UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



FOURIEROVO SPEKTRUM ROVINNÝCH KRIVIEK

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2022 Bc. Radka KOVAROVIČOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

FOURIEROVO SPEKTRUM ROVINNÝCH KRIVIEK

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.

Bratislava 2022 **Radka KOVAROVIČOVÁ**





Comenius University in Bratislava
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics

THESIS ASSIGNMENT

Name and Surname:	Bc. Radka Kovarovičová
Study programme:	Mathematical Economics, Finance and Modelling (Single degree study, master II. deg., full time form)
Field of Study:	Mathematics
Type of Thesis:	Diploma Thesis
Language of Thesis:	Slovak
Secondary language:	English

Title: Fourierovo spektrum rovinných kriviek

Annotation: Podobne ako sa dajú definovať Fourierove koeficienty a Fourierov rozvoj pre periodické funkcie, tak je možné zaviesť pojem Fourierovych koeficientov aj pre uzavreté krivky v rovine. Budeme sa venovať základnej analýze Fourierovho spektra rovinných kriviek. V práci sa sústredíme sa na problém jednoznačnosti krivky s daným Fourierovym spektrom a na rozšírenie pojmu spektra na dvojrozmerné plochy.

Supervisor:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Department:	FMFI.KAMŠ - Department of Applied Mathematics and Statistics
Head of department:	prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Assigned: 13.01.2021

Approved: 17.01.2021 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
Guarantor of Study Programme

.....
Student

.....
Supervisor

Poďakovanie Ďakujem môjmu školiteľovi prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, DrSc. za rady, nápady, pomoc a konštruktívne pripomienky pri písaní práce. Taktiež ďakujem svojej rodine za podporu počas celého štúdia.

Abstrakt v štátnom jazyku

KOVAROVIČOVÁ, Radka: Fourierovo spektrum rovinných kriviek [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc., Bratislava, 2022, 64 s.

Fourierovo spektrum ponúka veľa možností a priestoru na skúmanie zaujímavých a nepoznaných javov. Cieľom našej práce bola základná analýza Fourierových spektier rovinných kriviek, kde sme sa venovali príkladom pre Fourierovo spektrum parametrizácie krivky a Fourierove dĺžkové spektrum krivky. Analyticky a numericky sme počítali ich koeficienty pre dve parametrizované krivky, na základe ktorých sme naformulovali tvrdenia, ktoré sme následne dokázali. Našu pozornosť sme sústredili aj na závislosť spektra vzhľadom na afinné transformácie, kde sme ukázali vzťahy, ktoré platia pri posune a otočení krivky v rovine. V ďalšej časti sme si vybrali niekoľko parametrizovaných kriviek a vypočítali oba typy spektier pomocou vytvorených programovacích kódov v softvéri Matlab. Výsledné absolútne koeficienty Fourierových spektrier sme zobrazili pomocou grafov a porovnali. Ako posledné sme sa venovali jednoznačnosti spektra krivky a vytvorili vlastnú hypotézu ako odpoveď na otázku, či je možné nájsť dve krivky s identickým Fourierovým dĺžkovým spektrom.

Kľúčové slová: Fourierovo spektrum, Fourierove koeficienty, Fourierov rad, parametrizácia, krivka

Abstract

KOVAROVIČOVÁ, Radka: Fourier spectrum of plane curves [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc., Bratislava, 2022, 64 p.

The Fourier spectrum offers many possibilities and space for the study of interesting and unknown phenomena. The aim of our work was the basic analysis of Fourier spectra of plane curves, where we calculated the Fourier spectrum of parametrization and Fourier length spectrum. We calculated their coefficients analytically and numerically for two parameterized curves, on the basis of which we formulated the statements, which we proved. We also focused on the dependece of the spectrum with respect to affine transformation, where we showed the valid relationships when moving and rotating the curve in the plane. In the next part, we chose several parametrized curves and calculated both types of spectra using programme codes in Matlab software. We plotted and compared final absolute Fourier coefficients. At the end, we focused on the unniqueness of the curve spectrum and developed our own hypothesis in response to the question of whether it is possible to find two curves with identical Fourier length spectrum.

Keywords: Fourier spectrum, Fourier coefficients, Fourier series, paremetrization, curve

Obsah

Úvod **9**

1 Hľadanie Fourierových koeficientov **11**

1.1 Fourierov rad v trigonometrickej forme 11

1.2 Fourierov rad v exponenciálnej forme 12

1.2.1 Fourierov rad v komplexnom tvare 12

1.2.2 Fourierov rad pre funkciu závislú od uhla 14

2 Parametrizácia krivky **16**

3 Analýza príkladov **18**

3.1 Fourierovo spektrum parametrizácie krivky 18

3.2 Fourierove dĺžkové spektrum krivky 24

4 Závislosť spektra vzhľadom na afinné transformácie **30**

4.1 Spektrum a posun krivky v rovine 30

4.2 Spektrum a otočenie krivky v rovine 31

5 Výpočet spektra uzavretých kriviek v rovine **34**

5.1 Jednotkový kruh 35

5.2 Elipsa 38

5.3 Asteroida 40

5.4 Štvorlístok 42

5.5 Kvet 44

5.6 Hviezda 46

6 Jednoznačnosť spektra krivky **49**

6.1 Jednoznačnosť spektra parametrizácie krivky 49

6.2 Jednoznačnosť dĺžkového spektra krivky 51

Záver **52**

Zoznam použitej literatúry **54**

7 Príloha A **56**

8 Príloha B **60**

Úvod

J.B. Joseph Fourier raz povedal: *„Matematická analýza je tak rozsiahla ako samotná príroda. "* [2] Nie je náhoda, že dvere k tejto práci otvárame citátom od tohto uznávaného matematika. Jeho meno sa spomína už v názve našej diplomovej práce a samotný citát odzrkadľuje aj samotnú podstatu cieľov, ktoré budeme prezentovať v nasledujúcich riadkoch.

Analýza je široký pojem, ktorého hlavnou úlohou býva väčšinou detailnejšie skúmanie vlastností, rozbor daného javu či rozklad na jednotlivé prvky. Základnej ale aj rozšírenej analýze sa v tejto práci budeme venovať aj my. Bude tvoriť jej samotné jadro pri vypracovávaní zadaných cieľov. Jej výsledkami by sme tak chceli rozšíriť už známe poznatky a obohatiť ich o nové tvrdenia a dôkazy.

Pojmy Fourierovo spektrum, Fourierove koeficienty či Fourierov rad počul už azda každý z nás. Ide o známe slovné spojenia, s ktorými sme sa stretli viacerí prvýkrát už na strednej škole. Všeobecnou znalosťou je, že Fourierov rad slúži na popísanie periodického správania sa funkcie, pričom využívame goniometrické funkcie - sínus a cosínus. V takomto zápise ďalej rozoznávame tzv. Fourierove koeficienty, ktoré môžu mať rôzny tvar závislý od zadania formy Fourierovho radu.

Jedným z hlavných bodov našej práce je predstavenie a následné počítanie s menej známym radom, a to Fourierovým radom pre krivky závislé od uhla. Ide pre nás o novú a nepoznanú formu Fourierovho radu, ktorá je však podrobne predstavená v [9]. Pred samotnými výpočtami si zadefinujeme pojem parametrizácia, keďže bude hrať kľúčovú rolu v celej práci a pri záverečných tvrdeniach. Pri týchto výpočtoch a analyzovaní daných kriviek budeme pracovať len s parametrizáciami skúmaných kriviek. Na konci analýzy ukážeme a dokážeme, že Fourierovo spektrum pri takto zadanom rade je nezávislé od danej parametrizácie.

Venovať sa budeme aj známym Fourierovým radom, a to konkrétne v trigonometrickej a exponenciálnej forme [10], [4], ktorých definície a prácu s nimi si už na prvých stranách veľmi rýchlo osviežime. V časti 3.1 si ukážeme opačnú vlastnosť od tej predošlej a to tú, že Fourierove koeficienty tohto spektra sú od parametrizácie závislé. Platnosť tejto vlastnosti si predvedieme na príkladoch dvoch kriviek - jednotkového kruhu a elipsy, ktorých výsledky budeme porovnávať a overíme ich v programovacom prostredí Matlab.

Predstavíme si zmeny spektra, ktoré nastávajú pri afinných transformáciách. Konkrétne sa budeme bližšie venovať posunutiu a otočeniu krivky v rovine. Ukážeme, že nami preukázané vzťahy platia a formulovať ich budeme do menších tvrdení.

Jedným z posledných cieľov, ktorý budeme chcieť naplniť, bude výpočet oboch typov Fourierovho spektra v programovacom prostredí Matlab. Za názorné príklady sme si vybrali parametrizácie šiestich kriviek - jednotkový kruh, elipsa, štvorlístok, asteroid, kvet a hviezda. Pomocou univerzálnych programovacích kódov na rátanie Fourierových koeficientov sa pozrieme na Fourierovo spektrum parametrizácie krivky a Fourierovo dĺžkové spektrum krivky, ktoré znázornime na grafoch. Venovať sa budeme porovnaniu týchto dvoch spektrier a ich hlbšej analýze.

Na záver už len zaujímavá otázka: „Určuje dĺžkové spektrum jednoznačne krivku?" Pre Fourierovo spektrum parametrizácie ukážeme existujúce tvrdenia, ktoré potvrdzujú, že je tomu naozaj tak. Pre Fourierovo dĺžkové spektrum krivky táto otázka ešte nie je zodpovedaná a preto predstavíme našu hypotézu ako odpoveď na ňu.

1 Hľadanie Fourierových koeficientov

Pojem „Fourierov rad" patrí v matematike medzi najvýznamnejšie a najznámejšie funkcionálne rady. Niektorí z nás sa s ním stretli počas svojej študentskej praxe už niekoľkokrát. Ako prvé sme sa oboznámili s Fourierovým radom v trigonometrickej forme a neskôr k nemu pribudol aj Fourierov rad v exponenciálnej forme. Oba tieto rady počítajú Fourierove spektrá, ktoré sú tvorené Fourierovými koeficientami.

V tejto kapitole si predstavíme ich presné znenia a vzorce pre ich rátanie. Pozrieme sa na to, ako jednotlivé rady vyzerajú a zadefinujeme ich. Okrem týchto dvoch tvarov však túto kapitolu rozšírime aj o pre nás nový zápis Fourierovho radu a to taký, kde využijeme polohový vektor krivky.

1.1 Fourierov rad v trigonometrickej forme

Ako prvé sa pozrieme na najznámejší tvar radu pre výpočet Fourierových koeficientov, a to je Fourierov rad v trigonometrickej forme. Patrí medzi trigonometrické rady a v zápise využíva rovnomenné funkcie, sin a cos. Pri ich definovaní v nasledujúcej časti sme využili poznatky spísané v [10], [4].

Definícia 1.1.1 (Fourierov rad v trigonometrickej forme) *Nech $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia. Pod Fourierovým radom funkcie f na $[-l, l]$ rozumieme funkcionálny rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

Fourierove koeficienty tohto trigonometrického radu počítame nasledovne:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx. \end{aligned}$$

Fourierov rad k funkcii f má potom tvar:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

V prípade $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ a f je $T-$ periodická, dostávame

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{2\pi nx}{T},$$

kde Fourierove koeficienty rátame nasledovne

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx. \end{aligned}$$

1.2 Fourierov rad v exponenciálnej forme

V tejto časti predstavíme dva typy Fourierových radov, ktoré majú spoločnú exponenciálnu formu. Okrem známeho Fourierovho radu v komplexnom tvare zadefinujeme aj tvar, ktorý využívame pri funkciách závislých od nejakého uhla, kde využívame polohový vektor funkcie. Pri spracovaní tejto sekcie sme sa opierali o poznatky spísané v [10], [4] ,[9] a [8].

1.2.1 Fourierov rad v komplexnom tvare

Ide o známe vyjadrenie trigonometrických funkcií pomocou Eulerových vzorcov

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{1}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{2}$$

Podľa [4] sme pre periodickú funkciu $f(x)$ s periódou T vyjadrili Fourierov rad v exponenciálnom tvare ako

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nx}{T}},$$

kde neznámy koeficient c_n je

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi nx}{T}} dx. \tag{3}$$

Tento rad má priamy súvis s predošlým Fourierovým radom v trigonometrickej forme. Pomocou vzorcov spomínaných v 1 sa vieme dopracovať k finálnemu zápisu Fourierovho

radu v komplexnom tvare.

Odvodenie Fourierovho radu v komplexnej forme z trigonometrickej

Pri písaní tejto časti pre odvodenie Fourierovho radu v exponenciálnej forme z jeho trigonometrickej formy sme čerpali z [11].

Pri odvodzovaní využijeme už známe rovnosti

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Odvodenie:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

kde

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2}; & n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2}; & n = 1, 2, 3, ..., \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}; & n = -1, -2, -3, ... \end{cases}$$

pričom vidíme, že a_{-n} a b_{-n} sú definované len ak n je záporné.

Z predošlých informácií vieme, že

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx f(x) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx f(x) dx, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \end{aligned}$$

teda pre n kladné

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos nx - i \sin nx] f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} f(x) dx,$$

pre záporné n

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(-nx) - i \sin(-nx)] f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} f(x) dx,$$

pre $n = 0$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-0} f(x)dx.$$

Pre periódu 2π teda máme

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)dx, \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

a podobne pre periódu T

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_0^{T} e^{-inx\frac{2\pi}{T}} f(x)dx, \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx\frac{2\pi}{T}}. \end{aligned}$$

1.2.2 Fourierov rad pre funkciu závislú od uhla

Tento tvar Fourierovho radu je pre nás novým poznatkom a preto je pred počítaním príkladov potrebné jeho presné zadefinovanie. Získané vedomosti a zápisy v nasledujúcich riadkoch sú získané z [9] a [8].

Nech je $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodická funkcia, $\sigma \in W^{2,2}_{per}(0, 2\pi)$. Reprezentovaná môže byť komplexným Fourierovým radom

$$\sigma(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k e^{ik\nu},$$

kde

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\nu}\sigma(\nu)d\nu$$

sú Fourierove komplexné koeficienty. Keďže $\sigma(\nu)$ uvažujeme ako reálnu funkciu, máme $\sigma_{-k} = \overline{\sigma}_k$ pre každé $k \in \mathbb{Z}$ a $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Treba si uvedomiť, že pre $\sigma \in W^{2,2}_{per}(0, 2\pi)$ máme $\sigma(\nu) + \sigma''(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1 - k^2)\sigma_k e^{ik\nu}$ v norme Lebesguovho priestoru $L^2(0, 2\pi) = W^{0,2}_{per}(0, 2\pi)$.

Môžeme vyjadriť energiu rozhrania

$$L_\sigma(\Gamma) = \int_\Gamma \sigma(\nu)ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k \int_\Gamma e^{ik\nu}ds = c_0\sigma_0 + 2\Re\sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k\sigma_k,$$

kde komplexné koeficienty

$$c_k = \int_\Gamma e^{-ik\nu} ds, k \in \mathbb{Z}$$

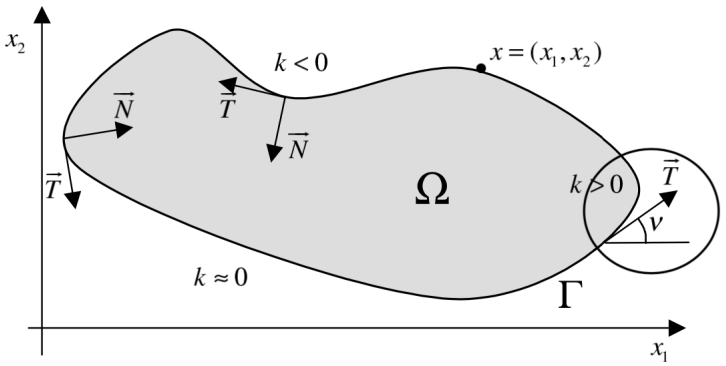
tvoria tzv. Fourierovo dĺžkové spektrum krivky Γ.

Pri rátaní našich príkladov budeme taktiež uvažovať nasledovnú definíciu podľa [4].

Definícia 1.2.1 *Nech Γ je C^1 hladká krivka v rovine. Fourierovým dĺžkovým spektrom krivky Γ rozumieme množinu $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ všetkých Fourierových komplexných koeficientov definovaných ako*

$$c_k = \int_\Gamma e^{-ik\nu} ds = \int_\Gamma (t_1 - it_2)^k ds,$$

kde $t = (t_1, t_2)^T = (\cos\nu, \sin\nu)^T$ je jednotkový dotykový vektor k Γ.



Obr. 1: Dotykový vektor ku krivke Γ.

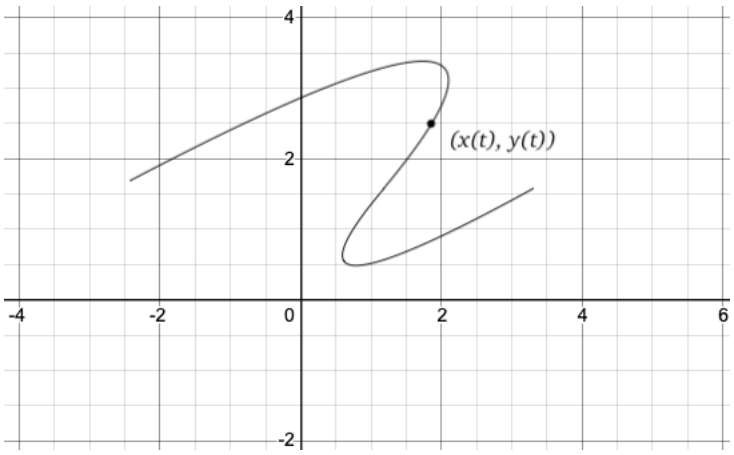
Poznámka : Pri počítaní spektier v ďalších častiach tejto diplomovej práce ujednotíme koeficienty n a k a využívať budeme len premennú n.

Poznámka : Pri počítaní spektier kriviek budeme označovať Fourierove koeficienty spektra parametrizácie krivky ako $\tilde{c}_n$ (medzi ne zaraďujeme Fourierov rad v trigonometrickej a komplexnej forme) a koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra krivky (ktoré sme si predstavili ako Fourierov rad pre funkciu závislú od uhla) ako c_n.

2 Parametrizácia krivky

Pre príklady a zadania, ktoré sú ťažiskom tejto práce, bude dôležitým pojmom slovo parametrizácia. Pri analýze a rátaní nasledujúcich príkladov budeme totiž Fourierove koeficienty kriviek počítať pre krivky, ktoré sú parametrizované rôznymi spôsobmi. V tejto časti si povieme, čo si treba pod pojmom parametrizácia predstaviť podľa [5].

Pri parametrizácii hovoríme o parametri t, ktorého hodnota rastie monotónne s pohybom po krivke. Akýkoľvek graf môže byť pretvorený na parametrickú krivku, ktorá opisuje pohyb objektu. Parametrizovaná krivka je cesta v xy-rovine, ktorá obsahuje bod $(x(t), y(t))$, kde t je parameter na intervale I.



Obr. 2: Parametrizovaná krivka.

Pre lepšie pochopenie uvádzame definíciu podľa [5]:

Definícia 2.0.1 *Nech $C \to \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je nejaká krivka v rovine. Parametrizáciou krivky $C \to \Gamma$ je pár funkcií $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taký, že $C \to \Gamma = \{(f(t), g(t))|\ t \in I\}$. Inými slovami, parametrická krivka je zobrazenie z $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dané $t \to (f(t), g(t))$ pre každé $t \in I$. Hovoríme, že t je parameter a parametrickými rovnicami krivky sú $x = f(t)$, $y = g(t)$. V prípade $I = [a, b]$ hovoríme, že $(f(a), f(b))$ je počiatočný bod a $(f(b), g(b))$ je koncový bod.*

Poznámka: V práci ďalej budeme označovať parametrické rovnice kriviek ako x_1 a x_2.

Jedna krivka sa dá parametrizovať viacerými spôsobmi. Je možné nájsť nespočetne veľa parametrizácií, ktoré avšak stále vo výsledku budú opisovať jednu a tú istú krivku. V časti 3 sa o tom sami presvedčíme. Pred samotnou analýzou príkladov si zoberieme za príklad jednotkový kruh a vypíšeme si pre neho tri rôzne parametrizácie.

Príklad 2.0.1 *Základnou parametrizáciou jednotkového kruhu je známy zápis:*

$$x_1(t) = \cos t,$$
$$x_2(t) = \sin t,$$
$$pre\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Táto parametrizácia začína v bode $(1, 0)$*, keď* $t = 0$ *a prejde jednotkovým kruhom raz proti smeru hodinových ručičiek.*
Ako ďalší príklad si uvedieme nasledovnú parametrizáciu

$$x_1(t) = -\cos t,$$
$$x_2(t) = -\sin t,$$
$$pre\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Táto parametrizácia začína v bode $(-1, 0)$ *a prechádza jednotkovým kruhom raz proti smeru hodinových ručičiek.*
Ako tretí príklad uvádzame

$$x_1(t) = \cos(\frac{t}{2}),$$
$$x_2(t) = \sin(\frac{t}{2}),$$
$$pre\ 0 \leq t \leq 8\pi.$$

Tentokrát začíname v bode $(1, 0)$ *a jednotkovým kruhom prechádzame dvakrát opäť proti smeru hodinových ručičiek.*

Vo všetkých troch prípadoch ide o jednotkový kruh. Okrem nich existuje nekonečne veľa parametrizácií jednotkového kruhu. Líšiť sa môžu v počiatočnom bode, rýchlosti, v ktorej je kruh kreslený alebo v počte, koľkokrát sme prešli jednotkový kruh. V neposlednom rade dôvodom môže byť aj fakt, či ideme v smere hodinových ručičiek alebo proti.

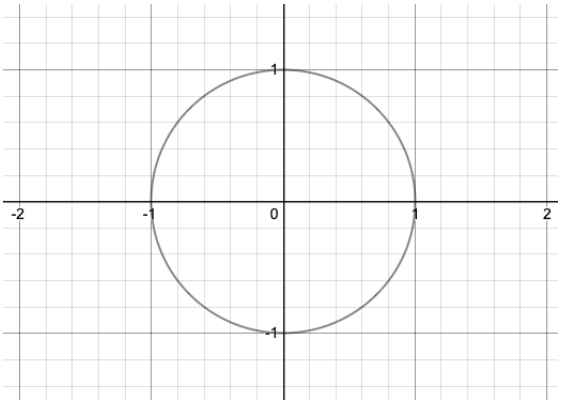
3 Analýza príkladov

Táto kapitola je jedna z ťažiskových častí celej diplomovej práce. Pozostávať bude z niekoľkých názorných príkladov, pre ktoré budeme rátať Fourierove koeficienty analyticky (v prípade, že to bude možné) a numerický, kde riešenia budeme hľadať v programovacom prostredí Matlab. Fourierove koeficienty budeme hľadať pre dve typy Fourierovho spektra - Fourierovo spektrum parametrizácie krivky, kde zaraďujeme trigonometrický a komplexný tvar Fourierovho radu a Fourierovo dĺžkové spektrum krivky (teda Fourierov rad pre funkciu závislú od uhla). Na konci každej z dvoch podkapitol zadefinujeme tvrdenie pre vlastnosť daného Fourierovho spektra a následne ju dokážeme.

3.1 Fourierovo spektrum parametrizácie krivky

Cieľom tejto časti je ukázať, že Fourierovo spektrum krivky podľa parametrizácie je závislé od parametrizácie. Toto tvrdenie budeme formulovať na základe výsledkov z príkladov. Príkladmi budú krivky, pre ktoré sme si zvolili dve rozdielne parametrizácie, na ktorých danú vlastnosť ukážeme. Numerické výsledky príkladov sme dostali pomocou programovacích kódov, ktoré je možné nájsť v prílohe 7.

Ako prvé sme sa rozhodli vypočítať Fourierove koeficienty pre jednotkový kruh. Budeme pri tom uvažovať dve parametrizácie jednotkového kruhu a pri analýze sa zameriame na výsledné spektrum danej krivky.



Obr. 3: Jednotkový kruh

- $\Gamma = \{(\cos 2\pi u, \sin 2\pi u)^T, u \in [0,1]\}$.

Inými slovami to znamená, že $x_1(u) = \cos 2\pi u$ a $x_2(u) = \sin 2\pi u$. Vieme si určiť aj $T = 1$. Podľa predošlých zadefinovaní rátame teda nasledujúce integrály

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^1 \cos(2\pi u)du = \int_0^1 \cos(2\pi u)du, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^1 \cos(2\pi u)\cos(\frac{2nu\pi}{T})du = 2\int_0^1 \cos(2\pi u)\cos(2nu\pi)du, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^1 \cos(2\pi u)\sin(\frac{2nu\pi}{T})du = 2\int_0^1 \cos(2\pi u)\sin(2nu\pi)du. \end{aligned}$$

Koeficienty pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$ sme si vypočítali pomocou matematického softvéru Matlab a výsledky boli nasledovné:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] &= [1, 0, 0, 0, 0], \\ [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] &= [0, 0, 0, 0, 0]. \end{aligned}$$

Pre túto istú parametrizáciu sme vypočítali spektrum krivky aj v komplexných číslach, teda využili sme komplexný tvar Fourierovho radu.

- $\Gamma = \{e^{i2\pi u}, u \in [0, 1]\}$.

  Vieme, že v tomto prípade počítame len jeden typ koeficientu, a to koeficient $\tilde{c}_n$, ktorý sme si zadefinovali v 3. Pre zadanie tohto príkladu vyzerá nasledovne:

$$\tilde{c}_n = \int_0^1 e^{i2\pi u}e^{-i2\pi nu}du.$$

  Tentokrát sme príklad počítali najprv analyticky:

  $n = 0$

  Využijeme substitúciu $r = i2\pi u$ a rovnosť $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 &= \int_0^1 e^{i2\pi u}e^{-i2\pi 0u}du = \int_0^1 e^{i2\pi u}du = -\frac{i}{2\pi}\int e^r dr = -\frac{ie^r}{2\pi} = \left[-\frac{ie^{i2\pi u}}{2\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{-ie^{i2\pi} + ie^0}{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

  $n = 1$

$$\tilde{c}_1 = \int_0^1 e^{i2\pi u}e^{-i2\pi 1u}du = \int_0^1 e^0 du = \int_0^1 1du = [u]_0^1 = 1.$$

$n = 2$

Využijeme substitúciu $r = -i2\pi u$ a rovnosť $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_2 &= \int_0^1 e^{i2\pi u} e^{-i2\pi 2u} du = \int_0^1 e^{-i2\pi u} du = \frac{i}{2\pi} \int e^r dr = \frac{ie^u}{2\pi} = \left[\frac{ie^{-2i\pi u}}{2\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{ie^{-i2\pi} - ie^0}{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

$n = 3$

Využijeme substitúciu $r = -i4\pi u$ a rovnosť $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_3 &= \int_0^1 e^{i2\pi u} e^{-i2\pi 3u} du = \int_0^1 e^{-i4\pi u} du = \frac{i}{4\pi} \int e^r dr = \frac{ie^r}{4\pi} = \left[\frac{ie^{-4i\pi u}}{4\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{ie^{-i4\pi} - ie^0}{4\pi} = 0.\end{aligned}$$

Vidíme, že analogicky by sme mohli postupovať ďalej pre ďalšie n. Pre $n = 1, 2, 3$ nám koeficienty $\tilde{c}_n$ vyšli $1, 0, 0$.

Tento príklad sme si následne vyrátali aj v Matlabe pre prvých 5 koeficientov, kde nám vyšli identické výsledky:

$$[\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4] = [0, 1, 0, 0, 0].$$

Pokračovať budeme opäť jednotkovým kruhom len s rozdielnou parametrizáciou. Zvolili sme ju nasledovne:

- $\Gamma = \{(\cos 2\pi u^2, \sin 2\pi u^2)^T, u \in [0, 1]\}$.

  Pri tejto parametrizácii máme $x_1(u) = \cos 2\pi u^2$ a $x_2(u) = \sin 2\pi u^2$. Rátali sme teda nasledujúce integrály

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^1 \cos(2\pi u^2) du = \int_0^1 \cos(2\pi u^2) du, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^1 \cos(2\pi u^2) \cos(\frac{2nu\pi}{T}) du = 2 \int_0^1 \cos(2\pi u^2) \cos(2nu\pi) du, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^1 \cos(2\pi u^2) \sin(\frac{2nu\pi}{T}) du = 2 \int_0^1 \cos(2\pi u^2) \sin(2nu\pi) du.\end{aligned}$$

  Jednotlivé koeficienty sme opäť vypočítali v Matlabe a výsledky pre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ boli nasledovné:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0.2441, \\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] &= [0.4673, 0.2492, 0.0305, 0.0056, 0.0017], \\ [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] &= [0.8670, -0.1332, -0.0660, -0.0253, -0.0120].\end{aligned}$$

Tak isto ako pred tým, pre túto novú parametrizáciu si koeficienty jednotkového kruhu vypočítame aj pre exponenciálny tvar.

- $\Gamma = \{e^{i2\pi u^2}, u \in [0,1]\}$.

  Opäť rátame koeficient $\tilde{c_n}$, tentokrát s inou funkciou $f(u)$:

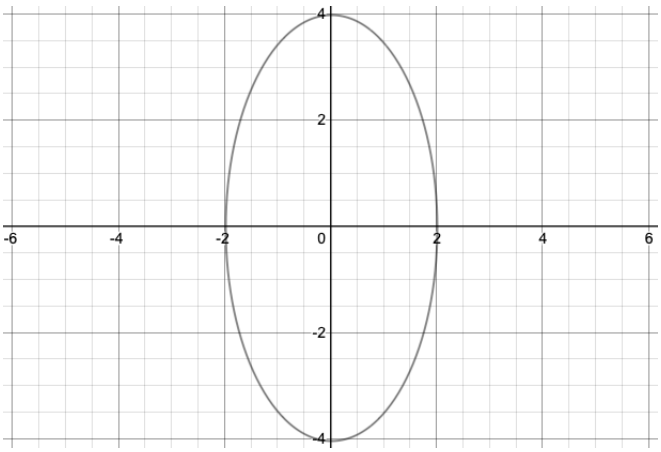
$$\tilde{c}_n = \int_0^1 e^{i2\pi u^2} e^{-i2\pi nu} du.$$

  Tento príklad sme analyticky nepočítali. Skúsili sme ho vypočítať pomocou Matlabu a dané koeficienty pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$ vyšli nasledovne:

$$\begin{aligned}[\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4] &= [0.2441 + 0.1717i, 0.4383 - 0.7799i, 0.2441 + 0.1717i, \\ &\quad 0.0290 + 0.0871i, 0.0051 + 0.0386i].\end{aligned}$$

Už po výsledkoch z týchto prvotných príkladov, kde sme sa zaoberali dvomi rôznymi parametrizáciami jednotkového kruhu, sa nám črtá spomínaná vlastnosť. Je zrejmé, že Fourierovo spektrum parametrizácie krivky je závislé od parametrizácie. Vidíme, že Fourierove koeficienty našej prvej a druhej zvolenej parametrizácie jednotkového kruhu sa nezhodujú ani pre trigonometrický tvar Fourierovho radu, ani pre komplexný.

Teraz sa pozrieme na to, ako by vyzerali Fourierove koeficienty elipsy pre Fourierov rad v trigonometrickej forme. Skúmať ich budeme taktiež pre dve rôzne zvolené parametrizácie.



Obr. 4: Elipsa

Prvú parametrizáciu elipsy sme si zvolili nasledovne:

- $\Gamma = \{(a\cos 2\pi u, b\sin 2\pi u)^T, u \in [0,1]\}$.

  Za parametre a, b sme sa rozhodli zvoliť si čísla $a = 2, b = 4$. Dostávame teda $x_1(u) = 2\cos 2\pi u$ a $x_2(u) = 4\sin 2\pi u$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^1 2\cos(2\pi u)du = \int_0^1 2\cos(2\pi u)du, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^1 2\cos(2\pi u)\cos(\frac{2nu\pi}{T})du = 2\int_0^1 2\cos(2\pi u)\cos(2nu\pi)du, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^1 2\cos(2\pi u)\sin(\frac{2nu\pi}{T})du = 2\int_0^1 2\cos(2\pi u)\sin(2nu\pi)du. \end{aligned}$$

  Jednotlivé koeficienty sme vyrátali v Matlabe pre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] &= [2, 0, 0, 0, 0], \\ [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] &= [0, 0, 0, 0, 0]. \end{aligned}$$

  Obdobne ako pri jednotkovom kruhu, aj tu sme zvolili inú parametrizáciu avšak stále pre tú istú elipsu:

- $\Gamma = \{(a\cos 2\pi u^2, b\sin 2\pi u^2)^T, u \in [0,1]\}$.

  Za parametre sme si opäť zvolili identické čísla $a = 2, b = 4$. V tomto prípade dostávame $x_1(u) = 2\cos 2\pi u^2$ a $x_2(u) = 4\sin 2\pi u^2$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^1 2\cos(2\pi u^2)du = \int_0^1 2\cos(2\pi u^2)du, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^1 2\cos(2\pi u^2)\cos(\frac{2nu\pi}{T})du = 2\int_0^1 2\cos(2\pi u^2)\cos(2nu\pi)du, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^1 2\cos(2\pi u^2)\sin(\frac{2nu\pi}{T})du = 2\int_0^1 2\cos(2\pi u^2)\sin(2nu\pi)du. \end{aligned}$$

  Pre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ vyšli koeficienty:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.4883, \\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] &= [0.9346, 0.4984, 0.0609, 0.0113, 0.0034], \\ [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] &= [1.7340, -0.2663, -0.1321, -0.0507, -0.0239]. \end{aligned}$$

  Aj v tomto prípade nám pre identickú elipsu vyšli rôzne Fourierove koeficienty pri dvoch rôznych parametrizáciách. Vidíme, že keď ľubovoľnú krivku reparametrizujeme, zmení sa jej spektrum.

Poznámka: Počítanie Fourierových koeficientov len pre prvú zložku funkcie je dostatočné na ukázanie toho, že spektrum krivky je závislé od parametrizácie. Koeficienty pre druhú zložku preto nepočítame, nasledoval by totiž analogický postup a rovnaký výsledok.

Fourierovo spektrum parametrizácie krivky je vo všeobecnosti závislé od parametrizácie. Inými slovami, pre každú parametrizáciu krivky Γ existuje iná jej parametrizácia, pričom Fourierove koeficienty sú rôzne. Tento všeobecne platný jav sme zapísali pomocou nasledovného tvrdenia:

Tvrdenie 3.1.1 *Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonštantná 1-periodická funkcia s Fourierovými koeficientami $\tilde{c}_n$. Potom existuje reparametrizácia s koeficientami $\tilde{c}'_n$ taká, že aspoň pre jedno n sa $\tilde{c}_n \neq \tilde{c}'_n$.*

Dôkaz:
Zoberieme reparametrizačnú funkciu $\phi(u) = u^p$, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ a pozrieme sa na Fourierov koeficient

$$F(p,n) = \int_0^1 f(u^p) e^{-in2\pi u} du,$$

kde parciálna derivácia podľa p

$$\frac{\partial F}{\partial p}(p,n) = \int_0^1 f'(u^p) u^p \ln u e^{-in2\pi u}\ du.$$

Predpokladáme pomocou sporu.

Ak by sa parciálna derivácia

$$\frac{\partial F}{\partial p}(p,n)|_{p=1} = 0$$

pre každé n, tak potom

$$\int_0^1 f'(u) u \ln u e^{-in2\pi u}\ du = 0$$

pre každé n. Z toho vyplýva, že funkcia $f'(u)u\ln u$ musí byť identicky nulová, lebo má nulové Fourierove koeficienty pre všetky n, teda platí $f'(u) = 0$ pre všetky u. Tu nastáva spor s tým, že funkcia nie je konštantná.

V závere vieme tvrdiť, že existuje také n_0, že

$$\frac{\partial F}{\partial p}(p, n_0)|_{p=1} \neq 0,$$

a tým pádom $F(p, n_0)$ je nekonštantná funkcia, teda závisí od p v okolí bodu p. Inými slovami jej koeficienty sa menia s parametrom p, teda výsledné Fourierove koeficienty závisia od reparametrizácie. □

3.2 Fourierove dĺžkové spektrum krivky

V tejto časti sa budeme venovať druhému typu spektra - Fourierovmu dĺžkovému spektru krivky. Tentokrát budeme počítať Fourierove koeficienty podľa vzorca zadefinovaného v 1.2.2 , teda pomocou polohového vektora. Opäť sa pozrieme na koeficienty jednotkového kruhu, ale taktiež si vypočítame spektrum pre elipsu. Našou úlohou je ukázať, že pre tento prípad je spektrum krivky úplne nezávislé od parametrizácie, teda ukázať, že platí opačné tvrdenie ako sme uviedli v predchádzajúcej časti.

Pred samotným počítaním jednotlivých príkladov je ešte potrebné vyjadriť výraz $e^{-in\nu}$ podľa [9]. Už vieme, že

$$c_n = \int_\Gamma e^{-in\nu} ds,$$

kde ν je dotykový uhol krivky v danom bode. Platí

$$e^{-in\nu} = (e^{-i\nu})^n = (\cos\nu - i\sin\nu)^n = (t_1 - it_2)^n,$$

kde sa t_1 a t_2 dá vyjadriť, pokiaľ krivku Γ máme parametrizovanú pomocou nejakej funkcie x. Funkcia x je dvojzložková so zložkami $x_1(u)$ a $x_2(u)$.
T je vektor:

$$T = \frac{x'(u)}{\|x'(u)\|},$$

t.j.,

$$t_i = \frac{x_i'(u)}{\|x_i'(u)\|}$$

pre $i = 1, 2....$

Dostávame teda

$$c_n = \int_\Gamma e^{-in\nu} ds = \int_\Gamma (t_1 - it_2)^n ds = \int_\Gamma \left(\frac{x_1'(u) - ix_2'(u)}{\sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du, \quad (4)$$

kde $ds = \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du$.

Koeficienty c_n sme vypočítali pre dve parametrizácie jednotkového kruhu ako tomu bolo v predošlom type spektra.

- $\Gamma = \{(\cos 2\pi u, \sin 2\pi u)^T, u \in [0,1]\}$.

  V tomto prípade máme $x_1 = \cos 2\pi u$ a $x_2 = \sin 2\pi u$ a teda $x_1' = -2\pi \sin(2\pi u)$, $x_2' = 2\pi \cos(2\pi u)$. Dosadíme a dostávame

$$\begin{aligned} c_n &= \int_\Gamma e^{-in\nu} ds = \int_\Gamma (t_1 - it_2)^n ds = \int_\Gamma \left(\frac{x_1'(u) - ix_2'(u)}{\sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(-2\pi \sin(2\pi u) - i2\pi \cos(2\pi u)}{\sqrt{(-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2}} \right)^n \\ &\quad \sqrt{(-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2} du. \end{aligned}$$

  $n = 0$

  Využijeme vzorec $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 \left(\frac{-2\pi \sin(2\pi u) - i2\pi \cos(2\pi u)}{\sqrt{-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2}} \right)^0 \\ &\quad \sqrt{-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2} du \\ &= \int_0^1 \sqrt{-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2} du \\ &= \int_0^1 \sqrt{4\pi^2 \sin^2(2\pi u) + 4\pi^2 \cos^2(2\pi u)} du \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{\sin^2(2\pi u) + \cos^2(2\pi u)} du = 2\pi \int_0^1 1 du = 2\pi [u]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

  $n = 1$

Využijeme substitúciu $v = 2\pi u$

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 \left(\frac{-2\pi \sin(2\pi u) - i2\pi \cos(2\pi u)}{\sqrt{(-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2}} \right)^1 \\ &\quad \sqrt{(-2\pi \sin(2\pi u))^2 + (2\pi \cos(2\pi u))^2} du \\ &= \int_0^1 (-2\pi \sin(2\pi u) - i2\pi \cos(2\pi u)) du = -2\pi \int_0^1 \sin(2\pi u) du \\ &- i2\pi \int_0^1 cos(2\pi u) du = -2\pi \left[-\frac{\cos(2\pi u)}{2\pi} \right]_0^1 - i2\pi \left[\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi} \right]_0^1 = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Numericky sme si tento príklad vypočítali v Matlabe, kde nám koeficienty pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$ vyšli

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4] = [6.2832, 0, 0, 0, 0].$$

Druhú parametrizáciu sme zvolili totožnú ako v časti pred tým.

- $\Gamma = \{(\cos 2\pi u^2, \sin 2\pi u^2)^T, u \in [0, 1]\}$.

  V tomto prípade máme $x_1 = \cos 2\pi u^2$ a $x_2 = \sin 2\pi u^2$ a teda $x_1' = -4\pi u \sin(2\pi u^2)$ a $x_2' = 4\pi u \cos(2\pi u^2)$. Dosadíme a dostávame

$$\begin{aligned} c_n &= \int_\Gamma e^{-ip\nu} ds = \int_\Gamma (t_1 - it_2)^n ds = \int_\Gamma \left(\frac{x_1'(u) - ix_2'(u)}{\sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-4\pi u \sin(2\pi u^2) - i4\pi u \cos(2\pi u^2)}{\sqrt{-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2}} \right)^n \\ &\quad \sqrt{(-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2} du. \end{aligned}$$

  $n = 0$

  Využijeme vzorec $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 \left(\frac{-4\pi u \sin(2\pi u^2) - i4\pi u \cos(2\pi u^2)}{\sqrt{(-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2}} \right)^0 \\ &\quad \sqrt{(-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2} du \\ &= \int_0^1 \sqrt{(-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2} du \\ &= \int_0^1 \sqrt{16\pi^2 u^2 \sin^2(2\pi u^2) + 16\pi^2 u^2 \cos^2(2\pi u^2)} du \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{u^2 \sin^2(2\pi u^2) + u^2 \cos^2(2\pi u^2)} du = 4\pi \int_0^1 u \; du \\ &= 4\pi [\frac{u^2}{2}]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

$n = 1$

Využijeme substitúciu $v = 2\pi u^2$

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 \left(\frac{-4\pi u \sin(2\pi u^2) - i4\pi u \cos(2\pi u^2)}{\sqrt{(-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2}} \right)^1 \\ &\quad \sqrt{(-4\pi u \sin(2\pi u^2))^2 + (4\pi u \cos(2\pi u^2))^2} du \\ &= \int_0^1 -4\pi u \sin(2\pi u^2) - i4\pi u \cos(2\pi u^2) du = -4\pi \int_0^1 u \sin(2\pi u^2) du \\ &- i4\pi \int_0^1 u cos(2\pi u^2) du = -4\pi \left[-\frac{\cos(2\pi u^2)}{4\pi} \right]_0^1 - i4\pi \left[\frac{\sin(2\pi u^2)}{4\pi} \right]_0^1 = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

V Matlabe koeficienty c_n pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$ vyšli nasledovne:

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4] = [6.2832, 0, 0, 0, 0].$$

Už z prvých výsledkov pre jednotkový kruh je vidno, že spektrá tejto krivky vyšli pre dve rôzne parametrizácie totožné.

Pre $n = 0$ to bola hodnota 2π, keďže

$$c_0 = \int_\Gamma \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du$$

je všeobecne vždy dĺžka krivky.

Podobne sme koeficienty c_n vypočítali aj pre dve rôzne parametrizácie elipsy.

- $\Gamma = \{(a \cos 2\pi u, b \sin 2\pi u)^T, u \in [0, 1]\}$.
  V tomto prípade máme $x_1 = a \cos 2\pi u$ a $x_2 = b \sin 2\pi u$, a teda $x_1' = -a2\pi \sin(2\pi u)$ a $x_2' = b2\pi \cos(2\pi u)$. Treba pripomenúť, že platí $0 < a \leq b$. Dosadíme a dostávame

$$\begin{aligned} c_n &= \int_\Gamma e^{-ip\nu} ds = \int_\Gamma (t_1 - it_2)^n ds = \int_\Gamma \left(\frac{x_1'(u) - ix_2'(u)}{\sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin u - ib \cos u}{\sqrt{(-a \sin u)^2 + (b \cos u)^2}} \right)^n \sqrt{(-a \sin u)^2 + (b \cos u)^2} du. \end{aligned}$$

pre $n = 0$

Využijeme vzorec $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, substitúciu $v = 2\pi u$ a eliptický integrál.

$$\begin{aligned}
c_0 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-a2\pi\sin(2\pi u) - ib2\pi\cos(2\pi u}{\sqrt{(-a2\pi\sin(2\pi u))^2 + (b2\pi\cos(2\pi u))^2}} \right)^0 \\
&\quad \sqrt{(-a2\pi\sin(2\pi u))^2 + (b2\pi\cos(2\pi u))^2}\ du \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a2\pi\sin(2\pi u))^2 + (b2\pi\cos(2\pi u))^2}\ du \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 4\pi^2\sin(2\pi u)^2 + b^2 4\pi^2\cos(2\pi u)^2}\ du \\
&= 2\pi 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin(2\pi u)^2 + b^2\cos(2\pi u)^2}\ du = 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2(2\pi u) + b^2}\ du \\
&= 8\pi\int \frac{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2(v) + b^2}}{2\pi} = 8\pi\frac{b}{2\pi}\int \sqrt{1 - \frac{(b^2-a^2)\sin^2(v)}{b^2}}\ dv \\
&= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{(b^2-a^2)\sin^2(2\pi u)}{b^2}} = 4bE\left(\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}\right),
\end{aligned}$$

kde $E(k)$ je Eulerov eliptický integrál.

pre $n = 1$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-a\sin u - ib\cos u}{\sqrt{(-a\sin u)^2 + (b\cos u)^2}} \right)^1 \sqrt{(-a\sin u)^2 + (b\cos u)^2}\ du \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -a\sin u - ib\cos u\ du = -4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u - 4ib\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\ du \\
&= -4a\left[-\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4ib\left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

V Maltabe sme si pre túto parametrizáciu koeficienty c_n vyčíslili s dosadenými hodnotami pre $a = 2$ a $b = 4$ aby zodpovedala elipse z predošlej časti. Výsledky pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$ boli nasledovné:

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4] = [19.3769, 0, -9.2920 + 0.0000i, 0, 3.8159 - 0.0000i]\,.$$

- $\Gamma = \{(a\cos 2\pi u^2, b\sin 2\pi u^2)^T, u \in [0,1]\}$.
  V tomto prípade máme $x_1 = a\cos 2\pi u^2$ a $x_2 = b\sin 2\pi u^2$, a teda $x_1' = -a4\pi u\sin(2\pi u^2)$ a $x_2' = b4\pi u\cos(2\pi u^2)$. Opäť platí $0 < a \leq b$. Aby išlo o identickú elipsu ako pri predošlej parametrizácii, parametre a a b určíme rovnako, teda $a = 2$, $b = 4$.
  V Matlabe vyšli koeficienty pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$ nasledovne:

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4] = [19.3769, 0, -9.2920 - 0.0000i, 0, 3.8159 - 0.0000i]\,.$$

Vidíme, že aj pre prípad elipsy nám vyšlo identické spektrum pre dve rôzne parametrizácie.

Vo vyššie opísanom druhom prístupe je spektrum úplne nezávislé od parametrizácie, pretože sa hýbeme po krivke nejakým jednotkovým rýchlym krokom a pozeráme sa len na dotykový vektor. Sledujeme jeho vzdialenosti od nuly a spočítavame si jeho prírastky. Ide teda o geometrickú záležitosť krivky, nie o parametrizáciu.

Navyše, v článku [9] je rigorózne dokázané, že vždy platí $c_1 = 0$.

Pre ucelenie našej analýzy sme zadefinovali náš výsledok ako tvrdenie a následne ho dokázali.

Tvrdenie 3.2.1 *Nech Γ je C^1 hladká krivka. Potom Fourierove dĺžkové spektrum je nezávislé od parametrizácie.*

Dôkaz:

Nech Γ je daná krivka, ktorú máme parametrizovanú pomocou nejakej funkcie $x(u)$, ktorá má dve zložky $x_1(u)$ a $x_2(u)$.

Pri reparametrizácii prechádzame od $u \to v$, čo je nejaká neklesajúca funkcia $v = \varphi(u)$, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$. Dostávame teda

$$x(u) = \tilde{x}(v) = \tilde{x}(\varphi(u))$$

a

$$\frac{\partial x(u)}{\partial u} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial v}\varphi'(u).$$

Derivovaný výraz nahradíme novým výrazom, čiže deriváciou podľa novej parametrizácie. Násobené je to konštantou $\varphi'(u)$, teda pre každé pevné u tu dôjde k nejakému násobku. Treba si uvedomiť, že $dv = \varphi'(u)du$. Dosadíme

$$\int_0^1 \left(\frac{\tilde{x}_1'(v)\varphi'(u) - i\tilde{x}_2'(v)\varphi'(u)}{\sqrt{(\tilde{x}_1'(v)\varphi'(u))^2 + (\tilde{x}_2'(v)\varphi'(u))^2}} \right)^n \sqrt{(\tilde{x}_1'(v)\varphi'(u))^2 + (\tilde{x}_2'(v)\varphi'(u))^2} \frac{1}{\varphi'(u)} dv$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\varphi'(u)(\tilde{x}_1'(v) - i\tilde{x}_2'(v))}{\varphi'(u)\sqrt{(\tilde{x}_1'(v))^2 + (\tilde{x}_2'(v))^2}} \right)^n \varphi'(u)\sqrt{(\tilde{x}_1'(v))^2 + (\tilde{x}_2'(v))^2} \frac{1}{\varphi'(u)} dv$$

$$\int_0^1 \left(\frac{(\tilde{x}_1'(v) - i\tilde{x}_2'(v))}{\sqrt{(\tilde{x}_1'(v))^2 + (\tilde{x}_2'(v))^2}} \right)^n \sqrt{(\tilde{x}_1'(v))^2 + (\tilde{x}_2'(v))^2} dv$$

a vidíme, že integrál zostal rovnaký pri ľubovoľnej parametrizácii. Koeficienty c_n sú teda nezávislé od parametrizácie. Závisia len od geometrickej vlastnosti krivky. □

4 Závislosť spektra vzhľadom na afinné transformácie

Analýza Fourierových koeficientov sa tiahne pozdĺž celej tejto diplomovej práce, čo už predpovedá aj jej názov. V nasledujúcich častiach sa bližšie pozrieme na správanie sa spektra krivky pri ľubovoľnom posune danej krivky v rovine ale aj na to, ako sa spektrum krivky zmení pri jej otočení.

4.1 Spektrum a posun krivky v rovine

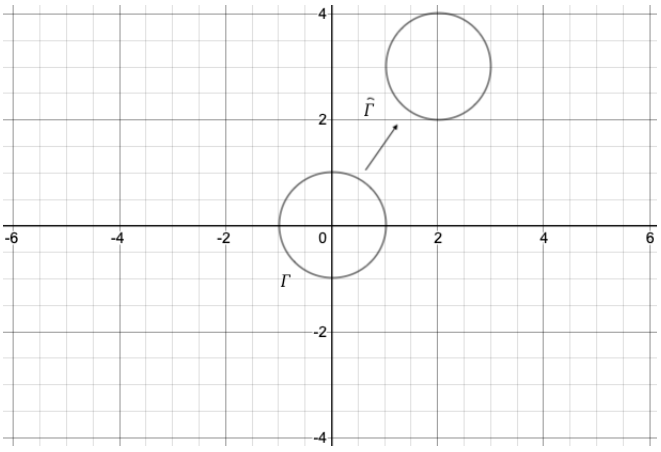
Ako prvé si zoberieme ľubovoľnú krivku Γ. Zadefinujeme si ju ako parametrizovanú krivku všeobecne zapísanú ako

$$\Gamma = \{x(u), u \in [0, 1]\}.$$

Jej posun v rovine si následne označíme ako $\tilde{\Gamma}$ a obdobne si jej zápis zadefinujeme ako v predošlej časti:

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{x}(u), u \in [0, 1]\},$$

kde $\tilde{x}(u) = x(u) + b$. Parameter b určuje posun v rovine pre danú krivku.
Za ilustratívny príklad si môžeme zobrať viackrát spomínaný jednotkový kruh.



Obr. 5: Posun krivky v rovine

Vieme, že koeficient c_n

$$\tilde{c}_n = \int_\Gamma e^{-ip\nu} ds = \int_\Gamma (t_1 - it_2)^n ds = \int_0^1 \left(\frac{x_1'(u) - ix_2'(u)}{\sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du.$$

Keďže platí

$$\tilde{x}'(u) = x'(u),$$

tak pre koeficienty $\tilde{c}_n$ bude platiť rovnosť

$$c_n(\tilde{\Gamma}) \;=\; c_n(\Gamma).$$

Tento výsledok môžeme zapísať pomocou nasledujúceho tvrdenia:

Tvrdenie 4.1.1 *Nech Γ je C^1 hladká krivka. Pri posune krivky Γ v rovine sa spektrum krivky zachováva.*

4.2 Spektrum a otočenie krivky v rovine

Opäť budeme uvažovať ľubovoľnú krivku Γ zapísanú ako

$$\Gamma = \{x(u), u[0,1]\}.$$

Pre otočenú krivku $\tilde{\Gamma}$ budeme uvažovať zápis v tvare

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= \{\tilde{x}(u), u \in [0,1]\}, \\ \tilde{\Gamma} &= \{Qx(u), u \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

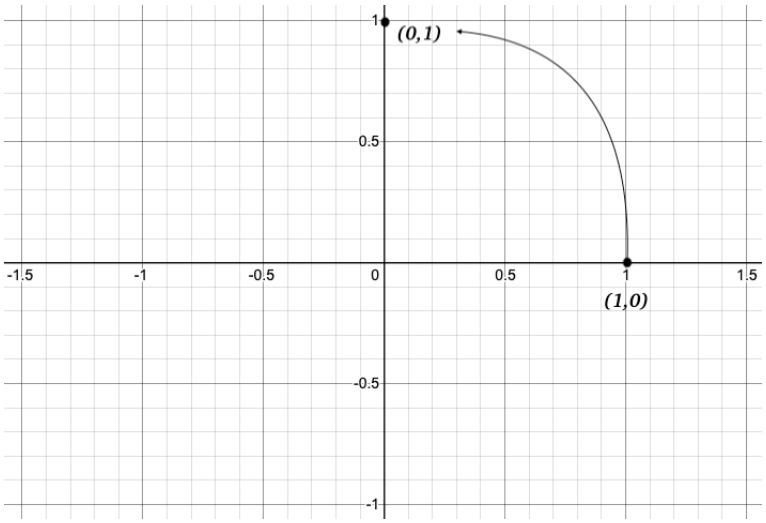
kde Q je ortogonálna matica otočená o uhol φ, so zložkami

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

V praxi to bude vyzerať nasledovne. Zoberieme si vektor $(1,0)^T$ a uhol otočenia $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Spolu s prenásobením s ortogonálnou maticou Q dostávame

$$\mathrm{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Toto otočenie o $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bude vyzerať v rovine nasledovne:



Obr. 6: Otočenie o uhol $\varphi = \frac{\pi}{2}$ v rovine

Náš výsledok môžeme zapísať do nasledujúceho tvrdenia:

Tvrdenie 4.2.1 *Nech* Γ *je* C^1 *hladká krivka. Pre parametrizovanú funkciu* $x(u)$ *platí, že pri otočení tejto krivky* Γ *v rovine sa zápis jej parametrizovanej funkcie zmení nasledovne:*

$$\tilde{x}(u) = Qx(u),$$

$u \in [0, 1]$. *Zároveň pre koeficienty nového spektra platí*

$$\hat{c}_n = e^{-i\varphi n} c_n.$$

Navyše $|\hat{c}_n| = |c_n|$, keďže absolútna hodnota z $e^{-i\varphi n}$ je jedna. Interpretovať to môžeme ako invarianciu absolútnej hodnoty daných koeficientov vzhľadom na otočenie.

Dôkaz:

Nech Q je konštantná matica, potom

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(u) &= Qx'(u) \\ \sqrt{\tilde{x}_1'(u)^2 + \tilde{x}_2'(u)^2} &= \|\tilde{x}'(u)\|_2 = \|Qx'(u)\| = \|x'(u)\|, \end{aligned}$$

kde $\|\tilde{x}'(u)\|_2$ je euklidovská norma a Q je ortogonálna matica, ktorá zachováva dĺžky.

Ďalej sa pozrieme ako sa transformujú výrazy $\tilde{x}_1'(u)$ a $\tilde{x}_2'(u)$:

$$\tilde{x}_1'(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(u) \\ x_2'(u) \end{pmatrix} = \cos\varphi x_1'(u) - \sin\varphi x_2'(u),$$

$$\tilde{x}_2'(u) = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(u) \\ x_2'(u) \end{pmatrix} = \sin\varphi x_1'(u) + \cos\varphi x_2'(u).$$

Potom

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1'(u) - i\tilde{x}_2'(u) &= \cos\varphi x_1'(u) - \sin\varphi x_2'(u) - i(\sin\varphi x_1'(u) + \cos\varphi x_2'(u)) = \\ &= (\cos\varphi - i\sin\varphi)x_1'(u) - i(\cos\varphi - i\sin\varphi)x_2'(u) = \\ &= (\cos\varphi - i\sin\varphi)(x_1'(u) - ix_2'(u)) = e^{-i\varphi}(x_1'(u) - ix_2'(u)). \end{aligned}$$

Vieme, že pre koeficienty c_n, ktoré sme odvodili v 4, pôvodnej krivky platí:

$$c_n = \int_\Gamma \left(\frac{x_1'(u) - ix_2'(u)}{\sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2} du.$$

Koeficienty $\hat{c}_n$ nového spektra otočenej krivky v rovine (po dosadení $\tilde{x}_1'(u)$ a $\tilde{x}_2'(u)$ z vyššie odvodených výpočtov) budú vyzerať ako:

$$\begin{aligned} \hat{c}_n &= \int_\Gamma \left(\frac{\tilde{x}_1'(u) - i\tilde{x}_2'(u)}{\sqrt{\tilde{x}_1'(u)^2 + \tilde{x}_2'(u)^2}} \right)^n \sqrt{\tilde{x}_1'(u)^2 + \tilde{x}_2'(u)^2} du \\ &= \int_\Gamma \left(\frac{e^{-i\varphi}(x_1'(u) - ix_2'(u))}{\sqrt{\cos^2\varphi(x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2) + \sin^2\varphi(x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2)}} \right)^n \\ &\quad \sqrt{\cos^2\varphi(x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2) + \sin^2\varphi(x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2)}\ du \\ &= \int_\Gamma \left(\frac{e^{-i\varphi}(x_1'(u) - ix_2'(u))}{\sqrt{(x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2)}} \right)^n \sqrt{(x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2)}\ du \\ &= e^{-i\varphi n} c_n. \end{aligned}$$

□

5 Výpočet spektra uzavretých kriviek v rovine

Nasledujúce strany diplomovej práce predstavia pár vybraných kriviek a ich spektrá pre Fourierovo dĺžkové spektrum a Fourierove spektrum parametrizácie. Z dostupných zdrojov sme vybrali šesť parametrizácií nasledovných kriviek: jednotkový kruh, elipsa, štvorlístok, asteroid, kvet a hviezda. Ich spektrá boli rátané na základe kódov naprogramovaných v matematickom softvéri Matlab, priložených v 8. Pre každú nami vybranú parametrizovanú krivku si zobrazíme jej tvar a absolútne Fourierove koeficienty pre obidva typy spektrier pomocou grafov. Následne sa budeme venovať ich interpretácii, porovnaniu a ukážke toho, že naozaj platí to, čo sme v predošlých častiach dokázali.

Fourierovo spektrum parametrizácie

Pracovať budeme s komplexným tvarom Fourierovho radu. Pri Fourierovom spektre parametrizácie bolo ako prvé potrebné jednotlivé krivky dané pomocou parametrizácie $x_1(u), x_2(u)$ previesť do komplexnej roviny. To je možné jednoduchým a známym spôsobom:

$$\mathbb{R}^2 \ni [x_1(u), x_2(u)] \to [x_1(u) + ix_2(u)] \in \mathbb{C}.$$

Vykreslenie krivky v komplexnej rovine bolo zhodné ako pri pôvodnej parametrizácii. Pre rátanie spektra sme v našom programovacom kóde využili vzorec spomínaný v časti 1.2:

$$\tilde{c}_n = \int_0^1 e^{-in2\pi u} f(u)\ du.$$

V tomto prípade nahradzujeme našu funkciu $f(u)$ prevedeným tvarom $x_1(u) + ix_2(u)$:

$$\tilde{c}_n = \int_0^1 e^{-in2\pi u}(x_1(u) + ix_2(u))\ du,$$

pre našu diskretizáciu konkrétne

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} e^{-in2\pi\frac{k}{K}}\left(x_1\left(k/K\right) + ix_2\left(k/K\right)\right).$$

Za K sme si zvolili pre všetky prípady číslo 1000, kde sme pre naše parametrizované krivky dostali následne 1000 ekvidištančných bodov. Na základe nich sme potom každú

krivku aj vykreslili.

Ako je zrejmé, nultý koeficient c_0 bude mať vždy tvar

$$\tilde{c}_0 = \int_0^1 (x_1(u) + ix_2(u))\ du,$$

kde nám exponenciálna časť vzorca vypadne. Tento koeficient sme nezahrnuli do cyklu pre rátanie Fourierových koeficientov, ale počítali sme ho zvlášť pomocou integrálnej funkcie. Ako posledné sme výsledné koeficienty zobrazili v absolútnych hodnotách na grafoch pre oba typy spektier.

Fourierovo dĺžkové spektrum

V tejto časti sme pri rátaní Fourierových koeficientov zo zadaných bodov krivky využili poznatky získané z [8], pomocou ktorých bola spísaná aj kapitola 3.2, kde sme sa predstaveniu dĺžkového spektra krivky venovali podrobnejšie.

Naša krivka má $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(K)}$ vrcholov. Aj v tomto prípade sme si zvolili pre každú krivku počet ekvidištančných bodov $K = 1000$. Tanget dotykový vektor $t^{(j)}$ v $x^{(j)}$ sme aproximovali ako $t^{(j)} = (x^{(j+1)} - x^{(j-1)})/\|x^{(j+1)} - x^{(j-1)}\|$, kde $\|x\|$ je euklidovská norma vektora x. Ďalej podľa [8] je $ds = \|\delta_u x\|du \approx \frac{1}{2}\|x^{(j+1)} - x^{(j-1)}\|$.

Koeficienty c_n sme teda rátali pomocou aproximácie

$$\begin{aligned} c_n &= \int_\Gamma (t_1 - it_2)^n\ ds \\ &\approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} (t_1^{(j)} - it_2^{(j)})^n \|x^{(j+1)} - x^{(j-1)}\|. \end{aligned}$$

Pre porovnanie s Fourierovým spektrom parametrizácie krivky sme si aj pre tento prípad zobrali absolútne Fourierove koeficienty každej zo skúmaných kriviek. Zobrazili sme ich taktiež na grafoch.

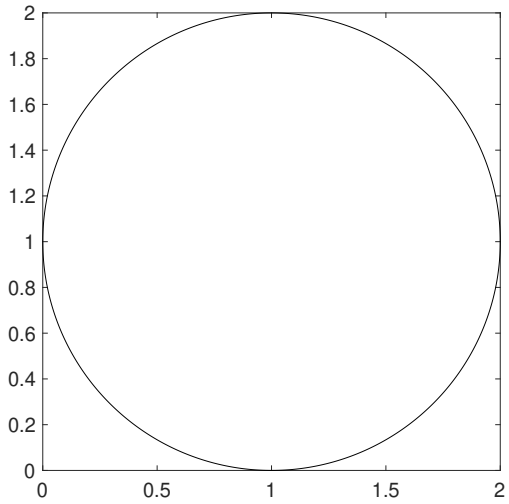
5.1 Jednotkový kruh

Za prvú krivku, na ktorej sme v praxi vyskúšali vyššie opísané postupy rátania spektier, sme vybrali jednotkový kruh. Tejto krivke sme sa venovali už v časti 3 a koeficienty pre tieto spektrá už máme v podstate vypočítané. Boli však rátané pomocou integrálnych funkcií (ale aj analyticky) a nie pomocou všeobecného kódu pre parametrizovanú krivku.

Na základe toho si teda veľmi rýchlo vieme spätne skontrolovať výsledky a taktiež nám to pomohlo pri písaní programovacieho kódu.

Jednotkový kruh je parametrizovaný ako:

$$\begin{aligned} x_1(u) &= \cos(2\pi u) \\ x_2(u) &= \sin(2\pi u). \end{aligned}$$

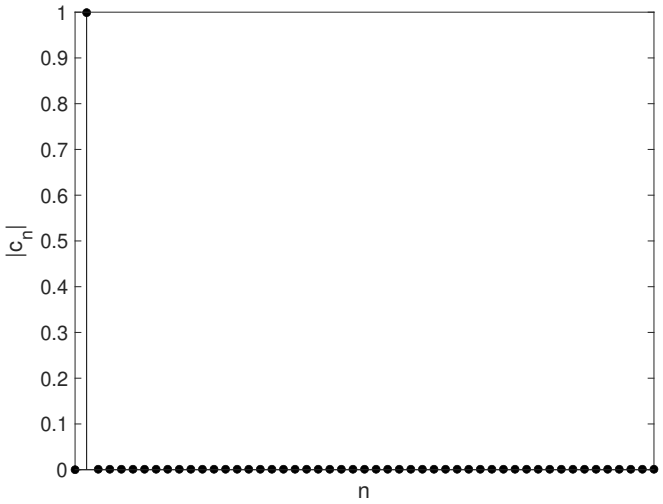


Obr. 7: Jednotkový kruh.

Ako sme spomínali, spektrum tejto krivky máme vypočítané pre trigonometrickú a exponenciálnu formu Fourierovho radu ale aj Fourierove spektrum krivky závislej od polohového vektora. V spomínanej časti máme len prvých päť koeficientov. Tentokrát sme sa teda na výsledky mohli pozrieť komplexnejšie.

Ako prvé sa pozrieme na Fourierovo spektrum parametrizácie krivky. Nižšie zobrazené absolútne koeficienty nám potvrdzujú analytické výpočty v časti 3.1. Okrem koeficientu $\tilde{c}_1$, ktorý sa rovná číslu 1, sú ostatné koeficienty nulové. Zo zápisu parametrizácie je viditeľná jednotková frekvencia $(1 * 2\pi u)$, ktorá sa nám premietla aj do grafu. Toto spektrum teda, ako sme dokázali v časti 3.1, striktne závisí od parametrizácie a odzrkadľuje jej zápis.

Na grafe môžeme vidieť prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho spektra parametrizácie jednotkového kruhu.



Obr. 8: Absolútne koeficienty Fourierovho spektra parametrizácie jednotkového kruhu $|\tilde{c}_n|$.

Z časti 3.2 sme pri analýze príkladov spomenuli, že pre prípad dĺžkového spektra krivky sa koeficient c_0 všeobecne vždy rovná dĺžke krivky. V prípade jednotkového kruhu je to hodnota 2π, teda približne hodnota $6,28$ znázornená na grafe. Pre ostatné koeficienty sme namerali nulové hodnoty.

Na grafe môžeme vidieť znázornených prvých 30 absolútnych koeficientov pre Fourierovo dĺžkové spektrum jednotkového kruhu.



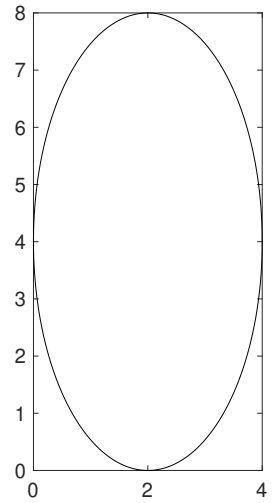
Obr. 9: Absolútne koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra jednotkového kruhu $|c_n|$.

5.2 Elipsa

Ďalšou krivkou je elipsa, taktiež analyzovaná v časti 3. Aj táto krivka nám bola nápomocná pri písaní programovacieho kódu, keďže výsledné koeficienty jej spektier sme už mali vypočítané.

Za príklad sme zvolili identickú parametrizáciu, aby sme mohli porovnať a doplniť výsledky:

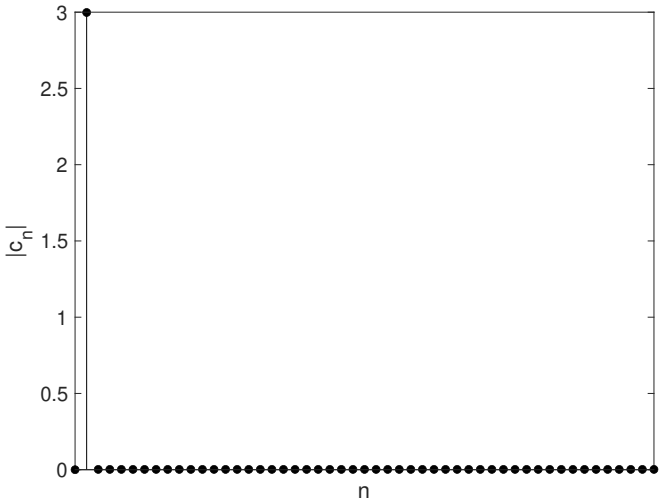
$$\begin{aligned} x_1(u) &= 2\cos(2\pi u) \\ x_2(u) &= 4\sin(2\pi u) \end{aligned}$$



Obr. 10: Elipsa.

Podobne ako pre jednotkový kruh, nám pri spektre parametrizácie elipsy vyskočil len jeden nenulový koeficient, a to zhodne $\tilde{c_1}$. Pri pohľade na ich zápis parametrizácie vidíme, že ide takmer o totožné zadanie, s rozdielom prenásobenia trigonometrických funkcií, preto sa táto situácia dala očakávať. Hodnota koeficientu $\tilde{c}_1$ sa rovnala číslu 3. Zo zápisu je opäť viditeľná jednotková frekvencia, ktorú pozorujeme aj v priloženom grafe, kde sa ostatné koeficienty ukázali ako nulové.

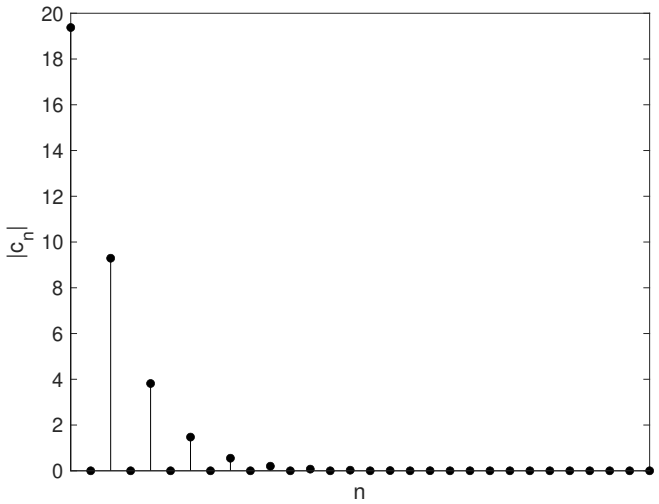
Na grafe vidíme prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho spektra parametrizácie elipsy.



Obr. 11: Absolútne koeficienty Fourierovho spektra parametrizácie elipsy $|\tilde{c}_n|$.

Pri dĺžkovom spektre elipsy vidíme exponenciálne klesanie koeficientov, ktoré sa ustáli až na čísle 0. Dĺžka krivky je v tomto prípade $c_0 = 19,38$. Okrem toho môžeme vidieť aj vystúpený vždy len párny absolútny koeficient.

Na grafe je znázornených prvých 30 absolútnych koeficientov Fourierovho dĺžkového spektra elipsy.



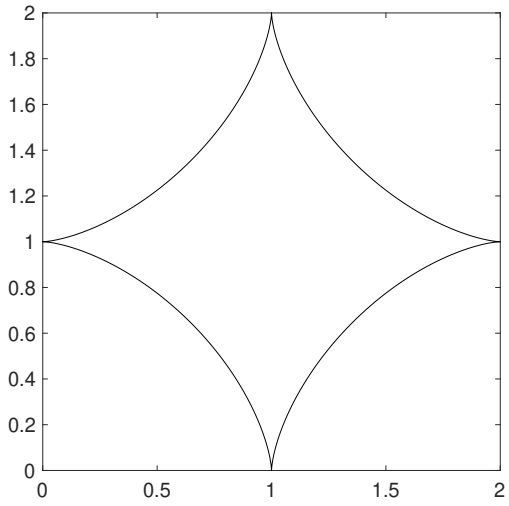
Obr. 12: Absolútne koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra elipsy $|c_n|$.

5.3 Asteroida

Po dvoch známych krivkách z predošlých častí prejdeme k novým a zložitejším. Krivka s parametrizáciou veľmi pripomínajúcou parametrizáciu jednotkového kruhu, ktorej sa budeme venovať v tejto časti, je asteroida. Asteroida je druh geometrickej krivky, ktorá pozostáva zo štyroch vrcholov.

Zápis jeho parametrizácie sme získali z [13] :

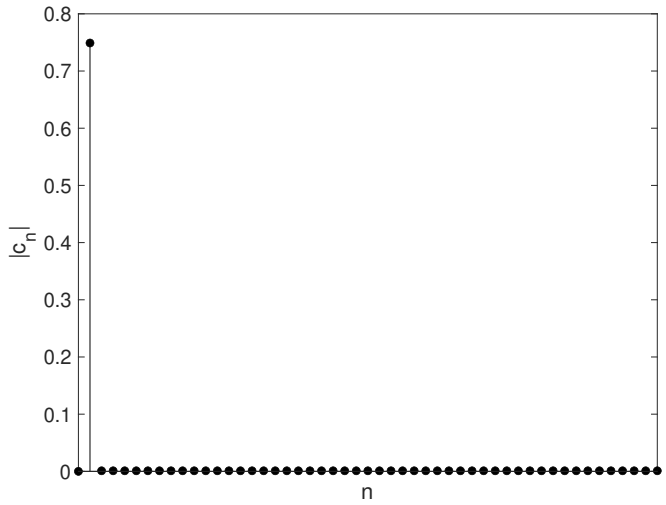
$$\begin{aligned} x_1(u) &= \cos^3(2\pi u) \\ x_2(u) &= \sin^3(2\pi u) \end{aligned}$$



Obr. 13: Asteroida.

Fourierovo spektrum parametrizácie asteroidy taktiež preukazuje len jeden nenulový koeficient, a to $\tilde{c}_1 = 0,75$, ktorý je zrejmý zo zápisu parametrizácie asteroidy. Na druhej strane tento výsledok, ktorý aj pri asteroide ukázal nenulový koeficient $\tilde{c}_1$ tak isto ako pri jednotkovom kruhu, je prinajmenšom zaujímavým a pre niekoho možno mätúcim. Overili sme jeho numerický výpočet v programe Mathematica, aby sme sa presvedčili, že ide naozaj o správne hodnoty koeficientov. Výsledky sa potvrdili a teda ide o nešťastnú formu parametrizácie a absolútne hodnoty komplexného spektra sú naozaj nulové s výnimkou $\tilde{c}_1$.

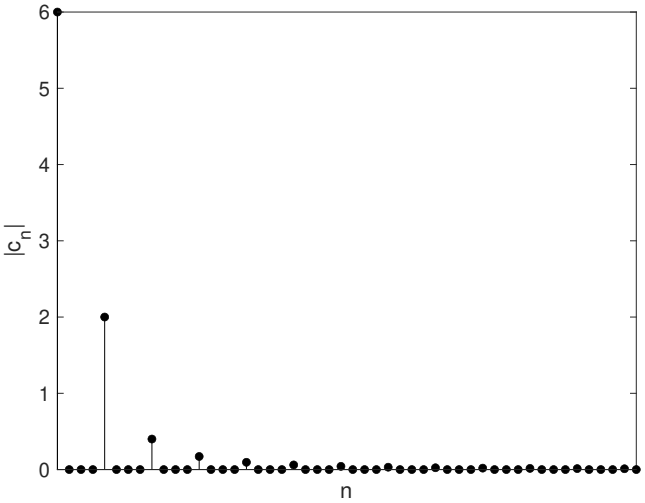
Na grafe môžeme vidieť prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho spektra parametrizácie asteroidy.



Obr. 14: Absolútne koeficienty Fourierovho spektra parametrizácie asteroidy $|\tilde{c}_n|$.

Vieme, že Fourierovo dĺžkové spektrum nie je závislé od parametrizácie krivky, ale v tomto prípade ide o geometrickú záležitosť krivky. Očakávali sme teda, že nenulový koeficient by mohol byť práve c_4. Typická frekvencia v tomto prípade bola odhalená a okrem najvýraznejšieho koeficientu c_4, tu vidíme výraznejšie vystúpené aj koeficienty $c_8, c_{12}, c_{16}, ...$ Tieto absolútne čísla exponenciálne klesajú, podobne ako pri elipse.

Na grafe máme pre tentokrát znázornených prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho dĺžkového spektra asteroidu.



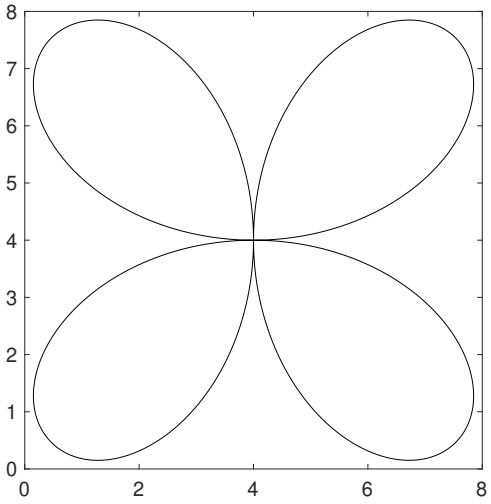
Obr. 15: Absolútne koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra asteroidy $|c_n|$.

5.4 Štvorlístok

Ďalšou krivkou, na ktorej výsledné spektrá sa pozrieme a budeme skúmať bude štvorlístok.

Jeho parametrizáciu sme získali hľadaním a dosádzaním správnych koeficientov do parametrizácií spomínaných v [12]:

$$\begin{aligned} x_1(u) &= 5\sin(2\cdot 2\pi u)\sin(2\pi u) \\ x_2(u) &= 5\sin(2\cdot 2\pi u)\cos(2\pi u) \end{aligned}$$



Obr. 16: Štvorlístok.

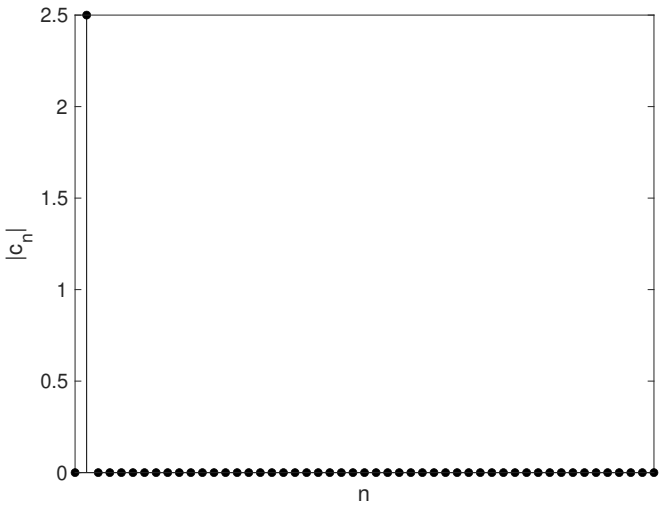
Aj v tomto prípade nám pri spektre parametrizácie vyskočil len jeden nenulový koeficient. Opäť to bol koeficient $\tilde{c}_1$, ktorého hodnota bola $2,5$. Na základe výsledkov z predošlých kriviek a dokázanom tvrdení, že toto spektrum závisí od parametrizácie, by sme mohli očakávať aj nenulový koeficient $\tilde{c}_2$.

V tomto prípade sa nám v zápise parametrizácie objavuje jeden vzorec, ktorý výsledok tohto spektra zmenil. Všimnúť si môžeme súčinový vzorec trigonometrických funkcií, ktorý má predpis:

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \tag{5}$$

Znamená to, že príde k súčtu a rozdielu $2\cdot 2\pi$ a 2π a výsledkom bude znázornený nenulový koeficient $\tilde{c}_1$. Opäť môžeme vidieť, že toto spektrum naozaj striktne závisí od parametrizácie.

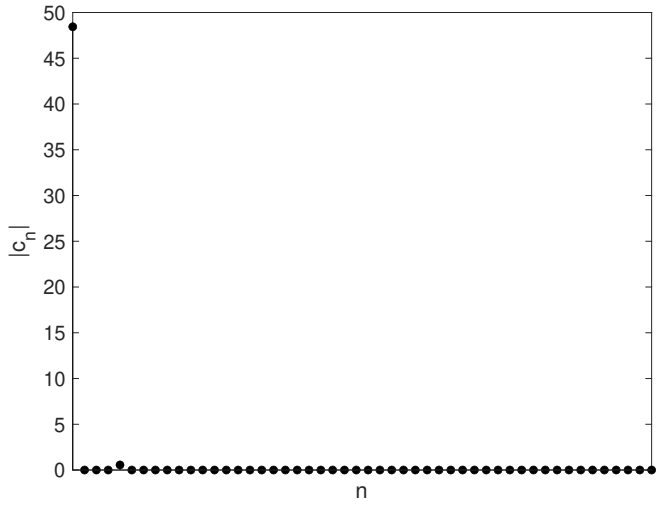
Nasledujúci graf zobrazuje prvých 50 koeficientov Fourierovho spektra parametrizácie štvorlístka.



Obr. 17: Absolútne koeficienty Fourierovho spektra parametrizácie štvorlístku $|\tilde{c}_n|$.

Pri dĺžkovom spektre nám okrem vystúpenej hodnoty $c_0 = 48,44$, ktorá určuje dĺžku krivky, vystúpil tesne nad nulu aj štvrtý koeficient. Vieme, a z priloženého obrázku môžeme vidieť, že štvorlístok má 4 „vrcholy", alebo teda lepšie povedané listy. Na grafe absolútnych koeficientov dĺžkového spektra štvorlístka môžeme vidieť, že nám na základe tejto vlastnosti jemne „vyskočil" koeficient c_4. Jeho hodnota bola $0,56$ a pre ostatné n sme opäť pozorovali len nulové hodnoty.

Na priloženom grafe je možné vidieť prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho dĺžkového spektra štvorlístka.



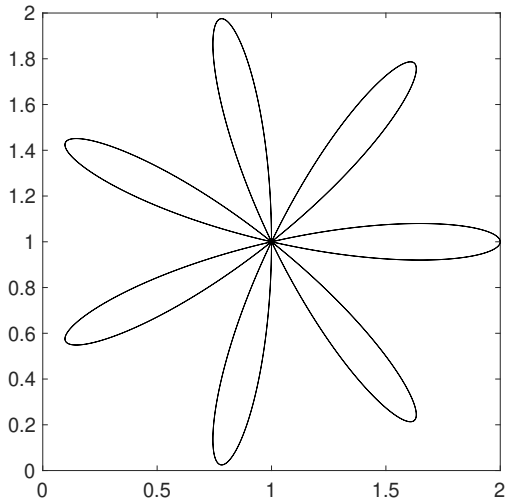
Obr. 18: Absolútne koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra štvorlístku $|c_n|$.

5.5 Kvet

Za ďalšiu krivku sme si zvolili kvet, ktorý pozostáva zo siedmich lupeňov.

Pri vykreslení tohto kvetu sme zvolili parametrizáciu inšpirovanú [12]. Jej zápis bol:

$$\begin{aligned} x_1(u) &= \cos(7 \cdot 2\pi u)\cos(2\pi u) \\ x_2(u) &= \cos(7 \cdot 2\pi u)\sin(2\pi u) \end{aligned}$$



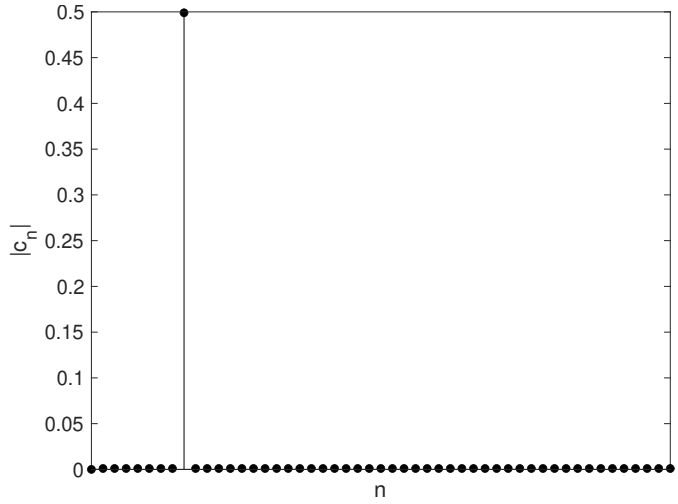
Obr. 19: Kvet.

Pri našom prvom type Fourierovho spektra vidíme, že nám neodhalilo frekvenciu,

ktorú sme očakávali zo zápisu našej parametrizácie. Namiesto koeficientu $\tilde{c}_7$ vidíme ako jediný nenulový koeficient $\tilde{c}_8$. Ak sa však bližšie pozrieme na zápis danej parametrizácie zistíme, prečo je tomu tak.

Skutočná frekvencia nebola opäť odhalená na základe súčinového vzorca trigonometrických funkcií 5. Pre náš prípad to znamená, že prišlo k sčítaniu a odčítaniu čísiel $7 * 2\pi u$ a $2\pi u$ a z toho dôvodu vidíme výrazný ôsmy koeficient. Je to dôsledok "nešťastnej" parametrizácie a navyše ako sme ukázali a dokázali v časti 3.1, náš výsledok je od nej striktne závislý.

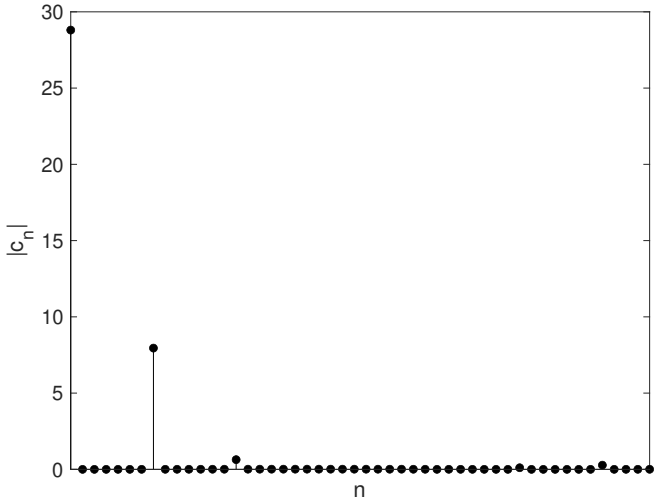
Na grafe je znázornených prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho spektra parametrizácie kvetu.



Obr. 20: Absolútne koeficienty Fourierovho spektra parametrizácie kvetu $|\tilde{c}_n|$.

Pri dĺžkovom spektre je už možné vidieť nenulový koeficient c_7 ale aj c_{14}. Opäť teda potvrdzujeme náš dôkaz skonštruovaný v časti 3.2, ktorý tvrdí, že koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra krivky nie sú od parametrizácie závislé. Preto ani v tomto prípade nenastáva žiadne „skreslenie" frekvencie ako pri Fourierovom spektre parametrizácie. Dĺžka kvetu, ktorú reprezentuje koeficient c_0 nám vyšla $28,8$.

Na grafe vidíme prvých 50 absolútnych koeficentov Fourierovho dĺžkového spektra kvetu.



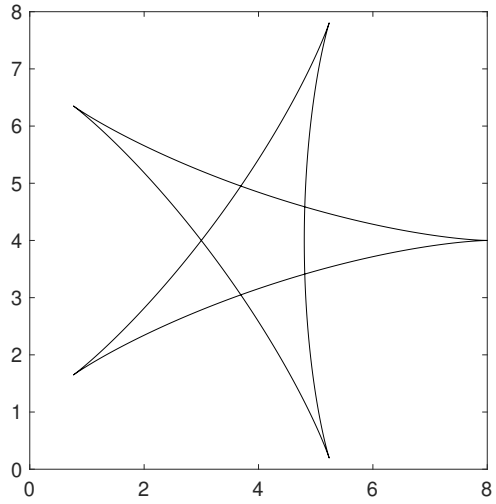
Obr. 21: Absolútne koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra kvetu $|c_n|$.

5.6 Hviezda

Poslednou nami vybranou krivkou bude päťcípa hviezda.

Jej parametrizáciu sme získali na základe príkladov v [7] a jej zápis je nasledovný :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,4\cos(2\cdot 2\pi u) + 1,6\cos\left(3\frac{2\cdot 2\pi u}{2}\right) \\ x_2 &= 2,4\sin(2\cdot 2\pi u) - 1,6\sin\left(3\frac{2\cdot 2\pi u}{2}\right) \end{aligned}$$

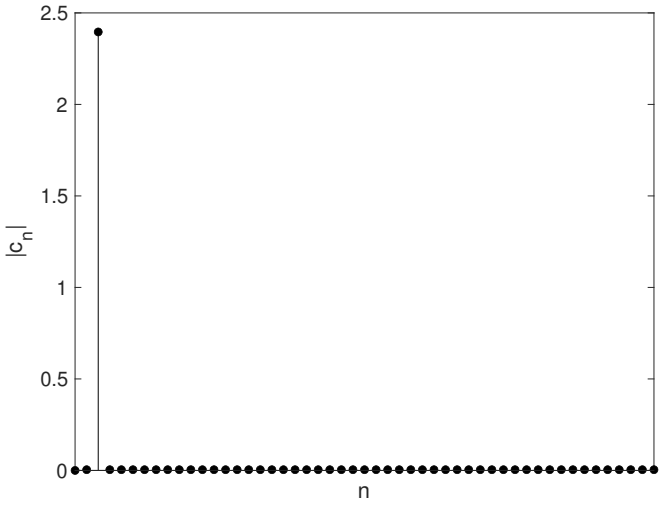


Obr. 22: Hviezda.

Pre Fourierovo spektrum parametrizácie hviezdy vidíme vystúpený koeficient $\tilde{c}_2$. Ako vieme, toto spektrum je závislé od zápisu danej parametrizácie. V jej zápise možno vidieť

dvojkovú frekvenciu, ktorá sa nám premietla aj do grafu absolútnych hodnôt výsledných koeficientov.

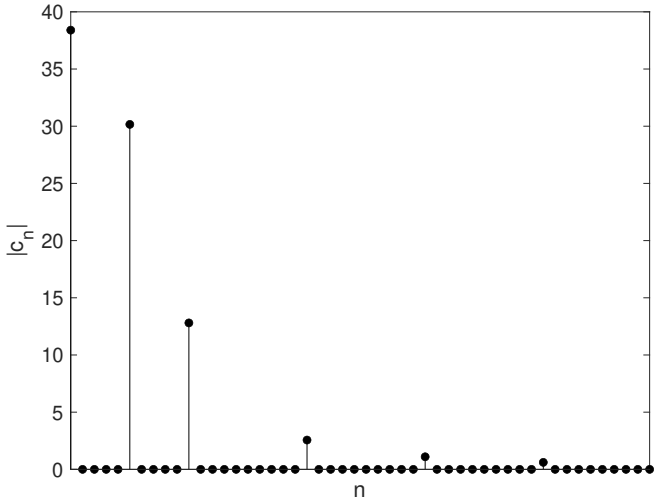
Znázornených máme prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho spektra parametrizácie hviezdy.



Obr. 23: Absolútne koeficienty Fourierovho spektra parametrizácie hviezdy $|\tilde{c}_n|$.

Dĺžkové spektrum hviezdy nám premietlo do grafu očakávaný výsledok. Koeficienty c_5, c_{10} a následne koeficienty s krokom 10 sú jediné nenulové. Všimnúť si môžeme aj exponenciálne klesanie absolútnych hodnôt koeficientov, ktoré sme pozorovali aj pri niektorých predošlých krivkách.

Na grafe je znázornených prvých 50 absolútnych koeficientov Fourierovho dĺžkového spektra parametrizácie hviezdy.



Obr. 24: Absolútne koeficienty Fourierovho dĺžkového spektra hviezdy $|c_n|$.

6 Jednoznačnosť spektra krivky

Nastal čas povenovať sa hlbšej analýze otázky, či spektrum krivky je naozaj jednoznačné a či je možné nájsť dve krivky s identickým Fourierovým spektrom. Sú teda dve možnosti, ktoré sa nám ponúkajú - buď existujú dve rôzne krivky, ktoré majú rovnaké spektrum alebo spektrum jednoznačne definuje krivku (až na posun v rovine). Na túto otázku prirodzene existuje odpoveď buď áno, alebo nie.

Pre jednoznačnosť dĺžkového spektra krivky nie je táto otázka ešte zodpovedaná a k dispozícii nie je ani žiadna ďalšia literatúra, ktorá by sa tejto problematike venovala. Pre spektrum parametrizácie krivky je všeobecne známe a aj dokázané, že jednoznačnosť platí. V nasledujúcej podkapitole si predstavíme dôkazy tejto vlastnosti, ktoré boli už v minulosti potvrdené a vyslovíme hypotézu, ako odpoveď na nezodpovedanú otázku jednoznačnosti pre Fourierovo dĺžkové spektrum krivky.

6.1 Jednoznačnosť spektra parametrizácie krivky

V tejto časti sa v podstate venujeme typom príkladov, ktoré sme počítali v 3.1. Bližšie nás bude opäť zaujímať spektrum. Tentokrát nebudeme skúmať vlastnosť v závislosti od parametrizácie, no zaujímať nás bude jednoznačnosť.

Pre jednoznačnosť Fourierovho spektra parametrizácie krivky existuje viacero tvrdení a teórií o tom, že Fourierove koeficienty danej funkcie sú naozaj jednoznačne dané. Jeden z článkov, kde sa spomína trigonometrická forma Fourierovho radu je [6], kde je podľa autora Fourierov rozvoj funkcie f jednoznačný.

Tvrdenie 6.1.1 *Ak reálna funkcia f, Riemannovsky integrovateľná na intervale $[-\pi, \pi]$, môže byť vyjadrená ako suma trigonometrického radu*

$$f(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu), \tag{6}$$

kde rozvoj $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + ...$ koeficientov absolútne konverguje, potom rad (6) rovnomerne konverguje na intervale. To isté platí aj pri rozvojoch, ktoré dostaneme násobením rovnice (6) $\cos nx$ a $\sin nx$. Výsledky integrovania sú pre koeficienty a_n a b_n ,

kde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nu)f(u)du \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nu)f(u)du, \end{aligned}$$

jednoznačné hodnoty pre ľubovoľné n. Teda, Fourierov rad funkcie f je jednoznačný.

Vidíme, že podľa prechádzajúceho tvrdenia, je Fourierov rad vždy jednoznačný a teda nie je možné nájsť dve rôzne krivky pre jedno spektrum. Toto tvrdenie pre funkcie potvrdzuje aj vlastnosť Fourierových radov z [1], ktoré hovorí:

Tvrdenie 6.1.2 *Ak dve funkcie majú rovnaký rozvoj Fourierovho radu, potom sú tieto funkcie totožné. Ak dva rozvoje Fourierovho radu sú rovnaké, potom sa musia zhodovať ich Fourierove koeficienty, teda*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n X_n(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\beta_n X_n(u),$$

pre každé $x \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, iba ak $\alpha_n = \beta_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

V článku [14], kde sa autorka venuje zodpovedaniu otázky v akom zmysle konverguje Fourierov rad funkcie k samotnej funkcii sa malá pozornosť venuje aj jednoznačnosti Fourierových koeficientov. Hovorí totiž, že ak je jej predpoklad pravdivý, mohli by sme usudzovať, že Fourierove koeficienty funkcie jednoznačne určujú funkciu.

Pred tvrdením podľa [14] si zadefinujeme Fourierov rad v podobe, s ktorú sa pracuje v tejto práci.

Definícia 6.1.1 *Ak je f integrovateľná funkcia daná na intervale [a,b] dĺžky L (b-a=L), potom n-tý Fourierov koeficient funkcie f je definovaný ako*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(u)e^{-2\pi inu/L}du, n \in \mathbb{Z}.$$

Môžeme vidieť, že je to identická definícia ako sme určili v 1.2, pre koeficient $\tilde{c_n}$.

Ak si zoberieme dve funkcie f a g s rovnakými Fourierovými koeficiantami, funkcie musia byť totožné. Toto tvrdenie môžeme naformulovať nasledovne, pričom vezmeme rozdiel $f - g$:

Tvrdenie 6.1.3 *Ak* $\hat{f}(n) = 0$ *pre všetky* $n \in \mathbb{Z}$ *potom* $f = 0$.

Možno si teraz niektorí položili otázku, ako je možné pomocou rozdielu $f - g$ naformulovať naše Tvrdenie 6.1.3. Dôvod je, že Fourierove rady sú linárne. Keď si vezmeme dve funkcie f a g, potom Fourierove koeficienty funkcie $h = f - g$ sú

$$\hat{h}(n) = \widehat{f - g}(n) = \hat{f}(n) - \hat{g}(n),$$

pre všetky $n \in \mathbb{Z}$
Teda tieto dve tvrdenia:

$$\text{(1) Pre všetky } h,\ \hat{h}(n) = 0 \text{ pre všetky } n \in \mathbb{Z} \text{ znamená } h = 0.$$

a

$$\text{(2) Pre všetky} f, g, \hat{f}(n) = \hat{g}(n) \text{ pre všetky } n \in \mathbb{Z} \text{ znamená } f = g.$$

sú ekvivalentné.

Prvý znamená druhý využitím (1) do $h = f - g$ a druhý znamená prvý využitím (2) do $f = h$, $g = 0$.

Ide o veľmi dôležité tvrdenie v teórii Fourierových radov, ktoré sa často označuje ako „veta jednoznačnosti". Inými slovami hovorí o tom, že funkcia je určená jej Fourierovými koeficientami.

6.2 Jednoznačnosť dĺžkového spektra krivky

Ako to je ale v prípade dĺžkového spektra krivky? Je možné aj v tomto prípade tvrdiť, že neexistujú dve rôzne spektrá pre jednu krivku?

Na základe našej vykonanej analýzy a štúdia, ktoré sme venovali Fourierovým radom a Fourierovmu spektru je dôveryhodné domnievať sa, že dĺžkové spektrum krivky jednoznačne určuje krivku. Dĺžkové spektrum krivky je menej známym a pre nás, až do písania tejto práce, nepoznaným typom spektra. Myslíme si, že ani v tomto prípade nie je možné nájsť dve rôzne spektrá, ktoré by definovali tú istú krivku. Rigorózny dôkaz však nemáme a nie sú k nemu známe ani žiadne literatúrne odkazy, ktoré by toto tvrdenie potvrdili. Alebo existuje nejaký protipríklad?

Záver

„Matematika porovnáva najrozmanitejšie javy a objavuje tajné analógie, ktoré ich spájajú. " [3] Rovnako ako sme dvere k tejto práci otvorili citátom od J.B. Josepha Fouriera, tak ich aj zatvárame. Veríme, že aj my sme v našej diplomovej práci siahli do hlbších a nepoznaných javov týkajúcich sa Fourierovho spektra krivky a rozšírili tak známe znalosti o nové analógie a tvrdenia. Cieľom bola podrobnejšia analýza Fourierových koeficientov pre uzavreté krivky v rovine. Taktiež sme sa sústredili na problém jednoznačnosti krivky s daným Fourierovým spektrom a sledovali sme jeho prípadné zmeny.

V prvej časti sme sa venovali známym formám Fourierovho radu, s ktorými sme sa v minulosti už stretli. S využitím primárne [10] a [4] sme si zápisy Fourierovho radu v trigonometrickej forme a Fourierovho radu v komplexnej forme riadne zadefinovali. Zdôraznili sme odvodenie Fourierovho radu v komplexnej forme z trigonometrickej formy. Ku koncu kapitoly sme si zadefinovali aj nový tvar Fourierovho radu, a to Fourierov rad pre krivku závislú od uhla, ktorý bol potrebný pri našich výpočtoch [9].

V ďalšej časti sme si veľmi stručne oprášili pojem parametrizácie [5], keďže pri spracovaní našich cieľov zohrávala dôležitú úlohu. Jej definíciu sme doplnili o názorné príklady fungovania parametrizácií jednotkového kruhu.

V tretej kapitole sme prešli k samotnej analýze príkladov. Skúmali sme Fourierovo spektrum parametrizácie krivky a Fourierovo dĺžkové spektrum krivky. Pre obidva prípady sme si vypočítali koeficienty pre rozdielne parametrizovaný jednotkový kruh a rozdielne parametrizovanú elipsu. Pre Fourierovo spektrum parametrizácie sme ukázali, že je závislé od parametrizácie. Túto vlastnosť sme interpretovali pomocou tvrdenia a dokázali ju. Opakom bolo Fourierovo dĺžkové spektrum krivky, kde sme po analýze príkladov dokázali, že toto spektrum je nezávislé od parametrizácie. Opäť sme náš výsledný poznatok zapísali do tvrdenia. Pri obidvoch postupoch sme naše výpočty podložili výpočtami z programového softvéru Matlab.

Ďalej sme skúmali závislosť spektra vzhľadom na afinné transformácie. V časti 4 sme si ukázali, že pri posune krivky v rovine sa Fourierovo spektrum vždy zachová. Naopak tomu bolo pri otočení krivky. Pre nové spektrum otočenej krivky v rovine sme zadefinovali tvrdenie, ktoré sme následne dokázali. Výsledkom bolo nové spektrum s rozdielnymi koeficientami od pôvodne zadanej krivky.

V takmer úplnom závere sme pracovali so šiestimi parametrizáciami kriviek (jednotkový kruh, elipsa, štvorlístok, asteroid, kvet a hviezda). Pomocou programovacích kódov v softéri Matlab sme vypočítali ich koeficienty pre Fourierovo spektrum parametrizácie a Fourierovo dĺžkové spektrum. Výsledky sme zobrazili pomocou absolútnych hodnôt na grafoch pre každú krivku. Venovali sme sa ich porovnaniu a analýze výsledkov.

Záverečná kapitola bola venovaná jednoznačnosti spektra krivky. Jednoznačnosť Fourierovho spektra parametrizácie krivky je všeobecne známa a aj dokázaná. Hlavnú pozornosť teda na seba pútalo Fourierovo dĺžkové spektrum krivky, kde otázka jednoznačnosti nie je zodpovedaná. Na základe analyzovaných príkladov, priložených dôkazov pre spektrum parametrizácie sme sformulovali hypotézu. Tá odráža náš názor a pohľad na to, či je možné nájsť dve krivky s identickým Fourierovým spektrom.

Za prínos našej práce považujeme podrobnú analýzu vlastností správania sa spektra pre Fourierovo spektrum parametrizácie krivky a Fourierovo dĺžkové spektrum krivky. Zadefinovaním a dokázaním platnosti skúmaných vlastností sme splnili hlavný zo zadaných cieľov. Venovali sme sa otázke jednoznačnosti spektra krivky, ktorá vo svete všeobecne nie je zodpovedaná a taktiež sme skúmali zmenu spektra pri afinných transformáciách. Zkonštruovali sme dva programovacie kódy na rátanie Fourierovho spektra parametrizácie a Fourierovho dĺžkového spektra. Na vybraných uzavretých krivkách sme previedli ich hlbšiu analýzu, grafické znázornenie a porovnanie výsledkov. Táto práca navyše obsahuje komplexné poznatky a definície o rátaní Fourierových koeficientov.

Pre autora boli prínosné všetky aspekty tejto diplomovej práce. Analýza, skúmanie vlastností, analytické a numerické rátanie príkladov boli celkovo veľmi zaujímavé a obohacujúce. Táto téma má určite ešte širší záber. Jej spracovaniu a rozširovaniu o nové poznatky by sa mohlo venovať ešte veľa študentov matematiky, ktorí majú v obľube matematickú analýzu.

Zoznam použitej literatúry

[1] Carnegie Mellon University, dostupné na internete (8.12.2021): https://www.math.cmu.edu/ rcristof/pdf/Teaching/Spring2017/Fourier%20series%20-%20properties.pdf

[2] Citáty: Jean Baptiste Joseph Fourier, dostupné na internete (12.1.2022): https://www.azquotes.com/quote/1255767

[3] Citáty: Jean Baptiste Joseph Fourier, dostupné na internete (13.1.2022): https://www.azquotes.com/quote/600136

[4] Duoandikoetxea, J.: *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, United States of America, 2011

[5] Liberty University of Lynchburg Virginia, dostupné na internete (28.10.2021): http://www.supermath.info/CalcChapter15p345_ 354.pdf

[6] Mathematics online encyclopedia, dostupné na internete (24.11.2021): https://planetmath.org/uniquenessoffourierexpansion

[7] Mathematica & Wolfram Language, dostupné na internete (15.3.2022): https://mathematica.stackexchange.com/questions/33947/how-to-get-intersection-values-from-a-parametric-graph

[8] Ševčovič, D., Trnovská, M.: *Application of the Enhanced Semidefinite Relaxation Method to Construction of the Optimal Anisotropy Function*, IAENG International Journal of Applied Mathematics 45(3), 227-234, 2015

[9] Ševčovič, D., Trnovská, M.: *Solution to the Inverse Wulff Problem by Means of the Enhanced Semidefinite Relaxation Method*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems 23(3), 263-285, 2015

[10] Tolstov, G.: *Fourier series*, Dover Publications, Inc. , New York, 1976

[11] University of Cambridge- Department of Engineering, dostupné na internete (11.11.2021): http://mi.eng.cam.ac.uk/ rwp/Maths/vid09/l7notes.pdf

[12] University of Houston, Department of Mathematics, dostupné na internete (14.3.2022): https://www.math.uh.edu/ jiwenhe/Math1432/lectures/lecture14 _ handout.pdf

[13] University of Saskatchewan, Department of Mathematics and Statistics, dostupné na internete: https://math.usask.ca/maclean/124/Parametric_Equations.pdf

[14] Xue, S.: *Convergence of fourier series*, research article, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, dostupné na internete (8.12.2021): http://math.uchicago.edu/ may/REU2017/REUPapers/Xue.pdf

7 Príloha A

```
%FOURIEROVO SPEKTRUM PARAMETRIZACIE KRIVKY
% fourierove koeficienty z trigonomickeho tvaru radu pre
    jednotkovy kruh a jeho dve parametrizacie
syms n x
T=1;
for n=1:5
fun1= @(x)cos(2*pi*x);
fun2=@(x)cos(2*pi*x).*cos((2*n*x*pi)/T);
fun3=@(x)cos(2*pi*x).*sin((2*n*x*pi)/T);

a0=(1/T)*integral(fun1,0,1)
an=(2/T)*integral(fun2,0,1)
bn=(2/T)*integral(fun3,0,1)

fun11= @(x)cos(2*pi*x.^2);
fun22=@(x)cos(2*pi*x.^2).*cos((2*n*x*pi)/T);
fun33=@(x)cos(2*pi*x.^2).*sin((2*n*x*pi)/T);

a00=(1/T)*integral(fun11,0,1)
ann=(2/T)*integral(fun22,0,1)
bnn=(2/T)*integral(fun33,0,1)
end

%fourierove koeficienty z komplexneho tvaru radu pre jednotkovy
    kruh a jeho dve parametrizacie
syms n x
for n=0:5
fun=@(x)exp(i*2*pi*x).*exp(-i*2*pi*n*x);
cn=integral(fun,0,1)

```

```
29 fun1=@(x)exp(i*2*pi*x.^2).*exp(-i*2*pi*n*x);
30 ccn=integral(fun1,0,1)
31 end
32
33 % fourierove koeficienty z trigonomickeho tvaru radu pre elipsu
       a jej dve parametrizacie
34 syms n x
35 T=1;
36 a=2;
37 for n=0:5
38
39 fun1=@(x)a*cos(2*pi*x);
40 fun2=@(x)a*cos(2*pi*x).*cos((2*n*x*pi)/T);
41 fun3=@(x)a*cos(2*pi*x).*sin((2*n*x*pi)/T);
42
43 a0=(1/T)*integral(fun1,0,1)
44 an=(2/T)*integral(fun2,0,1)
45 bn=(2/T)*integral(fun3,0,1)
46
47 fun11=@(x)a*cos(2*pi*x.^2);
48 fun22=@(x)a*cos(2*pi*x.^2).*cos((2*n*x*pi)/T);
49 fun33=@(x)a*cos(2*pi*x.^2).*sin((2*n*x*pi)/T);
50
51 a00=(1/T)*integral(fun11,0,1)
52 ann=(2/T)*integral(fun22,0,1)
53 bnn=(2/T)*integral(fun33,0,1)
54 end
55
56 %FOURIEROVE DLZKOVE SPEKTRUM KRIVKY
57 %fourierove koeficienty  pre jednotkovy kruh a jeho dve
       parametrizacie
```

```
58 syms u n
59 for n=0:4
60
61 fun=@(u)((-2*pi*sin(2*pi*u)-2*i*pi*cos(2*pi*u))./sqrt((-2*pi*sin
       (2*pi*u)).^2+(2*pi*cos(2*pi*u)).^2)).^n.*sqrt((-2*pi*sin(2*pi
       *u)).^2+(2*pi*cos(2*pi*u)).^2)
62
63 c=integral(fun,0,1)
64
65 funn=@(u)((-4*pi*u.*sin(2*pi*u.^2)-4*i*u*pi.*cos(2*pi*u.^2))./
       sqrt((-4*pi*u.*sin(2*pi*u.^2)).^2+(4*pi*u.*cos(2*pi*u.^2))
       .^2)).^n.*sqrt((-4*pi*u.*sin(2*pi*u.^2)).^2+(4*pi*u.*cos(2*pi
       *u.^2)).^2)
66
67 cc=integral(funn,0,1)
68 end
69 %fourierove koeficienty  pre elipsu a jej dve parametrizacie
70 syms u a b n
71 a=2;
72 b=4;
73 for n=0:4
74
75 fun=@(u)((-a*2*pi*sin(2*pi*u)-i*b*2*pi*cos(2*pi*u))./sqrt((-a*2*
       pi*sin(2*pi*u)).^2+(b*2*pi*cos(2*pi*u)).^2)).^n.*(sqrt((-a*2*
       pi*sin(2*pi*u)).^2+(b*2*pi*cos(2*pi*u)).^2))
76
77 c=integral(fun,0,1)
78
79 funn=@(u)((-a*4*pi*u.*sin(2*pi*u.^2)-i*b*4*pi*u.*cos(2*pi*u.^2))
       ./sqrt((-a*4*pi*u.*sin(2*pi*u.^2)).^2+(b*4*pi*u.*cos(2*pi*u
       .^2)).^2)).^n.*(sqrt((-a*4*pi*u.*sin(2*pi*u.^2)).^2+(b*4*pi*u
```

```
    .*cos(2*pi*u.^2)).^2));

80

81 cc=integral(funn,0,1)
82 end
```

8 Príloha B

```
%UNIVERZALNE KODY PRE PARAMETRIZOVANE KRIVKY

%FOURIEROVO DLZKOVE SPEKTRUM KRIVKY

%Pararametrizacie krviek a vykreslenie ich grafov

%Jednotkovy kruh
u=linspace(0,1,1000) % 1000 ekvidistancnych bodov
x=cos(2*pi*u);
y=sin(2*pi*u);
figure("DefaultAxesFontSize", 15)
plot(1+x,1+y,'black') %posun zaciatku suradnicove osi na [0,0]
pbaspect([1 1 1])

%Elipsa
u=linspace(0,1,1000) %1000 ekvidistancnych bodov
x=2*cos(2*pi*u);
y=4*sin(2*pi*u);
figure("DefaultAxesFontSize", 15)
plot(2+x,4+y,'black') %posun zaciatku suradnicove osi na [0,0]
pbaspect([1 2 1])


%Stvorlistok
u=linspace(0,1,1000) %1000 ekvidistancnych bodov
x=5.*sin(2*2*pi.*u).*sin(2*pi*u);
y=5.*sin(2*2*pi.*u).*cos(2*pi*u);
figure("DefaultAxesFontSize", 15)
plot(4+x,4+y,'black') %posun zaciatku suradnicove osi na [0,0]
pbaspect([1 1 1])
```

```
31
32 %Asteroida
33 u=linspace(0,1,1000); %1000 ekvidistancnych bodov
34 x = cos(2*pi*u).^3;
35 y = sin(2*pi*u).^3;
36 figure("DefaultAxesFontSize", 15)
37 plot(1+x,1+y,'black') %posun zaciatku suradnicove osi na [0,0]
38 pbaspect([1 1 1])
39
40 %Kvet
41 u=linspace(0,1,1000) %1000 ekvidistancnych bodov
42 x = cos(7*2*pi*u).*cos(2*pi*u);
43 y =cos(7*2*pi*u).*sin(2*pi*u);
44 figure("DefaultAxesFontSize", 15)
45 plot(1+x,1+y,'black') %posun zaciatku suradnicove osi na [0,0]
46 pbaspect([1 1 1])
47
48 %Hviezda
49 u=linspace(0,1,1000); %1000 ekvidistancnych bodov
50 x = 2.4.*cos(4*pi*u)+1.6.*cos(3*((4*pi*u)./2));
51 y = 2.4.*sin(4*pi*u)-1.6.*sin(3*((4*pi*u)./2));
52 figure("DefaultAxesFontSize", 15)
53 plot(4+x,4+y,'black') %posun zaciatku suradnicove osi na [0,0]
54 pbaspect([1 1 1])
55
56 %Univerzalny kod na ratanie koeficientov Fourierovho dlzkoveho
       spektra krivky
57
58 %Parametre potrebne pre ratanie Fourierovych koeficientov
59 point=[x(:) ';y(:) '];
60 K=length(point) % dlzka K=1000
```

```
61
62 % tanget vector a ds pre kazdy bod
63
64 ds=[norm(point(:,2)-point(:,K))/2]; %podla clanku ds (zaciatok)
65 t=[(point(:,2)-point(:,K))/norm(point(:,2)-point(:,K))]; %tanget
       vector- aproximovany (zaciatok)
66
67 for a=2:K-1 %prvy a posledny mame, tak 2:K-1
68       ds=[ds, norm(point(:,a+1)-point(:,a-1))/2 ];
69       t=[t, (point(:,a+1)-point(:,a-1))/norm(point(:,a+1)-point
             (:,a-1)) ];
70 end;
71
72 ds=[ds, norm(point(:,1)-point(:,K-1))/2 ]; %podla clanku ds (
     koniec)
73 t=[t, (point(:,1)-point(:,K-1))/norm(point(:,1)-point(:,K-1)) ];
       %tanget vector-aproximovany (koniec)
74
75
76 %Pocitanie Fourierovych koeficientov
77 n=50;
78 c=zeros(n,1); %50*1 stlpcovy vektor, kde sa budu ukladat
     jednotlive koeficienty
79
80 for k=1:n-1 %mocnitel t, teda poradove cislo Fourierovho
     koeficientu
81       c(k+1)=0;
82 for a=1:K
83       c(k+1)=c(k+1) + ds(a)*(t(1,a) - i.*t(2,a) )^k; %suma pre c_k
             z clanku
84 end
```

```
85 end
86
87
88 LGamma = 0;
89 for a=1:K
90     LGamma=LGamma+ ds(a);
91 end
92
93 c(1)=LGamma %vysledne koeficienty
94 abs_c=abs(c);  %absolutne hodnoty koeficientov
95 figure("DefaultAxesFontSize", 15)
96 stem(abs_c,'filled','black')
97 xlim([1,n]);
98 set(gca,'xtick',[])
99 ylabel("|c_n|")
100 xlabel("n")
101
102 %FOURIEROVO SPEKTRUM PARAMETRIZACIE KRIVKY
103
104 %Vypocet pre koeficient c_0
105 fun=@(u)(x(u)+i*y(u));
106 c_0=integral(fun,0,1);
107 c_0
108
109 %Pocitanie Fourierovych koeficientov
110 K=1000;
111 n=50;
112 c=zeros(n,1);
113 b=zeros(K);
114
115 for k=1:n
```

```
116     for a=1:K
117       b(a+1)=b(a)+exp(-i*k*2*pi*(a/K))*(x(u)+i*y(u));
118     end
119      c(k)=1/K*b(K);
120 end
121 c
122 abs_c=abs(c); %absolutne hodnoty koeficientov
123 figure("DefaultAxesFontSize", 15)
124 stem(abs_c,'filled','black')
125 xlim([0,n]);
126 set(gca,'xtick',[])
127 ylabel("|c_n|")
128 xlabel("n")
129 hold on
130 plot(c_0,'o-','MarkerSize',6,'MarkerEdgeColor','black', '
      MarkerFaceColor',"black") %zobrazenie c_0
131 hold off
```