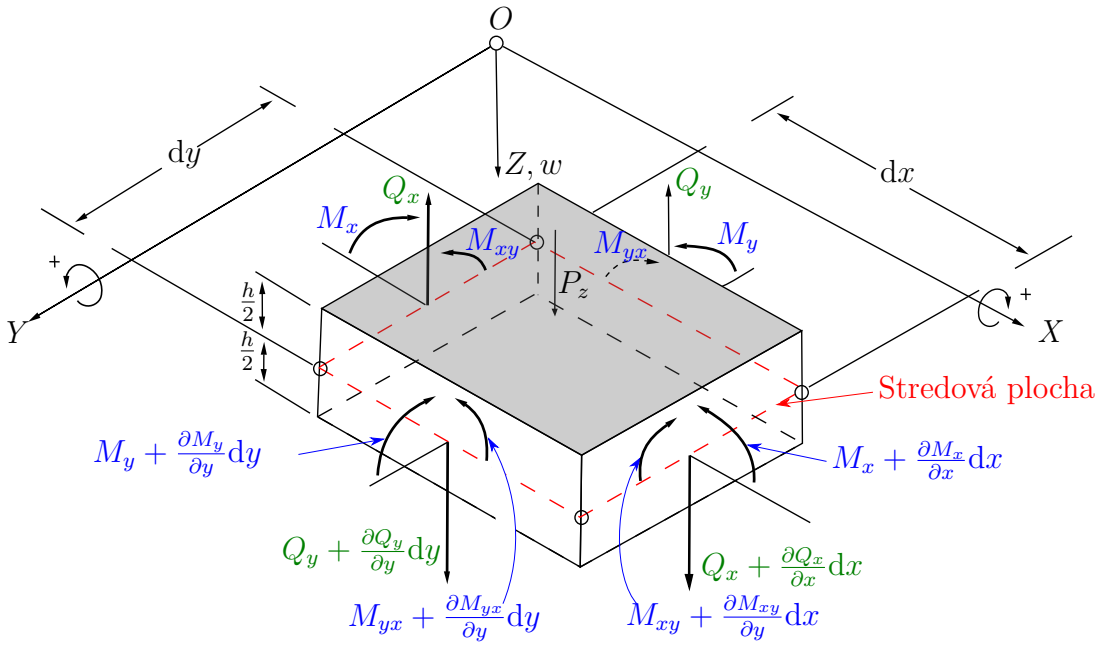
Okrem toho autor [3] tiež predpokladá, že body membrány na spoločnej normále nemenia svoje vzájomné vzdialenosti. Inými slovami, zanedbávame deformáciu hrúbky membrány a preto $\epsilon_z = 0$.

Ak predpokladáme, že na membránu pôsobia len laterálne (bočné) sily, t.j. sily iba v tých smeroch, ktoré nemajú normálovú zložku, môžeme využiť, že

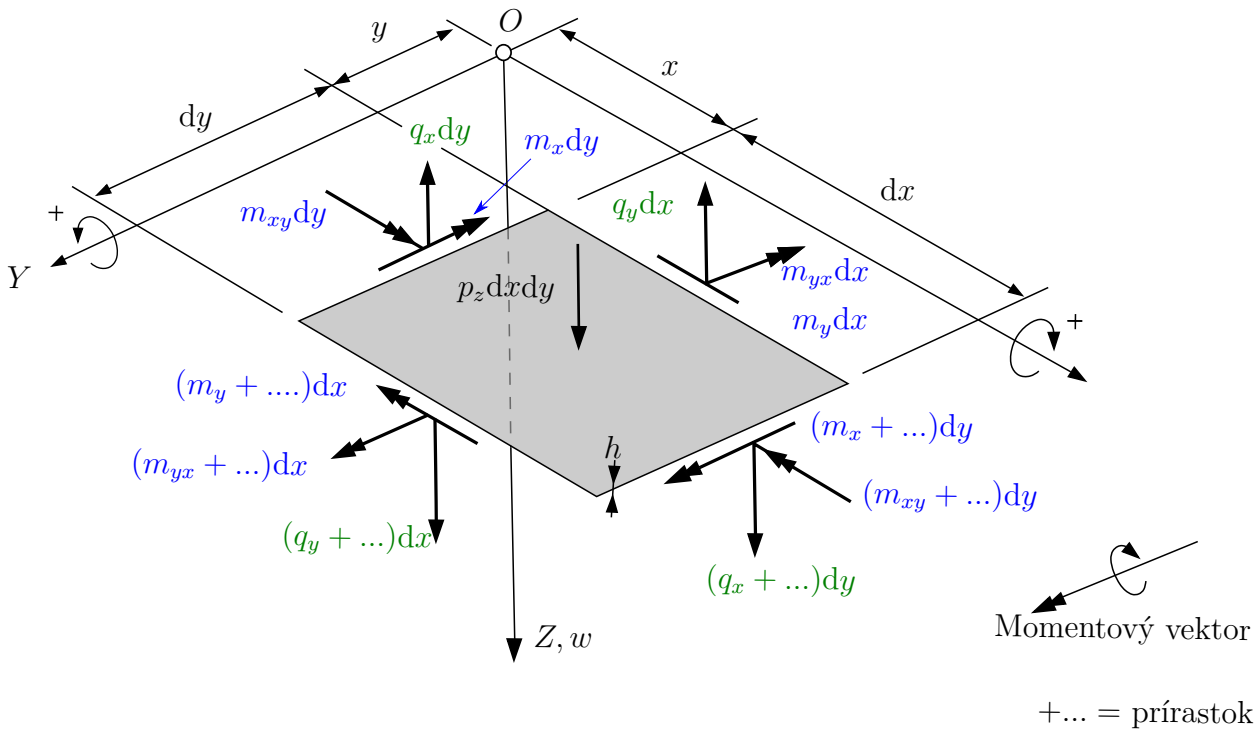
$$\sum M_x = 0, \; M_y = 0, \; \sum P_z = 0,$$

kde M_x označuje ohybový moment v smere osi x a P_z vonkajšiu silu v smere osi z, ktorá je prenášaná M_x, M_y, Q_x (šmyková sila v smere x) a Q_y. Súčet momentov všetkých síl pôsobiacich okolo osi y je nulový, čo môžeme písať ako

$$\begin{aligned} \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \;\; &- \;\; m_x\mathrm{d}y + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - m_{yx}\mathrm{d}x \\ &- \;\; \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\frac{\mathrm{dx}}{2} - q_x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{2} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$



Obr. 1: Vonkajšie a vnútorné sily vo výseku membrány, prispôsobené podľa [21]



Obr. 2: Schématický nákres obr. 1, prispôsobené podľa [21]

Po zjednodušení a zanedbaní člena $\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{2}$ dostávame

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}\mathrm{dydx} - q_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Po poslednej úprave, predelením $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dostávame

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x. \tag{1.2}$$

Analogicky pre os x dostaneme

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \tag{1.3}$$

a pre os z

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z. \tag{1.4}$$

Dosadením rovníc (1.2) a (1.3) do (1.4) a $m_{xy} = m_{yx}$ dostaneme

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y). \tag{1.5}$$

V tejto práci budeme používať na označenie deformácie $w(x, y)$, pre ktorú existuje diferenciálna rovnica 4. rádu, ktorú si odvodíme. Mechanické napätia σ_x a σ_y produkujú ohybový moment v membráne podobne ako v nosníkovej teórií. Integrovaním normály napätia dostávame ohybový moment, pôsobiaci na membránu ako:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \mathrm{d}z, \tag{1.6}$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \mathrm{d}z. \tag{1.7}$$

Podobne aj točiace momenty tvorené šmykovým napätím $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$:

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \mathrm{d}z. \tag{1.8}$$

Integrovaním rovníc (1.6), (1.7) a následným dosadením

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{1.9}$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.10}$$

dostávame

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad (1.11)\\ &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\ m_y &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (1.12)\\ &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \end{aligned}$$

kde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.13}$$

označuje tuhosť v ohybe. Analogicky dostávame aj výraz pre točivý moment vyjadrený pomocou deformácie w v tvare

$$\begin{aligned} m_{xy} &= m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \mathrm{d}z = -2G \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 \mathrm{d}z \\ &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1-\nu)\chi. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Po dosadení (1.11), (1.12) a (1.14) do (1.5) dostávame výslednú diferenciálnu rovnicu pre membránu, na ktorú pôsobí laterálne zaťaženie, v tvare

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D}. \tag{1.15}$$

Rovnicu (1.15) môžeme prepísať pomocou dvojrozmerného Laplaciánu

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \tag{1.16}$$

do jednoduchšej formy ako

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = D\nabla^4 w(x,y) = p_z(x,y). \tag{1.17}$$

V tejto práci budeme potrebovať aj šmykové sily. Tie dostaneme dosadením rovníc (1.11), (1.12) a (1.14) do (1.2) a (1.3). Výsledkom sú nasledujúce vzťahy pre zložky šmykovej sily:

$$q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \tag{1.18}$$

$$q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w. \tag{1.19}$$

1.2 Diferenciálna rovnica pre kruhové membrány

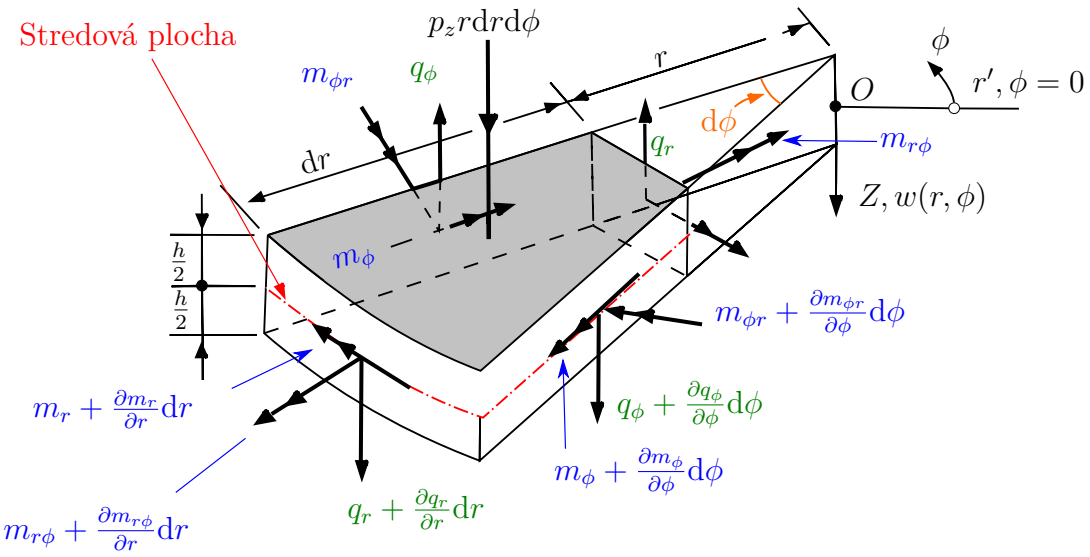
V tejto časti vychádzame z [13, 21].

1.2.1 Laplacián v polárnych súradniciach

Na kruhové membrány aplikujeme transformáciu:

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \tag{1.20}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.21}$$



Obr. 3: Výsek z kruhovej membrány, prispôsobené podľa [21]

Odvodenie je analogické ako v [6]. Keďže x je závislé od r a ϕ, použitím reťazového pravidla

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

a vzťahov pre transformáciu na polárne súradnice ((1.20), (1.21)) získame

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{r}\sin\phi.$$

Na to, aby sme dostali potrebné parciálne derivácie, využijeme diferenciálny tvar transformácie:

$$\mathrm{d}x = \cos\phi\mathrm{d}r - r\sin\phi\mathrm{d}\phi,$$

$$\mathrm{d}y = \sin\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\mathrm{d}\phi.$$

Riešením je potom

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r &= \cos\phi \mathrm{d}x + \sin\phi \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}\phi &= -\frac{1}{r}\sin\phi \mathrm{d}x + \frac{1}{r}\cos\phi \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

z čoho dostávame potrebné parciálne derivácie

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\phi.$$

Preto

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial w}{\partial \phi} = \left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] w, \tag{1.22}$$

z čoho

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[\cos\phi\frac{\partial w}{\partial r} - \sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\right] \\ &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\phi\frac{\partial w}{\partial r} - \sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\right) - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial w}{\partial r} - \sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\right). \end{aligned}$$

Po deriváciách súčinov majú jednotlivé členy tvar

$$\begin{aligned} \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\phi\frac{\partial w}{\partial r}\right) &= \cos^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial w}{\partial\phi}\right) &= \frac{1}{r^2}\cos\phi\sin\phi\frac{\partial w}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\phi}, \\ -\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial w}{\partial r}\right) &= \frac{1}{r}\sin^2\phi\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 w}{\partial\phi\partial r}, \\ \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\right) &= \frac{1}{r^2}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial w}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\sin^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2}, \end{aligned}$$

čo môžeme upraviť ako

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\sin^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\sin^2\phi\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial w}{\partial\phi}.$$

Analogicky pre derivácie podľa y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \sin\phi\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial w}{\partial\phi}, \qquad (1.23) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\cos^2\phi\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\cos^2\phi\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial w}{\partial\phi}. \end{aligned}$$

Dosadením do (1.16) zisťujeme, že Laplacián má v polárnych súradniciach tvar

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{1.24}$$

1.2.2 Biharmonický operátor v polárnych súradniciach

Cieľom tejto časti je odvodenie biharmonického operátora v polárnych súradniciach. Toto odvodenie je vlastným riešením úlohy 8 v práci [13, str. 147]. Pre prehľadnosť textu sme detaily odvodenia zaradili do Prílohy A. Výsledkom je biharmonický operátor v polárnych súradniciach (A.20), ktorý má tvar

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial^2 \partial \phi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \phi^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}. \quad (1.25)$$

Rovnicu (1.17) v polárnych súradniciach môžeme v zjednodušenom tvare zapísať ako

$$\nabla^4 w = \frac{p_z(r,\phi)}{D}. \quad (1.26)$$

1.2.3 Ohybové momenty a šmykové sily

Okrem Laplaciánu môžeme prepísať aj vnútorné momenty (rovnice (1.11), (1.12) a (1.14)) pomocou polárnych súradníc:

$$m_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right], \quad (1.27)$$

$$m_\phi = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right), \quad (1.28)$$

$$m_{r\phi} = m_{\phi r} = -(1-\nu)D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right]. \quad (1.29)$$

Podobne dosadením do rovníc (1.18) a (1.19) dostávame šmykové sily vyjadrené pomocou polárnych súradníc v tvare:

$$q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w, \quad (1.30)$$

$$q_\phi = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\nabla^2 w. \quad (1.31)$$

2 Kruhové membrány a ich klasické riešenia

V prvej kapitole sme uviedli, že matematické riešenia trojrozmernej elasticity sú matematicky ťažko trakovateľné. Teraz sa pozrieme práve na dve z výnimiek. Prvou z nich je problém pre upnutú kruhovú membránu s homogénnym statickým zaťažením. Druhý problém sa zjednoduší vďaka osovo-symetrickému statickému zaťaženiu. V tejto kapitole spracúvame 2 príklady z [21].

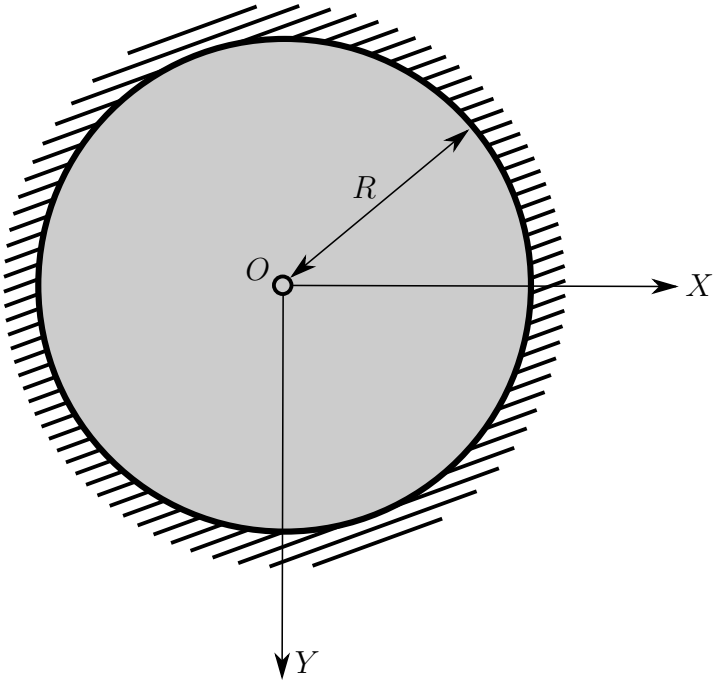
Homogénna časť rovnice (1.15) má tvar

$$\nabla^4 w = 0$$

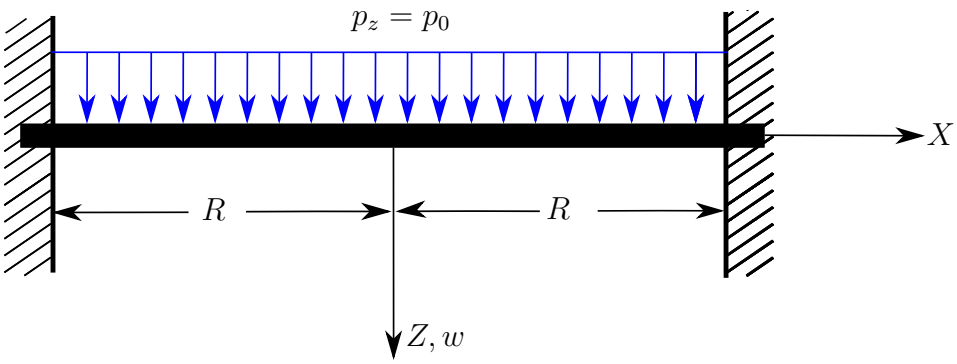
a ide o tzv. biharmonickú rovnicu.

2.1 Homogénne statické zaťaženie

Pri homogénnom statickom zaťažení kruhovej membrány s pevne uchyteným okrajom na obrázkoch 4 a 5 (t.j. blana je pevne uchytená obručou a ladiacimi skrutkami) je možné odvodiť riešenie v uzavretej forme.



Obr. 4: Uchytená kruhová membrána s homogénnym statickým zaťažením, prispôsobené podľa [21]



Obr. 5: Vertikálny rez uchytenej kruhovej membrány s homogénnym statickým zaťažením, prispôsobené podľa [21]

Predpokladajme, že deformácia má tvar

$$w(x,y) = c\left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1\right)^2, \tag{2.32}$$

kde R je polomer kruhovej membrány a c je neznáma konštanta. Tvar riešenia je navrhnutý tak, aby spĺňal všetky okrajové podmienky. Získame ho uvažovaním všeobecnejšieho tvaru

$$w(x,y) = c\left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1\right)^\alpha,$$

a ďalšou analýzou zistíme, že rovnicu splníme výberom $\alpha = 2$.

Okrajové podmienky sú

$$w = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Overenie okrajových podmienok začneme zavedením

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1\right),$$

takže

$$w = c\mathfrak{M}^2. \tag{2.33}$$

Na okraji platí vzťah $r^2 = R^2 = x^2 + y^2$ a po dosadení do $\mathfrak{M}$ vidíme, že prvá okrajová podmienka je splnená automaticky.

Prvé derivácie majú tvar

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2c\mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2c\mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}.$$

Po dosadení $r^2 = R^2 = x^2 + y^2$ do $\mathfrak{M}$ vidíme, že aj ostatné dve okrajové podmienky sú splnené.

Parciálne derivácie potrebné pre vzťah (1.15) sú:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{24c}{R^4}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{8c}{R^4}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{24c}{R^4}. \end{aligned}$$

Dosadením do (1.15) dostávame

$$\frac{c}{R^4}(24 + 2 \times 8 + 24) = \frac{p_0}{D},$$

z čoho

$$c = \frac{R^4 p_0}{64D}.$$

Takže (2.32) nadobúda tvar

$$w(x, y) = \frac{R^4 p_0}{64D} \left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - 1 \right)^2. \tag{2.34}$$

2.2 Osovo-symetrické statické zaťaženie

Ak na membránu pôsobí osovo-symetrické statické zaťaženie, aj následná deformácia membrány je osovo-symetrická (obrázok 6). Inými slovami, w je nezávislé od ϕ, čím sa automaticky (1.24) redukuje na tvar

$$\nabla_r^2 = \frac{\mathrm{d}^2(\bullet)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}r}. \tag{2.35}$$

Diferenciálna rovnica pre kruhovú membránu bude potom mať tvar

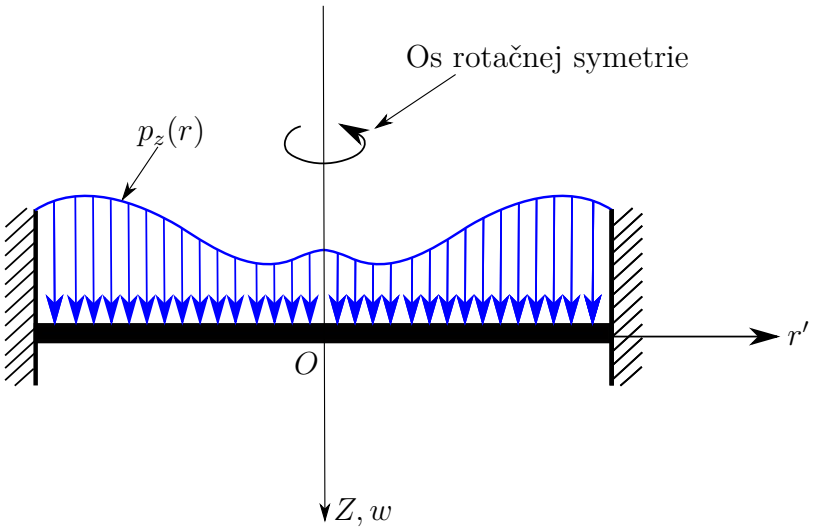
$$\nabla_r^4 w(r) = \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}r^4} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{p_z(r)}{D}. \tag{2.36}$$

Okrem tejto rovnice sa automaticky zjednodušia aj vzťahy pre ohybové momenty a šmykové sily:

$$m_r = -D\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \nu \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \right), \tag{2.37}$$

$$m_\phi = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} \right), \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} m_{r\phi} &= m_{\phi r} = 0, \\ q_r &= -D\left(\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \right), \\ q_\phi &= 0. \end{aligned}$$



Obr. 6: Náčrt osovo-symetrickej deformácie kruhovej membrány (vertikálny rez), prispôsobené podľa [21]

2.2.1 Riešenie biharmonickej homogénnej rovnice pre osovo-symetrický prípad

Riešenie môžeme vyjadriť v tvare súčtu homogénneho a partikulárneho riešenia. Homogénna časť má tvar

$$\nabla^4 w_H = w^{(\mathrm{iv})} + \frac{2}{r} w^{(\mathrm{iii})} - \frac{1}{r^2} w^{(\mathrm{ii})} + \frac{1}{r^3} w' = 0.$$

Prenásobením r^4 dostávame:

$$r^4 w^{(\mathrm{iv})} + 2r^3 w^{(\mathrm{iii})} - r^2 w^{(\mathrm{ii})} + r w' = 0.$$

Riešenie budeme hľadať v tvare $w(r) = r^\lambda$, kde λ je neznáma konštanta. Potom

$$r^4 (r^\lambda)^{(\mathrm{iv})} + 2r^3 (r^\lambda)^{(\mathrm{iii})} - r^2 (r^\lambda)^{(\mathrm{ii})} + r (r^\lambda)' = 0.$$

Charakteristická rovnica pre λ má tvar

$$(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2) r^\lambda = 0.$$

Predpokladajme, že korene nepochádzajú z r^λ, ale z výrazu vnútri zátvorky. Hľadáme teda korene rovnice

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0.$$

Úpravou máme

$$\lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0,$$

z čoho $\lambda_{1,2} = 0$ a $\lambda_{3,4} = 2$. Z prvého dvojnásobného koreňa máme riešenie

$$w_{1,2}(r) = c_1 + c_2 \ln(r),$$

a z druhého

$$w_{3,4} = c_3 r^2 + c_4 r^2 \ln(r).$$

Všeobecné riešenie homogénnej časti má tvar

$$w_H = c_1 + c_2 \ln(r) + c_3 r^2 + c_4 r^2 \ln(r), \tag{2.39}$$

kde c_1, c_2, c_3 a c_4 sú konštanty, ktoré dourčíme z okrajových podmienok. Partikulárnu časť všeobecného riešenia dorátame v závislosti od pravej strany (2.36) v kapitole 4.

3 Metóda konečných diferencií v polárnej geometrii

V tretej kapitole sa budeme venovať numerickému riešeniu príkladov z predchádzajúcej kapitoly aplikáciou metódy konečných diferencií (MKD). MKD budeme aplikovať v polárnej geometrii. Implementáciu MKD pre hľadanie numerického riešenia nelineárnej rovnice (1.15) urobíme v programe Python. Zdrojový kód vytvoreného programu je uvedený v prílohe B.

3.1 MKD: Interpolačný prístup

V tejto časti vychádzame najmä z [1, 21]. Metóda konečných diferencií je založená na matematickej diskretizácií kontinua. Membránu popíšeme dvojrozmernou sieťou. Ďalším krokom je nahradenie parciálnych derivácií v (1.15) kvocientami konečných diferencií v každom bode siete. Týmto spôsobom nahradíme jednu skalárnu rovnicu sústavou algebraických rovníc. Riešením je potom deformácia w_i pre každý bod siete i.

Nech $W(r)$ označuje polynóm, ktorý interpoluje pôvodnú funkciu $w(r)$, a podobne $W'(r)$ interpoluje $w'(r)$, atď. Najjednoduchší spôsob, ako získať prvé a druhé derivácie funkcie $w(r)$ v pivotnom bode m, je použitím paraboly, ktorá prechádza rovnako vzdialenými bodmi (pozri obr. 7).

Uvažujme kvadratický polynóm v tvare:

$$W(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2.$$

Druhý člen je lineárny v premennej r (porovnaj nesprávny tvar v [21, str. 248]. Vychádzajúc zo všeobecného zápisu Taylorovho rozvoja funkcie, polynóm $W(r)$ možno písať v tvare:

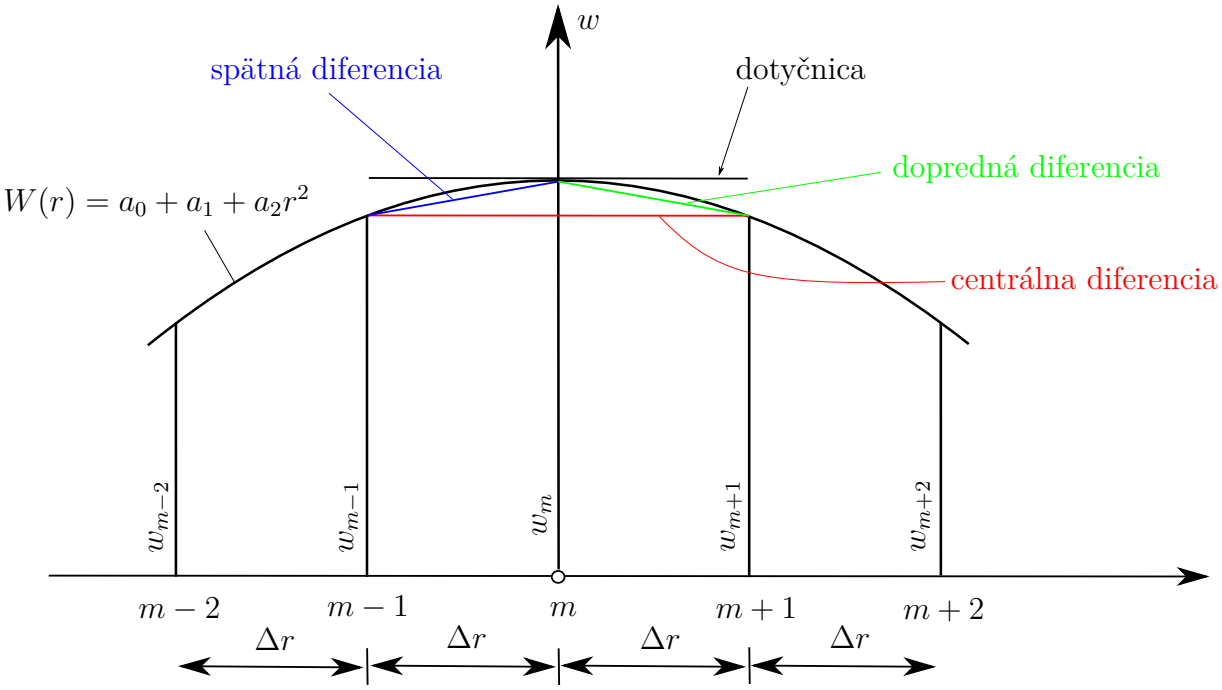
$$W(r) = w_m + \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2(\Delta r)} r + \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta r)^2} \frac{r^2}{2},$$

a preto

$$W'(r) = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2(\Delta r)} + \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta r)^2} r.$$

Keďže $r_m = 0$, prvá derivácia pôvodnej funkcie $w(r)$ môže byť aproximovaná výrazom

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)_m \approx \left(\frac{\Delta w}{\Delta r}\right)_m = [W'(r)]_m = \frac{1}{2(\Delta r)}(w_{m+1} - w_{m-1}),$$



Obr. 7: Grafická reprezentácia konečných diferencií, prispôsobené podľa [21]

ktorý nazývame prvá centrálna diferencia. Analogicky môžeme odvodiť aj ostatné centrálne diferencie vyšších rádov:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)_m = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right] \approx \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta r^2}\right)_m = [W^{(\mathrm{ii})}(r)]_m = \frac{1}{2(\Delta r)^2}(w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}),$$

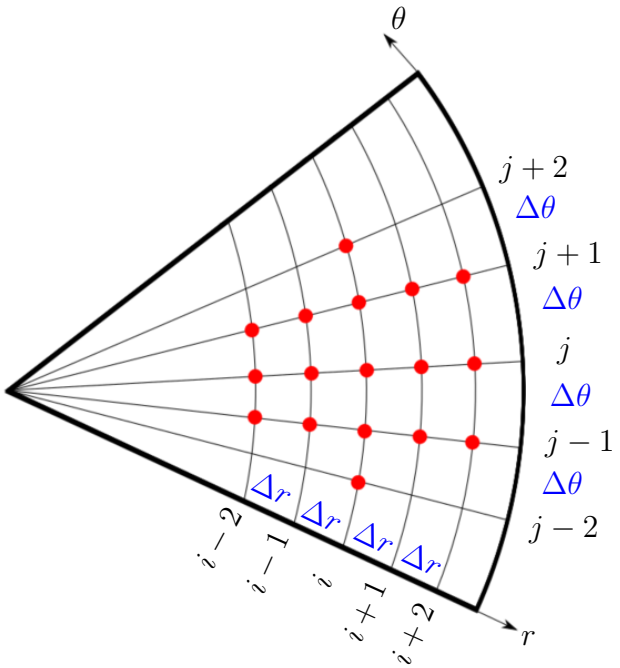
$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3}\right)_m &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)\right] \approx \left[\frac{\Delta}{2(\Delta r)}\frac{\Delta^2 w}{\Delta r^2}\right]_m = [W^{(\mathrm{iii})}(r)]_m, \\ &= \frac{1}{2(\Delta r)^3}(\Delta^2 w_{m+1} - \Delta^2 w_{m-1}) = \frac{1}{2(\Delta r)^3}(w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}r^4}\right)_m &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3}\right)\right] \approx \left[\frac{\Delta}{(\Delta r)}\frac{\Delta^3 w}{\Delta r^3}\right]_m = [W^{(\mathrm{iv})}(r)]_m, \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^4}(\Delta^3 w_{m+1/2} - \Delta^3 w_{m-1/2}) = \frac{1}{(\Delta r)^4}(\Delta^2 w_{m+1} - 2\Delta^2 w_m + \Delta^2 w_{m-1}) \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^4}(w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}).\end{aligned}$$

3.2 Diskretizácia biharmonickej rovnice

V tejto časti sa budeme venovať diskretizácii rovnice (1.25) pomocou konečno-diferečných aproximácií s presnosťou $O(h^2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} &= \frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{(\Delta r)^4}, \\
\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \phi^2} &= \frac{w_{i+2,j+1} - 2w_{i+2,j} + w_{i+2,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j}}{2(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} \\
&\quad + \frac{-2w_{i,j-1} + w_{i-2,j+1} - 2w_{i-2,j} + w_{i-2,j-1}}{2(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2}, \\
\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} &= \frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{r_i^4 (\Delta\phi)^4}, \\
\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= \frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2(\Delta r)^3 r_i}, \\
\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \phi^2} &= \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j-1}}{\Delta r (\Delta\phi)^2 r_i^3}, \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{2(\Delta r)^2 r_i^2}, \\
\frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} &= \frac{2(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})}{(\Delta\phi)^2 r_i^4}, \\
\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2r_i^3 \Delta r}.
\end{aligned}$$



Obr. 8: Náčrt diskretizovaného výseku kruhovej membrány

Dosadením do (1.25) dostávame výslednú diskretizovanú rovnicu v tvare

$$\begin{aligned}
&\frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{(\Delta r)^4} \\
&+\frac{w_{i+2,j+1} - 2w_{i+2,j} + w_{i+2,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j}}{2(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} \\
&+\frac{-2w_{i,j-1} + w_{i-2,j+1} - 2w_{i-2,j} + w_{i-2,j-1}}{2(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} \\
&+\frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{r_i^4 (\Delta\phi)^4} \\
&+\frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2(\Delta r)^3 r_i} \\
&-\frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j-1}}{\Delta r (\Delta\phi)^2 r_i^3} \\
&-\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{2(\Delta r)^2 r_i^2} + \frac{2(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})}{(\Delta\phi)^2 r_i^4} + \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2r_i^3 \Delta r} \\
&= \frac{p_z(r,\phi)}{D}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.2.1 Osovo-symetrický prípad

V prípade osovej symetrie sa všeobecný tvar zjednoduší na

$$\begin{aligned}
\nabla_r^4 w(r) \;=\; & \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{(\Delta r)^4} + \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2(\Delta r)^3 r_i} \\
& -\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{2(\Delta r)^2 r_i^2} + \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2r_i^3 \Delta r} = \frac{p_z(r)}{D},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

s okrajovými podmienkami

$$w(R) = w'(R) = w^{(\mathrm{ii})}(R) = w^{(\mathrm{iii})}(R) = 0. \tag{3.42}$$

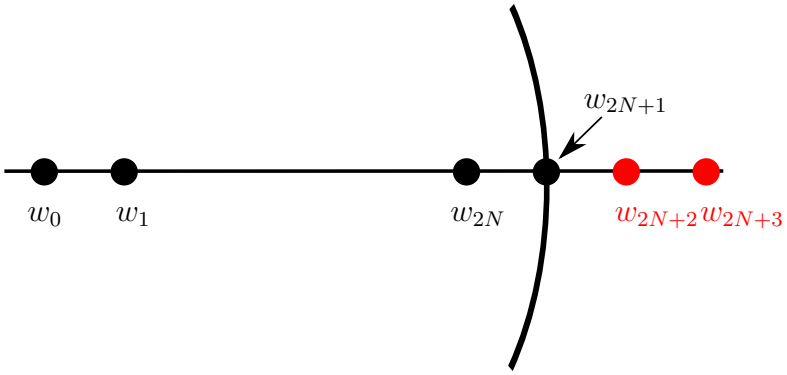
Uvažujme diskretizáciu v radiálnom smere v tvare (porovnaj [16])

$$\Delta r = \frac{R}{2N+1}, \quad r_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta r, \tag{3.43}$$

kde R je polomer membrány, Δr je krok a N je počet deliacich bodov.

Rovnicu (3.41) aplikujeme vo vnútorných bodoch diskretizačnej siete. Implementácia okrajových podmienok si vyžaduje zavedenie dvoch fiktívnych uzlových bodov w_{2N+2} a w_{2N+3} (pozri obrázok 9). V maticovom zápise má diskrétny systém tvar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{b}, \tag{3.44}$$



Obr. 9: Implementácia okrajových podmienok pomocou zavedenia dvoch fiktívnych uzlových bodov.

kde **A** je číselná matica s rozmerom $(2N+3)\times(2N+3)$, **w** je vektor s rozmerom $(2N+3)\times 1$ a **b** je známy vektor vytvorený diskretizáciou pravej strany $\frac{p_z(r)}{D}$.

Rovnica (3.41) však platí len pre vnútorné body, t.j. pre $i = 2, ..., 2N-1$. Pre konštrukciu matice **A** musíme diskretizovať (1.25) pomocou dopredných diferencií a aplikovať okrajové podmienky (3.42). Podľa tabuľky koeficientov v [10] s presnosťou rádu $O(h^2)$ bude mať výsledná rovnica pre doprednú diferenciu tvar

$$\begin{aligned}\nabla_r^4 w(r) \;=\; & \frac{-2w_{i+5}+11w_{i+4}-24w_{i+3}+26w_{i+2}-14w_{i+1}+3w_i}{(\Delta r)^4} \\ & +\frac{2}{r_i}\frac{-\frac{3}{2}w_{i+4}+7w_{i+3}-12w_{i+2}+9w_{i+1}-\frac{5}{2}w_i}{(\Delta r)^3} \\ & -\frac{1}{r_i^2}\frac{-w_{i+3}+4w_{i+2}-5w_{i+1}+2w_i}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{r_i^3}\frac{-\frac{1}{2}w_{i+2}+2w_{i+1}-\frac{3}{2}w_i}{\Delta r}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Aplikáciou dopredných diferenčných vzťahov (pozri [10]) na okrajové podmienky dostávame

$$-\frac{1}{2}w_{2N-1}+w_{2N}+0w_{2N+1}-w_{2N+2}+\frac{1}{2}w_{2N+3} = 0, \tag{3.46}$$

$$w_{2N}-2w_{2N+1}+w_{2N+2} = 0, \tag{3.47}$$

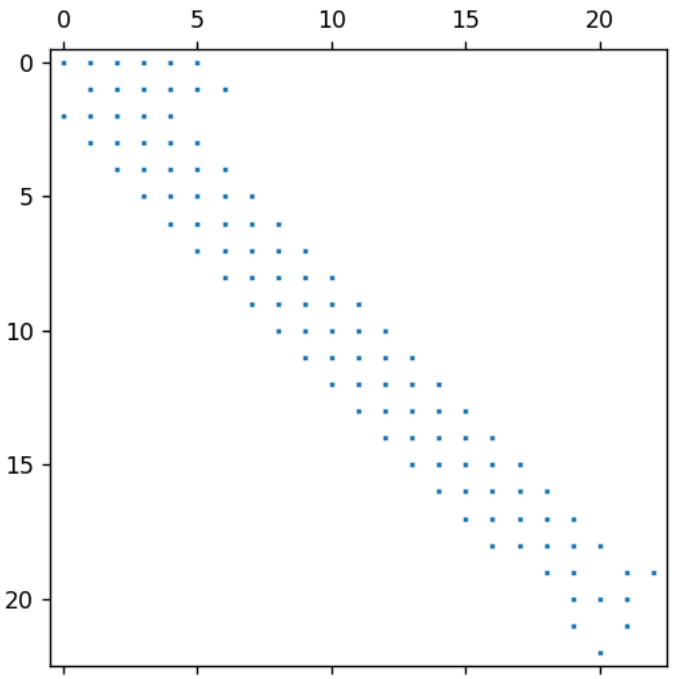
$$-\frac{1}{2}w_{2N}+0w_{2N+1}+\frac{1}{2}w_{2N+2} = 0, \tag{3.48}$$

$$w_{2N+1} = 0. \tag{3.49}$$

V kompaktnom tvare môžeme písať:

$$\nabla_r^4 w(r) = \begin{cases} \text{rovnica (3.45)}, & \text{pre } i = 0, 1 \\ \text{rovnica (3.41)}, & \text{pre } i = 2, ..., 2N-1 \\ \text{rovnica (3.46)}, & \text{pre } i = 2N \\ \text{rovnica (3.47)}, & \text{pre } i = 2N+1 \\ \text{rovnica (3.48)}, & \text{pre } i = 2N+2 \\ \text{rovnica (3.49)}, & \text{pre } i = 2N+3 \end{cases} \tag{3.50}$$

Keďže sme pri odvodení využívali 5-bodovú schému konečných diferencií, výsledná matica **A** bude 5-diagonálna pre vnútorné body, kým pre prvé dva body bude mať 6 členov. Overiť to môžeme pomocou vizualizácie riedkej matice zkonštruovanej na základe vzťahov v (3.50):

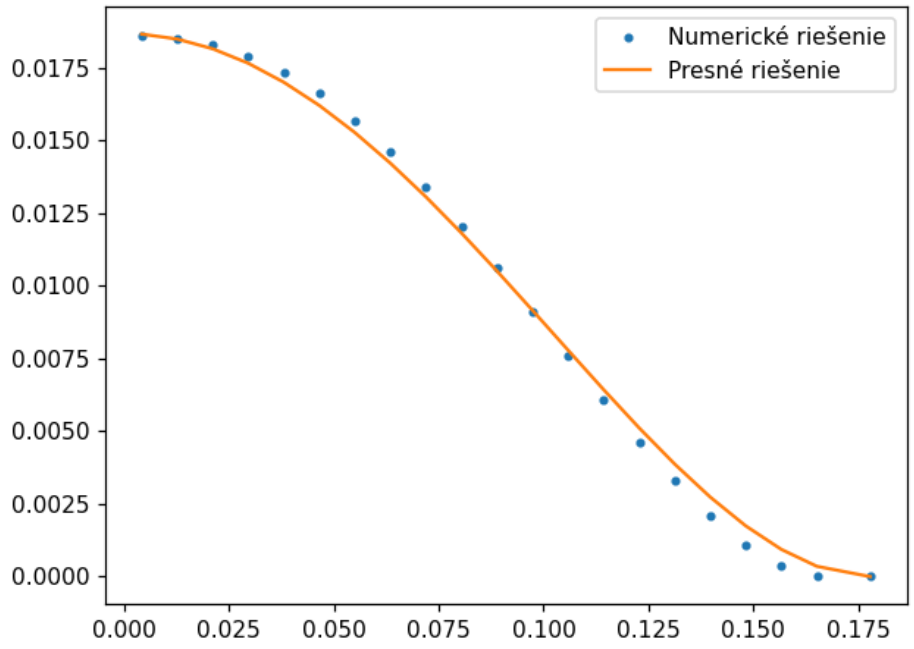


Obr. 10: Vizualizácia riedkej matice **A** (podľa (3.50))

3.3 Riešenie prípadu s homogénnym statickým zaťažením

Podkapitola bude venovaná riešeniu príkladu z kapitoly 2.1 - rovnica (3.41) s okrajovými podmienkami (3.42) a konštantným $p_z(r)$.

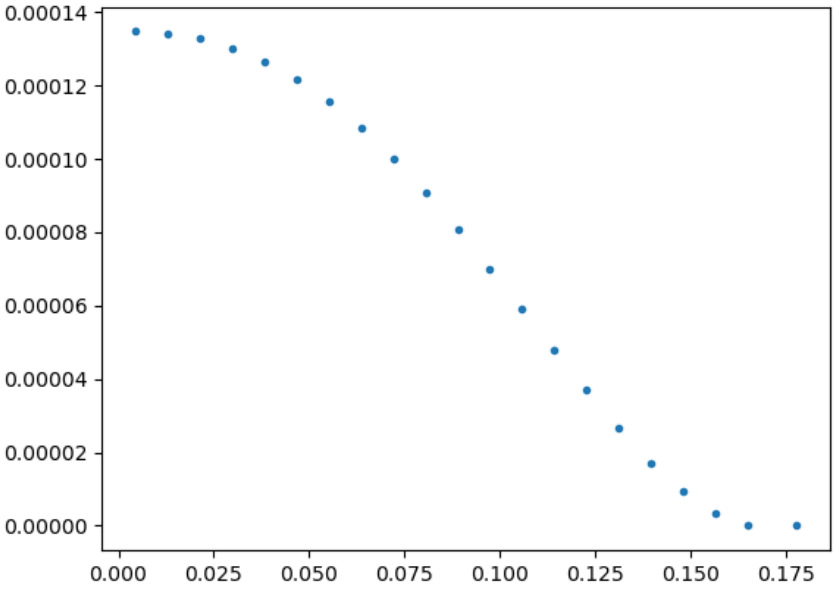
Podľa [2] je Youngov modulus mylaru (pozri [6]) rovný 0.76×10^6 psi $= 5.240 \times 10^6$ Nm^{-2} a Poissonovo číslo ν je podľa [9] rovné 0.38. Riešenie získané programom v Prílohe B porovnávame s riešením (2.34), ktoré upravíme pomocou polárnej transformácie (obrázok 11).



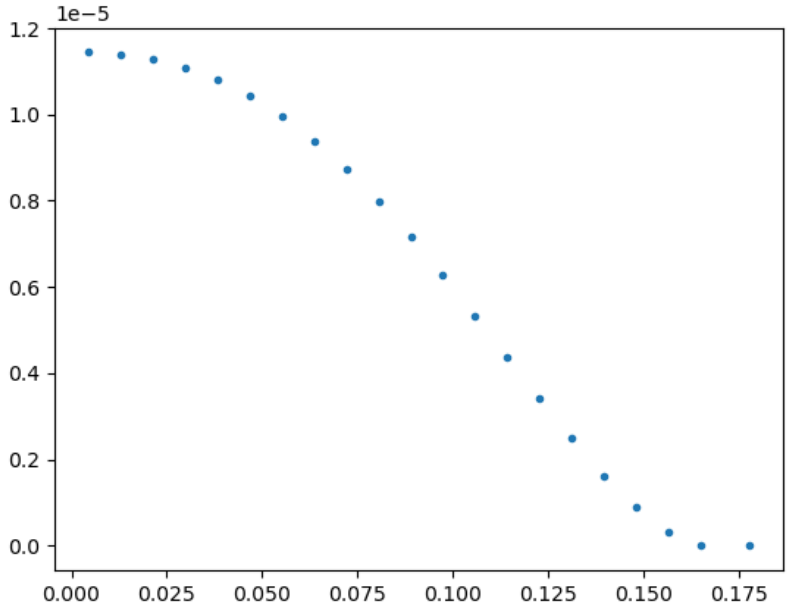
Obr. 11: Porovnanie presného a numerického riešenia

3.4 Riešenie prípadu s radiálne závislým statickým zaťažením

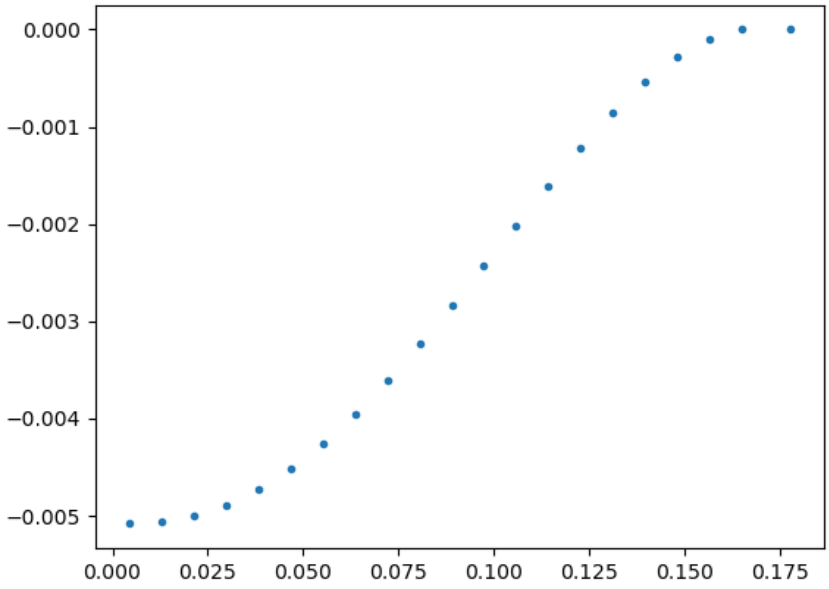
V tejto podkapitole sa pozrieme na riešenia (3.41) s okrajovými podmienkami (3.42) pre rôzne $p_z(r)$ - lineárne (obrázok 12), kvadratické (obrázok 13) a logaritmické (obrázok 14).



Obr. 12: Aproximácia MKD pre lineárny prípad



Obr. 13: Aproximácia MKD pre kvadratický prípad



Obr. 14: Aproximácia MKD pre logaritmický prípad

3.5 Dvojrozmerný prípad

Všeobecný prípad biharmonickej rovnice nezáhŕňa symetriu. Preto musíme použiť plný tvar diskretizovanej biharmonickej rovnice, t.j. (3.40). Ten však platí, analogicky k časti 3.2.1, len pre vnútorné body, resp. v tejto časti, pre vnútorné bloky. Cieľom je dostať maticový zápis v tvare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}$.

Pre vizualizáciu nám pomôže obrázok 10, ktorý v predchádzajúcom prípade vizualizoval jednotlivé členy, no v tomto prípade bude vizualizovať jednotlivé bloky. Teda prvé dva bloky budú diskretizované pomocou doprednej diferencie, kým pre ostatné bloky bude platiť všeobecný tvar (3.40). Analogicky budú aj prvé dva riadky každého bloku aproximované pomocou doprednej diferencie. To zapríčiní, či budeme potrebovať ešte jeden blok navyše, pretože v (3.51) vystupuje $w_{i,j+5}$. Preto dostaneme 6 blokovú maticu. Rovnako zavedieme dva fiktívne riadky s blokovými maticami, aby sme mohli centrálnu diferenciu použiť pre všetky bloky okrem dopredných diferencií.

Potrebné členy pre diskretizovanie (1.25) pomocou doprednej diferencie sú:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} &= \frac{3w_{i,j} - 14w_{i+1,j} + 26w_{i+2,j} - 24w_{i+3,j} + 11w_{i+4,j} - 2w_{i+5,j}}{(\Delta r)^4}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \phi^2} &= \frac{2(2w_{i,j} - 5w_{i,j+1} + 4w_{i,j+2} - w_{i,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2} \\
&\quad - \frac{5(2w_{i+1,j} - 5w_{i+1,j+1} + 4w_{i+1,j+2} - w_{i+1,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2} \\
&\quad + \frac{4(2w_{i+2,j} - 5w_{i+2,j+1} + 4w_{i+2,j+2} - w_{i+2,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2} \\
&\quad - \frac{2w_{i+3,j} - 5w_{i+3,j+1} + 4w_{i+3,j+2} - w_{i+3,j+3}}{(\Delta r \Delta \phi)^2}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} &= \frac{3w_{i,j} - 14w_{i,j+1} + 26w_{i,j+2} - 24w_{i,j+3} + 11w_{i,j+4} - 2w_{i,j+5}}{(\Delta \phi)^4}, \\
\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= \frac{-\frac{5}{2}w_{i,j} + 9w_{i+1,j} - 12w_{i+2,j} + 7w_{i+3,j} - \frac{3}{2}w_{i+4,j}}{(\Delta r)^3}, \\
\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \phi^2} &= -\frac{\frac{3}{2}(2w_{i,j} - 5w_{i,j+1} + 4w_{i,j+2} - w_{i,j+3})}{\Delta r (\Delta \phi)^2} \\
&\quad + \frac{2(2w_{i+1,j} - 5w_{i+1,j+1} + 4w_{i+1,j+2} - w_{i+1,j+3})}{\Delta r (\Delta \phi)^2} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2}(2w_{i+2,j} - 5w_{i+2,j+1} + 4w_{i+2,j+2} - w_{i+2,j+3})}{\Delta r (\Delta \phi)^2}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \frac{2w_{i,j} - 5w_{i+1,j} + 4w_{i+2,j} - w_{i+3,j}}{(\Delta r)^2}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} &= \frac{2w_{i,j} - 5w_{i,j+1} + 4w_{i,j+2} - w_{i,j+3}}{(\Delta \phi)^2}, \\
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{-\frac{3}{2}w_{i,j} + 2w_{i+1,j} - \frac{1}{2}w_{i+2,j}}{\Delta r}.
\end{aligned}
$$

Ich následným dosadením do (1.25) dostávame výsledný tvar pre biharmonickú rovnicu diskretizovanú pomocou doprednej diferencie:

$$
\begin{aligned}
\nabla^4 w &= \frac{3w_{i,j} - 14w_{i+1,j} + 26w_{i+2,j} - 24w_{i+3,j} + 11w_{i+4,j} - 2w_{i+5,j}}{(\Delta r)^4} \\
&\quad + \frac{4(2w_{i,j} - 5w_{i,j+1} + 4w_{i,j+2} - w_{i,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2 r_i^2} \\
&\quad - \frac{10(2w_{i+1,j} - 5w_{i+1,j+1} + 4w_{i+1,j+2} - w_{i+1,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2 r_i^2} \\
&\quad + \frac{8(2w_{i+2,j} - 5w_{i+2,j+1} + 4w_{i+2,j+2} - w_{i+2,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2 r_i^2} \\
&\quad - \frac{2(2w_{i+3,j} - 5w_{i+3,j+1} + 4w_{i+3,j+2} - w_{i+3,j+3})}{(\Delta r \Delta \phi)^2 r_i^2}, \\
&\quad + \frac{3w_{i,j} - 14w_{i,j+1} + 26w_{i,j+2} - 24w_{i,j+3} + 11w_{i,j+4} - 2w_{i,j+5}}{(\Delta \phi)^4 r_i^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{-5w_{i,j}+18w_{i+1,j}-24w_{i+2,j}+14w_{i+3,j}-3w_{i+4,j}}{(\Delta r)^3 r_i}\\
&+\frac{3(2w_{i,j}-5w_{i,j+1}+4w_{i,j+2}-w_{i,j+3})}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3}\\
&-\frac{4(2w_{i+1,j}-5w_{i+1,j+1}+4w_{i+1,j+2}-w_{i+1,j+3})}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3}\\
&+\frac{2w_{i+2,j}-5w_{i+2,j+1}+4w_{i+2,j+2}-w_{i+2,j+3}}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3}\\
&-\frac{2w_{i,j}-5w_{i+1,j}+4w_{i+2,j}-w_{i+3,j}}{(\Delta r)^2 r_i^2}\\
&+\frac{4(2w_{i,j}-5w_{i,j+1}+4w_{i,j+2}-w_{i,j+3})}{(\Delta\phi)^2 r_i^4}\\
&+\frac{-\frac{3}{2}w_{i,j}+2w_{i+1,j}-\frac{1}{2}w_{i+2,j}}{r_i^3\Delta r}=\frac{P_z(r,\phi)}{D}.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Riešime systém

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{b}, \tag{3.52}$$

kde $\mathbf{A}$ je bloková matica

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
J & K & L & M & N & O & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & J & K & L & M & N & O & 0 & \dots & 0\\
H_1 & G_1 & F & G_2 & H_2 & U & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & H_1 & G_1 & F & G_2 & H_2 & U & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & H_1 & G_1 & F & G_2 & H_2 & U & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & H_1 & G_1 & F & G_2 & H_2 & U
\end{pmatrix},
\tag{3.53}
$$

s príslušnými komponentmi definovanými vzťahmi (D.1) - (D.45) v prílohe D, a vektor $\mathbf{v}$ je definovaný ako

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\mathbf{v_0}, & \mathbf{v_1}, & \mathbf{v_2}, & \dots & ,\mathbf{v_{2N+3}}\end{pmatrix}^T,$$

kde

$$\mathbf{v}_j=\begin{pmatrix}w_{0,j}, & w_{1,j}, & \dots, & w_{2N+3,j}\end{pmatrix}^T.$$

4 Riešenie algebraického systému (3.44)

K riešeniu (3.41) môžeme pristupovať aj iným spôsobom. Keďže táto rovnica je 4. rádu, môžeme ju prepísať na systém ODR:

$$\begin{aligned} w_1 &= w, \\ w_1' &= w_2 = w', \\ w_2' &= w_3 = w^{(\mathrm{ii})}, \\ w_3' &= w_4 = w^{(\mathrm{iii})}, \\ w_4' &= -\frac{1}{r^3}w_2 + \frac{1}{r^2}w_3 - \frac{2}{r}w_4 + \frac{p_z(r)}{D} = w^{(\mathrm{iv})}, \end{aligned}$$

s okrajovými podmienkami

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0.$$

Na vyriešenie tohto systému môžeme použiť solver z knižnice *scipy.integrate* s názvom *solve_bvp*. Ten ako vstupné argumenty berie systém ODR, okrajové podmienky, diskretizáciu x-ovej osi (v našom prípade r) a počiatočný odhad. Výsledkom je následne matica, ktorá obsahuje riešenie pre $w_1 - w_4$. Nás však bude zaujímať práve w_1. Na pozadí tohto solveru beží implicitná Runge–Kutta metóda (napr. [8, 11, 14, 15]). Výpis kódu je uvedený v prílohe C.

4.1 Metóda typu Runge–Kutta

V tejto časti vychádzame z [1, 7]. Runge–Kutta (RK) je trieda metód s vyššou presnosťou ako Eulerova metóda. Všeobecne sú RK metódy navrhnuté v tvare:

$$y_{k+1} = y_k + w_1 K_1 + ... + w_m K_m,$$

kde w_i sú konštanty a $K_i = hf(t_k + \alpha_i h, y_k + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} K_j), \alpha_1 = 0$. Odvodenie jednotlivých metód vychádza z Taylorovho rozvoja funkcie $y^{(s)}(t)$ a následným porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách h. Nás bude zaujímať RK metóda 4. rádu - metóda typu Run-

ge–Kutta - s predpisom:

$$\begin{aligned} F_1 &= f(t_k, y_k), \\ F_2 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1), \\ F_3 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2), \\ F_4 &= f(t_{k+1}, y_k + hF_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F4). \end{aligned}$$

4.1.1 Konštantné $p_z(r)$

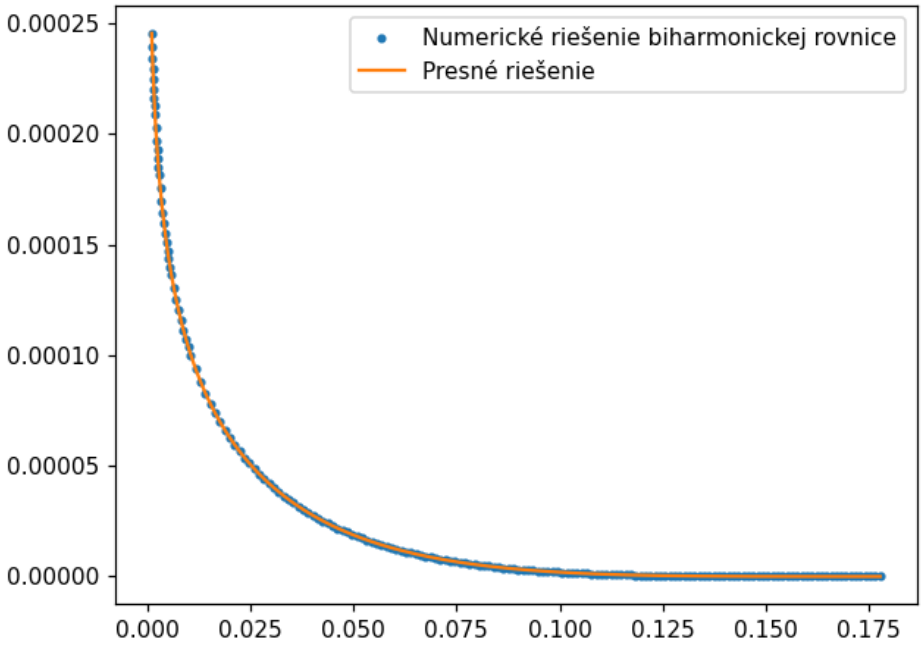
Najjednoduchší prípad zodpovedá konštatnému zaťaženiu membrány. Pre $p_z(r) = 1$ má všeobecné riešenie biharmonickej rovnice (2.36) tvar

$$w_{exact_const} = \frac{r^4}{64D} + c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln(r) + c_4 \ln(r). \tag{4.54}$$

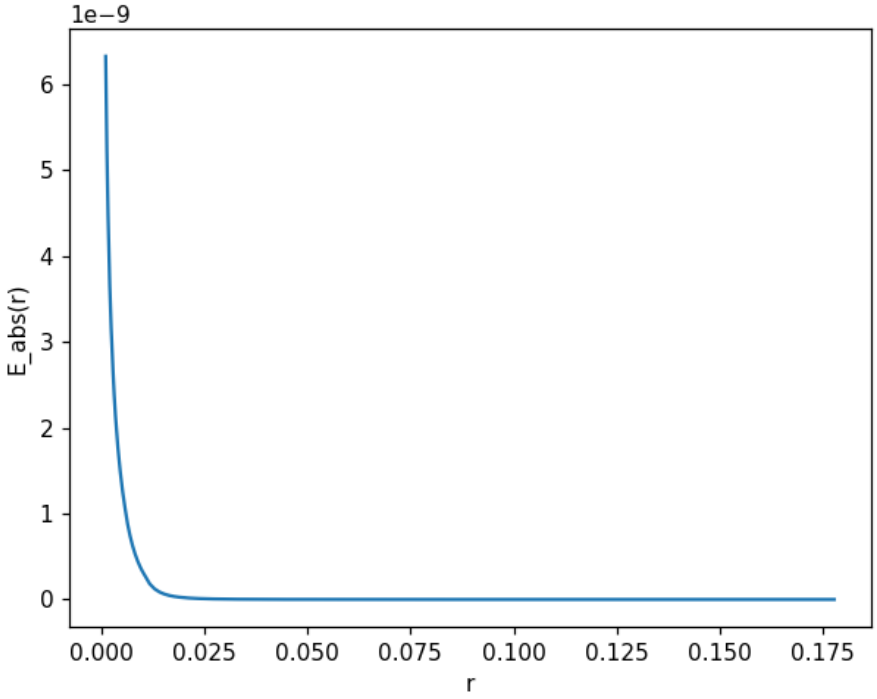
Dosadením okrajových podmienok dourčíme koeficienty c_1, c_2, c_3 a c_4:

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{R^4}{16D}, \\ c_3 &= -\frac{3R^2}{16D} - \frac{c_4}{R^2}, \\ c_2 &= \frac{3R^2}{16D} - c_3 \ln(R) + \frac{2c_4}{R^2}, \\ c_1 &= -\frac{R^4}{64D} - c_2 R^2 - c_3 R^2 \ln(R) - c_4 \ln(R). \end{aligned}$$

Na obrázku 15 je zobrazené presné riešenie w_{exact_const} a jeho numerická aproximácia w_{num} získaná metódou Runge–Kutta. Absolútna chyba riešenia $|w_{exact} - w_{num}|$ je zobrazená na obrázku 16.



Obr. 15: Porovnanie presného a numerického riešenia pre konštantný prípad



Obr. 16: Absolútna chyba presného a numerického riešenia pre konštantný prípad

4.1.2 Lineárne $p_z(r)$

Presné riešenie pre $p_z(r) = r$ má tvar

$$w_{exact_linear} = \frac{r^5}{225D} + c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln(r) + c_4 \ln(r), \tag{4.55}$$

kde jednotlivé koeficienty sú

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{9R^5}{180D}, \\ c_3 &= -\frac{6R^3}{45D} - \frac{c_4}{R^2}, \\ c_2 &= -c_3 \ln(r) - \frac{3c_3}{2} - \frac{2R^3}{45D} + \frac{c_4}{2R^2}, \\ c_1 &= -c_3 R^2 \ln(R) - c_4 \ln(R) - \frac{R^5}{225D} - c_2 R^2. \end{aligned}$$

Obrázky 17 a 18.

4.1.3 Kvadratické $p_z(r)$

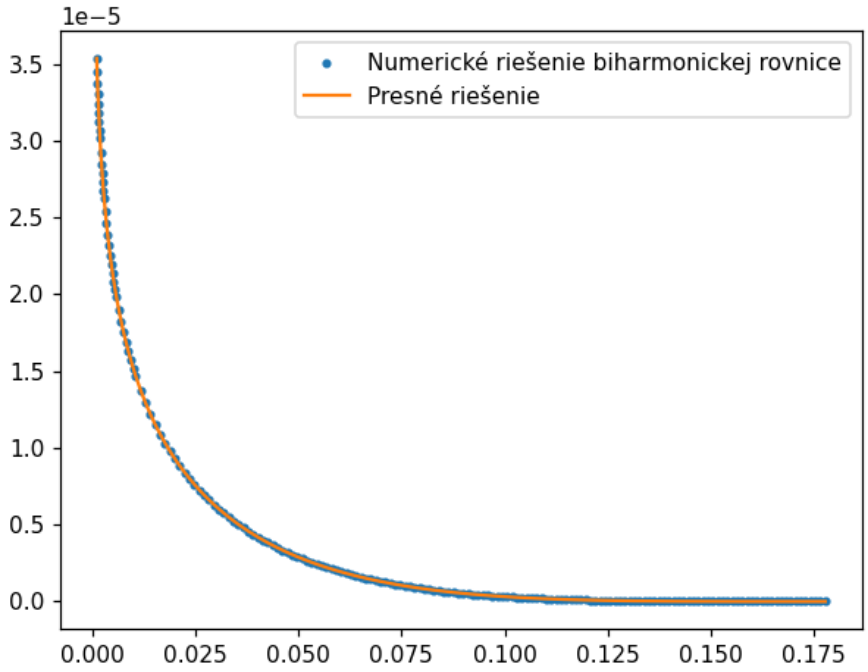
Presné riešenie pre $p_z(r) = r^2$ má tvar

$$w_{exact_quad} = \frac{r^6}{576D} + c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln(r) + c_4 \ln(r) \tag{4.56}$$

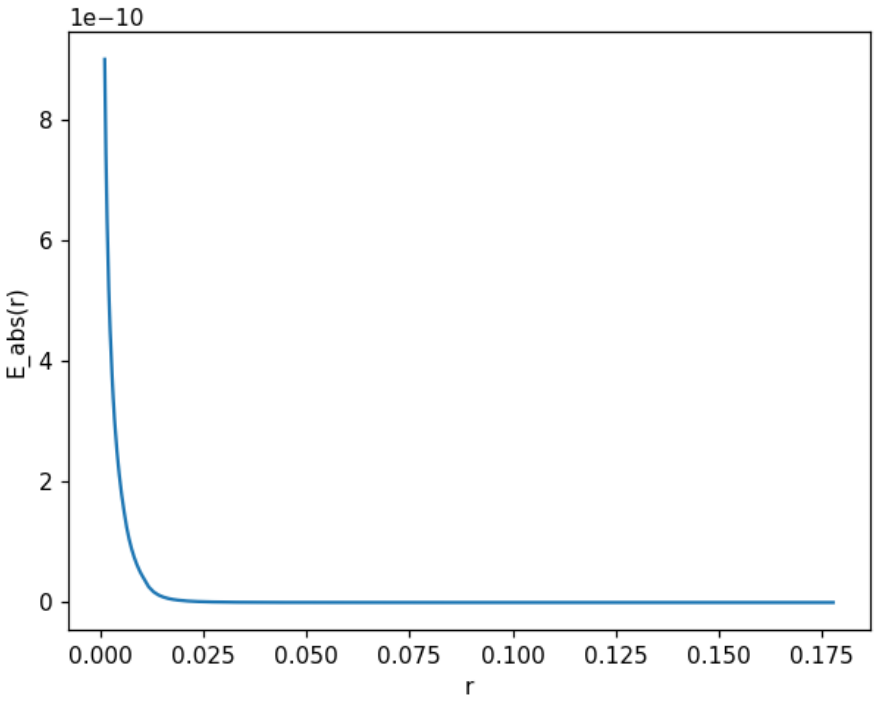
kde jednotlivé koeficienty sú

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{6R^6 \ln(R) - 7R^6}{144D} \\ c_2 &= \frac{4R^4 \ln(R) + 3R^4}{64D}, \\ c_3 &= -\frac{R^4}{16D}, \\ c_4 &= -\frac{R^6}{24D}. \end{aligned}$$

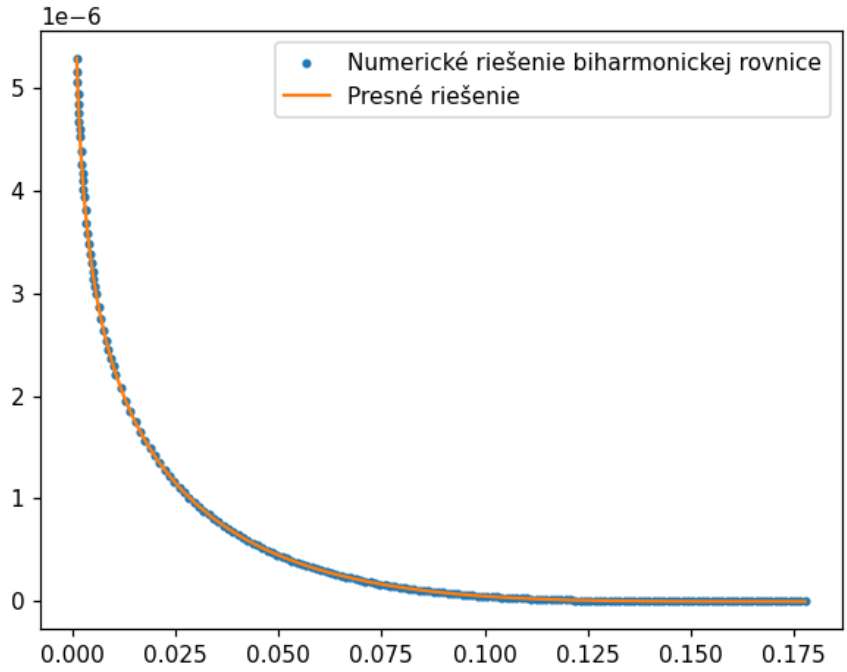
Obrázky 19 a 20.



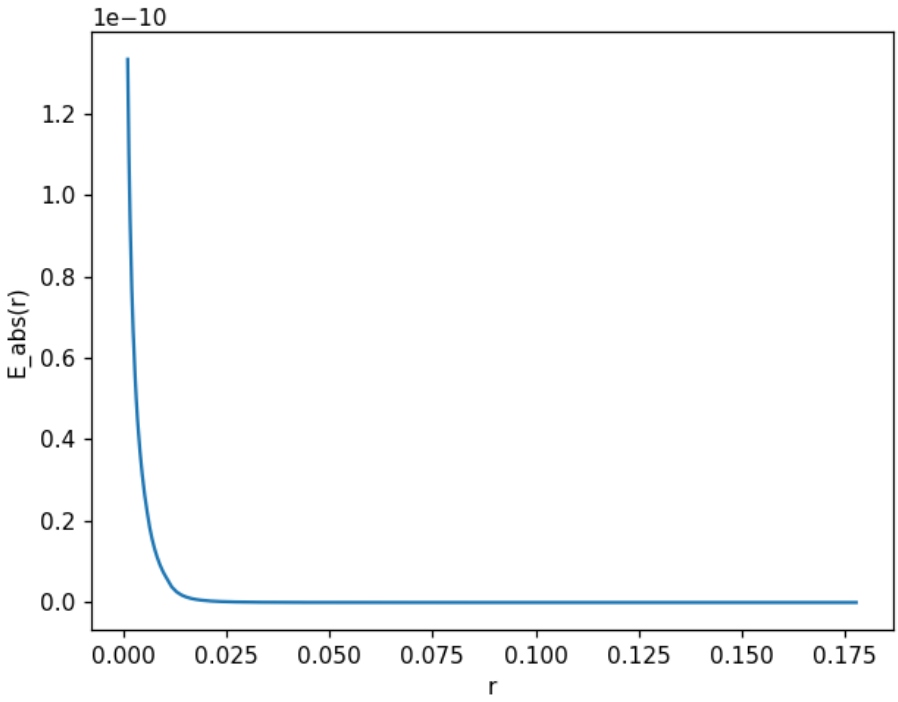
Obr. 17: Porovnanie presného a numerického riešenia pre lineárny prípad



Obr. 18: Absolútna chyba presného a numerického riešenia pre lineárny prípad



Obr. 19: Porovnanie presného a numerického riešenia pre kvadratický prípad



Obr. 20: Absolútna chyba presného a numerického riešenia pre kvadratický prípad

4.1.4 Logaritmické $p_z(r)$

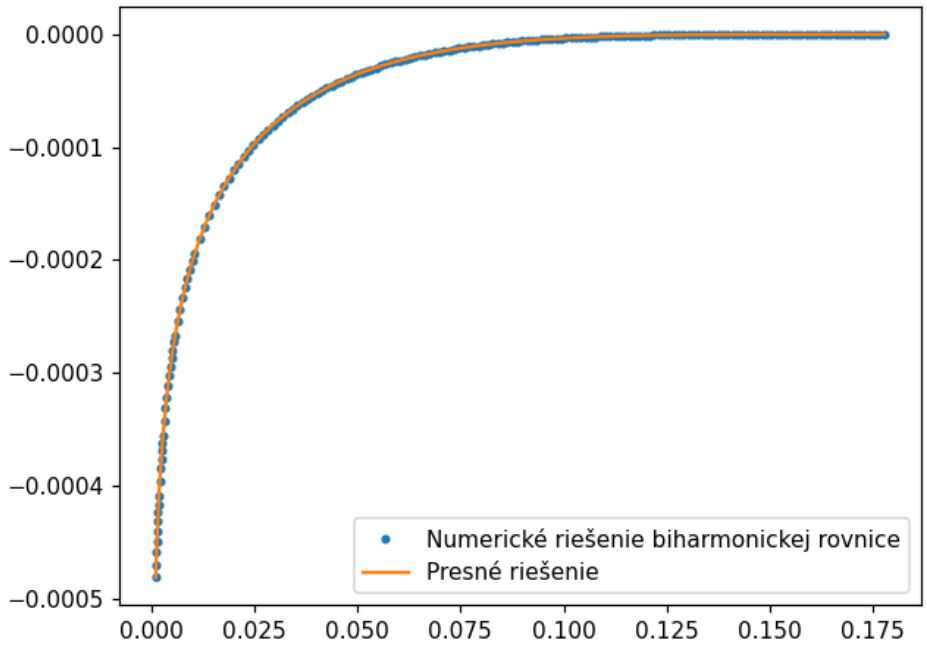
Presné riešenie pre $p_z(r) = \ln(r)$ má tvar

$$w_{exact_log} = \frac{r^4 \ln(r)}{64D} - \frac{3r^4}{128D} + + c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln(r) + c_4 \ln(r) \tag{4.57}$$

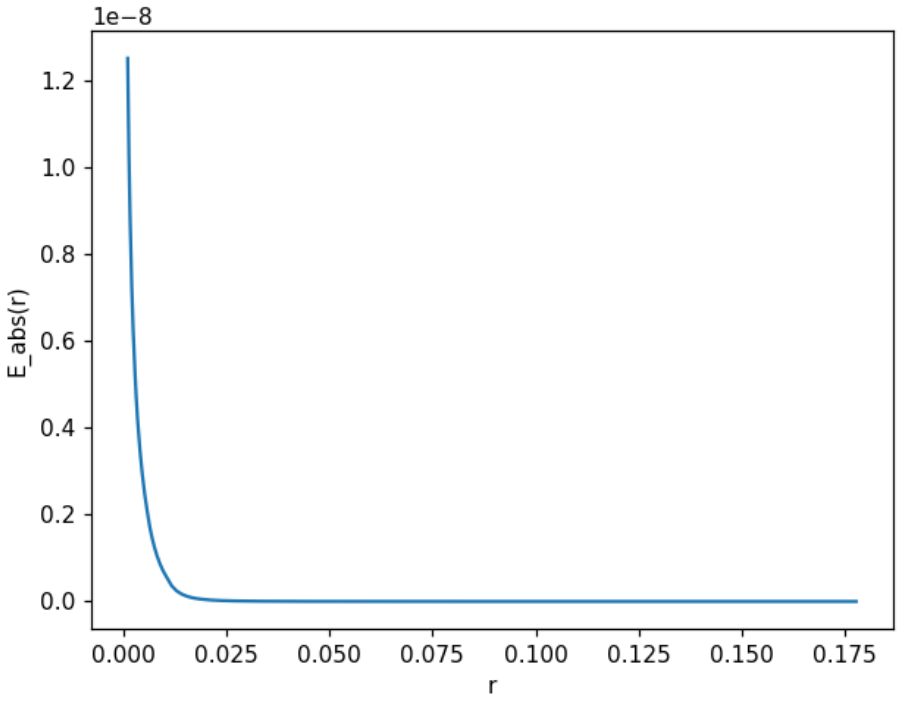
kde jednotlivé koeficienty sú

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{8R^4 \ln^2(R) - 12R^4 \ln(R) + 3R^4}{128D} \\ c_2 &= \frac{R^2 \ln^2(R)}{8D}, \\ c_3 &= -\frac{2R^2 \ln(R) - R^2}{16D}, \\ c_4 &= -\frac{4R^4 \ln(R) - R^4}{64D}. \end{aligned}$$

Obrázky 21 a 22.



Obr. 21: Porovnanie presného a numerického riešenia pre logaritmický prípad



Obr. 22: Absolútna chyba presného a numerického riešenia pre logaritmický prípad

5 Von Kármánove rovnice pre kruhové membrány

Ako bolo ukázané v [6, str. 58, 59], jednovrstvová blana s veľkosťou 3.556×10^{-1} m a hrúbkou 2.54×10^{-4} m mala maximálnu deformáciu rovnú 3.2×10^{-3} m. Podľa [21] pri tomto správaní, kedy $w_{max} > h$ a w_{max} je výrazne menšie ako ostatné rozmery, vznikajú nelineárne efekty a využíva sa teória veľkých deformácií. Nelineárne efekty pri vibráciách reálnych membrán majú rôzny pôvod. My sa obmedzíme na dva hlavné typy nelinearít, t.j. nelinearity spojené s konečnými deformáciami membrány (tzv. geometrické nelinearity) a nelinearity spojené s materiálovými vlastnosťami membrány (tzv. materiálové nelinearity).

Cieľom tejto časti je formulácia zovšeobecneného konečne-diferenciálneho prístupu na riešenie von Kármánovho modelu a návrh metód pre jeho riešenie. V práci uvádzame diskretizovanú verziu von Kármánovho nelineárneho modelu z [4, 22], ale jeho numerickej implementácii sme sa z časových dôvodov už nevenovali.

5.1 Von Kármánov model: Úvodné poznámky a jeho diskretizácia

Pre modelovanie nelineárnych vibrácií membrány je najpoužívanejší von Kármánov model, ktorý začleňuje iba kvadratické nelineárne členy Greenovho–Lagrangeovho tenzora napätia ϵ, pričom zachováva lineárny vzťah medzi napätím a deformáciou. Tento model popisuje správanie membrán, ktoré vykazujú veľké výchylky spojené s geometrickými nelinearitami spôsobenými rotáciami elementárnych objemov membrány [22].

Von Kármánov model vychádza z niekoľkých predpokladov. Prvé tri predpoklady sú rovnaké ako v kapitole 1.1 pri Kirchhoffovom modeli (str. 12). Navyše budeme predpokladať (4-6):

1. Každá normála na stredovú plochu zostane normálou aj pri zaťažení.

2. Rotačná zotrvačnosť, pozdĺžne napätie a šmykové napätie sú zanedbané.

3. Materiál je lineárny (t.j. relatívna deformácia elastickej membrány je lineárnou funkciou napätia), homogénny a izotropický.

4. Uvažujeme iba kvadratické nelineárne členy v Greenovom–Lagrangeovom tenzore napätia.

5. Zanedbávame zotrvačnosť membrány v tangenciálnom smere.

6. Zanedbávame tangenciálnu zložku externej sily pôsobiacu na membránu.

Von Kármánove rovnice v karteziánskej geometrii majú tvar

$$\begin{aligned} \frac{D}{h}\nabla^4 w(x,y) &= \mathcal{L}(w,\Phi) + \frac{p_z}{h}, && (5.58)\\ \frac{1}{E}\nabla^4 \Phi(x,y) &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}(w,w), && (5.59) \end{aligned}$$

kde D je definované vzťahom (1.13) a

$$\begin{aligned} \nabla^4\Phi &= E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],\\ \mathcal{L}(w,\Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Ide o systém zviazaných rovníc pre w a Φ, ktoré označuje Airyho funkciu napätia (pozri kapitolu 5.2).

V polárnych súradniciach majú von Kármánove rovnice (5.58) a (5.59) tvar:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h}\nabla^4 w(r,\phi) &= \mathcal{L}(w,\Phi) + \frac{p_z}{h}, && (5.60)\\ \frac{1}{E}\nabla^4 \Phi(r,\phi) &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_r(w,w), && (5.61) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w,\Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\\ &\quad -2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right). \end{aligned}$$

V práci [4] je navrhnutých niekoľko stabilných diskretizačných schém pre rovnice von Kármánovho typu. V kapitole 5.4 budeme uvažovať časovo-závislú formuláciu v tvare

$$\begin{aligned} \rho h \delta_{tt} w &= -D\nabla^4 w + \ell[\widetilde{w}, \widetilde{\Phi}], && (5.62)\\ \mu_{t-}\nabla^4 \Phi &= -\frac{Eh}{2}(\alpha \ell[w, e_{t-}w] + (1-\alpha)\mu_{t-}\ell[w,w]),, && (5.63) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\widetilde{w} &= \alpha w + (1-\alpha)\mu_t w, \qquad & \widetilde{\Phi} &= \beta\Phi + (1-\beta)\mu_t\Phi,\\
e_{t+}f^n_{i,j} &= f^{n+1}_{i,j}, & e_{t-}f^n_{i,j} &= f^{n-1}_{i,j},\\
\mu_{t+} &= \frac{e_{t+}-1}{2}, & \delta_{t+} &= \frac{1}{\Delta t}(e_{t+}-1),\\
\mu_{t-} &= \frac{e_{t-}-1}{2}, & \delta_{t-} &= \frac{1}{\Delta t}(1-e_{t-})\\
\mu_t &= \frac{1}{2}(e_{t+}+e_{t-}), & \delta_{tt} &= \delta_{t+}\delta_{t-},
\end{aligned}$$

a $\alpha,\ \beta$ sú reálne konštanty. Rovnice (5.62) a (5.63) predstavujú semi-diskrétnu (diskretizácia iba v časovej oblasti) formu časovo-závislých von Kármánovych rovníc.

Podobné výrazy vznikajú aj pri diskretizácii priestorovej oblasti. V tomto prípade sa neposúva časový index n, ale priestorové indexy i alebo j, napr.

$$e_{x+}f^n_{i,j} = f^n_{i+1,j}.$$

Diskrétny von Kármánov operátor ℓ má tvar

$$\begin{aligned}
\ell[f,g] &= \delta_{xx}f\delta_{yy}g + \delta_{yy}f\delta_{xx}g\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\delta_{x+y+}f\delta_{x+y+}g + \delta_{x-y-}f\delta_{x-y-}g + \delta_{x-y+}f\delta_{x-y+}g + \delta_{x+y-}f\delta_{x+y-}g\right).
\end{aligned}$$

5.2 Diskrétna formulácia

Nech $w^n_{i,j} = w^n$ a $\Phi^n_{i,j} = \Phi^n$. Potom všeobecná formulácia má tvar

$$\begin{aligned}
w^{n+1} &= 2w^n - w^{n-1} - \frac{D(\Delta t)^2}{\rho h}\nabla^4 w\\
&\quad +\frac{(\Delta t)^2}{\rho h}\ell\left[\alpha w^n + \frac{1-\alpha}{2}(w^{n+1}+w^{n-1}), \beta\Phi^n + \frac{1-\beta}{2}(\Phi^{n+1}+\Phi^{n-1})\right],
\end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\Phi^{n+1} = -\Phi^n - Eh(\nabla^4)^{-1}\left(\alpha\ell[w^{n+1},w^n] + \frac{1-\alpha}{2}(\ell[w^{n+1},w^{n+1}] + \ell[w^n,w^n]\right). \tag{5.65}$$

Táto schéma je implicitná v časovej oblasti.

Pri voľbe $\alpha = 1$ a $\beta = 0$ možno (5.64) a (5.65) upraviť na tvar

$$\begin{aligned}
w^{n+1} - \frac{(\Delta t)^2}{\rho h}\ell[\Phi^{n+1},w^n] &= \left(2 - \frac{D(\Delta t)^2}{\rho h}\nabla^4\right)w^n - w^{n-1}\\
&\quad +\frac{(\Delta t)^2}{\rho h}\ell[\Phi^{n-1},w^n], \qquad (5.66)\\
\nabla^4\Phi^{n+1} + Eh\ell[w^{n+1},w^n] &= -\nabla^4\Phi^n. \qquad (5.67)
\end{aligned}$$

Tento model môžeme previesť na vektorový problém. Nech $\mathbf{w}$ a $\mathbf{\Phi}$ označujú vektorovú reprezentáciu neznámych $w_{i,j}$ a $\Phi_{i,j}$. Zavedením

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix}$$

môžeme systém (5.66) a (5.67) vyjadriť v tvare

$$\mathbf{A}^n \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{b}^n, \tag{5.68}$$

kde

$$\mathbf{A}^n = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & -\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{\Phi}}^n \\ \hline \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{w}}^n & \mathbf{D}^4 \end{array}\right), \ \mathbf{b}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}\mathbf{w}^n - \mathbf{C}\mathbf{w}^{n-1} + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}^{n-1} \\ -\mathbf{D}^4\mathbf{\Phi}^n \end{pmatrix}.$$

V tomto zápise je $\mathbb{1}$ jednotková matica, $\mathbf{D}^4$ je diskrétny biharmonický operátor (3.40) a $\mathbf{b}^n$ je pravá strana rovníc (5.66) a (5.67). $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{w}}^n$ a $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{\Phi}}^n$ sú maticovou reprezentáciou operátora $\ell[w^{n+1}, w^n]$ a $\ell[\Phi^{n+1}, w^n]$ spolu s konštantami $\frac{(\Delta t)^2}{\rho h}$ pre $\mathbf{w}$ a Eh pre $\mathbf{\Phi}$. Takýto diskrétny systém možno riešiť napr. pomocou Gaussovej–Seidelovej iteračnej metódy alebo SOR metódy. Uvedená diskrétna verzia von Kármánových rovníc môže byť námetom pre rozšírenie tejto diplomovej práce.

Záver

Hlavným cieľom diplomovej práce bolo odvodenie a numerické riešenie biharmonickej rovnice von Kármánovho typu, ktorá popisuje deformáciu elastickej membrány pri zaťažení. Konštrukcia prirodzene produkuje dva typy nelineárnych členov von Karmánových rovníc: materiálové a geometrické.

Na diplomovej našej práce sme uviedli základné pojmy z teórie elasticity, ktorá popisuje aj membrány (resp. bubenícke blany). Pomocou analýzy silových rovnováh pôsobiacich na membránu sme odvodili biharmonickú rovnicu (1.26) v trojrozmernom cylindrickom súradnom systéme, výrazy pre šmykové napätia a ohybový moment. Ide o pôvodné výsledky, s detailným odvodením uvedeným v prílohe A.

V druhej kapitole sme sa zaoberali dvoma redukovanými prípadmi, ktoré poskytujú uzavreté riešenia trojrozmernej elasticity: (i) homogénne a (ii) osovo-symetrické statické zaťaženie membrány.

V úvode tretej kapitoly popisujeme základy metódy konečných diferencií, Aplikáciou tejto metódy sme odvodili diskrétnu verziu (3.40) rovnice (1.25). Ide o vlastný prínos autora. Úlohy v druhej kapitole predpokladajú osovú symetriu, vďaka ktorej sa diskrétna rovnica (3.40) zjednoduší na tvar (3.41). Rovnicu spolu s okrajovými podmienkami (3.42) sme riešili metódou streľby, ktorú sme implementovali v programovacom jazyku Python pre rôzne zaťaženia $p_z(r)$.

Štvrtá kapitola sa venuje alternatívnemu prístupu pomocou metódy Runge–Kutta. V relevantných prípadoch je porovnanie analytických a numerických riešení uvedené na obr. 15-22.

V záverečnej kapitole sa venujeme popísaniu von Kármánovho modelu v karteziánskom (rovnice (5.58) a (5.59)) aj polárnom (rovnice (5.60) a (5.61)) súradnom systéme a uvádzame jeho diskrétny tvar (rovnice (5.62) a (5.63)). Odvodili sme diskrétny systém v kompaktnom maticovo–vektorovom tvare (5.68), ktorý možno riešiť iteračným prístupom.

Podobne ako v bakalárskej práci [6], aj v tejto práci sme sa snažili skĺbiť matematické modelovanie a hudbu, presnejšie mechanické vlastnosti membrán bicích nástrojov. Diplomová práca otvára ďalšie možnosti implementácie (3.53) a (5.68). Potenciálne zaujímavým rozšírením tejto práce by bolo modelovanie výrezu v basovom bubne, ktorý veľkou

mierou ovplyvňuje výsledný charakter zvuku. Dominantní výrobcovia bubenických blán, ako sú Remo a Evans, takéto modely používajú, avšak tieto sú prísne strážené pred verejnosťou. Modelovaním elastického chovania membrány možno stanoviť geometrický tvar výrezu basového bubna tak, aby sa dosiahli požadované zvukové vlastnosti [20]. Na trhu sú aktuálne dostupné iba dva typy umiestnenia a veľkosti výrezov - 5 " vpravo dole a 7 " v strede.

Zoznam použitej literatúry

[1] Babušíková, J.: *Numerická derivácia a Richardsonova extrapolácia*, prednášky *Numerické modelovanie*, FMFI UK, Bratislava, 2021

[2] Becker, H.: *Elastic Modulus of Mylar Sheet*, Allied Research Associates, Inc., Massachusetts

[3] Benča, Š.: *Výpočtové postupy MKP pri riešení lineárnych úloh mechaniky*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2004

[4] Bilbao, S.: *A Family of Conservative Finite Difference Schemes for the Dynamical Von Karman Plate Equations*, Wiley Interscience, Edinburgh, 2007

[5] Boďa, B.: *Aplikácie Fourierovych radov v hudbe*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2015

[6] Bolerác, D.: *Matematika pre bubeníkov: Matematické modelovanie vibrácií blany bubna*, FMFI UK, Bratislava, 2020

[7] Clark, K.D., Petzold, L.R.: *Numerical Solution Of Boundary Value Problems In Differential-Algebraic Systems*, SIAM Journal on Scientific and Statistical computing, 1989, dostupné na internete (17.4.2022): `https://www.researchgate.net/publication/250956569_Numerical_Solution_of_Boundary_Value_Problems_in_Differential-Algebraic_Systems`

[8] *Dokumentácia knižnice scipy.integrate*, dostupné na internete (17.4.2022): `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_bvp.html`

[9] DuPont Teijin Films: *Mylar - Physical Properties*, Virginia, 2003, dostupné na internete (6.2.2022): `http://usa.dupontteijinfilms.com/wp-content/uploads/2017/01/Mylar_Physical_Properties.pdf`

[10] Fornberg, B.: *Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids*, Mathematics of Computation, USA, 1988

[11] Guba, P.: *Numerické metódy*, skriptá, FMFI UK, Bratislava, 2022

[12] Jašurková, M.: *Základy spracovania digitálnych signálov - Diskrétna Fourierova transformácia*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2014

[13] Kaplan, W.: *Advanced Calculus, 4th Editon*, Addison-Wesley, Boston, 1993

[14] Kitchin, J.: *Boundary Value Problems*, Pittsburgh, 2020, dostupné na internete (19.4.2022): `https://kitchingroup.cheme.cmu.edu/f19-06623/09-bvp.html`

[15] Kong,Q., Siauw, T., Bayen, A.: *Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists*, Massachusetts, Academic Press, 2020

[16] Lai, M.-Ch.: *A Note on Finite Difference Discretizations for Poisson Equation on a Disk*, Chung Cheng University, Minghsiung, 2000

[17] Mitura, A.: *Matematika a vnímanie hudby*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2019

[18] Pozrikidis, C.: *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, New York, 2011

[19] Saad, Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing, Boston, 1996

[20] Sadd, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier, Massechusetts, 2009

[21] Szilard, R.: *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2004

[22] Torin, A.: *Percussion Instrument Modelling In 3D: Sound Synthesis Through Time Domain Numerical Simulation*, University of Edingburgh, Edinburgh, 2015

Príloha A

Biharmonický operátor v polárnej súradnej sústave

Transformačné vzťahy:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi(x,y) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}$$

Potrebné derivácie:

$$\frac{\partial r(x,y)}{\partial x} = \cos\phi \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\phi}{r} \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial^3 r(x,y)}{\partial x^3} = -\frac{3\cos\phi\sin^2\phi}{r^2} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial^4 r(x,y)}{\partial x^4} = \frac{9\sin^2\phi}{2r^3} + \frac{15\cos(2\phi)\sin^2\phi}{2r^3} \tag{A.4}$$

Podobné výrazy možno získať pre derivácie podľa premennej y.

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = -\frac{sin\phi}{r} \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2} \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial^3 \phi(x,y)}{\partial x^3} = -\frac{6\cos^2\phi\sin\phi}{r^3} + \frac{2\sin^3\phi}{r^3} \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial^4 \phi(x,y)}{\partial x^4} = \frac{24\cos^3\phi\sin\phi}{r^4} - \frac{24\cos\phi\sin^3\phi}{r^4} \tag{A.8}$$

$$\tag{A.9}$$

Zmiešané derivácie:

$$\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x\partial y} = -\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial^3 r(x,y)}{\partial x\partial y^2} = -\frac{\cos\phi}{r^2} + \frac{3\cos\phi\sin^2\phi}{r^2} \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial^3 r(x,y)}{\partial x^2\partial y} = -\frac{\sin\phi}{r^2} + \frac{3\cos^2\phi\sin\phi}{r^2} \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial^4 r(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} = \frac{1}{8r^3} + \frac{15\cos(4\phi)}{8r^3} \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x\partial y} = -\frac{\cos(2\phi)}{r^2} \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial^3\phi(x,y)}{\partial x\partial y^2} = \frac{2\sin(3\phi)}{r^3} \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial^3\phi(x,y)}{\partial x^2\partial y} = -\frac{2\cos\phi}{r^3} + \frac{4\cos\phi\cos(2\phi)}{r^3} \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial^4\phi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2} = -\frac{6\cos(4\phi)}{r^4} \tag{A.17}$$

Pre druhé parciálne derivácie deformácie w máme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2} + \frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)} \\
&+ \left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)} \\
&+ 2\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\phi(x,y)} \\
\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial r(x,y)}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2} + \frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)} \\
&+ \left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)} \\
&+ 2\frac{\partial r(x,y)}{\partial y}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\phi(x,y)}
\end{aligned}$$

Pre Laplaceov operátor potom dostávame vzťah

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w(r(x,y),\phi(x,y)) &= \left(\left(\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r(x,y)}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial y^2}\right)\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)} \\
&+ \left(\left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)^2} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2}\right)\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)} \\
&+ 2\left(\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial r(x,y)}{\partial y}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\partial\phi(x,y)}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Dosadením výrazov z (A.1)-(A.17) do (A.18) získame vzťah (1.24) pre Laplaceov operátor v polárnych súradniciach.

Podobným prístupom budeme postupovať aj v prípade biharmonického operátora v kar-

teziánskych súradniciach,

$$\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \tag{A.19}$$

Potrebujeme výraz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial x^4} &= 4\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^3 \phi(x,y)}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\,\partial \phi(x,y)} \\
&+ 4\frac{\partial^3 r(x,y)}{\partial x^3}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\,\partial \phi(x,y)} \\
&+ 6\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\,\partial \phi(x,y)} \\
&+ 6\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}^2\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2\,\partial \phi(x,y)} \\
&+ 12\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^3 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2\,\partial \phi(x,y)} \\
&+ 12\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\,\partial \phi(x,y)^2} \\
&+ 6\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}^2\frac{\partial^3 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\,\partial \phi(x,y)^2} \\
&+ 4\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}^3\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^4 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^3\,\partial \phi(x,y)} \\
&+ 6\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}^2\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}^2\frac{\partial^4 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2\,\partial \phi(x,y)^2} \\
&+ 4\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}^3\frac{\partial^4 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)\,\partial \phi(x,y)^3} \\
&+ \frac{\partial^4 r(x,y)}{\partial x^4}\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)} \\
&+ \frac{\partial^4 \phi(x,y)}{\partial x^4}\frac{\partial w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)} \\
&+ 4\frac{\partial^3 r(x,y)}{\partial x^3}\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2} \\
&+ 4\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^3 \phi(x,y)}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)^2} \\
&+ 3\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2}^2\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial \phi(x,y)^2} \\
&+ 3\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2}^2\frac{\partial^2 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^2} \\
&+ 6\frac{\partial^2 r(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}^2\frac{\partial^3 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 6\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}^2 \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial\phi(x,y)^3} \\
&+ \quad \frac{\partial r(x,y)}{\partial x}^4 \frac{\partial^4 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial r(x,y)^4} \\
&+ \quad \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}^4 \frac{\partial^4 w(r(x,y),\phi(x,y))}{\partial\phi(x,y)^4}
\end{aligned}
$$

a podobné výrazy pre $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ a $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$.

Dosadením týchto výrazov do rovnice A.19 a zjednodušením dostaneme

$$
\begin{aligned}
\nabla^4 w(r,\phi) &= \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial\phi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\phi^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
&+ \quad \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned} \tag{A.20}
$$

Príloha B

Výpis numerického kódu pre numerické riešenie biharmonickej rovnice - MKD

```
N = 10                    # pocet deliacich bodov
R = 0.3556/2              # 14" blana = 0.3556 m
delta_r = R / (2*N + 1) # krok

## Diskretizacia v smere r
def discret(N, R):
    r = np.repeat(0.0, 2*N + 3)
    for i in range(2*N + 1):
        r[i] = ((i+1) - 1/2) * delta_r
    r[2*N] = R
    return r
r = discret(N,R)

# fiktivne body w_{2N+2} a w_{2N+3}
r[2*N + 1] = r[2 * N] + delta_r
r[2*N + 2] = r[2 * N] + 2 * delta_r
# print(r, r.shape)

## Inicializacia
A = np.zeros((2*N+3,2*N+3))

# tuhost v ohybe
E = 5240015542.8
poiss_ratio = 0.38
h = 0.000254 # 10 mil = 0.000254 m
D = E * h**3 / (12 * (1 - poiss_ratio**2))

# prava strana
b = np.ones((2*N +3, 1))/ D  # const
# b = r/D                    # linear
# b = r**2/D                 # quad
# b = np.log(r)/D            # log
b[2*N-1:2*N+3] = 0
```

```
## dopredna diferencia pre i=0,1 (O(h^2))
# koeficienty pri w_i
dd_0 = np.zeros(2)
# koeficienty pri w_i+1
dd_1 = np.zeros(2)
# koeficienty pri w_i+2
dd_2 = np.zeros(2)
# koeficienty pri w_i+3
dd_3 = np.zeros(2)
# koeficient pri w_i+4
dd_4 = np.zeros(2)
# koeficient pri w_i+5 -> dd_5

for i in range(2):
    dd_0[i] = 3/delta_r**4 - 5/(r[i] * delta_r**3) - 2/((r[i] * delta_r)
   **2) - 3/(2 * r[i]**3 * delta_r)
    dd_1[i] = -14/delta_r**4 + 18/(r[i] * delta_r**3) + 5/((r[i] *
   delta_r)**2) + 2/(r[i]**3 * delta_r)
    dd_2[i] = 26/delta_r**4 - 24/(r[i] * delta_r**3) - 4/((r[i] *
   delta_r)**2) - 1/(2 * r[i]**3 * delta_r)
    dd_3[i] = -24/delta_r**4 + 14/(r[i] * delta_r**3) +1/((r[i] *
   delta_r)**2)
    dd_4[i] = 11/delta_r**4 - 3/(r[i] * delta_r**3)
    dd_5 = - 2/delta_r**4

## centralna diferencia pre i=3:2*N-1
# koeficienty pri w_i+2
cd_2 = np.zeros((2*N -3))
# koeficienty pri w_i+1
cd_1 = np.zeros((2*N -3))
# koeficienty pri w_i
cd_0 = np.zeros((2*N -3))
# koeficienty pri w_i-1
cd_m1 = np.zeros((2*N -3))
# koeficienty pri w_i-2
cd_m2 = np.zeros((2*N -3))
```

```
for i in range(2, 2 * N-1):
    cd_2[i-2] = 1/delta_r**4 + 1/(2 * r[i] * delta_r**3)
    cd_1[i-2] = -4/delta_r**4 - 1/(r[i] * delta_r**3) - 1/(2 * (r[i] *
   delta_r)**2) + 1/(2 * r[i]**3 * delta_r)
    cd_0[i-2] = 6/delta_r**4 + 1/((r[i] * delta_r)**2)
    cd_m1[i-2] = -4/delta_r**4 + 1/(r[i] * delta_r**3) - 1/(2 * (r[i] *
   delta_r)**2) - 1/(2 * r[i]**3 * delta_r)
    cd_m2[i-2] = 1/delta_r**4 - 1/(2 * r[i] * delta_r**3)

# spojenie do matice
dd = np.array((dd_0, dd_1, dd_2, dd_3, dd_4, (dd_5, dd_5))).transpose()
cd = np.array((cd_m2, cd_m1, cd_0, cd_1, cd_2)).transpose()

## naplnenie matice A
# dopredna diferencia
for i in range(2):
    A[i, i:(i + 6)] = dd[i, ]

# centralna diferencia
for i in range(2, 2*N-1):
    A[i, (i - 2):(i + 3)] = cd[i - 2, ]
A

# inicializacia posledneho bloku pre OP
A[2*N-1:2*N+2,:] = 0

# i=2*N
A[2*N-1,2*N-2] = -1
A[2*N-1,2*N-1] = 2
A[2*N-1,2*N] = 0
A[2*N-1,2*N+1] = -2
A[2*N-1,2*N+2] = 1

# i=2*N+1
A[2*N-1+1,2*N-1-1] = 0
A[2*N-1+1,2*N-1] = 1
A[2*N-1+1,2*N-1+1] = -2
A[2*N-1+1,2*N-1+2] = 1
```

```
A[2*N-1+1,2*N-1+3] = 0

# i=2*N+2
A[2*N-1+2,2*N-1-1] = 0
A[2*N-1+2,2*N-1] = 1/2
A[2*N-1+2,2*N-1+1] = 0
A[2*N-1+2,2*N-1+2] = -1/2
A[2*N-1+2,2*N-1+3] = 0

# i=2*N+3
A[2*N + 2,2*N - 2] = 0
A[2*N + 2,2*N - 1] = 0
A[2*N + 2,2*N] = 1
A[2*N + 2,2*N + 1] = 0
A[2*N + 2,2*N + 2] = 0

w = np.linalg.solve(A,b)

plt.close()
plt.plot(r[0:2*N+1], w[0:2*N+1], '.')
plt.show()
```

Príloha C

Výpis numerického kódu pre numerické riešenie biharmonickej rovnice - RK metóda

```
%matplotlib widget
# Nacitanie kniznic
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import sympy as sp
from scipy.integrate import solve_bvp
from sympy import Function, Derivative, symbols, Eq, solve
from sympy import *
from sympy.interactive import printing
printing.init_printing(use_latex = True)

# vseobecne riesenie \nabla^4 w = pz/D
r  = sp.Symbol('r')
def solve_biharmonic_eq(pz):
    w = sp.Function('w')(r)
    D = sp.Symbol('D')
    R = sp.Symbol('R')
    diffeq = Eq(w.diff(r,r,r,r) + 2/r * w.diff(r,r,r) - 1/r**2 * w.diff(
   r,r) + 1/r**3 * w.diff(r), pz/D)
    return dsolve(diffeq,w)

solve_biharmonic_eq(1)
# solve_biharmonic_eq(r)
# solve_biharmonic_eq(r**2)
# solve_biharmonic_eq(log(r))

# definovanie oblasti
rmin = 1e-3
rmax = 0.3556/2

# povodna siet (mesh)
```

```
r = np.linspace(rmin, rmax, 150)
D = 1       # scaled elastic modulus (Note: D = 5240015542.8 N m^(-2) for
    mylar)

## typ pravej strany
# constant, linear, quad, log
case = input("Pre ak pripad chcete riesit tuto ulohu? ")

def get_pz(case, r):
    if case == "constant":
        pz = float(input("Velkost zataze - Pz = "))
    elif case  == "linear":
        pz = r
    elif case == "quad":
        pz = r**2
    elif case == "log":
        pz = np.log(r)
    else:
        print("Zly input")
    return pz

pz = get_pz(case, r)
print(pz,case)

def get_pz_bvp(case, r):
    if case == "constant":
        return pz
    elif case == "linear":
        return  r
    elif case == "quad":
        return r**2
    elif case == "log":
        return np.log(r)

# Presne riesenia
def exact_solution_p_constant(r, pz):
    R = max(r)
    c4 = - pz * (R**4) / (16 * D)
```

```
    c3 = - 3 * pz * (R**2) / (16 * D) - c4 / (R**2)
    c2 = 3 * pz * (R**2) / (16 * D) - c3 * np.log(R) + 2 * c4 / (R**2)
    c1 = - pz * (R**4) / (64 * D) - c2 * (R**2) - c3 * (R**2) * np.log(R
) - c4 * np.log(R)
    w_presne_const = pz * (r**4) / (64*D) + c1 + c2 * (r**2) + c3 * (r
**2) * np.log(r) + c4 * np.log(r)
    return w_presne_const

# exact solution pz=r
def exact_solution_p_linear(r):
    R = max(r)
    c4 = - 9 * R**5 / (180 * D)
    c3 = -6 * R**3 / (45 * D) - c4 / R**2
    c2 = np.log(R) * (- c3) + 3 / 2 * (- c3) - 2 * R**3 / (45 * D) + c4
/ (2 * (R**2))
    c1 = - c3 * R**2 * np.log(R) - c4 * np.log(R) - R**5 / (225 * D) -
c2 * R**2
    w_presne_linear = c1 * r**2 * np.log(r) + c4 * np.log(r) + r**5 /
(225 * D) + c * r**2 + c3
    return w_presne_linear

# exact solution pz=r^2
def exact_solution_p_quad(r):
    R = max(r)
    c1 =  (6 * (R**6) * np.log(R) - 7 * (R**6)) / (144 * D)
    c2 = (4 * (R**4) * np.log(R) + 3 * (R**4)) / (64 * D)
    c3 = - (R**4) / (16 * D)
    c4 = - (R**6) / (24 * D)
    w_presne_quad = c1 * r**2 * np.log(r) + c2 * np.log(r) + (r**6) /
(576 * D) + c * r**2 + c3
    return w_presne_quad

# exact solution pz=np.log(r)
def exact_solution_p_log(r):
    R = max(r)
  c1 = (8 * R**4 * np.log(R) * np.log(R) - 12 * R**4 * np.log(R)  + 3 *
 R**4) / (128 * D)
    c2 = (R**2 * np.log(R) * np.log(R)) / (8*D)
```

```
    c3 = -(2 * R**2 * np.log(R) - R**2) / (16*D)
    c4 = - (4 * R**4 * np.log(R) - R**4) / (64*D)
    w_presne_log = c1 * r**2 * np.log(r) + c2 * np.log(r) + c * r**2 +
   c3 - (3 * r**4)/(128*D) + (r**4 * np.log(r))/(64*D)
    return w_presne_log

# ode_fun
def bvp(r, W):
    pz = get_pz_bvp(case, r)
    w1,w2,w3,w4 = W
    dw1dr = w2
    dw2dr = w3
    dw3dr = w4
    dw4dr = -1/r**3 * w2 + 1/r**2 * w3 - 2/r * w4 + pz/D
    dwdr = [dw1dr, dw2dr, dw3dr, dw4dr]
    return dwdr

# boundary conditions
def bc_fun(Wa,Wb):
    w1a,w2a,w3a,w4a = Wa
    w1b,w2b,w3b,w4b = Wb
    res = [ w1b - 0,
            w2b - 0,
            w3b - 0,
            w4b - 0]
    return res

# prvotny odhad
pars = np.polyfit([rmin,0.9*rmax,rmax],[0.3584,0.001,0],2)
w1 = np.polyval(pars, r)
w2 = np.gradient(w1, edge_order = 2)        # w2 = w1'
w3 = np.gradient(w2, edge_order = 2)        # w3 = w2'
w4 = np.gradient(w3, edge_order = 2)        # w4 = w3'

# riesenie BVP solverom
sol = solve_bvp(bvp, bc_fun, r, [w1, w2, w3, w4])
print(sol.message)
```

```
# zobrazenie presneho riesenia
if case == "constant":
    exact_sol = exact_solution_p_constant(sol.x, pz)
if case == "linear":
    exact_sol = exact_solution_p_linear(sol.x)
if case == "quad":
    exact_sol = exact_solution_p_quad(sol.x)
if case == "log":
    exact_sol = exact_solution_p_log(sol.x)

plt.close()
plt.plot(sol.x, sol.y[0], '.', markersize = 6, label = "Numericke
   riesenie biharmonickej rovnice")
plt.plot(sol.x, exact_sol, label = "Presne riesenie")
plt.legend()
plt.show()

# absolutna chyba
err = abs(sol.y[0] - exact_sol)
plt.close()
plt.plot(sol.x, err)
plt.xlabel("r")
plt.ylabel("E_abs(r)")
plt.show()
```

Príloha D

Potrebné členy matice (3.53)

Blokové matice majú tvar:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d \end{pmatrix}, \tag{D.1}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} g_d & j_d & m_d & p_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_d & j_d & m_d & p_d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & g_d & j_d & m_d & p_d \end{pmatrix}, \tag{D.2}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d \end{pmatrix}, \tag{D.3}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} g_d & j_d & m_d & p_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_d & j_d & m_d & p_d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & g_d & j_d & m_d & p_d \end{pmatrix}, \tag{D.4}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} h_d & k_d & n_d & r_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_d & k_d & n_d & r_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_d & k_d & n_d & r_d \end{pmatrix}, \tag{D.5}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} i_d & l_d & o_d & s_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_d & l_d & o_d & s_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & i_d & l_d & o_d & s_d \end{pmatrix}, \tag{D.6}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} t_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_d \end{pmatrix}, \tag{D.7}$$

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} u_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_d \end{pmatrix}, \tag{D.8}$$

$$\mathbf{H_1} = \begin{pmatrix} a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_d & b_d & c_d & d_d & e_d & f_d & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & h_c \end{pmatrix}, \tag{D.9}$$

$$\mathbf{H_2} = \begin{pmatrix} t_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_c \end{pmatrix}, \tag{D.10}$$

$$\mathbf{G_1} = \begin{pmatrix} g_d & j_d & m_d & p_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_d & j_d & m_d & p_d & 0 & \dots & 0 \\ f_c & i_c & g_c & -i_c & f_c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_c & i_c & g_c & -i_c & f_c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_c & i_c & g_c & -i_c & f_c \end{pmatrix}, \tag{D.11}$$

$$\mathbf{G_2} = \begin{pmatrix} i_d & l_d & o_d & s_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_d & l_d & o_d & s_d & 0 & \dots & 0 \\ f_c & i_c & g_c & -i_c & f_c & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_c & i_c & g_c & -i_c & f_c \end{pmatrix}, \tag{D.12}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} h_d & k_d & n_d & r_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_d & k_d & n_d & r_d & 0 & \dots & 0 \\ e_c & d_c & c_c & b_c & a_c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_c & d_c & c_c & b_c & a_c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_c & d_c & c_c & b_c & a_c \end{pmatrix}. \tag{D.13}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{D.14}$$

Koeficienty centrálnych diferencií v maticiach $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{F}$ majú tvar:

$$a_c = \frac{1}{\Delta r^4} - \frac{1}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^2} + \frac{1}{2(\Delta r)^3 r_i}, \tag{D.15}$$

$$b_c = -\frac{4}{(\Delta r)^4} - \frac{1}{(\Delta r)^3 r_i} + \frac{2}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^3} - \frac{1}{2(\Delta r)^2 r_i^2} + \frac{1}{2(\Delta r) r_i^3}, \tag{D.16}$$

$$c_c = \frac{6}{(\Delta r)^4} + \frac{2}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^2} + \frac{6}{r_i^4 (\Delta\theta)^4} + \frac{1}{(\Delta r)^2 r_i^2} - \frac{4}{(\Delta\theta)^2 r_i^4}, \tag{D.17}$$

$$d_c = -\frac{4}{(\Delta r)^4} + \frac{1}{(\Delta r)^3 r_i} - \frac{2}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^3} - \frac{1}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^3} - \frac{1}{2(\Delta r)^2 r_i^2} - \frac{1}{2(\Delta r) r_i^3}, \tag{D.18}$$

$$e_c = \frac{1}{(\Delta r)^4} - \frac{1}{2((\Delta r)^3 r_i)} - \frac{1}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^2}, \tag{D.19}$$

$$f_c = \frac{1}{2(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^2}, \tag{D.20}$$

$$i_c = \frac{1}{\Delta r (\Delta\theta)^2 r_i^3}, \tag{D.21}$$

$$g_c = -\frac{1}{(\Delta r \Delta\theta)^2 r_i^2} - \frac{4}{r_i^4 (\Delta\theta)^4} + \frac{2}{(\Delta\theta)^2 r_i^4}, \tag{D.22}$$

$$h_c = \frac{1}{r_i^4 (\Delta\theta)^4} \tag{D.23}$$

$$i_c = \frac{1}{\Delta r (\Delta\phi)^2 r_i^3}, \tag{D.24}$$

Koeficienty dopredných diferencií v maticiach **J**, **K**, **L**, **M**, **N**, **O** majú tvar:

$$a_d = \frac{3}{(\Delta r)^4} + \frac{8}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{3}{(\Delta\phi)^4 r_i} - \frac{5}{(\Delta r)^3 r_i} + \frac{6}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} - \frac{2}{(\Delta r)^2 r_i^2} \quad \text{(D.25)}$$

$$+ \frac{8}{(\Delta\phi)^2 r_i^4} - \frac{3}{2(\Delta r) r_i^3} \quad \text{(D.26)}$$

$$b_d = -\frac{14}{(\Delta r)^4} - \frac{20}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{18}{(\Delta r)^3 r_i} - \frac{8}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} + \frac{5}{(\Delta r)^2 r_i^2} + \frac{2}{(\Delta r) r_i^3} \quad \text{(D.27)}$$

$$c_d = \frac{26}{(\Delta r)^4} + \frac{16}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} - \frac{24}{(\Delta r)^3 r_i} + \frac{2}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} - \frac{4}{(\Delta r)^2 r_i^2} - \frac{1}{2(\Delta r) r_i^3} \quad \text{(D.28)}$$

$$d_d = -\frac{24}{(\Delta r)^4} - \frac{4}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{14}{(\Delta r)^3 r_i} - \frac{1}{(\Delta r)^2 r_i^2} \quad \text{(D.29)}$$

$$e_d = \frac{11}{(\Delta r)^4} - \frac{3}{(\Delta r)^3 r_i} \quad \text{(D.30)}$$

$$f_d = -\frac{2}{(\Delta r)^4} \quad \text{(D.31)}$$

$$g_d = -\frac{20}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} - \frac{14}{(\Delta\phi)^4 r_i^4} - \frac{15}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} - \frac{20}{(\Delta\phi)^2 r_i^4} \quad \text{(D.32)}$$

$$h_d = \frac{4}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{26}{(\Delta\phi)^4 r_i^4} + \frac{12}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} + \frac{16}{(\Delta\phi)^2 r_i^4} \quad \text{(D.33)}$$

$$i_d = -\frac{4}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} - \frac{24}{(\Delta\phi)^4 r_i^4} - \frac{3}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} - \frac{4}{(\Delta\phi)^2 r_i^4} \quad \text{(D.34)}$$

$$j_d = \frac{50}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{20}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} \quad \text{(D.35)}$$

$$k_d = -\frac{40}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} - \frac{16}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} \quad \text{(D.36)}$$

$$l_d = \frac{10}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{4}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} \quad \text{(D.37)}$$

$$m_d = -\frac{40}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} - \frac{5}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} \quad \text{(D.38)}$$

$$n_d = \frac{32}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} + \frac{4}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} \quad \text{(D.39)}$$

$$o_d = -\frac{8}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} - \frac{1}{\Delta r(\Delta\phi)^2 r_i^3} \quad \text{(D.40)}$$

$$p_d = \frac{10}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} \quad \text{(D.41)}$$

$$r_d = -\frac{8}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} \quad \text{(D.42)}$$

$$s_d = \frac{2}{(\Delta r \Delta\phi)^2 r_i^2} \quad \text{(D.43)}$$

$$t_d = \frac{11}{(\Delta\phi)^4 r_i^4} \quad \text{(D.44)}$$

$$u_d = -\frac{2}{(\Delta\phi)^4 r_i^4} \quad \text{(D.45)}$$