UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



# KONVERGENČNÝ MODEL SO ZÁPORNÝM EURIBOROM A NEZÁPORNÝMI DOMÁCIMI ÚROKOVÝMI MIERAMI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

**2022** **Bc. Jozef Alexander PÁLL**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# Konvergenčný model so záporným euriborom a nezápornými domácimi úrokovými mierami

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie |
| Študijný odbor: | Matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| Vedúci práce: | doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD. |

Bratislava 2022 **Bc. Jozef Alexander PÁLL**






Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Jozef Alexander Páll
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
**Študijný odbor:** matematika
**Typ záverečnej práce:** diplomová
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Konvergenčný model so záporným Euriborom a nezápornými domácimi úrokovými mierami
*Convergence model with negative Euribor and nonnegative domestic interest rates*

**Anotácia:** Konvergenčné modely úrokových mier popisujú úrokové miery v štáte pred jeho vstupom do menovej únie. V súčasnosti môžeme pozorovať záporné úroky Euriboru. Vo viacerých štátoch, pre ktoré by sme mohli chcieť použiť konvergenčný model, sú však úrokové miery nízke, ale nie záporné. V diplomovej práci sa modeluje táto situácia. Model pre európske úrokové miery umožňuje dosiahnutie záporných hodnôt. Domáce úrokové miery sú určitým spôsobom priťahované k európskym, je však zaručená ich nezápornosť. Pre navrhnutý model sa študuje oceňovanie dlhopisov (pomocou presného riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice, resp. analytickej aproximácie s odvodeným rádom presnosti) a kalibrácia modelu použitím reálnych dát.

**Vedúci:** doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

**Dátum zadania:** 13.01.2021

**Dátum schválenia:** 17.01.2021

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

**Poďakovanie** Touto cestou by som sa rád poďakoval vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Mgr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za všetky cenné rady a pripomienky k písaniu záverečnej práce, ako aj za všetok poskytnutý materiál a veľkú dávku trpezlivosti. Taktiež ďakujem svojej rodine za podporu počas celého štúdia.

# Abstrakt v štátnom jazyku

PÁLL, Jozef Alexander: Konvergenčný model so záporným euriborom a nezápornými domácimi úrokovými mierami [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2022, 70 s.

V diplomovej práci je navrhnutý konvergenčný model úrokových mier pripúšťajúci zápornú európsku zložku a nezáporné domáce úrokové miery. Modelujú sa tu krátkodobé úrokové miery, pričom európska short rate je modelovaná ako súčet dvoch stochastických faktorov, z ktorých jeden je opísaný nezáporným procesom typu Cox-Ingersoll-Ross a druhý má tvar Vašíčkovho procesu. Tiež sa predpokladá, že domáca short rate je istým spôsobom priťahovaná k nezápornej európskej zložke. Pre jednoduchosť sa uvažuje nekorelovanosť medzi všetkými faktormi.

Pre navrhnutý model sa ďalej študuje oceňovanie dlhopisov pomocou presného riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc a skúmajú sa aj niektoré jeho limitné vlastnosti. Následne sa navrhuje algoritmus kalibrácie modelu využitím predpisu pre dvojfaktorového Vašíčka, ktorého možné použitie pri našom modeli sa ukázalo v [2]. V závere bol tento postup použitý na simulované aj reálne dáta.

**Kľúčové slová:** krátkodobá úroková miera, konvergenčný model, dvojfaktorové modely úrokových mier, cena dlhopisu, aproximácia, Euribor, CIR model, Vašíčkov model

# Abstract

PÁLL, Jozef Alexander: Convergence model with negative Euribor and nonnegative domestic interest rates [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2022, 70 p.

In our thesis we propose a convergence model of interest rates allowing a negative European element and non-negative domestic interest rates. We are interested in modelling underlying short rate, in which the European element is defined as sum of two stochastic factors. One of them is described by a non-negative Cox-Ingersoll-Ross process and the other takes the form of Vasicek process. It is also assumed that the domestic short rate is in a way reverting to a European non-negative factor. For simplicity, we consider a case of zero correlation between factors.

For the given model, we study bond prices, which are being obtained from an exact solution to a parabolic partial differential equations, and we examine some of its limit properties. In the next part, we suggest a calibration algorithm including procedure already employed for the Vasicek model. Its possible use for our model was already shown in [2]. Finally, we apply the proposed method on both generated and real market data.

**Keywords:** short rate, convergence model, two-factor models of interest rate, bond price, aproximation, Euribor, CIR type model, Vasicek type model

# Obsah

**Úvod** **8**

**1 Krátky teoretický úvod do modelovania úrokových mier** **10**

1.1 Jednofaktorové modely . . . . . 10

1.2 Viacfaktorové modely . . . . . 13

1.2.1 Úvod do oceňovania dlhopisov v short rate modeloch . . . . . 13

1.2.2 Konvergenčný model Corzovej a Schwarza . . . . . 15

**2 Navrhnutý konvergenčný model** **16**

2.1 Zostavenie modelu . . . . . 17

2.1.1 Simulácia krátkodobej úrokovej miery . . . . . 18

2.2 Oceňovanie dlhopisov v navrhnutom konvergenčnom modeli . . . . . 19

2.2.1 Európske dlhopisy . . . . . 19

2.2.2 Limita časovej štruktúry úrokových mier pre európske dlhopisy . . . 25

2.2.3 Domáce dlhopisy . . . . . 26

2.2.4 Limita časovej štruktúry úrokových mier pre domáce dlhopisy . . . 28

2.3 Pohľad na výnosové krivky a niektoré ich vlastnosti . . . . . 29

2.3.1 Možné tvary výnosových kriviek . . . . . 29

2.3.2 Analýza domácich parametrov . . . . . 31

**3 Kalibrácia modelu** **41**

3.1 Algoritmus kalibrácie navrhnutého konvergenčného modelu . . . . . 43

3.1.1 Postup pre odhad európskych výnosových kriviek . . . . . 43

3.1.2 Postup pre odhad domácich výnosových kriviek . . . . . 49

3.2 Testovanie algoritmu na simulovaných short rate . . . . . 52

3.2.1 Kalibrácia európskeho submodelu na simulovaných dátach . . . . . 52

3.2.2 Kalibrácia domáceho submodelu na simulovaných dátach . . . . . 58

3.3 Reálne dáta . . . . . 61

**Záver** **67**

**Zoznam použitej literatúry** **68**

# Úvod

V posledných rokoch je kladený čoraz väčší dôraz na činnosť riadenia finančných rizík a v dnešnej dobe ide o nevyhnutnú súčasť adekvátnej dennej aktivity finančných inštitúcií. Jednou z kľúčových oblastí, v ktorej inštitúcie znášajú pomerne vysoké riziko a ktorej je aktuálne venovaná značná pozornosť, je riadenie rizika úrokových mier. Táto pozornosť je zapríčinená najmä vážnou hrozbou, ktorú im aktuálne nízka, až negatívna hodnota úrokovej miery spôsobuje.

Modely úrokových mier sú často formulované pomocou stochastických diferenciálnych rovníc opisujúcich vývoj tzv. okamžitej úrokovej miery, tiež nazývanej ako short rate. Ide o teoretickú veličinu, ktorá opisuje úrokovú mieru na nekonečne krátky čas. V praxi sa nahrádza úrokovou mierou zvyčajne na 1 alebo 3 mesiace. Short rate modely sú používané na oceňovanie rôznych derivátov úrokových mier, ako sú napríklad hypotéky, rôzne úverové nástroje a mnohé ďalšie deriváty, ktoré sú citlivé na zmeny v úrokovej miere. Short rate tak predstavuje teoretický začiatok výnosovej krivky daného derivátu. Je preto dôležité spraviť čo najlepší odhad správania tejto teoretickej veličiny a podchytiť tak vývoj trhových hodnôt.

Jednofaktorové modely sú dané iba jednou stochastickou diferenciálnou rovnicou, t.j. evolúcia úrokovej miery tu závisí len od jediného náhodného faktora. My sa v našej práci sústredíme najmä na viacfaktorové modely úrokových mier, kde už máme týchto náhodných zložiek viacero. Konkrétne v práci navrhujeme konvergenčný model úrokových mier popisujúci úrokové miery v istom štáte pred jeho vstupom do menovej únie. Využívame pri tom fakt, že sledovaná európska medzibanková úroková miera (Euribor) je v dôsledku neštandardných menových operácií v záporných hodnotách a naopak štáty, na ktoré by sme tento model chceli aplikovať, majú síce úrokové miery nízke, no ostávajú nezáporné. Zároveň je domáca úroková miera určitým spôsobom priťahovaná k tej európskej. Pre jednoduchosť modelu predpokladáme nekorelovanosť použitých náhodných faktorov.

Práca je členená do troch kapitol. Prvá sa venuje krátkemu teoretickému základu modelovania úrokových mier vrátane oceňovania dlhopisov. V druhej kapitole sa už venujeme hlavnému cieľu práce, t.j. zostaveniu vhodného konvergenčného modelu. Následne pomocou presného riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (resp. analytickej aproximácie s odvodeným rádom presnosti) sa oceňujú aj príslušné dlhopisy. Na odvodených dlhopiso-

vých výnosoch potom študujeme aj niektoré ich limitné vlastnosti vzhľadom na parametre nášho modelu. Ďalej je navrhnutý vhodný kalibračný algoritmus vychádzajúci najmä z poznatkov zahrnutých v [2] a [1]. V závere diplomovej práce je tento postup aplikovaný tak na simulovaných, ako aj reálnych dátach.

# 1 Krátky teoretický úvod do modelovania úrokových mier

Ako už bolo v úvode spomenuté, modely krátkodobej úrokovej miery sú formulované v tvare jedinej stochastickej diferenciálnej rovnice popisujúcej vývoj tzv. okamžitej úrokovej miery, ktorú v práci budeme ďalej označovať aj ako short rate alebo krátkodobú úrokovú mieru. Ide vlastne len o teoretickú veličinu, ktorá na finančnom trhu v určitom zmysle opisuje vývoj dlhodobých úrokových mier, resp. dlhopisových výnosov s maturitou na nekonečne krátky čas. Má tak aj svoj ekonomický význam. V praxi je short rate modelovaná pomocou jednofaktorových alebo viacfaktorových modelov. Jednofaktorové modely short rate sa vyznačujú tým, že obsahujú jediný Wienerov proces [21], t. j. jeden zdroj náhodnosti. V prípade viacfaktorových modelov opisujú modelované krátkodobé úrokové miery hneď niekoľko stochastických faktorov, pričom ide o niečo komplexnejšie prepisy, ktoré dokážu zachytiť aj zložitejšie situácie. V tejto kapitole si v krátkosti priblížime niektoré základné short rate modely, ktoré nájdu využitie aj v ďalšom postupe práce a priblížime si aj spôsob oceňovania dlhopisov.

## 1.1 Jednofaktorové modely

Všeobecný tvar jednofaktorového modelu zapíšeme ako

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dw, \tag{1.1}$$

kde $w$ označuje spomínaný Wienerov proces a $dw$ je jeho prírastok, podobne ako $dt$, ktoré označuje zmenu v pozorovanej časovej jednotke. Ďalej $\mu(r,t)$ opisuje výchylku stochastického procesu, často tiež nazývaného ako drift a $\sigma(r,t)$ je volatilita náhodného procesu, teda istý pohyb alebo fluktuácia sledovaného procesu v okolí jeho driftu [21]. Klasické jednofaktorové modely úrokových mier majú tú vlastnosť, že tieto funkcie závisia iba od krátkodobej úrokovej miery $r$ a nie od času $t$, ktorý sa uvádza vo všeobecnom tvare (1.1). Ďalej preto používame aj predpis

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dw. \tag{1.2}$$

V tom prípade sa cena dlhopisu dá zapísať tak, že závisí od krátkodobej úrokovej miery a od času do splatnosti $\tau$, teda

$$P = P(r, \tau); \quad \tau = T - t.$$

To má za dôsledok, že priebeh výnosovej krivky je jednoznačne určený jej začiatkom, čo ale pri reálnych dátach nemusí byť vôbec pravda. Priebeh a tvar samotnej krivky sa v dlhšom časovom horizonte môže meniť, čím môže dôjsť k istej nepresnosti pri oceňovaní derivátov úrokovej miery a na trhu sa tak otvára možnosť vzniku arbitrážnej príležitosti [20].

Volatilita a drift stochastického procesu sú pojmy, ktoré charakterizujú model krátkodobej úrokovej miery. Nás budú zaujímať najmä tzv. mean-reversion, resp. rovnovážne modely úrokových mier, ktoré sa vyznačujú priťahovaním modelovanej short rate k jej dlhodobo rovnovážnej hodnote (strednej hodnote). Túto hodnotu budeme ďalej označovať pod parametrom $\theta$. Ďalšími uvádzanými parametrami je rýchlosť konvergencie k spomínanej limitnej hodnote označená ako $\kappa$, ako aj parameter $\gamma$ určujúci efekt volatility $\sigma(r)$. Tento parameter vystupuje v jej exponente [21]. Príkladmi rovnovážnych modelov, s ktorými sa stretávame najčastejšie, sú Vašíčkov model [22], Cox-Ingersoll-Ross [7] a ich zovšeobecnený tvar v modeli Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders [5].

### Vašíčkov model

Jeden z najstarších (r. 1977) a najpoužívanejších procesov na modelovanie krátkodobej úrokovej miery je model od českého matematika Oldřicha Vašíčka, ktorý vyzerá následovne:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw. \tag{1.3}$$

Ide vlastne o Ornstein-Uhlenbeckov proces pri modelovaní úrokovej miery [20]. Predpis (1.3) platí pre $\kappa, \sigma > 0, \theta \geq 0$. Je to jednoduchý rovnovážny model krátkodobej úrokovej miery s konštantnou volatilitou $\sigma$. Jeho nevýhodou je to, že volatilita tu nezávisí od modelovanej hodnoty short rate. Kedysi bola jeho veľkým mínusom aj prípustnosť záporných úrokových mier, čo už ale dnes samozrejme neplatí, kedy na trhu ide o celkom bežný jav - naopak môže ísť práve o jeho výhodu aj v kombinácii s inými modelmi vo viacfaktorových modeloch, napr. pri modelovaní súčtu dvoch faktorov v [2].

### Cox-Ingersoll-Ross model

Ďalší veľmi často používaný model short rate z roku 1985, ktorého výhodou narozdiel Vašíčka je neprípustnosť zápornej úrokovej miery, ktorá tu nie je možná a model tak dokáže opísať situácie, kedy sa predpokladá nezápornosť short rate. Autori v [7] svoj model opísali ako

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw, \tag{1.4}$$

ktorý tiež budeme označovať ako CIR model. Pri poklese úrokovej miery v CIR modeli sa stále znižuje aj jeho volatilita, vďaka čomu nemôže byť prekročená nulová hranica short rate a je tak zabezpečená jej nezápornosť. V situácii nulovej hodnoty $r = 0$ platí: $dr = \kappa\theta dt > 0$. Zo stochastickej diferenciálnej rovnice $\ln(r)$ sa využitím Itóovej lemy [13], [20] dá tiež ľahko ukázať, že ak $2\kappa\theta > 0$, tak aj dosiahnutie $r = 0$ má nulovú pravdepodobnosť.

### Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model

Posledný nami opísaný rovnovážny jednofaktorový model označujeme v skratke CKLS. Model bol navrhnutý v roku 1992 a jeho predpis vyzerá následovne:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^{\gamma}dw. \tag{1.5}$$

Ide o zovšeobecnenie predchádzajúcich dvoch prípadov. Pri CIR a Vašíčkovi sa totiž ukázalo, že hodnota $\gamma = 0$ alebo $\gamma = \frac{1}{2}$ nie je stabilná a nereaguje najlepšie na zmeny v úrokovej miere. V [5] je vysvetlené, že optimálna hodnota $\gamma$ by bola na úrovni $1,5$. Veľkou nevýhodou je to, že pri inom ako CIR alebo Vašíčkovom tvare tu nevieme nájsť analytické vyjadrenia pre ceny úrokových derivátov. Ďalšie príklady považované za špeciálne prípady CKLS modelu môžeme vidieť aj v tabuľke 1 prebratej z [3], kde sa v 4. kapitole dočítame viac aj o iných konkrétnych príkladoch short rate modelov.

| Model | Predpis modelu |
|---|---|
| Merton | $dr = \alpha dt \sigma dw$ |
| Dothan | $dr = \sigma r dw$ |
| Geometrický Brownov pohyb | $dr = \beta r dt + \sigma r dw$ |
| Cox-Ingersoll-Ross (1980) | $\mathrm{dr} = \sigma r^{3/2} dw$ |
| Brennan-Schwarz | $dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r dw$ |

**Tabuľka 1:** Ďalšie špeciálne prípady CKLS (1.5) modelu.

## 1.2 Viacfaktorové modely

Pri práci s reálnymi dátami nemusí byť výnosová krivka presne určená jej potenciálnym začiatkom a jednofaktorové modely tieto situácie nemusia zvládať, čím tak dochádza k nepresným odhadom teoretickej short rate. Kombinovaním viacerých jednofaktorových procesov môžeme vedieť okrem tých jednoduchých situácií, lepšie opísať aj tie zložitejšie. V daných modelových predpisoch tak vystupuje okrem viacero stochastických faktorov, aj vyšší počet parametrov. Ich odhad je tak numericky síce o niečo náročnejší, no vieme nimi opísať aj pomerne nepravidelné tvary výnosových kriviek. Napríklad Vašíčkov a CIR jednofaktorové modely neumožnia prvotný pokles a následný nárast dlhodobej úrokovej miery, pričom u viacfaktorových to už pri vhodnom predpise je možné [20]. Rôzne príklady týchto predpisov nájdeme napr. v [21].

### 1.2.1 Úvod do oceňovania dlhopisov v short rate modeloch

Už sme si vysvetlili, čo sa myslí pod krátkodobou úrokovou mierou z pohľadu výnosov na dlhopisovom trhu. Zaujíma nás ale, ako by sme dostali aj iné úrokové výnosy ako tie s nekonečne krátkou maturitou. Na to nám slúžia práve spomínané short rate modely, pomocou ktorých vieme pre ceny daných derivátov odvodiť aj príslušné predpisy na ich analytické alebo aspoň numerické riešenie a z nich si už ľahko vyjadríme aj hľadané dlhodobé úrokové miery. Tieto cenové vyjadrenie vieme odvodiť pomocou bezkupónového dlhopisu s jednotkovou cenou, ktorý v čase maturity pre $t = T$ vypláca jednu peňažnú jednotku. Ide teda o bezkupónový, diskontný dlhopis. Ten ocenením v čase $t$ ako $P(t, T)$ a

k nemu dostávame aj pridružené vyjadrenie pre výnos, resp. hodnotu dlhodobej úrokovej miery $R(t,T)$ [16]. Pri spojitom úročení tak máme

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad \text{resp.} \quad R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{1.6}$$

Ceny dlhopisov nájdeme ako riešenie parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice (ďalej ozn. PDR), ktorej výsledná podoba vzhľadom na jej všeobecný tvar tak pre jednofaktorové, ako aj dvojfaktorové modely odpovedá práve typu zvoleného modelu krátkodobej úrokovej miery a tiež je tu zakomponovaná aj ďalšia veličina, ktorú budeme označovať pod premennou $\lambda(r,t)$. Tá sa pri odvodení PDR pre cenu dlhopisu objaví v mieste, kde sa ukáže, že isté množstvo predstavujúce nárast v očakávanom výnose pre jedinú jednotku rizika nezávisí od celkovej doby do splatnosti derivátu. Aj preto sa zvykne označovať ako trhová miera rizika. Tá nám poskytuje aj možnosť prechodu parametrov z reálnej do rizikovo neutrálnej miery prostredníctvom Girsanovovej vety. Pre bližší matematický pohľad na zmenu miery, ako aj vlastnosti trhovej miery rizika v jednotlivých short rate modeloch, odporúčame napr. [16] a pre detailnejšiu analýzu oceňovania dlhopisov môžeme nahliadnuť do [3] alebo [13].

Pri oceňovaní dlhopisov, ako jedných z najpoužívanejších derivátov úrokovej miery, tak pri využití vzťahu pre diskontný, bezkupónový dlhopis s $P(r,T) = 1$ a $P(r,0) = 1$ $\forall r$, dostávame všeobecný tvar parabolickej PDR pre cenu dlhopisu vzhľadom na dobu do splatnosti $\tau = T - t$ v jednofaktorových modeloch (1.7) aj v dvojfaktorových (1.8) modeloch short rate. Dôkaz odvodenia nájdeme napr. v [14] alebo [21], resp. ľahko už odvodíme aj jej podobu pri troj a viac-faktorových modeloch krátkodobej úrokovej miery. Dané všeobecné tvary vyzerajú následovne:

**Všeobecný tvar PDR pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli short rate**

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + \left(\mu_1(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t)\right)\frac{\partial P}{\partial r_1} + \frac{\sigma(r,t)^2}{2} r - rP = 0, \\ \forall t \in (0,T), \quad P(r,T) = 1, \end{aligned} \tag{1.7}$$

**Všeobecný tvar PDR pre cenu dlhopisu v dvojfaktorových modeloch short rate**

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau}+\left(\mu_1(r_1,t)-\lambda_1(r_1,t)\sigma_1(r_1,t)\right)\frac{\partial P}{\partial r_1}+\left(\mu_2(r_2,t)-\lambda_2(r_2,t)\sigma_2(r_2,t)\right)\frac{\partial P}{\partial r_2}+$$
$$+\frac{\sigma_1(r_1,t)^2}{2}r_1\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2}+\frac{\sigma_2(r_2,t)^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2}+\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 P}{\partial r_1 r_2}-(r_1+r_2)P=0,$$
$$\forall t\in(0,T),\quad P(r_1,r_2,T)=1, \tag{1.8}$$

### 1.2.2 Konvergenčný model Corzovej a Schwarza

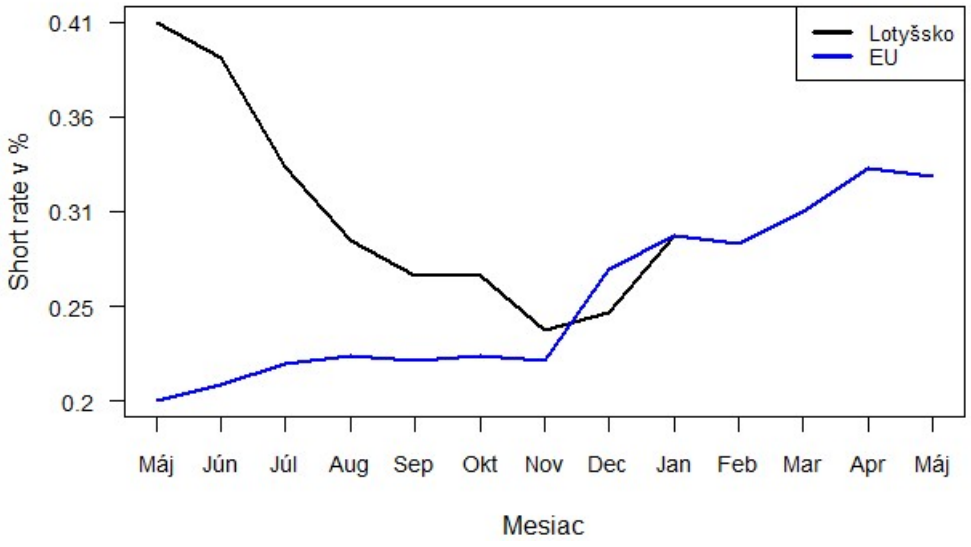
Najstarší typ konvergenčného modelu od Corzovej a Schwarza [6] modeluje situáciu, keď sa niektorá krajina rozhodne prijať novú národnú menu v rámci istej menovej únie, napríklad v úvode spomínanej eurozóny. Autori navrhnutý model použili prvýkrát pred rokom 2000 pri modelovaní španielskej úrokovej miery. Tento viacfaktorový model pritom pozostáva z predpisu pre Vašíčkov proces a aj preto dostal pomenovanie konvergenčného modelu Vašíčkovho typu. Predpis modelu bol predložený v nasledovnom tvare (s výnimkou jednotlivých označení):

$$\begin{aligned} dr_e &= \kappa_1(\theta_1-r_1)dt+\sigma_1 dw_1,\\ dr_d &= \left[a+\kappa_D(r_e-r_d)\right]dt+\sigma_d dw_d,\\ Cov[dw_1,dw_d] &= \rho dt, \end{aligned} \tag{1.9}$$

kde $r_1$ predstavuje európsku zložku modelu a $r_d$ modelovanú domácu zložku. Zároveň o jednotlivých parametroch v reálnej miere tu platia predpoklady kladnosti pre $\kappa_1$, $\kappa_D$ a aj pre obe konštantné volatility $\sigma_1$, $\sigma_d$. U parametrov $\theta_1$ a $a$ stačí podmienka nezápornosti. A samotný korelačný koeficient $\rho$ sa pohybuje v otvorenom intervale medzi nulou a jednotkou. Bližší popis k tomuto modelu nájdeme napr. aj v [21].

# 2 Navrhnutý konvergenčný model

Modelovanie krátkodobej úrokovej miery sa vo viacfaktorových konvergenčných modeloch dá veľmi dobre interpretovať. V tejto kapitole si to bližšie priblížime na navrhnutom dvojfaktorovom konvergenčnom modeli popisujúcom úrokovú mieru v istom štáte, ktorý sa napríklad chystá požiadať o vstup do Eurozóny. Teda ako už bolo uvedené v sekcii 1.2.2, jeho úroková miera závisí od tej európskej, tým pádom aj samotné modelovanie zahŕňa aj európsku úrokovú mieru, ktorá sa riadi svojim vlastným stochastickým procesom. Pre lepšiu predstavu sa môžeme pozrieť na jednu reálnu situáciu pred vstupom krajiny do menovej únie. Vzali sme si pritom mesačné dáta 3-mesačných výnosov Euriboru a Rigiboru v dĺžke jedného roka z obdobia od mája 2013 [17]. V tomto období vstúpilo do Eurozóny Lotyšsko, ktorého domáca medzibanková úroková miera takto postupne zanikla a bola nahradená tou spoločnou, európskou.




**Obr. 2.1:** Lotyšsko pred prijatím eura v roku 2014

Na Obr. 2.1 pozorujeme vývoj uvažovanej 3-mesačnej úrokovej miery pred a po vstupe Lotyšska do eurozóny v roku 2014. Ako krátkodobú úrokovú mieru tu uvažujeme znázornenú čiernu krivku opisujúcu vývoj domácej úrokovej miery, ktorá s blížiacim termínom vstupu do únie postupne konverguje k európskemu Euriboru. Ako sme už spomenuli v 1. kapitole, často sa v praxi zvyknú používať ako alternatíva za short rate práve niektoré z výnosov s najkratšou dostupnou maturitou na trhu, pričom tak, ako aj v tomto prípade, ide buď o mesačné alebo aj 3-mesačné dáta, ktoré sa zvyknú verejne publikovať v

pravidelných intervaloch. Ako už ale vieme, nejde o presný vývoj spomínanej teoretickej veličiny, čo pri oceňovaní derivátov uvažovaním týchto hodnôt, môže mať nemalé dôsledky na stabilitu trhu v dôsledku možného vzniku arbitrážnej príležitosti. Má preto zmysel zamýšľať sa nad vhodným short rate modelom, ktorý by túto konkrétnu situáciu vedel čo najlepšie podchytiť a zabránil by tak možným problémom.

## 2.1 Zostavenie modelu

Ako sme uviedli v krátkom úvode, situácie zmeny medzibankových úrokových mier vedia najlepšie opísať konvergenčné modely. Už dlhšiu dobu pozorujeme na medzibankovom trhu záporné hodnoty európskej medzibankovej úrokovej miery (Euribor) a v niektorých štátoch, v ktorých by sme v súčasnosti chceli použiť konvergenčný model, sú úrokové miery nízke, no nie záporné. Z toho dôvodu budeme uvažovať európsku short rate v rámci nášho modelu ako súčet dvoch faktorov, kde prvý faktor $r_1$ predstavuje nezápornú zložku, ku ktorej sa priťahuje nezáporná domáca úroková miera $r_D$. Druhý faktor európskej časti $r_2$ môže byť ľubovoľný. Model pre európske úrokové miery tak umožňuje dosiahnutie záporných hodnôt a domáce úrokové miery sú určitým spôsobom priťahované k európskym, pričom u tých je taktiež prítomná požiadavka nezápornosti. Na splnenie týchto predpokladov teraz zostavíme systém vhodných diferenciálnych rovníc. Využijeme pritom vlastnosti jednofaktorových modelov zo sekcie 1.1.

- Nech $r_e$ je ľubovoľná (aj záporná) short rate v Európe, potom:

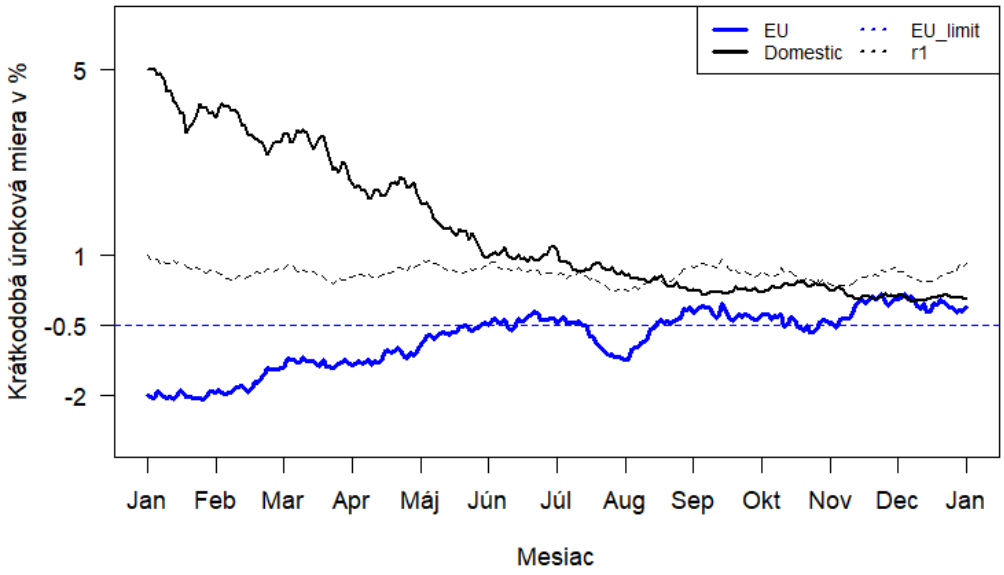
$$\begin{aligned} r_e &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

- Domáca short rate $r_D$ má byť nezáporná. Nech sa teda $r_D$ priťahuje k nezápornej zložke $r_1$, opísanej CIR (1.4) procesom:

$$dr_D = \kappa_D(r_1 - r_D)dt + \sigma_D\sqrt{r_D}dw_D. \tag{2.2}$$

Pre jednoduchosť nech sú všetky Wienerove procesy $w_1$, $w_2$ a $w_D$ nezávislé, teda ich korelácia bude nulová. Trhové ceny rizika by mali byť štandardné - kde je proces Vašíčkovho typu (1.3), príslušná trhová cena rizika bude konštantná s ozn. $\lambda$, kde je to proces CIR typu (1.4), trhová cena rizika bude $\lambda\sqrt{r}$ [3].

### 2.1.1 Simulácia krátkodobej úrokovej miery




**Obr. 2.2:** Reálnejšia simulácia procesov

Na Obr. 2.2 pozorujeme simuláciu európskej (ozn. EU) aj domácej (ozn. Domestic) krátkodobej úrokovej miery z nami navrhnutého modelu. Všimnime si ako tu domáca short rate postupne skonverguje s tou európskou. Hodnoty jednotlivých parametrov vstupujúcich do modelu sme volili len náhodne, aby sa dal pozorovať priebeh jednotlivých kriviek predpísaných short rate procesov. Po vzore publikácie [1] sme na ich simuláciu použili diskretizáciu typu Euler-Maruyama, ktorá predstavuje rozšírenie klasickej eulerovej metódy z obyčajných diferenciálnych rovníc, na tie stochastické. Nejde ale o veľmi presný opis študovaných procesov 2.1 a 2.2 v našom modeli. Parametre modelu sme tu zvolili len náhodne spôsobom takým, aby sa dala dobre odpozorovať spomínaná konvergencia a samotný priebeh faktorov modelu pri zavedených predpokladoch nezápornosti. Účelovo sme tak zvolili 5% počiatočnú hodnotu domácej úrokovej sadzby a $-2\%$ pre počiatok európskej short, čo minimálne v prípade Euriboru v doterajšom období určite neplatí. Pravdivé by ale mohli byť zadané dlhodobé stredné hodnoty jednotlivých faktorov, kde sa európsky odhad pohybuje okolo $-0.5\%$, čo približne odráža aktuálnu situáciu na európskom medzibankovom trhu. Na obrázku si všimnime aj nezápornú zložku európskej úrokovej miery $r_1$, ktorú sme si zvolili na úroveň 1% - tá zároveň z dlhodobého hľadiska predsta-

vuje strednú hodnotu domácej úrokovej miery v jednotlivých časových krokoch. Ostatné použité parametre sú vypísané v tabuľke 2.

Presnejšie simulácie jednotlivých procesov nášho modelu uvedieme pri testovaní algoritmu na jeho kalibráciu v kapitole 3, kde jednotlivé short rate budeme simulovať pomocou príslušných pravdepodobnostných rozdelení pre CIR a Vašíčkov model, ako aj použitím vhodnej aproximácie na simuláciu domáceho faktora $r_D$.

| proc. | $r(0)$ | $\kappa$ | $\sigma$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 0.01 | 4 | $\sqrt{(0.01)}$ | 0.005 |
| $r_2$ | -0.03 | 3 | $\sqrt{(0.0001)}$ | -0.01 |
| $r_D$ | 0.05 | 1.5 | $\sqrt{(0.02)}$ | $r_1$ |

**Tabuľka 2:** Zvolené parametre modelu pre názornú simuláciu na Obr. 2.2

## 2.2 Oceňovanie dlhopisov v navrhnutom konvergenčnom modeli

### 2.2.1 Európske dlhopisy

V európskej časti navrhnutého konvergenčného modelu máme 2 faktory $r_1$, $r_2$ dané stochastickými procesmi popisujúcimi klasický Vašíčkov model [22], resp. CIR jednofaktorový model [7]. Využitím všeobecného tvaru PDR pre cenu dlhopisu v dvojfaktorových modeloch (1.8) zo sekcie 1.2.1 dostávame nasledovnú PDR pre cenu európskeho dlhopisu ako súčtu dvoch faktorov:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1 r_1)\frac{\partial P}{\partial r_1} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2)\frac{\partial P}{\partial r_2} + \\ + \frac{\sigma_1^2}{2} r_1 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - (r_1 + r_2)P = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

pre $r_1 \in (0, \infty)$; $r_2 \in (-\infty, \infty)$ a $\tau \in (0, \infty)$, kde $P(r_1, r_2, 0) = 1$ a $\lambda_1, \lambda_2$ sú konštantné. Vďaka nulovým koreláciám Wienerovych procesov môžeme hľadať riešenie PDR v separovanom tvare:

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau), \tag{2.4}$$

kde

$$P_i(r_i, \tau) = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r_i}, \qquad \tau = T - t. \tag{2.5}$$

Dosadením 2.4 do 2.3 dostávame nasledovný tvar PDR pre cenu európskych dlhopisov:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial P_1}{\partial \tau}P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial \tau}P_1 + \\ &+ \left(\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1 r_1\right)\frac{\partial P_1}{\partial r_1}P_2 + \left(\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2\right)\frac{\partial P_2}{\partial r_2}P_1 + \\ &+ \frac{\sigma_1^2}{2}r_1\frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2}P_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2}P_1 - (r_1 + r_2)P_1P_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

Rozpísaním jednotlivých členov po derivovaní cien v tvare 2.5, dostávame:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} = \dot{A}_i e^{-B_i r_i} - A_i \dot{B}_i r_i e^{-B_i r_i}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial r_i} = -A_i B_i e^{-B_i r_i}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial r_i^2} = A_i B_i^2 e^{-B_i r_i}. \tag{2.9}$$

Následným dosadením odvodených členov (2.7) až (2.9) naspäť do PDR (2.6) by sme dostali pomerne komplikovanú rovnicu pre odvodenie hľadaného riešenia. Využitím možnosti riešenia v separovanom tvare by bolo o niečo jednoduchšie nájsť separátne riešenia pre ceny dlhopisov v jednofaktorových modeloch a ich ceny následne len prenásobiť.

Parciálnu diferenciálnu rovnicu (2.6) si tak upravíme na kombináciu dvoch vzťahov opisujúcich ceny v príslušných jednofaktorových short rate modeloch, čím dostávame rovnosť v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= P_1\left[ -\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \left(\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2\right)\frac{\partial P_2}{\partial r_2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2} - r_2 P_2\right] + \\ &+ P_2\left[ -\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \left(\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1 r_1\right)\frac{\partial P_1}{\partial r_1} + \frac{\sigma_1^2}{2}r_1\frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2} - r_1 P_1\right], \end{aligned} \tag{2.10}$$

pričom na jej platnosť musí byť splnená aj začiatočná podmienka

$$P_1(r_1, 0) = P_2(r_2, 0) = 1. \tag{2.11}$$

Keďže rovnosť (2.10) musí platiť pre všetky riešenia $P_1$ a $P_2$, vrátane začiatočnej podmienky, tak (2.10) platí vtedy a len vtedy, ak je splnené následovné:

$$0 = -\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \left(\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2\right)\frac{\partial P_2}{\partial r_2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2} - r_2 P_2, \tag{2.12}$$

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \left(\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1 r_1\right)\frac{\partial P_1}{\partial r_1} + \frac{\sigma_1^2}{2}r_1\frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2} - r_1 P_1. \tag{2.13}$$

Okrem tejto podmienky zároveň vieme, že $P_i$ závisí len od $r_i$ a $\tau$. Ľahko je preto vidieť, že rovnosti (2.12) a (2.13) predstavujú podľa (1.7) vyjadrenia pre ceny dlhopisov vo

Vašíčkovom, resp. v CIR jednofaktorových modeloch, čo sú dávno známe vyjadrenia, s ktorými sme sa zoznámili v [20], resp. [21]. Jednotlivé odvodenia pre ceny dlhopisov tak pre riešenie Vašíčkovho, ako aj pre CIR jednofaktorový model, s niektorými konkrétnymi krokmi a označeniami prebratými z [21], si tu pre lepší náhľad do oceňovania short rate modelov podrobne rozpíšeme. Ďalej teda riešime osobitne PDR (2.12) a (2.13).

• **Riešenie pre jednofaktorového Vašíčka:**

Riešenie rovnice (2.12) hľadáme v tvare (2.5). Dosadením príslušných derivácii (2.7) až (2.9) do (2.12) dostávame

$$r_2\left(A_2\dot{B}_2 + \kappa_2 A_2 B_2 - A_2\right) + \left(-\dot{A}_2 - (\kappa_2 - \lambda_2\sigma_2)A_2B_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}A_2B_2^2\right) = 0. \tag{2.14}$$

Rovnosť (2.14) platí pre každú hodnotu modelovanej krátkodobej úrokovej miery $r_2$, preto obe zátvorky v rovnosti (2.14) musia ostať nulové. Riešime teda dve obyčajné diferenciálne rovnice (ozn. ODR):

$$0 = A_2\dot{B}_2 + \kappa_2 A_2 B_2 - A_2, \tag{2.15}$$

$$0 = -\dot{A}_2 - (\kappa_2 - \lambda_2\sigma_2)A_2B_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}A_2B_2^2 \tag{2.16}$$

so začiatočnými podmienkami $A_2(0) = 1$ a $B_2(0) = 0$.

Po predelení ODR (2.15) členom $A_2$ nájdeme výsledok ako súčet homogénneho $B_2^H$ a partikulárneho $B_2^p$ riešenia ako

$$\begin{aligned} B_2^H(\tau) &= c_0 e^{-\kappa_2\tau}, \\ B_2^p(\tau) &= \frac{1}{\kappa_2}, \\ B_2(\tau) &= B_2^H(\tau) + B_2^p(\tau). \end{aligned}$$

Využitím začiatočnej podmienky $B_2(0) = 0$ dostávame riešenie rovnice (2.15) v tvare

$$B_2(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa_2\tau}}{\kappa_2}. \tag{2.17}$$

Pre riešenie druhej ODR (2.16) môžeme danú rovnosť opäť predeliť členom $A_2$. Máme tak ODR v tvare

$$\frac{\dot{A}_2}{A_2} = \frac{d}{d\tau}\left[\ln(A_2)\right] = -(\kappa_2\theta_2 - \lambda_2\sigma_2)B_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}B_2^2. \tag{2.18}$$

Túto rovnicu integrujeme na intervale $(0, \tau)$, čím dostaneme

$$\ln A_2(\tau) - \ln A_2(0) = \int_0^\tau \left[ -(\kappa_2\theta_2 - \lambda_2\sigma_2)B_2(s) + \frac{\sigma_2^2}{2}B_2^2(s) \right] ds. \tag{2.19}$$

Následným využitím vlastnosti prirodzeného logaritmu a začiatočnej podmienky $A_2(0) = 1$ môžeme integrovaním pravej strany rovnice (2.19) robiť ďalšie úpravy pre hodnotu výrazu $\ln A_2(\tau)$ na jeho zjednodušenie, kde

$$\begin{aligned}
\ln A_2(\tau) &= -\left(\theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2}\right)\int_0^\tau \left(1 - e^{-\kappa_2 s}\right) ds + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}\int_0^\tau \left(1 - e^{-\kappa_2 s}\right)^2 ds, \\
&= -\left(\theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2}\right)\left[\tau - \frac{e^{-\kappa_2\tau}}{-\kappa_2} + \frac{1}{-\kappa_2}\right] + \\
&+ \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}\left[\tau - 2\left(\frac{e^{-\kappa_2\tau} - 1}{-\kappa_2}\right) + \left(\frac{e^{-2\kappa_2\tau} - 1}{-2\kappa_2}\right)\right], \\
&= -\left(\theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2}\right)\left[\tau - \frac{e^{-\kappa_2\tau}}{-\kappa_2} + \frac{1}{-\kappa_2}\right] + \\
&+ \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}\left[\tau - \frac{1 - e^{-\kappa_2\tau}}{\kappa_2}\right] + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^3}\left[e^{-\kappa_2\tau} - 1 + \frac{e^{-2\kappa_2\tau} - 1}{-2}\right], \\
&= -\tau\left(\theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}\right) + \frac{1 - e^{-\kappa_2\tau}}{\kappa_2}\left(\theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}\right) - \frac{\sigma_2^2}{4\kappa_2^3}\left(1 - e^{-\kappa_2\tau}\right)^2,
\end{aligned}$$

čím dostávame vyjadrenie pre $\ln A_2(\tau)$ v tvare

$$\begin{aligned}
\ln A_2(\tau) &= \left[\frac{1}{\kappa_2}\left(1 - e^{-\kappa_2\tau}\right) - \tau\right] R_{\infty,2} - \frac{\sigma_2^2}{4\kappa_2^3}\left(1 - e^{-\kappa_2\tau}\right)^2, \\
R_{\infty,2} &= \theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Z prirodzeného logaritmu si už riešenie pre $A_2(\tau)$ vyjadríme jednoducho pomocou exponenciálnej funkcie. Dostávame tak riešenie aj pre druhú ODR (2.16), ktoré vyzerá následovne:

$$\begin{aligned}
A_2(\tau) &= \exp\left[\left(\frac{1}{\kappa_2}\left(1 - e^{-\kappa_2\tau}\right) - \tau\right) R_{\infty,2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\left(1 - e^{-\kappa_2\tau}\right)^2\right], \\
R_{\infty,2} &= \theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dosadením (2.17) a (2.21) do (2.5) dostávame hľadané riešenie rovnice (2.12) pre $P_2(r_2, \tau)$, t. j. pre cenu vo Vašíčkovom jednofaktorovom modeli. Ďalej potrebujeme odvodiť členy $A_1(\tau)$ a $B_1(\tau)$ pre separátne riešenie ceny v CIR jednofaktorovom modeli opísaného parciálnou diferenciálnou rovnicou (2.13).

• **Riešenie jednofaktorového CIR modelu:**

Riešenie PDR (2.13) hľadáme v separovanom tvare (2.5). Dosadením príslušných derivácii (2.7) až (2.9) do rovnosti (2.13) tak máme

$$r_1\left(A_1\dot{B}_1 + (\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)A_1B_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 A_1 B_1^2 - A_1\right) + \left(-\kappa_1\theta_1 A_1 B_1 - \dot{A}_1\right) = 0. \tag{2.22}$$

Analogicky ako pri riešení (2.14) pre Vašíčka platí aj táto rovnosť pre každú hodnotu krátkodobej úrokovej miery $r_1$ a obe zátvorky v uvedenej rovnosti (2.22) tak musia ostať nulové. Dostávame ďalší systém dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc, kde

$$0 = \dot{B}_1 + (\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)B_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 B_1^2 - 1, \tag{2.23}$$

$$0 = \dot{A}_1 + \kappa_1\theta_1 A_1 B_1 \tag{2.24}$$

so začiatočnými podmienkami $A_1(0) = 1$ a $B_1(0) = 0$.

Pre (2.23) ide opäť o separovateľnú ODR, ktorú riešime ako

$$\frac{dB_1}{d\tau} = 1 - (\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)B_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 B_1^2. \tag{2.25}$$

Z (2.25) si vytiahneme prírastok doby do splatnosti $\tau$, čím dostávame rovnosť v tvare

$$d\tau = \frac{dB_1}{-\frac{\sigma_1^2}{2}B_1^2 - (\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)B_1 + 1}. \tag{2.26}$$

Pre výraz (2.26) teraz zavedieme vhodnú substitúciu, kde budeme pracovať s označeniami pre $\psi$ a $\phi$:

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_1 + \lambda_1\sigma_1, \\ \phi &= \sqrt{\psi^2 + 2\sigma_1^2} = \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)^2 + 2\sigma_1^2}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Jeho využitím teraz vieme prírastok $d\tau$ vyjadriť ako:

$$d\tau = -\frac{2}{\sigma_1^2\left(B_1 + \frac{\psi+\phi}{\sigma_1^2}\right)\left(B_1 + \frac{\psi-\phi}{\sigma_1^2}\right)}, \tag{2.28}$$

$$= -\frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{B_1 + \frac{\psi-\phi}{\sigma_1^2}} - \frac{1}{B_1 + \frac{\psi+\phi}{\sigma_1^2}}\right). \tag{2.29}$$

Integrovaním výrazu (2.29) na intervale $(0, \tau)$ tak dostávame rovnosť

$$\tau + c_1 = -\frac{1}{\phi}\left[\ln\left(B_1 + \frac{\psi-\phi}{\sigma_1^2}\right) - \ln\left(B_1 + \frac{\psi+\phi}{\sigma_1^2}\right)\right]. \tag{2.30}$$

Nech pre konštantu $c_1$ v (2.30) platí $e^{\phi c_1} = c_2$, potom máme

$$c_2 e^{\phi\tau} = \frac{B_1 + \frac{\psi+\phi}{\sigma_1^2}}{B_1 + \frac{\psi-\phi}{\sigma_1^2}}. \tag{2.31}$$

Využitím počiatočnej podmienky $B_1(0) = 0$, tak máme

$$c_2 = \frac{\psi+\phi}{\psi-\phi}$$

a následným dosadením $c_2$ do rovnice (2.31) tak po vytiahnutí koeficientu $B_1(\tau)$ dostávame výraz

$$B_1(\tau) = \frac{\frac{\psi+\phi}{\sigma_1^2}\left(e^{\phi\tau}-1\right)}{1-\frac{\psi+\phi}{\psi-\phi}e^{\phi\tau}},$$

z ktorého po menšej úprave získame riešenie ODR (2.23) v tvare

$$B_1(\tau) = \frac{2\left(e^{\phi\tau}-1\right)}{(\psi+\phi)\left(e^{\phi\tau}-1\right)+2\phi}. \tag{2.32}$$

Posledná separovateľná ODR (2.24) sa s využitím výsledku (2.32) z predchádzajúcej rovnice pre koeficient $B_1(\tau)$ počíta ako

$$\begin{aligned} \frac{\dot{A}_1}{A_1} &= \frac{d}{d\tau}\ln(A_1) = -\kappa_1\theta_1 B_1, \\ \ln(A_1(\tau)) &= -\int_0^\tau \kappa_1\theta_1 B_1(s)ds. \end{aligned}$$

Po jej zintegrovaní a menšej úprave dostávame výsledok pre $A_1(\tau)$ ako

$$A_1(\tau) = \left(\frac{2\phi e^{\frac{1}{2}(\phi+\psi)\tau}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi}\right)^{\frac{2\kappa_1\theta_1}{\sigma_1^2}}. \tag{2.33}$$

Dosadením oboch výsledkov do systému obyčajných diferenciálnych rovníc (2.32) a (2.33) do (2.5) tak dostávame hľadané riešenie rovnosti (2.13) pre $P_1(r_1,\tau)$, čo označuje hľadanú cenu dlhopisu v CIR jednofaktorovom modeli.

Takto sa nám podarilo nájsť celkové riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisov v európskej časti navrhnutého modelu, teda v tzv. CIR - Vašíček dvojfaktorovom modeli pozostávajúceho zo short rate procesov $r_1$ a $r_2$ v (2.1):

$$P(r_1,r_2,\tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}, \tag{2.34}$$

kde

$$
\begin{aligned}
A_1(\tau) =& \left( \frac{2\phi e^{\frac{1}{2}(\phi+\psi)\tau}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi} \right)^{\frac{2\kappa_1\theta_1}{\sigma_1^2}}, \\
B_1(\tau) =& \frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi}, \\
\psi =& \kappa_1 + \lambda_1\sigma_1, \\
\phi =& \sqrt{\psi^2+2\sigma_1^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2(\tau) =& \exp\left[ \left( \frac{1}{\kappa_2}\left(1-e^{-\kappa_2\tau}\right)-\tau \right) R_{\infty,2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\left(1-e^{-\kappa_2\tau}\right)^2 \right], \\
R_{\infty,2} =& \theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2}, \\
B_2(\tau) =& \frac{1-e^{-\kappa_2\tau}}{\kappa_2}.
\end{aligned}
$$

### 2.2.2 Limita časovej štruktúry úrokových mier pre európske dlhopisy

Pre bližšie skúmanie niektorých vlastností navrhnutého modelu by sa bolo dobré pozrieť na limity časovej štruktúry úrokových mier (dlhopisových výnosov), ktorých odvodenia rovnako ako pri cenách nájdeme napr. v [21]. Ako už dobre vieme z 1. kapitoly, krivka dlhopisových výnosov má tvar

$$
R(r_1, r_2, \tau) = -\frac{\ln\left[P(r_1, r_2, \tau)\right]}{\tau}. \tag{2.35}
$$

Pre vyjadrenie vzťahu na výpočet limity prepíšeme (2.35) na

$$
R(r_1, r_2, \tau) = -\frac{1}{\tau}\left[\ln(A_1(\tau)) + \ln(A_2(\tau)) - B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2\right]. \tag{2.36}
$$

Počítaním limity výnosovej krivky (2.36) pre dobu do splatnosti $\tau$ idúcu do nekonečna a s využitím odvodených vzťahov pre jednotlivé koeficienty v (2.34) potom dostávame:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty} R(r_1, r_2, \tau) &= \lim_{\tau\to\infty}\left( -\frac{1}{\tau}\ln\left(R(r_1, r_2, \tau)\right)\right), \\
&= \lim_{\tau\to\infty} -\frac{1}{\tau}\left(\ln\left(P_1(r_1, \tau) + \ln\left(P_2(r_2, \tau)\right)\right),\right. \\
&= \lim_{\tau\to\infty} -\frac{\ln\left(P_1(r_1, \tau)\right)}{\tau} + \lim_{\tau\to\infty} -\frac{\ln\left(P_2(r_2, \tau)\right)}{\tau}, \\
&= R_1(r_1, \tau)\big|_{\tau\to\infty} + R_2(r_2, \tau)\big|_{\tau\to\infty}, \\
&= R_{cir}(r_1, \tau)\big|_{\tau\to\infty} + R_{vas}(r_2, \tau)\big|_{\tau\to\infty},
\end{aligned}
$$

kde $R_2(r_2,\tau)\big|_{\tau\to\infty}$ označuje limitu výnosovej krivky pre Vašíčkov jednofaktorový model a $R_1(r_1,\tau)\big|_{\tau\to\infty}$ zase limitu výnosovej krivky pre jednofaktorový short rate model typu CIR. Čiže limitu výnosových kriviek pre CIR + Vašíček dvojfaktorový model vieme vyjadriť ako súčet príslušných jednofaktorových limít, takže platí rovnosť

$$\lim_{\tau\to\infty} R(r_1,r_2,\tau) = R_{cir}(r_1,\tau)\big|_{\tau\to\infty} + R_{vas}(r_2,\tau)\big|_{\tau\to\infty}. \tag{2.37}$$

Pre tieto limity použijeme opäť známe vyjadrenia, ktorých odvodenia nájdeme napr. v [22] a [7]. Jednoduchšie odvodenie pre limitu vo Vašíčkovom modeli pre faktor $r_2$ tu nepotrebuje nejaký komentár. Pre CIR model si ale dosadíme vyššie dokázané výrazy koeficientov pre $A_1(\tau)$ a $B_1(\tau)$. Pre Vašíčka zároveň pre pohodlnejšie dosadzovanie výrazu v ďalších vzťahoch zavádzame aj označenie danej limity ako $R_{\infty 2}$ a pre CIR model použijeme vyššie uvedené značenie pre $\psi$ a $\phi$. Tieto limity potom zapíšeme ako

$$\begin{aligned}
R_{vas}(r_2,\tau)\big|_{\tau\to\infty} &= \theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2} = R_{\infty 2},\\
R_{cir}(r_1,\tau)\big|_{\tau\to\infty} &= \lim_{\tau\to\infty} -\frac{ln\left(P_1(r_1,\tau)\right)}{\tau},\\
&= -\frac{1}{\tau}\ln\left[A_1(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1}\right]\Big|_{\tau\to\infty},\\
&= \left[\frac{-2\kappa_1\theta_1}{\tau\sigma_1^2} ln\left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\frac{\tau}{2}}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi}\right) + \frac{r_1}{\tau}\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\frac{\tau}{2}}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi}\right]_{\tau\to\infty},\\
&= \frac{2\kappa_1\theta_1}{\phi+\psi}.
\end{aligned}$$

Z čoho po dosadení do (2.37) dostaneme limitu európskych výnosových kriviek

$$\lim_{\tau\to\infty} R(r_1,r_2,\tau) = \frac{2\kappa_1\theta_1}{\phi+\psi} + R_{\infty 2}, \tag{2.38}$$

z ktorej po rozbalení označenia $R_{\infty 2}$ máme odvodenie pre limitu európskej (CIR + Vašíček) časovej štruktúry úrokových mier pre nekonečne rastúcu dobu do splatnosti $\tau$ v tvare

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty} R(r_1,r_2,\tau) &= \frac{2\kappa_1\theta_1}{\phi+\psi} + \theta_2 - \frac{\lambda_2\sigma_2}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2^2},\\
\psi &= \kappa_1 + \lambda_1\sigma_1,\\
\phi &= \sqrt{\psi^2 + 2\sigma_1^2}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

### 2.2.3 Domáce dlhopisy

V tejto sekcii sa pozrieme na oceňovanie dlhopisov z druhej stochastickej časti nášho modelu (2.2), teda pre prípad domácich dlhopisov, kde už ide o príslušný konvergenčný

model podľa ktorého nezáporná short rate $r_D$ je priťahovaná k európskej $r_1$ - tá sleduje stochastický proces typu CIR. V oboch prípadoch je tu trhová miera rizika definovaná ako $\lambda_i(r_i, t) = \lambda_i$. Úlohou je tak nájsť odvodenie ceny domácich dlhopisov $P_D(r_D, r_1, \tau)$ v konvergenčnom dvojfaktorovom modeli CIR typu, ktorému sa už skôr, podrobnejšie, venoval autor v záverečnej práci [14]. My si v našej práci priblížime dané odvodenie a neskôr aj niektoré ďalšie vlastnosti. Podľa sekcie 1.2.2 v 1. kapitole máme konvergenčný model, kde

$$r = r(r_1, r_D) = r_D. \tag{2.40}$$

Analogicky k európskemu submodelu môžeme podľa [21] použiť všeobecný tvar PDR pre cenu dlhopisov v dvojfaktorových modeloch zo sekcie (1.8), čiže hľadáme riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice v tvare

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1 r_1)\frac{\partial P}{\partial r_1} + (\kappa_D(r_1 - r_D) - \lambda_D\sigma_D r_D)\frac{\partial P}{\partial r_D} + \\ + \frac{\sigma_1^2}{2} r_1 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_D^2}{2} r_D \frac{\partial^2 P}{\partial r_D^2} - r_D P = 0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

kde $r_1, r_D \in (0, \infty)$ a $\tau = T - t$. Riešenie môže mať podobu napríklad ako

$$P = P_D(r_D, r_1, \tau) = e^{A(\tau) - r_D B(\tau) - r_1 C(\tau)} \tag{2.42}$$

so zač. podm. $A(0) = B(0) = C(0) = 0$. Po tom ako dosadíme jej parciálne derivácie podľa jednotlivých faktorov a času do splatnosti $\tau$ do PDR (2.41), dostávame nasledovnú rovnosť:

$$\begin{aligned} 0 &= r_D(\dot{B} + \kappa_D B + \frac{1}{2}\sigma_D^2 B^2 + \lambda_D\sigma_D B - 1) + \\ &+ r_1(\dot{C} + \kappa_1 C + \frac{1}{2}\sigma_1^2 C^2 + \lambda_1\sigma_1 C - \kappa_D B) + \\ &+ (-\dot{A} - \kappa_1\theta_1 C). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Rovnako ako pri riešení európskeho submodelu musí riešenie Rov. (2.43) platiť pre každú hodnotu faktorov $r_1$ a $r_2$. Cenu domácich dlhopisov danú parciálnou diferenciálnou rovnicou (2.41) ďalej teda nájdeme ako riešenie systému troch ODR, ktoré uvádzame ako

$$\dot{B} + \kappa_D B + \frac{1}{2}\sigma_D^2 B^2 + \lambda_D\sigma_D B - 1 = 0, \tag{2.44}$$

$$\dot{C} + \kappa_1 C + \frac{1}{2}\sigma_1^2 C^2 + \lambda_1\sigma_1 C - \kappa_D B = 0, \tag{2.45}$$

$$\dot{A} + \kappa_1\theta_1 C = 0. \tag{2.46}$$

V takomto systéme obyčajných diferenciálnych rovníc (2.44) až (2.46) vieme analyticky vyriešiť len prvú z nich (2.44). Celý systém preto potrebujeme riešiť numericky, pričom ako vhodnú metódu jeho riešenia sme si zvolili Runge-Kutta metódu 4. rádu s použitím balíka *deSolve* [18] v prostredí *R*, kde daný výpočet vieme ľahko previesť.

### 2.2.4 Limita časovej štruktúry úrokových mier pre domáce dlhopisy

Limitu ČŠUM pre domáce dlhopisy sme prevzali z práce [14], kde bola odvodená analogická limita k dvojfaktorovému konvergenčnému modelu CIR typu.

Máme teda limitu časovej štruktúry domácich výnosov pre $\tau \to \infty$, ktorú zapíšeme ako

$$\lim_{\tau\to\infty} R(r_D, r_1, \tau) = \kappa_1\theta_1 \frac{(\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1) - \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)^2 + 2\kappa_D\sigma_1^2 B^*}}{-\sigma_1^2}, \tag{2.47}$$

kde máme zavedené označenia pre $B^*$, resp. $\psi$ a $\phi$ ako:

$$B^* = \frac{\psi - \sqrt{\psi^2 + 4\phi}}{-2\phi}, \qquad \phi = \frac{\sigma_D^2}{2}, \qquad \psi = \kappa_D + \lambda_D\sigma_D. \tag{2.48}$$

**Krátke odvodenie (2.47) pomocou dokázaných tvrdení v [14]:**

Pre domácu limitu platí z (2.49) vo všeobecnosti vzťah

$$\lim_{\tau\to\infty} R(r_D, r_1, \tau) = -\lim_{\tau\to\infty} \frac{A(\tau)}{\tau} + \lim_{\tau\to\infty} \frac{B(\tau)}{\tau} r_D + \lim_{\tau\to\infty} \frac{C(\tau)}{\tau} r_1 \tag{2.49}$$

Majme teda zavedené označenia (2.48). Vtedy podľa dokázanej lemy v [14](lema č. 6) platí, že pre riešenie nášho systému musia byť splnené tieto nutné podmienky: $B(\tau) > 0$ je monotónne rastúce a zároveň $\lim_{\tau\to\infty} B(\tau) = B^*$. Pre $C(\tau) > 0$ platí jeho monotónna rastúcosť a ohraničenosť. A nakoniec $A(\tau) < 0$ pre každé $\tau > 0$. Z týchto nutných podmienok následne podľa tvrdenia v [14](tvrdenie č. 7) platí

$$\lim_{\tau\to\infty} C(\tau) = \frac{(\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1) - \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)^2 + 2\kappa_D\sigma_1^2 B^*}}{-\sigma_1^2}. \tag{2.50}$$

Z uvedených tvrdení potom vyplýva:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{\tau\to\infty} \frac{B(\tau)}{\tau} = 0. \tag{2.51}$$

Vyjadrenie pre limitu posledného člena $\frac{A(\tau)}{\tau}$ vystupujúceho v (2.49) dostaneme priamo z jeho ODR (2.46), kedy na limitu $\lim_{\tau\to\infty}\frac{A(\tau)}{\tau}$ použitím L'Hospitalovho pravidla a následným dosadením rovnosti (2.44) dostávame

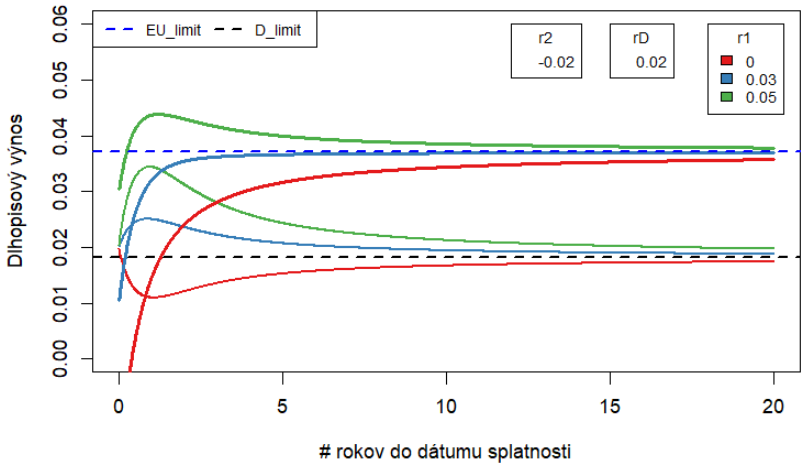
$$\lim_{\tau\to\infty} R(r_D, r_1, \tau) = -\lim_{\tau\to\infty}\frac{A(\tau)}{\tau} = -\lim_{\tau\to\infty}\dot{A}(\tau) = \kappa_1\theta_1\lim_{\tau\to\infty}C(\tau). \quad \square \tag{2.52}$$

## 2.3 Pohľad na výnosové krivky a niektoré ich vlastnosti

V tejto časti sa pozrieme na niektoré vlastnosti odvodených kriviek zo sekcií (2.2.1) až (2.2.4). Ide tak o výnosy európskych dlhopisov (2.35) pre dvojfaktorový model v tvare CIR + Vašíček, ako aj domácich dlhopisových výnosov, ktoré tu riešime len numericky pomocou Runge-Kutta metódy 4. rádu pre systém obyčajných diferenciálnych rovníc (2.44) až (2.46). Resp. sa pozrieme aj na ich odvodené limity vyjadrené ako (2.39) pre európsky submodel a (2.47) pre limitu domácich dlhopisov.

### 2.3.1 Možné tvary výnosových kriviek

Na úvod si zavedieme niektoré nové označenia pre odvodené výnosové krivky a ich príslušné limitné vzťahy. Nech teda $R_e$ označuje výnosovú krivku európskeho dvojfaktorového modelu pre procesy jednotlivých short rate faktorov $r_1$ a $r_2$ z predpisu navrhnutého modelu (2.1). Jej limitu pre $\tau \to \infty$ budeme ďalej označovať ako $R_{e,\infty}(EU_{limit})$. Analogicky označíme domácu výnosovú krivku odvodenú zo short rate procesu pre $r_D$ (2.2), pre ktorú použijeme zápis $R_D$ a pre jej limitu zavedieme označenie $R_{D,\infty}(D_{limit})$.




**Obr. 2.3:** Pohľad na rozdielne limity európskych a domácich výnosových kriviek.

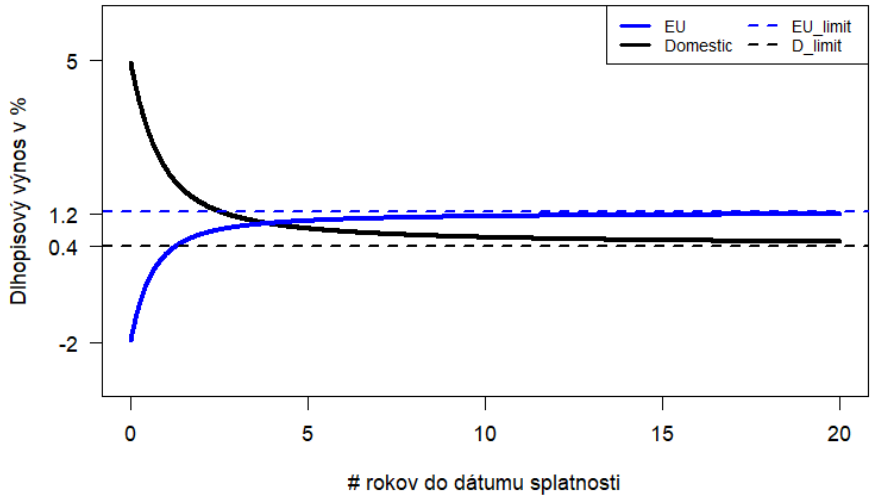
Na Obr. 2.3 sme si znázornili niektoré možné tvary dlhopisových domácich aj európskych výnosových kriviek, pri pevne zvolených hodnotách faktorov $r_2$, $r_D$ a pri meniacej sa hodnote $r_1$ procesu. Máme tak možnosť jednoducho odpozorovať niektoré odlišné tvary výnosov, ktoré sa v našom modeli môžu objaviť vzhľadom na odhadnuté alebo jemu predpísané parametre v reálnej miere. V danej ilustrácii sú zakreslené aj presné hodnoty príslušných limít $R_{e,\infty}$ a $R_{D,\infty}$, vďaka čomu veľmi ľahko odpozorujeme, že limita domácich a európskych výnosových kriviek nie je rovnaká. Ľahko sa to odsleduje aj na konvergencii výnosov práve k týmto hodnotám, ktorá je v ilustrovanej situácii veľmi dobre pozorovateľná. Nejde pritom o nič prekvapujúce, keďže ani krátkodobá úroková miera pri domácich dlhopisoch nekonverguje k tej európskej ale len k jej nezápornej zložke, k faktoru $r_2$. Nižšie vykreslené sú domáce krivky a nad nimi v okolí modro vyznačenej európskej limity pozorujeme európske výnosy s postupne sa meniacou maturitou. Nebudeme preto ďalej navzájom porovnávať limity $R_{e,\infty}$ a $R_{D,\infty}$, ale skôr nás na základe pozorovania na Obr. 2.3 bude zaujímať, s akými možnými tvarmi dlhodobých úrokových mier sa v navrhnutom konvergenčnom modeli môžeme stretnúť. Použité parametre na generovanie názorných tvarov výnosových kriviek na Obr. 2.3 sú zaznamenané v nižšie uvedenej Tab. 3.

| proc. | $\lambda$ | $\kappa$ | $\sigma$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 5 | 1 | 0.04 | 0.02 |
| $r_2$ | -1 | 3 | $\sqrt{(0.001)}$ | 0.02 |
| $r_D$ | 3 | 3 | 0.05 | $r_1$ |

**Tabuľka 3:** Zvolené parametre modelu

Z Obr. 2.3 vidíme napríklad aj to, ako je tu umožnený počiatočný pokles dlhodobej úrokovej miery s rastúcim dátumom do splatnosti, čo obyčajné jednofaktorové modely neumožňujú. Skúsme ale použiť aj o trochu lepšie odhady parametrov vstupujúcich do odvodeného modelu. Využijeme tak už skôr generované hodnoty short rate na zvolených hodnotách parametrov v úvode 2. kapitoly v sekcii (2.1.1), kde sme na Obr. (2.2) vyobrazili simulácie príslušných short rate $r_1$, $r_2$, $r_D$ využitím Euler-Maruyama diskretizačnej metódy. Na generovanie výnosových kriviek si ešte doplníme odhady pre trhové ceny rizika. Nech teda napr. $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ a $\lambda_D = 5$. Jednotlivé európske a domáce výnosové krivky

nášho modelu a ich príslušné limity, tak s parametrami uvedenými v Tab. 4 ilustrujeme na Obr. 2.4.




**Obr. 2.4:** Európske a domáce výnosové krivky pri voľbe parametrov z Tab. 4.

| Proc. | $r(0)$ | $\kappa$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 0.01 | 4 | $\sqrt{(0.01)}$ | 0.005 | -5 |
| $r_2$ | -0.03 | 3 | $\sqrt{(0.0001)}$ | -0.01 | -5 |
| $r_D$ | 0.05 | 1.5 | $\sqrt{(0.02)}$ | $r_1$ | 5 |

**Tabuľka 4:** Zvolené parametre modelu

Pri pohľade na ilustráciu výnosov na Obr. 2.4 sa nám núka otázka napr. o tom, aký rozsah pre limitu domácich výnosových kriviek môžeme dostať pri pevne stanovenom európskom modeli, t.j. máme európske výnosové krivky a nejakú ich limitu $R_e\infty$ a chceme sa pozrieť na to, čo sa bude diať s tou domácou $R_{D\infty}$ pri náhodnej zmene niektorého z parametrov domáceho submodelu. Na tieto situácie sa bližšie pozrieme v nasledujúcej časti.

### 2.3.2 Analýza domácich parametrov

Ako sme už načrtli v predchádzajúcej sekcii, spravíme si menšiu analýzu niektorých z parametrov modelu. Zvolili sme si pritom všetky domáce parametre v reálnej miere, t. j.

$\kappa_D$, $\sigma_D$ a aj trhovú mieru rizika $\lambda_D$ a na základe ich limitných hodnôt sa bližšie pozrieme na limitné správanie príslušných dlhodobých úrokových mier, pričom parametre európskeho short rate modelu necháme pevne zafixované. V tejto sekcií budeme preto riešiť limity vzhľadom na každý z domácich parametrov pre vyššie uvedený vzťah limity domácich dlhopisových výnosov (2.47), vzhľadom na sledovaný domáci parameter. Z európskej časti je tu podstatná iba fixácia parametrov CIR procesu pre $r_1$, ktorý ako jediný vystupuje v stochastickom procese pre $r_D$, a teda aj v jeho výnosovej krivke $R_D$. Jednotlivé vlastnosti domácich limít si postupne dokážeme a následne aj názorne ilustrujeme na vhodných obrázkoch. Tieto zmeny v limitnom správaní budeme teda pozorovať postupne vzhľadom na každý domáci parameter pri ostatných sa nemeniacich. Na jednotlivé ilustrácie pritom využijeme už známe hodnoty parametrov uvedených v Tab. 4 predchádzajúcej sekcie.

**Závislosť domácej limity od hodnoty parametra $\lambda_D$:**

Najprv si teda vyskúšajme, aký vplyv na domácu limitu bude mať zmena domáceho parametra $\lambda_D$, teda domácej trhovej miery rizika (ostatné domáce parametre $\kappa_D$ a $\sigma_D$ ostávajú spolu s európskymi pevne dané). Skúsme to teda numericky - zaujíma nás správanie domácej limity pre $\lambda_D \to \pm\infty$. Zároveň budeme aj v tejto časti práce používať označenie pre domácu limitu v tvare $R_{D\infty}$, takže pre parameter $\lambda_D$ hľadáme limitu v tvare

$$\lim_{\lambda_D \to \pm\infty} R_{D\infty} = \lim_{\lambda_D \to \pm\infty} \left[ \lim_{\tau \to \infty} R(r_D, r_1, \tau) \right]. \tag{2.53}$$

Dokázaný tvar hľadaného riešenia pre domáce limity uvedený v (2.47) si tu pre pohodlnejšie počítanie znovu celý prepíšeme. Dostávame tak

$$R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1) - \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1)^2 + 2\kappa_D \sigma_1^2 B^*}}{-\sigma_1^2}, \tag{2.54}$$

$$B^* = \frac{\psi - \sqrt{\psi^2 + 4\phi}}{-2\phi}, \qquad \phi = \frac{\sigma_D^2}{2}, \qquad \psi = \kappa_D + \lambda_D \sigma_D.$$

Samotný výraz pre $B^*$ vystupujúci v $R_{D\infty}$ (2.54) vieme prepísať do tvaru (2.55), podľa ktorého už ľahko dostaneme celkovú limitu. V celom vyjadrení (2.54) sa už tento parameter viacej nenachádza. Po dosadení výrazov $\psi$, $\phi$ a jemnej úprave dostávame:

$$B^* = -\frac{1}{\sigma_D^2}(\kappa_D + \sigma_D \lambda_D) + \frac{1}{\sigma_D^2}\sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}. \tag{2.55}$$

Počítajme teda najprv limitu $\lim_{\lambda_D \to \infty} R_{D\infty}$. Pre skrátenie zápisu si zaveďme substitúciu

$$\psi = \kappa_D + \lambda_D \sigma_D, \tag{2.56}$$

pričom ak $\lambda_D$ diverguje do nekonečna, tak rovnaká vlastnosť platí aj pre $\psi$. Potom máme limitu ako

$$\begin{aligned}\lim_{\psi \to \infty} B^* &= \lim_{\psi \to \infty} \frac{1}{\sigma_D^2} \left( \sqrt{\psi^2 + 2\sigma_D^2} - \psi \right), \\ &= \lim_{\psi \to \infty} \frac{1}{\sigma_D^2} \left( \sqrt{\psi^2 + 2\sigma_D^2} - \psi \right) \frac{\sqrt{\psi^2 + 2\sigma_D^2} + \psi}{\sqrt{\psi^2 + 2\sigma_D^2} + \psi},\end{aligned}$$

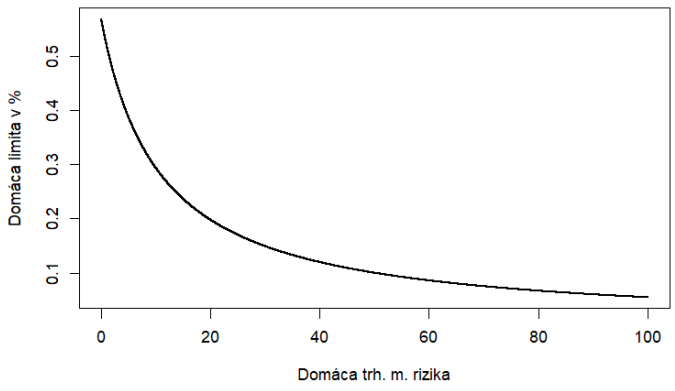
z čoho dostávame

$$\lim_{\psi \to \infty} \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{2\sigma_D^2}{\sqrt{\psi^2 + 2\sigma_D^2} + \psi} = 0. \tag{2.57}$$

Následne naša hľadaná limita dáva výsledok

$$\lim_{\lambda_D \to \infty} R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{\kappa_1 - \lambda_1 \sigma_1 - |\kappa_1 - \lambda_1 \sigma_1|}{-\sigma_1^2}, \tag{2.58}$$

takže jej hodnota závisí od hodnoty viacerých parametrov v člene $\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1$, ktorý tu vystupuje aj v absolútnej hodnote. Takéto limitné správanie pre $\lambda \to \infty$ môžeme čiastočne odsledovať aj na Obr. 2.5, kde z použitých hodnôt parametrov v Tab. 4 teda máme pre $\lambda_D \to \infty$ závislosť od znamienka pri výraze $\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1$, pričom pri našich parametroch je kladný, a tak môžeme na Obr. 2.5 pozorovať konvergenciu domácej limity $R_{D\infty}$ k nulovej hladine úrokovej miery.




**Obr. 2.5:** Domáca limita pri kladnej $\lambda_D$

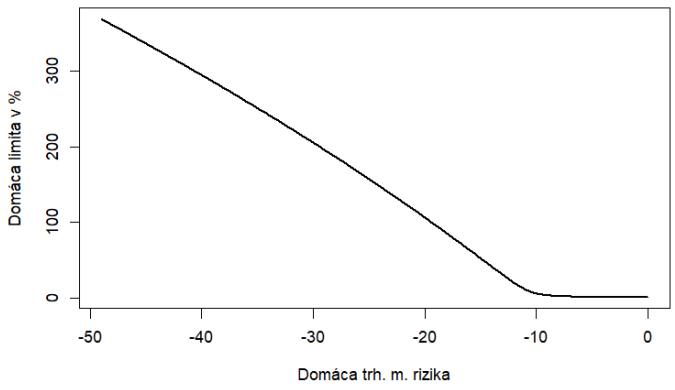
Ďalej sa pozrime na limitu $\lim_{\lambda_D \to -\infty} R_{D\infty}$. V tomto prípade pre jednotlivé členy v predpise $B^*$ v tvare (2.55) platí:

$$\lim_{\lambda_D \to -\infty} \left( -\frac{1}{\sigma_D^2} \left( \kappa_D + \lambda_D \sigma_D \right) \right) = \infty, \tag{2.59}$$

$$\lim_{\lambda_D \to -\infty} \left( -\frac{1}{\sigma_D^2} \sqrt{\left( \kappa_D + \lambda_D \sigma_D \right)^2 + 2\sigma_D^2} \right) = \infty. \tag{2.60}$$

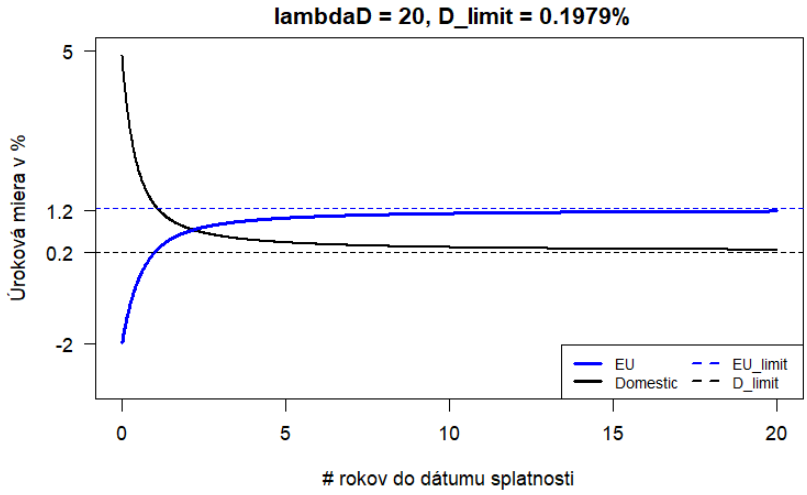
a teda do nekonečna diverguje ide aj celý výraz (2.55) pre $B^*$. Potom ma hľadaná limita hodnotu

$$\lim_{\lambda_D \to -\infty} R_{D\infty} = \infty. \tag{2.61}$$

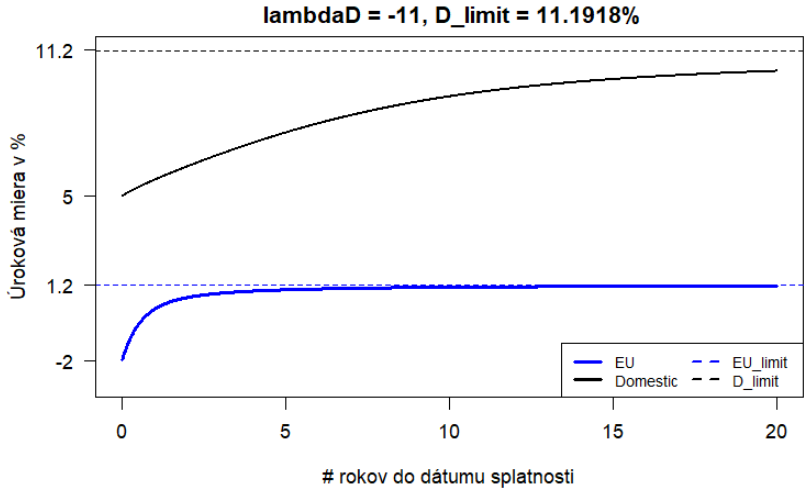



**Obr. 2.6:** Domáca limita pri zápornej $\lambda_D$

Na Obr. 2.6 teda oproti prvej situácii naopak sledujeme, že pre $\lambda_D \to -\infty$ sa limita $R_{D\infty}$ postupne blíži do nekonečna, čo odpovedá aj vypočítanej hodnote. Nahliadnuť môžeme aj na odpovedajúce zmeny výnosovej krivky na Obr. 2.7 a 2.8, kde pri tejto jedinej zmene dostáva domáca úroková miera (ozn. Domestic) celkom odlišný tvar.




**Obr. 2.7:** Výnosové krivky pri hodnote $\lambda_D = 20$.




**Obr. 2.8:** Výnosové krivky pri hodnote $\lambda_D = -11$.

### Závislosť domácej limity od hodnoty parametra $\kappa_D$:

Teraz sa pozrieme na správanie domácej limity pri limite podľa ďalšieho z parametrov, a to $\kappa_D$ označujúceho aj rýchlosť konvergencie výnosovej krivky práve k jej uvedenej limite $R_{D\infty}$. Tak ako pri trhovej miere rizika, aj tu zavádzame fix na všetky ostatné parametre modelu a rovnako aj tu by sa dala očakávať istá závislosť domácich výnosov od niektorých ďalších parametrov modelu. Uvidíme, čo nám ukážu príslušné limity pre $\kappa_D \to \pm\infty$

**Overenie vyslovených hypotéz o $\kappa_D$:**

Pre ďalší parameter $\kappa_D$ chceme odvodiť vyjadrenia pre $\lim_{\kappa_D \to \infty} R_{D\infty}$, resp. $\lim_{\kappa_D \to 0} R_{D\infty}$, kde

$$R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1) - \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1)^2 + 2\kappa_D \sigma_1^2 B^*}}{-\sigma_1^2}, \tag{2.62}$$

$$B^* = -\frac{1}{\sigma_D^2}(\kappa_D + \sigma_D \lambda_D) + \frac{1}{\sigma_D^2}\sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}. \tag{2.63}$$

Pozrime sa teda na výraz $\kappa_D B^*$, ktorý nám postačí na dopočítanie celých limít pre $R_{D\infty}$. Ten vyzerá následovne:

$$\kappa_D B^* = -\frac{1}{\sigma_D^2}\kappa_D(\kappa_D + \sigma_D \lambda_D) + \frac{1}{\sigma_D^2}\kappa_D\sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}. \tag{2.64}$$

Majme tak najprv limitu $\lim_{\kappa_D \to 0} R_{D\infty}$, pre ktorú následne počítame limitu z výrazu (2.64), čím dostávame

$$\lim_{\kappa_D \to 0} \kappa_D B^* = -\frac{1}{\sigma_D^2} \times 0 \times (\lambda_D \sigma_D) + \frac{1}{\sigma_D^2} \times 0 \times \sqrt{\lambda_D^2 \sigma_D^2 + 2\sigma_D^2} = 0. \tag{2.65}$$

A teda našli sme aj výsledok pre prvú z limít v tvare

$$\lim_{\kappa_D \to 0} R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1 - |\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1|}{-\sigma_1^2}. \tag{2.66}$$

Druhú stranu limitného správania $\lim_{\kappa_D \to \infty} R_{D\infty}$ tak počítame pomocou výpočtu pre $\lim_{\kappa_D \to \infty} \kappa_D B^*$. Zavedením substitúcie

$$y = \kappa_D + \lambda_D \sigma_D \tag{2.67}$$

sa aj $y$ blíži do nekonečna a riešenie pre limitu výrazu $\kappa_D B^*$ je tak ekvivalentné výpočtu

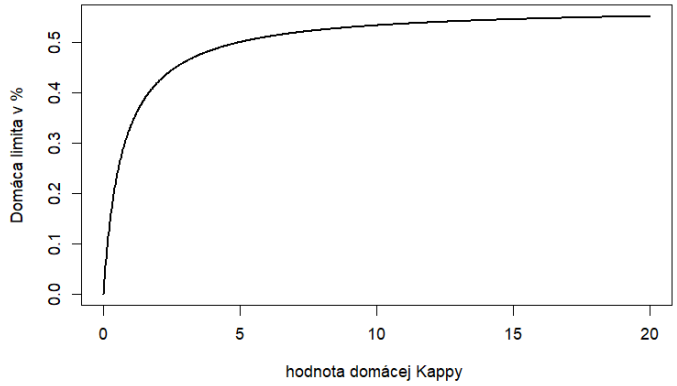
$$\lim_{\kappa_D \to \infty} \kappa_D B^* = \lim_{y \to \infty} \left( -\frac{y - \lambda_D \sigma_D}{\sigma_D^2} y + \frac{y - \lambda_D \sigma_D}{\sigma_D^2}\sqrt{y^2 + 2\sigma_D^2} \right), \tag{2.68}$$

ktorú si zjednodušíme prenásobením špeciálnou jednotkou v tvare $(\sqrt{y^2 + 2\sigma_D^2} + y)$ a po následnom predelení členom $y$ dostávame

$$\lim_{\kappa_D \to \infty} \kappa_D B^* = \lim_{y \to \infty} \left[ \frac{2\sigma_D^2 (y - \lambda_D \sigma_D)}{\sigma_D^2 \left( \sqrt{y^2 + 2\sigma_D^2} + y \right)} \right] = \lim_{y \to \infty} \left[ \frac{2\left(1 - \frac{\lambda_D \sigma_D}{y}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2\sigma_D^2}{y^2}} + 1} \right] = 1 \tag{2.69}$$

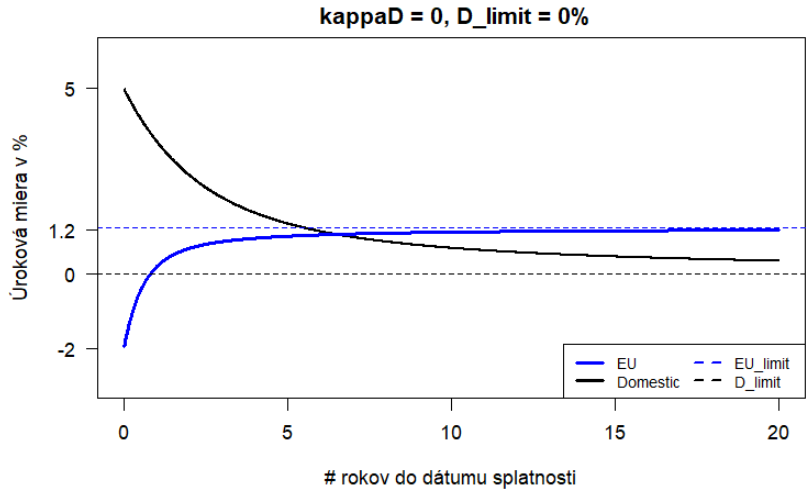
Z čoho už ľahko dorátame výsledok aj druhej limity, čím dostaneme

$$\lim_{\kappa_D \to \infty} R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1 - \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1)^2 + 2\sigma_1^2}}{-\sigma_1^2}. \tag{2.70}$$

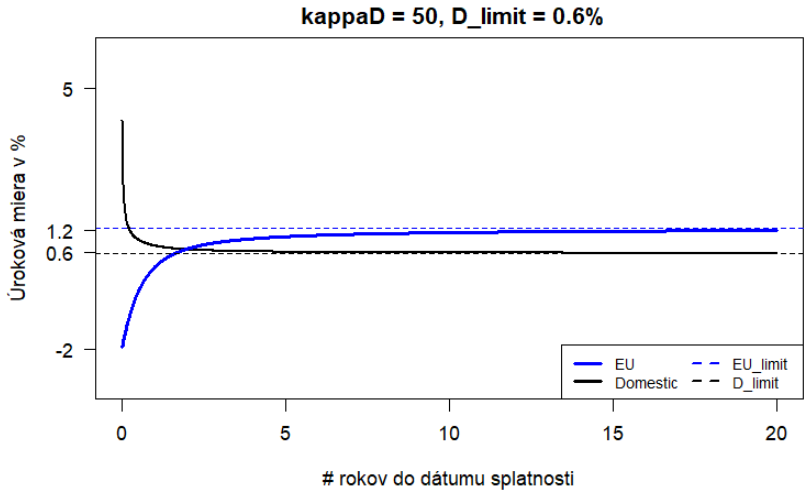



**Obr. 2.9:** Domáca limita pri meniacej sa hodnote parametra $\kappa_D$.

Na Obr. 2.9 teraz pozorujeme správanie $R_{D\infty}$ pre obe vypočítané limity, tak pre $\kappa_D \to \infty$, kde domáca limita veľmi rýchlo konverguje k odvodenému výrazu po dosadení našich parametrov z Tab. 4. Ľahko sa tu vidí aj jej nulová limitná hodnota pri $\kappa_D \to 0$. Podobne ako pri analýze trhovej miery rizika, aj tu nahliadneme na možné zmeny v tvare dlhodobej úrokovej miery a na Obr. 2.10 a 2.11 ilustrujeme jednotlivé výnosy, na ktorých takto pozorujeme prakticky celý rozsah domácej limity pri nemenných ostatných parametroch.




**Obr. 2.10:** Výnosové krivky pri hodnote $\kappa_D = 0$.




**Obr. 2.11:** Výnosové krivky pri hodnote $\kappa_D = 50$.

### Overenie závislosti domácej limity na hodnote $\sigma_D$:

Posledný z pozorovaných parametrov, je volatilita domáceho stochastického procesu, označená ako $\sigma_D$. Pri tomto parametre by sa ľahko dali vysloviť hypotézy o danom limitnom správaní domácej krivky, ktorá by pri nulovej volatilite, t. j. nulových výchylkách v modelovanej short rate, mohla dosahovať najvyššiu možnú rýchlosť, teda príslušnú vypočítanú hodnotu $R_{D\infty}$ pre $\kappa \to \infty$ a to isté by sme očakávali aj v opačnom prípade, kedy by pri nekonečnej $\sigma_D$ bola hodnota domácej limity rovnaká ako pri nulovej $\kappa_D$. Pozrime sa teda na príslušné limity, či sa tieto hypotézy potvrdia.

### Overenie vyslovenej hypotézy o $\sigma_D$ a $\kappa_D$:

Chceme sa teda dopracovať k limitným hodnotám výrazov $\lim_{\sigma_D \to \infty} R_{D\infty}$ a $\lim_{\sigma_D \to 0} R_{D\infty}$, kde

$$R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1) - \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1)^2 + 2\kappa_D \sigma_1^2 B^*}}{-\sigma_1^2}, \tag{2.71}$$

$$B^* = -\frac{1}{\sigma_D^2}(\kappa_D + \sigma_D \lambda_D) + \frac{1}{\sigma_D^2}\sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}. \tag{2.72}$$

Počítaním prvej limity $\lim_{\sigma_D \to \infty} R_{D\infty}$ tak stačí vyrátať

$$\lim_{\sigma_D \to \infty} B^* = \lim_{\sigma_D \to \infty} -\left(\frac{\kappa_D}{\sigma_D^2} + \frac{\lambda_D}{\sigma_D}\right) + \frac{1}{\sigma_D}\sqrt{\frac{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2}{\sigma_D^2} + 2} = 0. \tag{2.73}$$

Potom dosadením do hľadanej limity dostávame (opäť) výsledok v tvare

$$\lim_{\sigma_D \to \infty} R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1 - |\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1|}{-\sigma_1^2}. \tag{2.74}$$

Pre druhú limitu v tvare $\lim_{\sigma_D \to 0} R_{D\infty}$ dostávame mechanicky o niečo zložitejší výpočet, no napriek tomu ide stále o veľmi jednoduchú limitu. Opäť aj tu stačí vyrátať $B^*$, čím dostaneme limitu v tvare

$$\lim_{\sigma_D \to 0} B^* = \lim_{\sigma_D \to 0} \left[ \frac{\kappa_D + \lambda_D \sigma_D - \sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}}{-\sigma_D^2} \right]. \tag{2.75}$$

Na jej výpočet môžeme použiť napr. L'Hospitalovo pravidlo, čím dostávame

$$\lim_{\sigma_D \to 0} B^* = \lim_{\sigma_D \to 0} \frac{\left( \lambda_D - \dfrac{\kappa_D \lambda_D + \sigma_D \lambda_D^2 + 2\sigma_D}{\sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}} \right)}{-2\sigma_D}. \tag{2.76}$$

L'Hospitalovho pravidlo použijeme aj na (2.76) a pre $\lim_{\sigma_D \to 0} B^*$ tak dostávame výraz v tvare

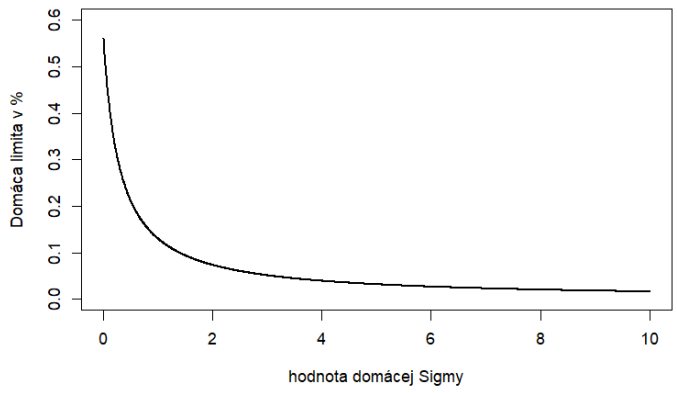
$$\frac{(2 + \lambda_D^2)((\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2) - 4\sigma_D - \lambda_D(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)(\kappa_D \lambda_D + (2 + \lambda_D^2)\sigma_D)}{2\left[(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2\right] \sqrt{(\kappa_D + \lambda_D \sigma_D)^2 + 2\sigma_D^2}}. \tag{2.77}$$

Po dosadení limitnej hodnoty $\sigma_D \to 0$ do výrazu (2.77) tak máme celkový výpočet limity (2.75) ako

$$\lim_{\sigma_D \to 0} B^* = \frac{1}{\kappa_D}. \tag{2.78}$$

Po jej dosadení do predpisu (2.71) pre $R_{D\infty}$ dostávame

$$\lim_{\sigma_D \to 0} R_{D\infty} = \kappa_1 \theta_1 \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1 - |\kappa_1 + \lambda_1 \sigma_1|}{-\sigma_1^2}. \tag{2.79}$$




**Obr. 2.12:** Domáca limita pri meniacej sa hodnote parametra $\sigma_D$.

Vo výsledkoch (2.74), (2.79) v porovnaní s (2.66) a (2.70) je jasne vidieť, že vyslovené hypotézy o limitnom správaní $R_{D\infty}$ vzhľadom na $\kappa_D$ a $\sigma_D$ sa pekne potvrdili. Jej vývoj vzhľadom na zmenu $\sigma_D$ teraz sledujeme na Obr. 2.12. Aj tu sa tak dá spozorovať, že ten vývoj má opačný priebeh k tomu na Obr. 2.9, kde sme mali konkávny tvar limitnej krivky a rovnako sa sledovaný priebeh zastavil v hodnote tesne pod 6%, čo odpovedá použitým parametrom v Tab. 4. Pohľad na samotné výnosové krivky už tak pre nás pri tomto parametri nie je natoľko zaujímavý. Ich priebeh si už čitateľ ľahko predstaví vzhľadom na už dokázané.

# 3 Kalibrácia modelu

Cieľom kalibrácie nami zostaveného dvojfaktorového konvergenčného modelu krátkodobých úrokových mier v (2.1) je nájsť čo najpresnejšie odhady všetkých jeho parametrov tak v európskej časti modelu (2.1), ako aj v tej domácej (2.2) a nájsť tak čo najpresnejšie odhady teoretickej short rate. Najprv budeme odhadovať tie európske, ktoré následne použijeme ako vstup do domáceho submodelu opisujúceho aj vývoj medzibankovej úrokovej miery (IBOR - z ang. interbank offer rate) v krajine, ktorá by sa mohla chystať na vstup do menovej únie. Zároveň sa ale držíme nášho predpokladu o nezápornosti domácich úrokových mier, t. j. dlhopisových výnosov vo vybraných krajinách.

Podstatou je pomocou dostupných výnosových kriviek spraviť čo najlepšie odhady parametrov opisujúcich okrem daných výnosov aj vývoj na prvý pohľad neviditeľných, krátkodobých úrokových mier, ktorých odhad je podstatný pri oceňovaní rôznych derivátov krátkodobej úrokovej miery.

V tejto kapitole navrhneme najprv vhodný algoritmus na odhad európskych aj domácich úrokových mier, ktorý budeme testovať na simulovaných dátach a následne ho použijeme aj na zvolenú reálnu dátovú sadu. Pri navrhovaní konkrétneho algoritmu vychádzame z viacerých publikovaných článkov a záverečných prác, ktoré sa pri iných modeloch už podobnej kalibračnej problematike venovali. Ako základ našej optimalizácie použijeme váženú metódu najmenších štvorcov, pomocou ktorej porovnávame odhadované výnosové krivky od tých skutočných, resp. simulovaných. Takéto pozorovanie robíme v istom časovom okamihu, napr. pre jeden konkrétny deň, v ktorom pre zvolený dlhopis sledujeme výnosy pre každú dostupnú dobu do jeho splatnosti. Zároveň tu jednotlivým maturitám kladieme rôzne váhy. Vychádzame pri tom najmä z [10], [2] a [1].

Pre nasledovný postup si pripomeňme podobu navrhnutého modelu, ktorý pre potreby ďalšieho postupu prevedieme z reálnej, do rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miery (viac o problematike pravdepodobnostnej miery sa dočítame napr. v [16]). Navrhnutý model zo sekcie (2.1) si tak prepíšeme do spoločného systému stochastických diferenciálnych

rovníc ako

$$\begin{aligned} r_e &= r_1 + r_2 \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \tilde{\sigma}_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2, \\ dr_D &= \kappa_D(r_1 - r_d)dt + \tilde{\sigma}_D\sqrt{r_d}dw_D, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pre $r_1, r_D \in (0, \infty)$ a ľubovoľnú zložku $r_2$. Ako sme už uviedli, Wienerove procesy $w_1$, $w_2$ a $w_D$ ostávajú nezávislé.

Prechod do rizikovo neutrálnej miery spočíva v začlenení príslušných trhových mier rizika $\lambda_1$, $\lambda_2$ a $\lambda_D$ do predpisu nášho modelu. Ide o premenné vyjadrujúce závislosť medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami. Rovnako sme ich už zaviedli aj v PDR pre ceny dlhopisov vo Vašíčkovom a CIR modeli (2.3), ako aj v PDR pre cenu domácich dlhopisov v (2.41). Prevodom do rizikovo neutrálnej miery zapíšeme model (3.1) v novom tvare, kde

$$\begin{aligned} r_e &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= (\alpha_1 + \beta_1 r_1)dt + \sigma_1 dw_1, \\ dr_2 &= (\alpha_2 + \beta_2 r_2)dt + \sigma_2 dw_2, \\ dr_D &= (\alpha_D + \beta_D r_D + \delta_D r_1)dt + \sigma_D dw_D, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pričom variancie procesov označíme ako $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1\sqrt{r_1}$, $\sigma_D = \tilde{\sigma}_D\sqrt{r_d}$. Táto reparametrizácia modelu je zachytená nasledovnou dynamikou:

$$\alpha_1 = \kappa_1\theta_1, \quad \beta_1 = -\kappa_1 - \lambda_1\sigma_1, \tag{3.3}$$

$$\alpha_2 = \kappa_2\theta_2 - \lambda_2\sigma_2, \quad \beta_2 = -\kappa_2, \tag{3.4}$$

$$\alpha_D = 0, \quad \beta_D = -\kappa_D - \lambda_D\sigma_D, \quad \delta_D = \kappa_D. \tag{3.5}$$

Týmto zápisom zachovávame požadovaný drift sledovaných stochastických procesov krátkodobých úrokových mier aj pod rizikovou neutralitou. Pri domácej úrokovej miere je uvedený aj ďalší dodatočný parameter $\alpha_D$ slúžiaci na opísanie malej nezápornej výchylky domáceho procesu pre $r_D$. Dôležitosť tohoto parametra sa ale na reálnych dátach v [6] neukazuje natoľko štatisticky významná, aby sme s ním museli rátať. Toto označenie preto v ďalšom postupe úplne vynecháme a budeme sa tváriť, že tu vlastne ani nie je.

## 3.1 Algoritmus kalibrácie navrhnutého konvergenčného modelu

Ako uvádzame v úvode kapitoly, cieľom je nájsť čo najpresnejšie odhady parametrov vstupujúcich do nášho modelu, t. j. kalibrovať model. Treba si uvedomiť, že náš model napriek jeho značnému zjednodušeniu po vynechaní korelačných koeficientov za predpokladu nezávislosti náhodných faktorov, obsahuje stále veľké množstvo parametrov - takže naozaj nejde o niečo celkom triviálne. Napriek tomu existuje viacero metód, ktoré by nám tu mohli poslúžiť a pri istých skutočnostiach nemusí ísť ani o niečo až tak zložité. Nás tu oslovil najmä vyššie spomenutý odhad využitím metódy najmenších štvorcov, ktorý sa javí ako pomerne priamočiary. V tomto algoritme budeme optimalizovať vážený súčet štvorcov výchyliek medzi odhadnutými a skutočnými výnosovými krivkami.

Nech $R^{i,j}$ označuje dlhopisový výnos v $i$-tý deň s maturitou $\tau_j$ a $R(r_1^i, r_2^i, \tau_j)$ je výnos vypočítaný ako riešenie dvojfaktorového modelu, kde označenia $r_1^i$ a $r_2^i$ predstavujú doň vstupujúce faktory pre $i$-tý deň pozorovania. Naviac majme aj premennú $w_{i,j}$ predstavujúcu konkrétnu váhu súčtu štvorcov opäť v $i$-tý deň a pre $j$-tú dobu do splatnosti. Účelová funkcia, ktorou hľadáme optimálne rozloženie faktorov $r_1^i$ a $r_2^i$ pomocou zároveň odhadovaných parametrov modelu $\alpha$, $\beta$ a $\sigma$ má tak nasledovnú podobu:

$$J(\alpha, \beta, \sigma, r_1(.), r_2(.)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{i,j} \left( R(r_1^i, r_2^i, \tau_j) - R^{i,j} \right)^2, \tag{3.6}$$

kde $n$ označuje posledný pozorovaný deň a $m$ počet maturít. Výraz (3.6) tak označuje všeobecný tvar účelovej funkcie pre dvojfaktorový model, ktorý teraz aplikujeme tak na náš európsky, ako aj domáci submodel.

### 3.1.1 Postup pre odhad európskych výnosových kriviek

Pre prípad európskeho dvojfaktorového submodelu, kde sa prvý faktor $r_1$ riadi stochastickým CIR procesom a druhý $r_2$ zase Vašíčkovým prepíšeme všeobecný tvar účelovej funkcie (3.6) ako

$$J_e(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2, r_1(.), r_2(.)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{i,j} \left( R_e(r_1^i, r_2^i, \tau_j) - R_e^{i,j} \right)^2. \tag{3.7}$$

Pre výrazné zjednodušenie pri optimalizácii účelovej funkcie (3.7) budeme tento model kalibrovať pomocou už známeho odhadu výnosov vo Vašíčkovom dvojfaktorovom modeli [22], pričom využitím prevodového vzťahu (3.3) do rizikovo neutrálnej miery pre CIR

proces, sa tu zachová požadovaný drift. Správnosť odhadu môžeme očakávať v závislosti od toho, nakoľko sa to presné rozdelenie pre CIR bude líšiť od použitého normálneho, samotný rozdiel vo volatilite procesu tu nehrá veľkú rolu. Význam použitia Vašíčkovho modelu je tu najmä v zásadnom zjednodušení predpisu pre cenu dlhopisu, ktorú sme odvodili v 2 kapitole pre dvojfaktorový CIR + Vašíček model. Možnosť aplikovania Vašíčka aj na iný model v tvare súčtu dvoch faktorov bola vysvetlená v [2], kde sa ním modelovala aj situácia pre dvojfaktorový CIR model. V článku si všimneme aj odvodenie jeho ceny zo všeobecného tvaru PDR pre cenu dlhopisov, ktorú dostaneme analogicky ako pri súčte nášho zmiešaného modelu. Odvodenie tejto ceny je v rovnici (2.34). Pri počítaní ceny vo Vašíčkovom modeli tak stačí využiť dve odvodenia pre jednofaktorového Vašíčka použitím koeficientov (2.17), (2.21). Cenu dvojfaktorového Vašíčkovho modelu tak podľa [2] vieme prepísať do tvaru

$$\ln(P_e(r_1, r_2, \tau)) = c_{01}(\tau)r_1 + c_{02}(\tau)r_2 + c_{11}(\tau)\alpha_1 + c_{12}(\tau)\alpha_2 + c_{21}(\tau)\sigma_1^2 + c_{22}(\tau)\sigma_2^2,$$

kde jednotlivé koeficienty pre $k = 1, 2$ vyzerajú následovne:

$$c_{0k}(\tau) = \frac{1 - e^{\beta_k \tau}}{\beta_k}, \tag{3.8}$$

$$c_{1k}(\tau) = \frac{1}{\beta_k}\left(\frac{1 - e^{\beta_k \tau}}{\beta_k} + \tau\right), \tag{3.9}$$

$$c_{2k}(\tau) = \frac{1}{2\beta_k^2}\left(\frac{1 - e^{\beta_k \tau}}{\beta_k} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_k \tau})^2}{2\beta_k}\right). \tag{3.10}$$

Z toho si už ľahko všimneme, že pri pevne daných hodnotách $\beta_1$ a $\beta_2$ máme cenu dlhopisu vyjadrenú ako lineárnu funkciu podľa $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, \sigma_1^2$ a $\sigma_2^2$. Tento predpis aplikujeme na $i$-tý deň aj $j$- tú maturitu vo výraze

$$R_e(r_1^i, r_2^i, \tau_j) = -\frac{\ln(P_e(r_1^i, r_2^i, \tau_j))}{\tau_j},$$

pre približné výnosy v rovnici (3.7), čím pri fixných hodnotách pre $\beta_1$, $\beta_2$, dostaneme kvadratickú účelovú funkciu zapísanú ako

$$\begin{aligned} J_e(\alpha_1, \sigma_1, \alpha_2\sigma_2, r_1(.), r_2(.)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2}(c_{01}(\tau)r_1 + c_{02}(\tau)r_2 + \\ + c_{11}(\tau)\alpha_1 + c_{12}(\tau)\alpha_2 + c_{21}(\tau)\sigma_1^2 + c_{22}(\tau)\sigma_2^2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ďalej tak riešime $(2n+4)$ rozmerný regresný problém so skalárnymi premennými $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ a $n$-rozmernými vstupnými vektormi pre odhady short rate $r_1^i$ a $r_2^i$ pre $i = 1$ až $n$. Pre

daný systém si volíme hodnoty jednotlivých váh $w_{i,j}$ ako $\tau_j^2$ pre $j$-tú maturitu. Dáme tak pri fitovaní o niečo vyšší význam časovo vzdialenejším výnosovým odhadom a zároveň si tým o niečo zjednodušíme prácu pri odvodzovaní predpisu regresného systému. Takto vysoko rozmerný systém následne riešime napr. metódou konjugovaných gradientov. Okrem toho ale potrebujeme nájsť aj optimálne hodnoty $\beta_1$ a $\beta_2$ vstupujúce do odvodeného systému. Aplikujeme tak dvojrozmernú optimalizáciu účelovej funkcie (3.11) podľa $\beta_1$ a $\beta_2$, čím nájdeme optimálne hodnoty biet spolu s ostatnými parametrami z riešeného regresného systému.

Tento systém prevzatý z [10] tak pre riešenie európskej časti modelu zapíšeme ako

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

pričom jednotlivé bloky systému zapíšeme následovne:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{11}c_{11} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{11}c_{21} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{11}c_{12} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{11}c_{22} \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{21}c_{11} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{21}c_{21} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{21}c_{12} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{21}c_{22} \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{12}c_{11} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{12}c_{21} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{12}c_{12} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{12}c_{22} \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{22}c_{11} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{22}c_{21} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{22}c_{12} & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_{22}c_{22} \end{bmatrix}_{4\times 4},$$

$$C^T = B = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{11}c_{01} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{11}c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{11}c_{02} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{11}c_{02} \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{21}c_{01} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{21}c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{21}c_{02} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{21}c_{02} \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{12}c_{01} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{12}c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{12}c_{02} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{12}c_{02} \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{22}c_{01} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{22}c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{22}c_{02} & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 c_{22}c_{02} \end{bmatrix}_{4\times 2n},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}_{2n\times 2n}, D_{kh} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{0k}c_{0h} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_{0k}c_{0h} \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$u^T = \left[ -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_e^{i,j} c_{11}, -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_e^{i,j} c_{21}, -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_e^{i,j} c_{12}, -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_e^{i,j} c_{22} \right]_{1\times 4},$$

$$v^T = \left[ -\sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} R_e^{1,j} c_{01}, \dots, -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} R_e^{n,j} c_{01}, -\sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} R_e^{1,j} c_{02}, \dots, -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} R_e^{n,j} c_{02} \right]_{1\times n},$$

a hľadané riešenie má tak tvar

$$x = (\alpha_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \sigma_2^2)^T, \qquad y^T = \left(r_1^1 \dots r_1^n, r_2^1 \dots r_2^n,\right)_{1\times 2n}. \tag{3.12}$$

Rovnako autorka v [10] ukázala, že vďaka lineárnosti systému a diagonálnosti matice $D$ je systém možné riešiť aj znížením jeho dimenzie pomocou inverznej matice $D^{-1}$. Takto vďaka rovnosti

$$Cx + Dy = v \tag{3.13}$$

vieme vektor faktorov v $y$ vyjadriť aj ako

$$y = D^{-1}(v - Cx). \tag{3.14}$$

Podobne zo vzťahu

$$Ax + By = u \tag{3.15}$$

dostávame aj lineárny vzťah pre hľadané domáce parametre v $x$, kde

$$(A - BD^{-1}C)x = u - BD^{-1}v. \tag{3.16}$$

Takýmto spôsobom sme dostali sústavu štyroch lineárnych rovníc pre odhad parametrov parametrov vstupujúcich do modelu.

Po optimalizácii je potrebné zhodnotiť, ktorý z odhadnutých faktorov vystupuje ako CIR proces pre $r_1$ a ktorý ako Vašíčkov pre $r_2$. Nie je to vôbec jednoznačné vzhľadom na to, že do predpisu (3.8) pre koeficienty $c_{01}$ a $c_{02}$ prislúchajúcich jednotlivým odhadom short rate v účelovej funkcii (3.11) nevstupuje nič, čím by sme vedeli zachytiť odlišné drifty pre oba procesy. Zároveň si treba uvedomiť, že v predchádzajúcej optimalizácii fitujeme len výnosy pozostávajúce zo súčtu faktorov $r_e = r_1 + r_2$ a je preto veľmi pravdepodobné, že jednotlivé faktory $r_1$ a $r_2$ budú posunuté o nejakú konštantu $K$. To, že to naozaj vychádza posunuté sa už ukázalo v [2]. Do algoritmu totiž nevstupujú žiadne predpoklady na tieto zložky európskej short rate, takže okrem samotného posunu sa môže stať aj to, že faktory budú vymenené a zahrnutá tu zatiaľ nebola ani podmienka na nezápornosť CIR procesu.

Na simulovaných dátach by to malo byť jednoduché, keďže jednotlivé odhady faktorov short rate, ktoré nemajú nejakú priamu ekonomickú interpretáciu ľahko porovnáme s pôvodne generovanými hodnotami. Po ich vzájomnom odčítaní by sme dostali zhodné výchylky na celej časovej osi. Pri reálnych dátach takúto možnosť nemáme. Podľa autorky v práci [11] by preto malo význam porovnať jednotlivé posunuté faktory metódou

maximálnej vierohodnosti, ktorou vďaka prvotným faktorovým odhadom a ich predpokladanému pravdepodobnostnému rozdeleniu, vieme nájsť aj najpravdepodobnejší scenár ich posunu. Ako vstup do vierohodnostnej funkcie použijeme hustotu normálneho rozdelenia pre súčet posunutých faktorov, pričom tu zdôrazníme, že CIR proces publikovaný v [7] sa neriadi normálnym, ale necentrálnym $\chi^2$ rozdelením. Ide teda len o aproximáciu pomocou hustoty normálneho rozdelenia. Zároveň vieme, že rozdelenie súčtu viacerých normálnych rozdelení je stále normálne, takže týmto poznáme aj rozdelenie pre európsku short rate $r_e$, pre ktorú zostavíme danú vierohodnostnú funkciu. Tú budeme optimalizovať vzhľadom na ďalšie parametre do nej vstupujúce a zároveň tým zabezpečíme, aby súčet $r_e$ ostal nezmenený. Tu si ale treba uvedomiť, že takouto metódou sa potrebujeme dopredu rozhodnúť, ktorý z odhadnutých faktorov má pravdepodobnostné rozdelenie CIR procesu. Ako rozumný sa zdá byť postup autorky v [11], ktorá si po uvážení oboch možností vybrala tú pravdepodobnejšiu, t. j. poradie odhadnutých faktorov s vyššou hodnotou vierohodnostnej funkcie. Zaveďme si teda označenie $\hat{r}_1 = r_1 + K$ a $\hat{r}_2 = r_2 - K$ pre hľadané, skutočné hodnoty short rate. Predpokladajme, že $\hat{r}_1$ sa správa podľa CIR stochastického procesu. Potom platí

$$\hat{r}_e = \hat{r}_1 + \hat{r}_2 = r_1 + K + r_2 - K = r_1 + r_2 = r_e.$$

Uvádzame aj použité momenty pre jednotlivé pravdepodobnostné rozdelenia, kde

$$E_1 = (r_1 + K)e^{-\kappa_1 dt} + (1 - e^{-\kappa_1 dt})\theta_1, \tag{3.17}$$

$$E_2 = (r_2 + K)e^{-\kappa_2 dt} + (1 - e^{-\kappa_2 dt})\theta_2, \tag{3.18}$$

$$D_1 = (r_1 + K)\,\frac{\sigma_1^2}{\kappa_1}\left(e^{-\kappa_1 dt} - e^{-2\kappa_1 dt}\right), \tag{3.19}$$

$$D_2 = \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2}(1 - e^{-2\kappa_2 dt}). \tag{3.20}$$

Ako strednú hodnotu a varianciu CIR faktora teda použijeme presné hodnoty (3.17) a (3.19) odpovedajúce CIR procesu. Rozdiel faktorov po aproximácii normálnym rozdelením bude tak len v disperziách (3.19), (3.20). Vierohodnostnú funkciu budeme teda počítať pre náhodnú premennú $\hat{r}_e = r_1 + K + r_2 - K$ s normálnym pravdepodobnostným rozdelením, kde

$$\hat{r}_e \sim \mathcal{N}(E_1 + E_2, D_1 + D_2).$$

Ideme teda optimalizovať ďalšiu účelovú funkciu, kde pre účel odhadu posunu faktorov o konštantu $K$ tu zahrnieme aj podmienku nezápornosti uvažovaného CIR faktora, ktorú sme vzhľadom na použitie dvojfaktorového Vašíčka zatiaľ nepoužili. Pre všeobecný tvar vierohodnostnej funkcie, uvedený napr. v [21] tu maximalizujeme jej prirodzený logaritmus, ktorého použitie je vo všeobecnosti o niečo praktickejšie. Pri tejto úlohe vyzerá následovne:

$$log(L) = \sum_{i=1}^{n} \left[ -log\left(\sqrt{2\pi(D_1^i + D_2^i)}\right) - \frac{(\hat{r}_e - (E_1^i + E_2^i))^2}{2(D_1^i + D_2^i)} \right]. \tag{3.21}$$

Optimalizáciou logaritmu vierohodnostnej funkcie (3.21) dostaneme posunutý odhad faktorov spolu s príslušnými parametrami v reálnej miere, odpovedajúcimi danému posunu o konštantu. Z doterajšieho odhadu metódou najmenších štvorcov tu teda vstupujú len odhadnuté faktory $r_1$ a $r_2$ spolu so súčtom predpísaných stredných hodnôt a variancií (3.17) až (3.20). Funkciu (3.21) môžeme optimalizovať cez všetky reálne parametre spolu s konštantou $K$ alebo sa môžeme zamyslieť, či nám tu niektorý z nich ešte nevypadne. Na správny odhad konštanty $K$ je potrebné zaviesť okrem ohraničenia na CIR faktor aj druhú stranu hraničného intervalu.

Vzhľadom na to, že premenné $r_1$ a $r_2$ nevieme ekonomicky interpretovať, pri ich posune cítime značnú voľnosť. Berieme ale do úvahy fakt, že v práci sa venujeme konvergenčnému modelu do ktorého vstupuje aj ďalší, tretí faktor $r_D$ vychádzajúci z domácej výnosovej krivky. O tom vieme povedať, že je postupne priťahovaný k hodnote $r_1$, ktorá je síce náhodná, no $r_D$ už nie - tá závisí priamo od počiatku domácej výnosovej krivky. Síce ide len o teoretický počiatok (nulová maturita prakticky neexistuje), dá sa predpokladať, že výnosy domácich dlhopisov s najkratšou možnou maturitou by mohli opísať jej celkom realistický priebeh. Vzhľadom na to si zvolíme ako možné horné ohraničenie pre uvažovaný nezáporný CIR faktor práve strednú hodnotu domácich dlhopisových výnosov s najkratšou dostupnou maturitou.

Pre čo najvyššiu mieru efektívnosti zvolenej optimalizačnej metódy pri maximalizácii účelovej funkcie (3.21) je vhodné pri jej odhade cez viacero alebo všetky reálne parametre modelu nájsť čo najvhodnejšie štartovacie hodnoty. Na rad prichádza využitie aj nami odvodeného predpisu pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom CIR - Vašíček modeli (2.34) z 2. kapitoly, ktorého optimalizáciou nájdeme čo najpresnejšie hodnoty pre trhové miery rizika $\lambda_1$, $\lambda_2$ a $\kappa_1$ vyžitím všetkých doterajších odhadov pre $r_1$, $r_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ a

príslušnej dynamiky prevodu parametrov z rizikovo neutrálnej miery do reálnej, v ktorej maximalizujeme aj našu vierohodnostnú funkciu (3.21). Priebeh optimalizácie je rovnaký ako pre Vašíčkov model, teda využitím metódy najmenších štvorcov. Rozdiel je iba v tom, že za fitované výnosy vstupuje do účelovej funkcie (3.6) predpis presných odhadov odpovedajúcich navrhnutému európskemu submodelu. Výsledné odhady ale nie sú presné, keďže funkciu optimalizujeme len cez 3 parametre a ostatné nechávame zafixované. S týmto odhadom ale očakávame uspokojivé štartovacie hodnoty všetkých parametrov pre maximalizáciu vierohodnostnej funkcie (3.21).

Z výsledných optimálnych odhadov parametrov v reálnej miere, tak vieme o niečo presnejšie popísať vývoj jednotlivých faktorov $r_1$ a $r_2$. Pre samotnú európsku úrokovú mieru by nám postačil aj výstup z prvej časti výpočtu kvadratickej funkcie. Každopádne, pomocou tohoto odhadu hlavne pre $r_1$ by sme mohli nájsť čo najpresnejšiu hodnotu domáceho faktora $r_D$.

Z výsledných odhadov parametrov v reálnej miere vieme následne opäť odhadnúť konečné trhové miery rizika $\lambda_1$, $\lambda_2$ a z nich cez prevodové vzťahy (3.3) dopočítame aj optimálne hodnoty parametrov európskeho submodelu v rizikovo neutrálnej miere. Tie následne vstupujú do konvergenčného submodelu pre domáce výnosy, ktorých optimalizáciu si vysvetlíme o chvíľu v ďalšej sekcii práce.

### 3.1.2 Postup pre odhad domácich výnosových kriviek

O prípade domáceho konvergenčného submodelu už vieme, že sa tu faktor $r_D$ riadi obdobe CIR procesu a je v čase priťahovaný k ďalšiemu faktoru $r_1$ (výstup z európskeho submodelu), ktorý tak rovnako vstupuje do modelovania domácich dlhopisov a aj na tento odhad preto skúsime aplikovať všeobecný tvar účelovej funkcie (3.6) pre minimalizáciu váženého súčtu druhých mocnín výchyliek fitovaných domácich výnosov od skutočných, do ktorej okrem uvedených faktorov vstupujú opäť aj všetky parametre modelu prislúchajúce prvému indexu pre CIR proces (3.3) a poslednému $r_D$ pre domácu short rate (3.4). Domáca účelová funkcia tak dostáva tvar

$$J_d(\beta_D, \sigma_D, \delta_D, \alpha_1, \beta_1, \sigma_1, r_D(.), r_1(.)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{i,j} \left( R_d(r_D^i, r_1^i, \tau_j) - R_d^{i,j} \right)^2 . \qquad (3.22)$$

Logaritmus ceny dlhopisu danej modelom pre domácu short rate vyjadríme ako

$$\ln[P_D] = \ln[P_D(r_D, r_1, \tau)] = A(\tau) - r_D B(\tau) - r_1 c(\tau) \tag{3.23}$$

Pri odvodzovaní cien domácich dlhopisov v 2. kapitole sme sa dostali len k numerickému riešeniu pomocou systému diferenciálnych rovníc. Ide teda len o istú aproximačnú formulu na odhad koeficientov $A(\tau)$, $B(\tau)$ a $C(\tau)$. Teraz pri kalibrácii modelu aplikujeme podobnú metódu odhadu koeficientov v (3.23) ako v európskej časti pomocou riešenia Vašíčkovho modelu. Vhodnosť použitia tejto metódy sa už ukázala v článku [1], v ktorom autorky vychádzajú z rovnakého postupu ako pri európskych dátach v [10], ktorý sme už využili pri fitovaní európskych dlhopisov nášho CIR - Vašíček dvojfaktorového modelu. V tomto prípade vyzerajú odvodené koeficienty pre cenu domáceho dlhopisu následovne:

$$B(\tau) = \frac{e^{\beta_D \tau} - 1}{\beta_D}, \tag{3.24}$$

$$C(\tau) = \frac{\delta_D}{\beta_D \beta_1} \frac{\beta_D \left(1 - e^{\beta_1 \tau}\right) - \beta_1 \left(1 - e^{\beta_D \tau}\right)}{\beta_D - \beta_1} = \delta_D \tilde{C}(\tau), \tag{3.25}$$

$$A(\tau) = \int_0^\tau \left[ -\alpha_1 C(s) + \frac{\sigma_D^2}{2} B^2(s) + \frac{\sigma_1^2}{2} C^2(s) \right] ds. \tag{3.26}$$

Vďaka tomu vieme rovnako ako v európskej časti zapísať logaritmus ceny dlhopisu ako lineárnu funkciu a z účelovej funkcie tak opäť dostaneme pri niektorých pevne zvolených parametroch kvadratickú funkciu, ktorá sa vďaka odvodenému lineárnemu predpisu dá zapísať aj v tvare lineárnej regresie, tentokrát aj s nenulovým interceptom. Všetky potrebné európske parametre tu už poznáme z predchádzajúceho postupu. Takže cenu domáceho dlhopisu v našom modeli (3.2) budeme podľa predpisu v [1] počítať z Vašíčkovho modelu ako

$$\ln(P_D(r_D, r_1, \tau)) = g_0(\tau_D, \beta_D) r_D + g_1(\tau_D, \beta_D) \sigma_D^2 + g_2(\tau_D, \beta_D, \delta_D) \tag{3.27}$$

a funkcie $g_0$, $g_1$ a $g_2$ vyjadríme následovne:

$$g_0(\tau_D, \beta_D) = -B(\tau_D, \beta_D), \tag{3.28}$$

$$g_1(\tau_D, \beta_D) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_D} -B^2(s, \beta_D) ds, \tag{3.29}$$

$$g_2(\tau_D, \beta_D, \delta_D) = \left[ \frac{\sigma_1^2}{2} \int_0^{\tau_D} \tilde{C}^2(s) ds \right] \delta_D^2 - \left[ \alpha_1 \int_0^{\tau_D} \tilde{C}(s) ds + \tilde{C}(\tau_D, \beta_D) r_1 \right] \delta_D. \tag{3.30}$$

Vidíme, že pri voľbe parametrov $\beta_D$ a $\delta_D$ je naša účelová funkcia kvadratickou podľa faktora $r_D$ a parametra domácej disperzie $\sigma_D^2$. Podobne ako pri európskych parametroch, aj tu

zostavíme vhodný regresný model, ktorý sa tak redukuje na dvojrozmerný optimalizačný problém. V tom pri voľbe $\beta_D$ a $\delta_D$ nájdeme aj príslušné optimálne hodnoty faktora $r_D$ spolu s parametrom $\sigma_D^2$. Naviac je tu doplnený predpoklad nezápornej domácej úrokovej miery, ktorý tentokrát na rozdiel od toho na zložku $r_1$ v európskom submodeli môžeme zakomponovať už pri optimalizácii účelovej funkcie 3.22. Pripomíname, že v európskej časti to možné nebolo, keďže tam sme s výnosovými krivkami modelovali priamo súčet faktorov $r_e$ a síce sme pri tom našli aj jednotlivé faktory, nebolo možné ihneď identifikovať rozdelenie každého z nich a tak zadať ohraničenie na CIR faktor. Zafixované parametre $\beta_D$ a $\delta_D$ opäť nájdeme dvojrozmernou optimalizáciou použitého systému odvodeného z [1] a [10].

Daný systém tak pre riešenie domácej časti nášho modelu zapíšeme ako

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

kde

$$A = \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} g_1^2, \qquad B = \left[ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} g_1 g_0 \quad \dots \quad \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_1 g_0 \right]_{1\times n},$$

$$C = (B^T)_{n\times 1}, \qquad D = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} g_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_0^2 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$u = -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_d^{i,j} g_1 - \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} g_2 g_1,$$

$$v^T = \left[ -\sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} R_d^{1,j} g_0 - \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} g_2 g_0, \quad \dots \quad , -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} R_d^{n,j} g_0 - \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} g_2 g_0 \right]_{1\times n}$$

a hľadané riešenie má tak tvar

$$x = \sigma_D^2, \qquad y^T = \left( r_d^1 \dots r_d^n, \right)_{1\times n}. \tag{3.31}$$

Podobne ako v európskej časti môžeme aj tu využiť vlastnosť lineárnosti systému a diagonálnej matice $D$. Systém je tak možné zjednodušiť znížením dimenzie. Takže vďaka rovnostiam

$$Cx + Dy = v, \tag{3.32}$$

$$Ax + By = u \tag{3.33}$$

vieme $y$, resp. $x$ vyjadriť aj ako

$$y = D^{-1}(v - Cx), \tag{3.34}$$

$$(A - BD^{-1}C)x = u - BD^{-1}v. \tag{3.35}$$

## 3.2 Testovanie algoritmu na simulovaných short rate

### 3.2.1 Kalibrácia európskeho submodelu na simulovaných dátach

Európsky submodel pozostáva z dvojfaktorového CIR - Vašíček modelu. Na simuláciu short rate potrebujeme použiť vhodné pravdepodobnostné rozdelenia. Vašíčkov model sa riadi normálnym rozdelením s nasledovnými momentmi:

$$E[r_{t+\Delta t} \mid r_t] = r_t e^{-\kappa \Delta t} + (1 - e^{-\kappa \Delta t})\theta \tag{3.36}$$

$$D[r_{t+\Delta t} \mid r_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa \Delta t}). \tag{3.37}$$

CIR zložku európskeho submodelu generujeme podľa strednej hodnoty a variancie necentrálneho $\chi^2$ - rozdelenia [7]. Jeho nasledovná praktická podoba sa objavila aj v [11]. Majme označenia:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\kappa}{(1 - e^{-\kappa \Delta t})\sigma^2}, \\ q &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1, \\ u &= c r_t e^{-\kappa \Delta t}, \\ v &= c r_{t+\Delta t}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

pričom pracujeme s transformáciou úrokovej miery $s_{t+\Delta t} = 2v$. Vtedy ak $I_q(2\sqrt{uv})$ je modifikovaná Besselova funkcia rádu q a triedy 1 a

$$g(r_{t+\Delta t}, r_t, \kappa, \theta, \sigma) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}}, \tag{3.39}$$

tak

$$f(s_{t+\Delta t} \mid s_t, \kappa, \theta, \sigma) = \frac{1}{2c} g(r_{t+\Delta t}, r_t, \kappa, \theta, \sigma) \tag{3.40}$$

je hustota necentrálneho $\chi^2$ - rozdelenia s $2q + 2$ stupňami voľnosti.

Pomocou týchto rozdelení teraz generujeme príslušné krátkodobé úrokové miery $r_1$ a $r_2$ prostredníctvom vhodne navrhnutých vstupných parametrov v reálnej miere, ako aj

| proc. | $r(0)$ | $\kappa$ | $\sigma$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 0.001 | 1.80 | 0.005 | 0.005 |
| $r_2$ | -0.003 | 0.05 | 0.01 | -0.01 |

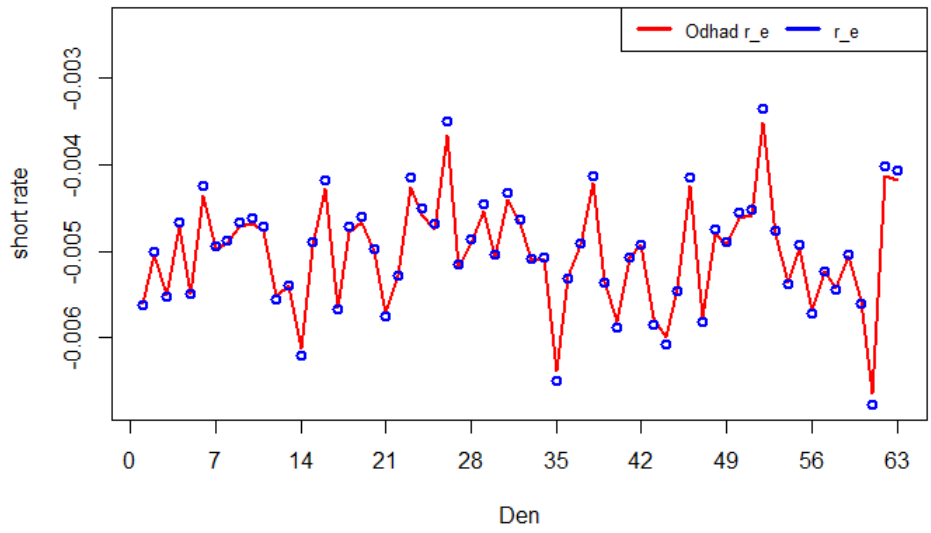
**Tabuľka 5:** Zvolené parametre modelu pre účel simulácie.

počiatočných hodnôt short rate v aktuálnom čase. Simulujeme pri tom obdobie jedného kvartálu, teda $n = 63$ pracovných dní s časovým krokom $dt = 1/252$. Zvolené parametre pre $r_1$ a $r_2$ vstupujúce do príslušných pravdepodobnostných rozdelení teraz uvádzame v Tab. 5.

Pre takto generované short rate $r_1$ a $r_2$ (z preddefinovaných hodnôt parametrov) teraz využitím odvodeného predpisu pre cenu dlhopisov v navrhnutom modeli typu CIR + Vašíček (2.34) zo sekcie 2.2.1 môžeme dosadením do vzťahu (2.35) pre dlhopisový výnos vygenerovať aj príslušné výnosové krivky odpovedajúce navrhnutému modelu. Po ich vložení spolu s generovanými short rate do odvodeného regresného systému, v ktorom optimalizujeme európsku účelovú funkciu (3.11), môžeme pomocou dvojrozmernej optimalizácie cez hľadané parametre $\beta_1$ a $\beta_2$ nájsť tak ich optimálne vstupy do systému, ako aj celý systém následne aj vyriešiť. Daný systém riešime metódou konjugavaných gradientov zabudovanej v balíku *deSolve* [15] v prostredí R. Na dvojrozmernú optimalizáciu systému sme pritom použili v R zabudovanú všeobecnú optimalizačnú funkciu *Optim* založenú práve aj na algoritme konjugovaných gradientov. Dostávame tak nasledovné od-

| | $r_e - \hat{r}_e$ | $\lvert r_e - \hat{r}_e \rvert$ |
|---|---|---|
| Minimum | -1.232e-04 | 1.329e-07 |
| 1. kvantil | -1.509e-05 | 1.937e-05 |
| Median | 3.068e-05 | 4.235e-05 |
| Mean | 2.322e-05 | 5.075e-05 |
| 3. kvantil | 6.025e-05 | 7.073e-05 |
| Maximum | 1.627e-04 | 1.627e-04 |

**Tabuľka 6:** Porovnanie odhadu európskej short rate $\hat{r}_e$ od od jej generovanej hodnoty $r_e$.




**Obr. 3.1:** Odhady (čiara) a presné hodnoty (krúžky) vygenerovanej európskej short rate.

hady parametrov v rizikovo neutrálnej miere zapísané v Tab. 8. Na Obr. 3.1 sledujeme vývoj odhadnutej európskej short rate $\hat{r}_e$ v porovnaní s jej presnou simuláciou. Uvedená štatistika tohto porovnania je zaznamenaná aj v Tab. 6. Vidíme, že pri chybe 4. rádu sa síce odhady s presnými hodnotami úplne nezhodujú, no vývoj skutočnej hodnoty $r_e$ je na danej ilustrácii vcelku dobre opísaný a môžeme tak povedať, že hodnota účelovej funkcie v Tab. 7 rádovo na $-7$ je uspokojivá.

| | |
|---|---|
| $J_e$ | 3.431351e-07 |

**Tabuľka 7:** Hodnota účelovej funkcie po odhade parametrov v Tab. 8.

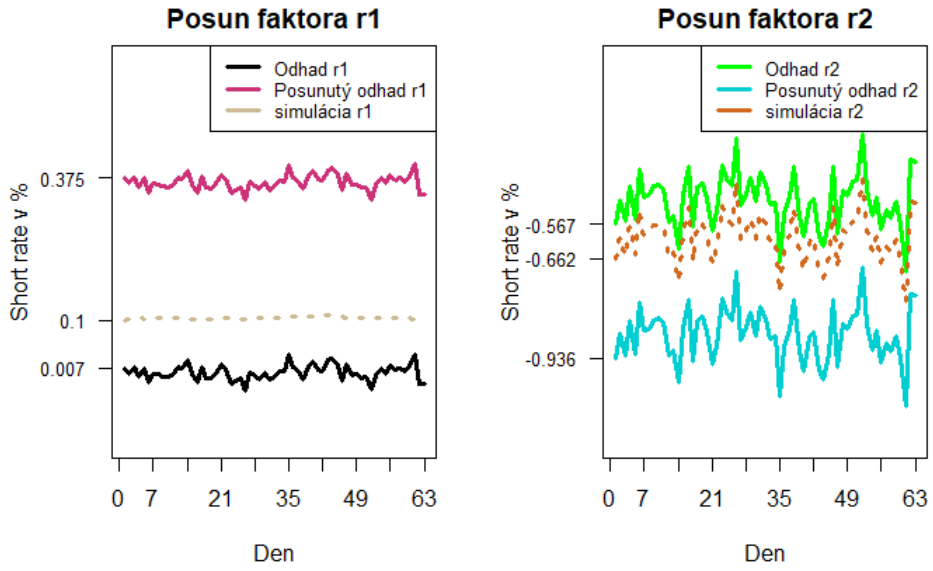
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.113557e-05 | -8.322939e-05 | 0.002282375 | 0.007648644 | -5.677448 | -0.2309451 |

**Tabuľka 8:** Prvotné odhady parametrov v rizikovo neutrálnej miere po odhade z regresie.

V Tab. 8 pozorujeme prvotné odhady z odhadu metódou najmenších štvorcov v rizikovo neutrálnej miere. Ako sme už v predchádzajúcej sekcii bližšie priblížili, potrebujeme

sa rozhodnúť pre správny výber CIR a Vašíčkovho faktora. Urobíme tak opísanou metódou maximálnej vierohodnosti, pričom podobne ako pri optimalizácii systému, použijeme zabudovanú *Optim* funkciu, kde tentoraz účelovú funkciu optimalizujeme využitím *Nelder-Mead* algoritmu pri optimalizácii cez všetky parametre modelu vrátane posunu o konštantu $K$. Ohraničenie sa riadi jednak podmienkou na nezápornosť CIR faktora, ako aj už vygenerovaných domácich výnosov. Ešte predtým sme odhadli vhodné štartovacie hodnoty, pre jeho čo najvyššiu efektívnosť. Výsledky oboch situácií poradia faktorov CIR faktora sú v Tab. 9, na základe čoho sme sa rozhodli pre situáciu pred výmenou faktorov, t.j. odhad $\hat{r}_1$ berieme ako CIR proces a pre $\hat{r}_2$ sa pravdepodobnejšie riadi jednofaktorovým Vašíčkom. Porovnania posunu jednotlivých faktorov o $K$ s ich pôvodnými tak odhadmi, ako aj simuláciami pozorujeme na Obr. 3.2. Zaujímavosťou je, že ich optimálne posunuté hodnoty sa neprekrývajú s presnými, generovanými short rate, čo môže byť spôsobené najmä metódou nášho odhadu pomocou 2-faktorového Vašíčka, kedy v prípade CIR procesu je odhadovaná celková jeho disperzia ako konštanta, takže výsledná hodnota $\sigma_1$ tak po predelení danou odmocninou faktora $\hat{r}_1$ nadobúda o niečo vyššie hodnoty, čomu sa musí prispôsobiť aj hľadaný posun faktorov.

Dôležité je tu najmä zachovanie optimálnej hodnoty európskej účelovej funkcie $J_e$, na ktorú daný posun nemôže mať žiadny vplyv. Zachováme tak fitované hodnoty dlhopiso-

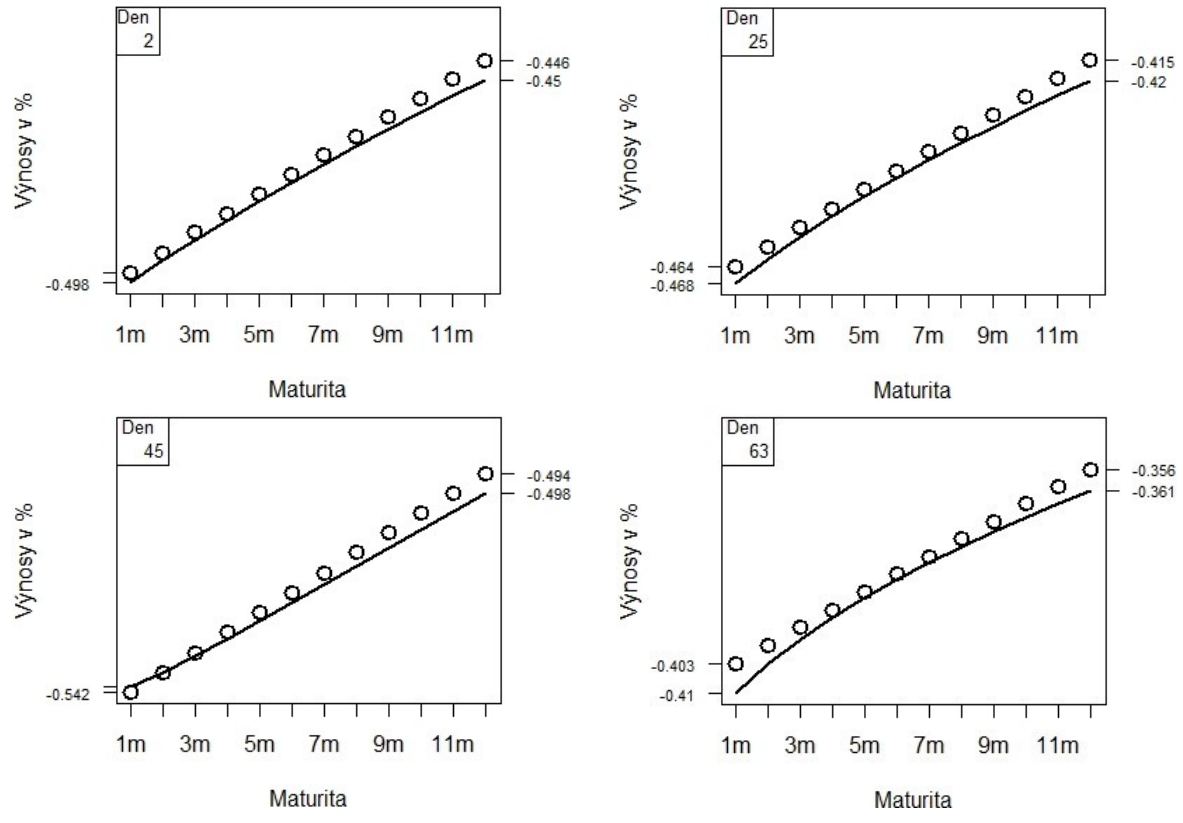



**Obr. 3.2:** Porovnanie optimálne posunutých faktorov $\hat{r}_1$ a $\hat{r}_2$ vzhľadom tak na ich prvotný odhad, ako aj pôvodnú simuláciu.

| | pred výmenou | po výmene |
|---|---|---|
| $Log(L)$ | 722.0886 | 545.8539 |
| $K$ | 3.684384e-03 | 6.981302e-03 |

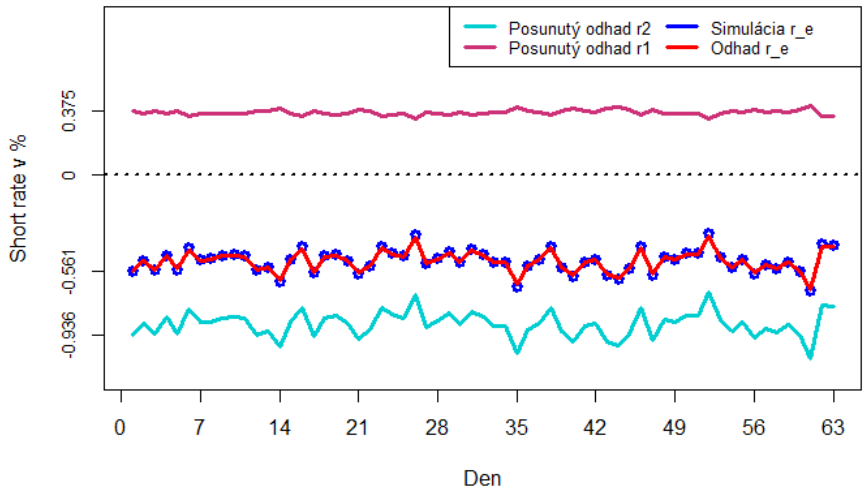
**Tabuľka 9:** Porovnanie hodnoty logaritmu vierohodnotstnej funkcie pri výmene a posune faktorov o konštantu $K$ na výber CIR procesu.

vých výnosov $R_e$ spolu s teoretickou short rate $\hat{r}_e$. Pohľad na odhadnuté výnosové krivky pri vybranom, 1., 25., 45 a 63 dni pozorovania ilustrujeme na Obr. 3.3, kde sa dá dobre pozorovať ich mierna odlišnosť vo fitovanom tvare krivky. Až na mierne výchylky na ich začiatku resp. konci v jednotlivých dňoch, ktorých absolútne maximum sme zaznamenali až v 4. ráde., sú pre nás tieto odhady uspokojivé. Uvidíme, aký to bude mať vplyv na odhad domácich výnosov, u ktorých by sme chceli dosiahnuť o niečo lepší výsledok vrámci navrhnutého konvergenčného modelu aj napriek použitiu 2-faktorového Vašíčka. Zhrnutie odhadov európskych parametrov spolu so short rate sme zaznamenali na Obr. 3.4 a v




**Obr. 3.3:** Európske výnosy v % pre sledované dni (presné ozn. krúžkom a odhadnuté čiarou).

Tab. 10. Po odhade parametrov metódou maximálnej vierohodnosti sme optimalizovali aj trhové miery rizika. Použitím prevodových vzťahov sme tak dostali aj optimálne hodnoty parametrov v rizikovo neutrálnej miere uložené v Tab. 11, tie vstupujú aj do domáceho submodelu. Odhady trhových mier rizika, z využitia presnej formuly výnosových odhadov vo Vašíček + CIR modeli spolu s ich účelovou funkciou (ozn. $J_e(real)$) sú v Tab. 12.




**Obr. 3.4:** Optimálne odhady európskych short rate faktorov $\hat{r_1}$, $\hat{r_2}$, ako aj ich súčtu európskej short rate $\hat{r}_e$ v porovnaní s jej simuláciou.

| $\hat{\kappa}_1$ | $\hat{\theta}_1$ | $\hat{\sigma}_1$ | $\hat{\kappa}_2$ | $\hat{\theta}_2$ | $\hat{\sigma}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.685654 | 0.002363268 | 0.0006747643 | 0.2492161 | 0.02053413 | 3.060366e-06 |

**Tabuľka 10:** Výsledné hodnoty odhadov európskych parametrov modelu v reálnej miere.

| $\hat{\alpha}_1$ | $\hat{\alpha}_2$ | $\hat{\sigma}_1$ | $\hat{\sigma}_2$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01343672 | 0.00179303 | 0.0006747643 | 3.060366e-06 | -5.821616 | -0.2492161 |

**Tabuľka 11:** Výsledné hodnoty odhadov európskych parametrov modelu.

| $J_e(real)$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|
| 6.598762e-06 | 201.4955 | 1086.277 |

**Tabuľka 12:** Odhadnuté európske trhové miery rizika.

### 3.2.2 Kalibrácia domáceho submodelu na simulovaných dátach

Pre účely ohraničenia na posun európskych faktorov o konštantu $K$ sme ešte predtým generovali aj domácu short rate $r_D$ spolu s jej dlhopisovými výnosmi, ktoré vstupujú aj do daného algoritmu na odhad $K$. Dostávame tak výsledky našich odhadov, pričom tu už neriešime žiadny posun o konštantu alebo niektoré ďalšie kritéria na jednotlivé parametre. Všetky ohraničenia sme totiž zaviedli už pri samotnom regresnom systéme, ktorý sme viazanou optimalizáciou celý vyriešili opäť pomocou *pcg* balíka [15] aj zabudovanej *Optim* funkcie v programovacom prostredí R. Na samotnú optimalizáciu sa pritom používajú aj optimálne výstupy z európskeho submodelu pre parametre $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}_1$ a optimálne posunutý faktor $\hat{r}_1$, ku ktorému sa hľadaný odhad $\hat{r}_D$ bude dlhodobo približovať. Chybovosť výsledného odhadu pre $\hat{r}_D$ zaznamenaná v Tab. 13 je rádovo až na $-5$, čo je veľmi slušné zistenie. Pre túto konkrétnu simuláciu tak dostávame oproti európskej $\hat{r}_e$ ešte presnejšie odhady domácej short rate.

| | $r_D - \hat{r}_D$ | $\lvert r_D - \hat{r}_D \rvert$ |
|---|---|---|
| Minimum | -5.036e-05 | 0.000e+00 |
| 1. kvantil | -2.920e-05 | 1.447e-05 |
| Median | -2.177e-05 | 2.177e-05 |
| Mean | -2.187e-05 | 2.189e-05 |
| 3. kvantil | -1.447e-05 | 2.920e-05 |
| Maximum | 6.081e-07 | 5.036e-05 |

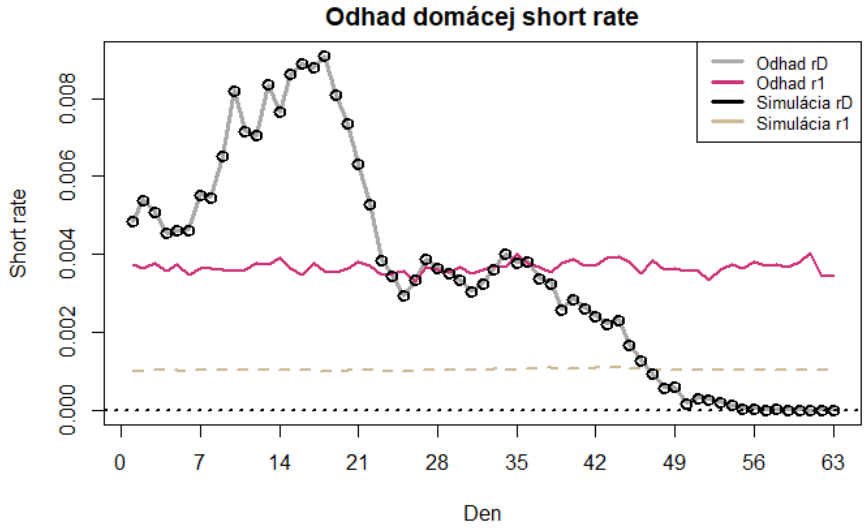
**Tabuľka 13:** Porovnanie odhadu domácej short rate $\hat{r}_D$ od od jej generovanej hodnoty $r_D$.

| | |
|---|---|
| $J_d$ | 1.25826e-09 |

**Tabuľka 14:** Hodnota účelovej funkcie po odhade domácich parametrov v Tab. 15.

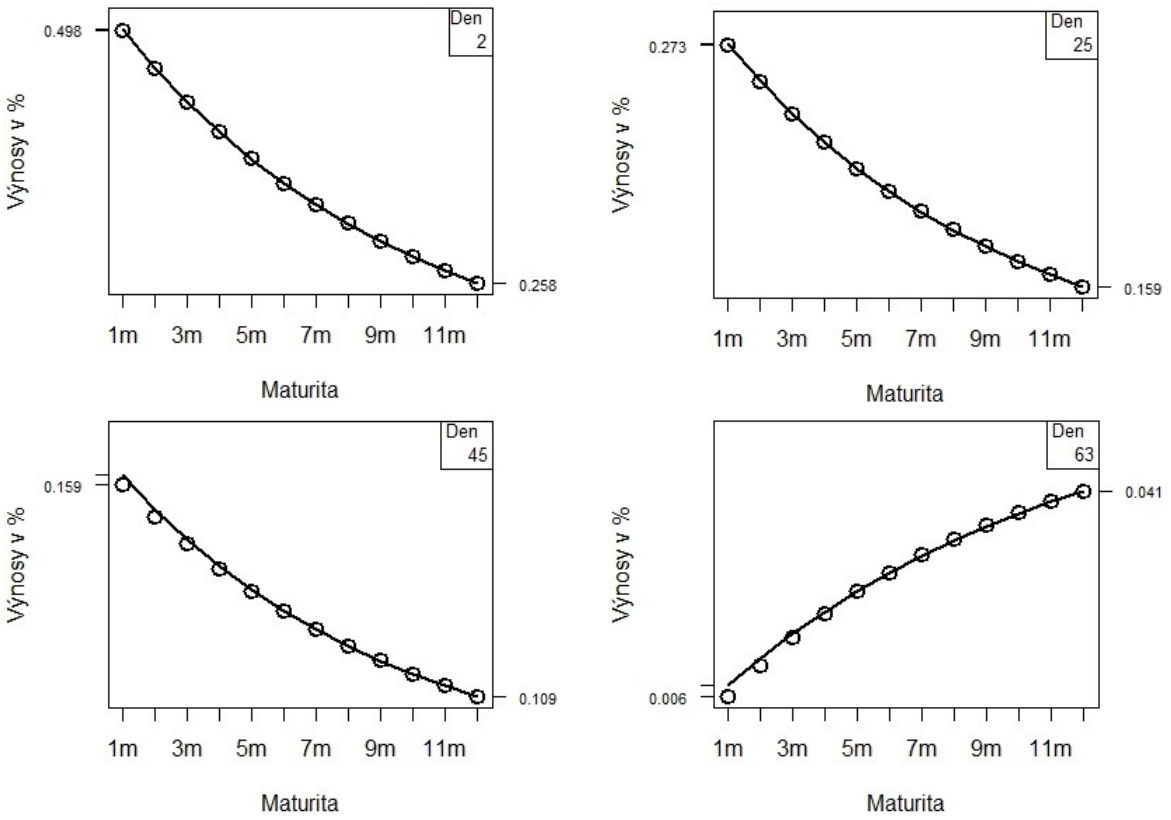
| $\hat{\sigma}_D$ | $\hat{\beta}_D$ | $\hat{\delta}_D$ | $\lambda_D$ |
|---|---|---|---|
| 0.01343672 | 0.00179303 | 0.0006747643 | 33.08613 |

**Tabuľka 15:** Výsledné hodnoty odhadov domácich parametrov modelu.




**Obr. 3.5:** Odhady $\hat{r}_D$ (sivá čiara) a presné hodnoty $r_D$ (krúžky) domácej short rate dlhodobo priťahovanej k odhadnutej európskej zložke $\hat{r}_1$.

Optimálne odhady jednotlivých parametrov v rizikovo neutrálnej miere sú zaznamenané v Tab. 15 a optimálna hodnota domácej účelovej v Tab. 14 funkcie má takto hodnotu rádovo až na $-9$, čo je približne o 2 rády presnejší odhad ako v prípade európskej regresie. Podaril sa nám tak veľmi presný odhad krátkodobej úrokovej miery $\hat{r}_D$, čo sa dá dobre sledovať aj na Obr. 3.5, kde je dobre viditeľná aj jej dlhodobé priťahovanie v okolí odhadnutého CIR faktora $\hat{r}_1$ po posune o nájdenú konštantu. Zaujímavý je aj pohľad na fitované výnosové krivky na Obr. 3.6, ktorý potvrdzuje veľmi presné odhady domácich parametrov modelu. V tomto prípade nie sú na prvý pohľad viditeľné takmer žiadne vychýlenia od presného riešenia. Pozorovateľné je ale mierne zlepšenie presnosti odhadu s



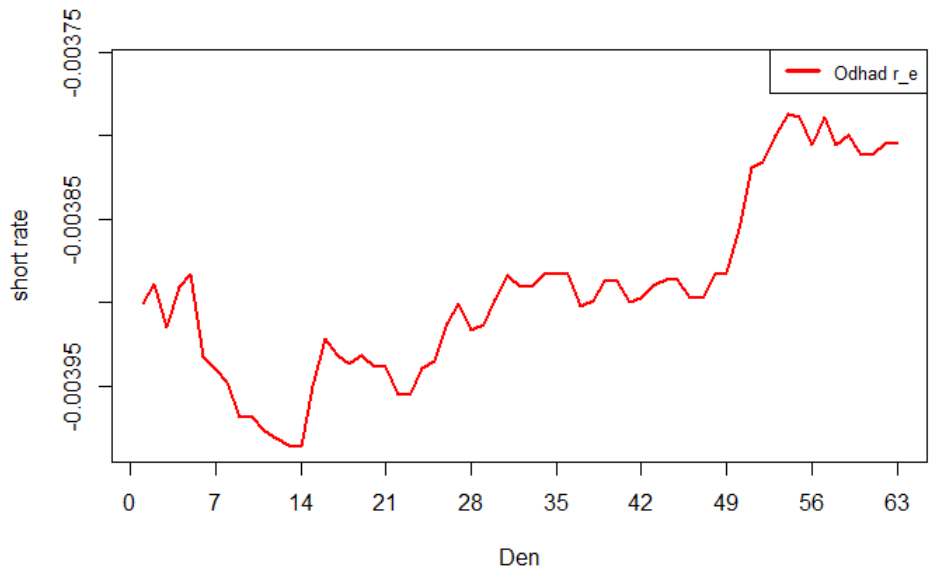

**Obr. 3.6:** Domáce výnosy v % pre sledované dni (presné ozn. krúžkom a odhadnuté čiarou) .

rastúcou maturitou, kedy je ich priebeh s presnými výnosmi naozaj zhodný.

Celá táto časť práce si v budúcnosti zaslúži aj rozsiahlejšiu simulačnú štúdiu na väčšej dátovej vzorke.

## 3.3 Reálne dáta

Pri testovaní navrhnutého kalibračného algoritmu sa ukázala vhodnosť jeho použitia aj na reálne dáta. Pre aplikáciu navrhnutého konvergenčného modelu s predpokladmi záporného Euriboru a nezáporných domácich dlhodobých úrokových mier sme si ako príklad pre názornú ukážku odhadu short rate vybrali dáta z 3. kvartálu 2017, kedy boli naše predpoklady splnené tak pre Euribor, ako aj Bulharskú medzibankovú úrokovú mieru Sofibor [4]. Bulharsko sme si zvolili ako jednu z krajín, ktorá sa aktuálne uchádza o členstvo v európskej menovej únii, t. j. v Eurozóne. Zároveň ide o štát, ktorý sa už stal členom európskeho mechanizmu pre výmenné kurzy (ERM II)[8], čo priamo predchádza prijatiu eura ako svojej národnej meny. Jej zavedenie je tu predbežne plánované na 1. január 2024. Okrem Bulharska sa v ERM II mechanizme nachádzajú aj Dánsko a Chorvátsko. Nás ale aktuálne zaujíma práve bulharský Sofibor, ktorého najnovšie hodnoty sa prestali uvádzať Bulharskou národnou bankou ešte v januári 2018 a k tomuto rozhodnutiu prišlo na konci prvého kvartálu 2017. Pozrieme sa preto na obdobie, ktoré nasledovalo práve po tomto oznámení, kedy by odhadovaná teoretická veličina short rate mohla mať o niečo zaujímavejší priebeh.




**Obr. 3.7:** Priebeh odhadnutej short rate pre Euribor z 3. kvartála 2017

Na Obr. 3.7 vidíme odhad krátkodobej úrokovej miery $\hat{r}_e$ pre sledovaný Euribor[9], ktorý sa tu pohybuje niekde v okolí mínus štyroch desatín percentuálneho bodu. Pri

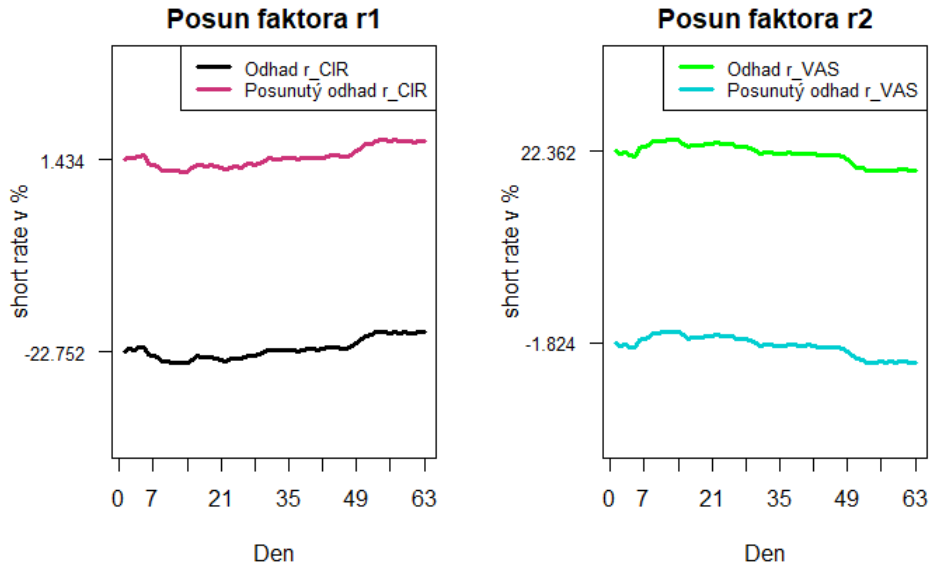
| | 1w | 1m | 3m | 6m | 12m |
|---|---|---|---|---|---|
| Minimum | -0.003820 | -0.003740 | -0.003320 | -0.002750 | -0.001720 |
| 1. kvantil | -0.003790 | -0.003730 | -0.003305 | -0.002730 | -0.001615 |
| Median | -0.003790 | -0.003720 | -0.003290 | -0.002720 | -0.001580 |
| Mean | -0.003792 | -0.003723 | -0.003296 | -0.002723 | -0.001592 |
| 3. kvantil | -0.003790 | -0.003710 | -0.003290 | -0.002710 | -0.001530 |
| Maximum | -0.003780 | -0.003700 | -0.003280 | -0.002690 | -0.001510 |

**Tabuľka 16:** Pohľad na závislosť medzi jednotlivými maturitami Euriboru z 3Q2017.

takomto pohľade na odhad európskej short rate nás napadá hypotéza o k nemu potenciálnej alternatíve na trhu z už známych hodnôt dlhodobej úrokovej miery s čo najkratšou dostupnou maturitou. Nahliadnime preto na štatistické rozloženie Euriboru v Tab 16 s pohľadom na dostupné maturity v použitej dátovej sade. Ide o štatistiku presných výnosových kriviek za sledované obdobie 63 pracovných dní. Ako sme už spomínali v úvode práce, v praxi sa odhad short rate zvykne nahrádzať úrokovými mierami na 1 alebo 3 mesiace, pričom jedno-týždňová maturita sa často nepovažuje za až tak relevantný ukazovateľ. Z Tab. 16 je ale vidieť, že v našom prípade by táto alternatíva pri Euribore mohla byť možná okrem maturity na jeden týždeň aj pri úrokových mierach s mesačnou dobou do splatnosti. V prípade trojmesačnej je už viditeľný značný rozdiel oproti nášmu odhadu na Obr. 3.1. Ale ten jeden mesiac sa zdá byť celkom relevantný - malo by teda zmysel pozrieť sa aj na jeho hlbšiu analýzu. Nás ale v prvom rade zaujíma odhad domácej krátkodobej úrokovej miery pre Sofibor, pre ktorej odhad potrebujeme odhadnuté parametre európskej short rate, ako aj jeden z jej faktorov, ktorý pri odhade domácej short rate slúži ako jej dlhodobá stredná hodnota, ktorej hodnota je ale nepravidelná, keďže sa v čase mení vzhľadom na vývoj európskej short rate. Rozloženie príslušných faktorov short rate pre Euribor sme ilustrovali na Obr. 3.8.

| | |
|---|---|
| $J_e$ | 4.55409e-09 |

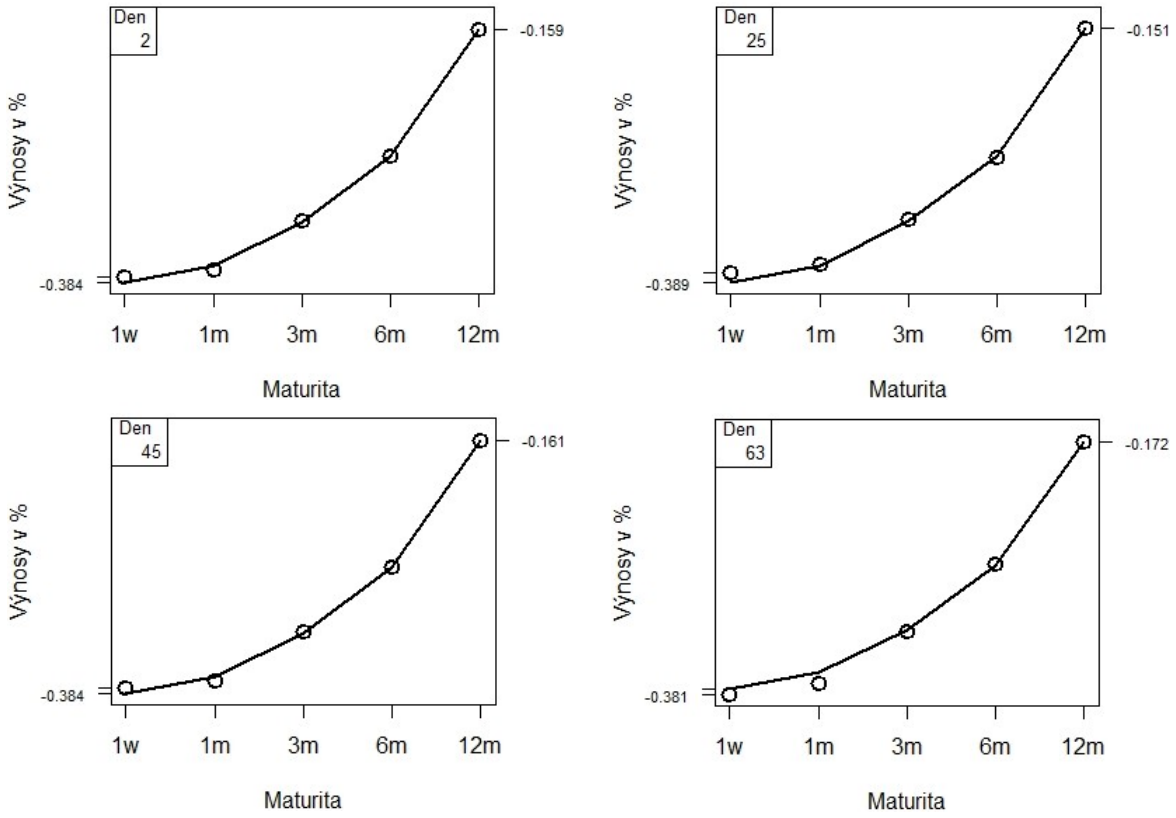
**Tabuľka 17:** Hodnota účelovej funkcie po odhade európskych parametrov.




**Obr. 3.8:** Posun faktorov $\hat{r}_1$ a $\hat{r}_2$ v %.

Ako už dobre vieme, tieto odhady nevieme vhodne ekonomicky interpretovať, v rámci nášho modelu ide ale o riešenia moderovaných CIR, resp. Vašíčkovho procesu, s označením $r_1$ a $r_2$. Na priloženej ilustrácii pozorujeme tieto odhady aj s ich optimálnym posunom využitím metódy maximálnej vierohodnosti pre čo najrelevantnejší odhad faktora $r_1$, ktorý ako uvádzame, vstupuje aj do submodelu na odhad domácej short rate. V rýchlosti ešte môžeme overiť presnosť odhadu európskych parametrov a faktorov z výpočtu odhadovaných výnosových kriviek, t. j. dlhodobých úrokových mier, ktoré tak vieme porovnať so skutočnými výnosmi Euriboru. Po ich dorátaní dostávame z príslušnej účelovej funkcie (3.7) veľmi nízku hodnotu rádovo až na $-9$, čo značí naozaj relevantné vstupné parametre na odhad krátkodobej úrokovej miery pre Sofibor. Hodnotu účelovej funkcie vidíme v Tab. 17. Potvrdzuje to aj pohľad na ilustrované výnosové krivky na Obr. 3.9, kde pre vybrané dni v sledovanom 3. kvartáli 2017 zaznamenávame len naozaj minimálne odchýlky od presných hodnôt Euriboru v prvých použitých maturitách.

V Tab. 18 a 19 zároveň uvádzame odhady všetkých parametrov vystupujúcich z kalibrácie európskej časti modelu pre Euribor.




**Obr. 3.9:** Presné (ozn. krúžkom) a odhadnuté (čiara) výnosy Euriboru v % pre vybrané dni v 3. kvartáli 2017.

| i | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\sigma}$ | $\hat{\kappa}$ | $\hat{\theta}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -5.699909e-05 | -0.08441858 | 4.956022e-06 | 0.0643106 | -0.0008863094 |
| 2 | 0.004860483 | -0.06376171 | 2.867746e-07 | 0.06376171 | -0.002970571 |

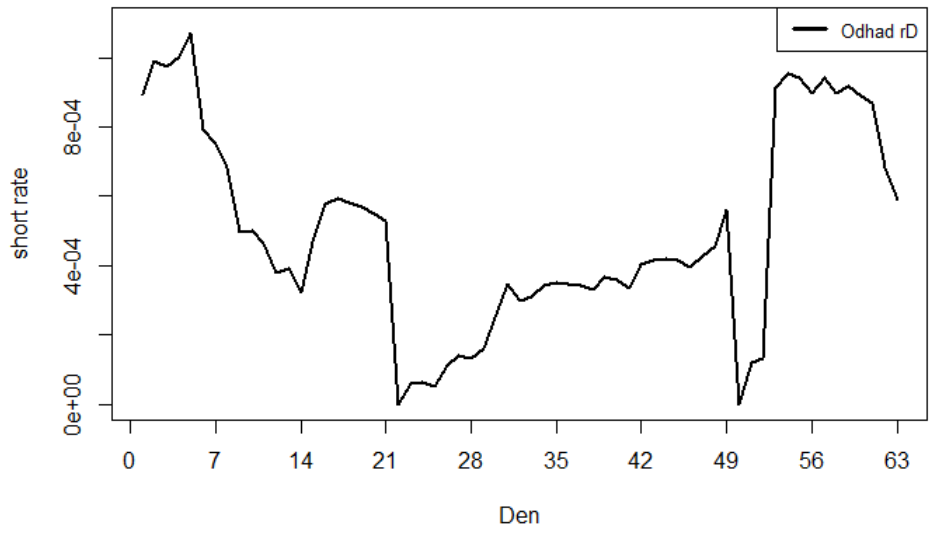
**Tabuľka 18:** Výsledné odhadov parametrov v európskej časti modelu.

| $J_e(real)$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|
| 6.229069e-09 | 4057.281 | -17609.27 |

**Tabuľka 19:** Odhadnuté európske trhové miery rizika.

Pri tomto odhade sa môžeme posunúť ďalej aj na druhú, domácu časť modelu, kde je cieľom nájsť čo najlepší odhad bulharskej short rate. Po vyššie zbehnutí vyššie uvede-

ného optimalizačného algoritmu tak ilustrujeme na Obr. 3.10 odhad domácej krátkodobej úrokovej miery pre aj bulharský Sofibor.



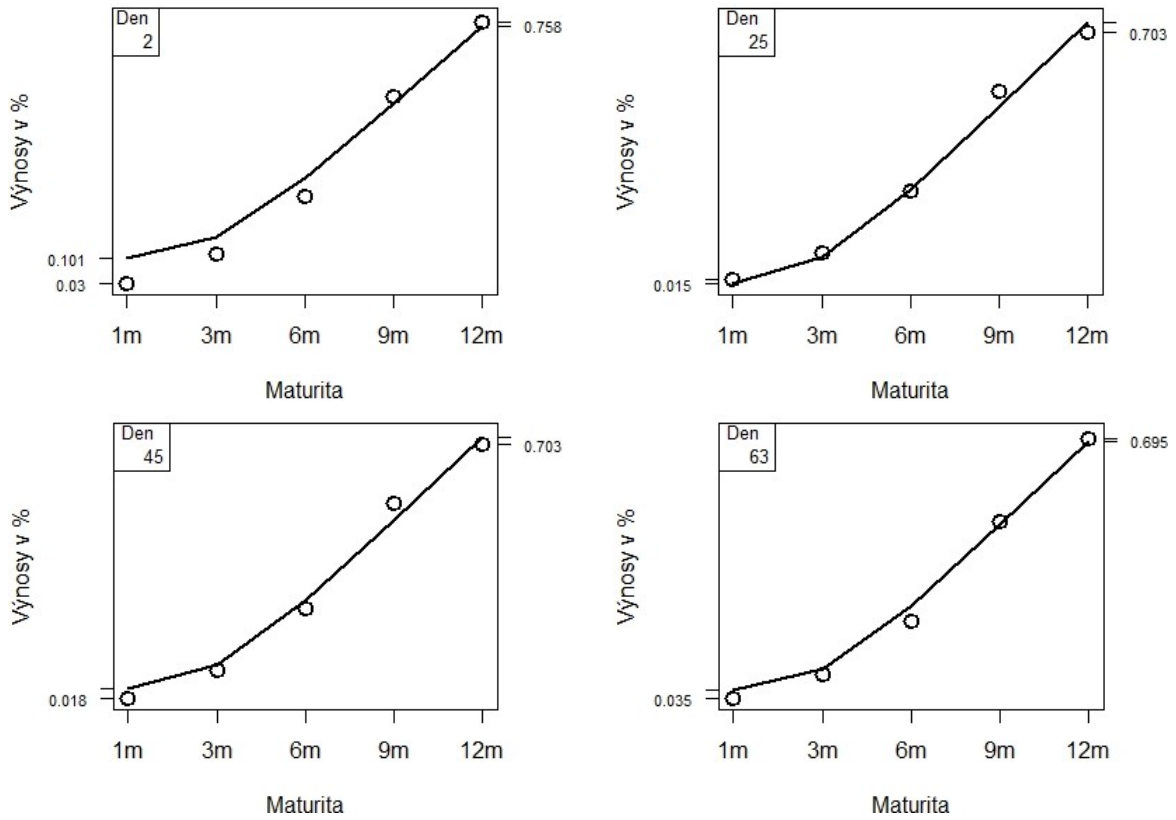

**Obr. 3.10:** Priebeh odhadnutej short rate pre Sofibor z 3. kvartála 2017

Oproti short rate Euriboru tak ide o niečo volatilnejší priebeh, pričom v niektorých pozorovaných dňoch došlo k naozaj vysokej nepravidelnosti. Z dlhodobého hľadiska by ale nemuselo ísť o niečo výnimočné a bol by tu dobre viditeľný jej postupný pokles k európskej krátkodobej úrokovej miery pre Euribor, ako už napr. ukázal autor [12]. Nás v práci až tak nezaujíma samotný dlhodobý priebeh bulharskej short, ale sústredíme sa hlavne na presnosť daných odhadov pre nami navrhnutý model pri použitých kalibračných metódach, čím by sa ukázala jeho použiteľnosť aj pre prípadný budúci výskum.

Pozrime sa tak ešte do Tab. 22 na ďalšiu štatistiku kde sme si vypísali absolútne rozdiely medzi presnými a odhadovanými hodnotami Sofiboru pri odhadoch parametrov modelu v Tab. 20. Potvrdzuje sa tu tak chybovosť 4. rádu, čo na reálnych dátach môžeme považovať sa uspokojivý výsledok. Vyššia chybovosť ako pri kalibrácii európskeho submodelu sa tu ukazuje na výslednej domácej účelovej funkcii $J_d$ v Tab. 21.

| $\hat{\sigma}_D$ | $\hat{\beta}_D$ | $\hat{\delta}_D$ | $\hat{\lambda}_D$ |
|---|---|---|---|
| 0.01343672 | 0.00179303 | 0.0006747643 | 33.08613 |

**Tabuľka 20:** Výsledné odhady parametrov pre domáci Sofibor.




**Obr. 3.11:** Presné (ozn. krúžkom) a odhadnuté (čiara) výnosy Sofiboru v % pre vybrané dni v 3. kvartáli 2017.

| | |
|---|---|
| $J_d$ | 8.902811e-06 |

**Tabuľka 21:** Hodnota účelovej funkcie po odhade domácich parametrov.

| | 1m | 3m | 6m | 9m | 12m |
|---|---|---|---|---|---|
| Minimum | 8.096e-06 | 5.351e-06 | 4.749e-05 | 9.698e-05 | 3.389e-06 |
| 1. kvantil | 1.281e-04 | 8.673e-05 | 2.147e-04 | 2.346e-04 | 7.390e-05 |
| Median | 2.529e-04 | 2.256e-04 | 3.102e-04 | 4.214e-04 | 1.234e-04 |
| Mean | 3.022e-04 | 2.546e-04 | 3.091e-04 | 3.524e-04 | 1.461e-04 |
| 3. kvantil | 4.317e-04 | 4.075e-04 | 4.392e-04 | 4.329e-04 | 2.019e-04 |
| Maximum | 7.671e-04 | 6.665e-04 | 5.863e-04 | 4.436e-04 | 3.598e-04 |

**Tabuľka 22:** Absolútne výchylky medzi odhadmi a presnými hodnotami Sofiboru.

# Záver

V diplomovej práci sme navrhli konvergenčný model úrokových mier, ktorý by mal čo najlepšie popísať vývoj úrokových mier v istom štáte pred jeho vstupom do menovej únie. Vtedy priebeh domácej úrokovej miery závisí napr. od európskeho Euriboru. Navrhnutý model zobrazuje vývoj aj tzv. okamžitých úrokových mier (ozn. short rate) opisujúcich úrokové miery u derivátov s nekonečne krátkou splatnosťou. Ide o trojfaktorový model úrokových mier, v ktorom berieme ohľad tak na predpoklady o domácej a európskej zložke modelu, ako aj na jeho zložitosť. Jednotlivé stochastické faktory sú súčasťou európskeho a domáceho submodelu, pričom európsku short rate tu modelujeme ako súčet dvoch faktorov z dôvodu splnenia predpokladu na nezápornosť domácej úrokovej miery, ktorá je istým spôsobom priťahovaná k danej nezápornej zložke európskeho submodelu. Tá sa totiž riadi CIR [7] jednofaktorovým procesom, ktorý zaručuje nezápornosť úrokových mier, zatiaľčo na druhú európsku zložku nie sú kladené žiadne predpoklady, preto ju modelujeme ako Ornstein-Uhlenbeckov proces, čo pri modelovaní úrokových mier odpovedá Vašíčkovmu procesu [22].

V našej práci sme ďalej pri oboch submodeloch oceňovali dlhopisy, ktorých ceny určujú časovú štruktúru úrokových mier. Explicitné ceny dlhopisov sme hľadali pomocou riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc využitím všeobecného tvaru PDR (1.8) pre cenu dlhopisov vo viacfaktorových modeloch. Po znázornení dlhopisových výnosov sme ďalej skúmali hypotézy o niektorých parametroch domácej časti modelu. Ako zaujímavý teoretický výsledok z 2. kapitoly môžeme napríklad spomenúť, že nekonečne veľká $\kappa$ (rýchlosť konvergencie) a nulová $\sigma$ (volatilita) tu dávajú rovnaké netriviálne limitné správanie domácej výnosovej krivky - to isté platí aj naopak (2.3.2).

Značná časť práce bola venovaná poslednej kapitole, kde bol navrhnutý algoritmus kalibrácie modelu využitím predpisu pre dvojfaktorového Vašíčka, ktorého možné použitie aj pri tomto modeli sa ukázalo v článkoch [2] a [1]. Postup kalibrácie sme testovali na simulovaných dátach a následne sme ho aplikovali aj na reálne, trhové výnosy Euriboru [9] a Sofiboru [4]. Ako priestor na možné zlepšenie vidíme v rozsiahlej simulačnej štúdii na väčšej dátovej vzorke, ako aj v takom rozšírení algoritmu, ktoré by viac využívalo presné ceny dlhopisov, ktoré boli odvodené v 2. kapitole záverečnej práce.

# Zoznam použitej literatúry

[1] Bučková, Z., Girová, Z., Stehlíková, B.*Estimating the domestic short rate in a convergence model of interest rates*, 2020 Tatra Mountains Mathematical Publications, 75(1), 33-48, dostupné na internete (30.4.2022): https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-57099-0_25

[2] Bučková, Z., Halgašová, J., Stehlíková, B.: *Short Rate as a Sum of Two CKLS-Type Processes*, 2016 In International Conference on Numerical Analysis and Its Applications (pp. 243-251). Springer, Cham, dostupné na internete (30.4.2022): https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-57099-0_25

[3] Bučková Z., Stehlíková B., Ševčovič D.: *Numerical and analytical methods for bond pricing in short rate convergence models of interest rates*, Interest Rates: Global Trends, Macroeconomic Implications and Analysis, 2016 Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, dostupné na internete (16.1.2022): https://arxiv.org/pdf/1607.04968.pdf

[4] Bulhárska národná banka, SOFIBOR, dostupné na internete (30.4.2022): https://www.bnb.bg/Statistics/StBIRAndIndices/StBISofibidAndSofiborArchive/StBISofibidAndSofibor

[5] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B.:*An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*, 1992 The journal of finance, 47(3), 1209-1227.

[6] Corzo Santamaria, T., Schwartz, E. S.:*Convergence within the EU: Evidence from interest rates*, 2000 Economic Notes, 29(2), 243-266, dostupné na internete (30.4.2022): https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/1468-0300.00032

[7] Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., Ross, S. A.:*A theory of the term structure of interest rates* . 2005 In Theory of valuation (pp. 129-164).

[8] ERM II - the EU's Exchange Rate Mechanism, dostupné na internete (30.4.2022): https://ec.europa.eu/info/business-economy-euro/euro-area/introducin

g-euro/adoption-fixed-euro-conversion-rate/erm-ii-eus-exchange-rate-mechanism_en

[9] Fínska centrálna banka, EURIBOR, Thomson Reuters, dostupné na internete (30.4.2022):
https://www.suomenpankki.fi/en/Statistics/interest-rates/charts/korot_kuviot/euriborkorot_pv_chrt_en

[10] Halgašová J., Stehlíková B., Bučková Z.: *Estimating the Short Rate from the Term Structures in the Vasicek Model*, Tatra Mountains Mathematical Publications 61, 87-104, 2014, dostupné na internete (30.4.2022):
https://www.sav.sk/journals/uploads/0212092002HaStBu.pdf

[11] Húsková, P.: *Short rate modely pripúšťajúce záporné úrokové miery*, Diplomová práca, FMFI UK, 2018

[12] Hanuš, J.: *Cyklický konvergenčný model úrokových mier*, Diplomová práca, FMFI UK, 2020

[13] Kwok, Y. K:*Mathematical models of financial derivatives*, 2008 Springer.

[14] Lacko, V.: *Two-factor convergence model of Cox-Ingersoll-Ross type*, Master's Thesis, FMFI UK, 2010

[15] Mandal, B., N., Ma, J.: *pcg:Preconditioned Conjugate Gradient Algorithm for solving Ax=b*, 2014 R package version 1.1., dostupné na internete (30.4.2022):
https://CRAN.R-project.org/package=pcg

[16] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.:*Kapitoly z finančnej matematiky 1*, 2005 Bratia Sabovci.

[17] OECD - Short-term interest rates, dostupné na internete (30.4.2022):
https://data.oecd.org/interest/short-term-interest-rates.htm

[18] Soetaert K., Petzoldt T., Setzer R. W.:*Solving Differential Equations in R: Package deSolve*, 2010, Journal of Statistical Software, 33(9), 1-25, dostupné na internete (30.4.2022):
https://www.jstatsoft.org/article/view/v033i09

[19] Stehlíková, B.: *Mathematical analysis of term structure models*, Dissertation Thesis, FMFI UK, 2004

[20] Stehlíková, B.: *Prednášky z finančných derivátov*, učebné texty, FMFI UK Bratislava, 2021

[21] Ševčovič, D., Stehliková, B., Mikula, K.:*Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, 2009 Nakladateľstvo STU.

[22] Vasicek, O.:*An equilibrium characterization of the term structure*, 1977 Journal of financial economics, 5(2), 177-188.