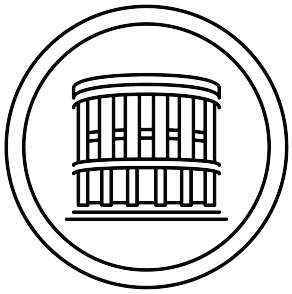
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OPTIMALIZÁCIA PREVÁDZKY VODNEJ ELEKTRÁRNE V KRÁTKODOBOM HORIZONTE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2022 Bc. Michal VESTER

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMALIZÁCIA PREVÁDZKY VODNEJ ELEKTRÁRNE V KRÁTKODOBOM HORIZONTE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	22 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RNDr. Zuzana Chladná, Dr.

Bratislava 2022 **Bc. Michal VESTER**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Michal Vester
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimalizácia prevádzky vodnej elektrárne v krátkodobom horizonte
Short-Term Hydropower Optimization

Anotácia: Slovenské elektrárne disponujú pomerne veľkým portfóliom flexibilnej výroby, ktorá vie reagovať na náhle zmeny v dopyte. V tejto diplomovej práci sa bližšie pozrieme na plánovanie výroby vodnej elektrárne v krátkodobom horizonte. Ide o pomerne komplexný optimalizačný problém. Jeho cieľom je stanoviť optimálnu výrobu, ktorá využije všetky trhové príležitosti a tiež rešpektuje všetky konštrukčné a prevádzkové obmedzenia.

Vedúci: RNDr. Zuzana Chladná, Dr.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 14.01.2021

Dátum schválenia: 17.01.2021 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Zuzane Chladnej, Dr. spolu s externými konzultantami Tomášom Šimovičom a Adamom Fajkusom za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní a vytvorení tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

VESTER, Michal: Optimalizácia prevádzky vodnej elektrárne v krátkodobom horizonte [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, školiteľ: RNDr. Zuzana Chladná, Dr., Bratislava, 2022, 57 s.

Narastajúci tlak na potrebu výroby elektrickej energie z obnoviteľných zdrojov vyúsťuje do požiadavky efektívneho manažmentu prevádzky vodných elektrární. Stanovenie optimálnej prevádzky vodnej elektrárne vyžaduje riešenie úlohy optimálneho riadenia s viacerými technickými a prevádzkovými obmedzeniami. Jadrom diplomovej práce je hľadanie výpočtovej metódy, ktorá dokáže optimalizovať prevádzku elektrárne v krátkodobom horizonte, pričom je splnená požiadavka na presnosť a rýchlosť výpočtu. V práci popíšeme niekoľko možných prístupov, ako daný numerický problém riešiť. Efektivitu jednotlivých metód testujeme na prípade vodnej elektrárne Kráľová a vybranom sledovanom období. Porovnáme výrobu a dosiahnutý zisk vo vybrané obchodné dni roku 2021. V závere práce otestujeme najsľubnejšie metódy na údajoch zo všetkých dní v roku 2021.

Kľúčové slová: vodná elektráreň, optimálne riadenie, dynamické programovanie, linearizácia, zmiešané celočíselné lineárne a nelineárne programovanie, aproximácia funkcie

Abstract

VESTER, Michal: Optimization of hydro-power plant operation in the short term [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Zuzana Chladná, Dr., Bratislava, 2020, 57 s.

The growing pressure with the need to produce electricity from renewable sources results in the requirement of effective management of hydroelectric power plant. Determining the optimal operation of a hydro-power plant requires solving a task of optimal control with several technical and operational limitations. The core of the thesis is to search for a calculation method that can optimize the operation of the power plant in the short term, while meeting the requirement for accuracy and speed of calculation. In this work we describe several possible approaches to solve a given numerical problem. We test the effectiveness of individual methods to the Kráľová hydroelectric power plant and on a selected trading period. We will compare production and achieved profit on selected business days in 2021. At the end of the thesis we will test the most promising methods on data from all days in 2021.

Keywords: hydro-power electric plant, optimal control, dynamic programming, linearisation, mixed integer linear and non-linear programming, function approximation

Obsah

Zoznam použitých symbolov **8**

Zoznam použitých skratiek **9**

Úvod **10**

1 Vodné elektrárne **12**

1.1 História 12

1.2 Typy vodných elektrární 13

1.2.1 Záchytné zariadenia (Akumulačná schéma) 14

1.2.2 Prietokové zariadenia (Regulačná schéma) 14

1.2.3 Prečerpávacie zariadenia 15

1.3 Vodné elektrárne na Slovensku 16

2 Optimalizácia výroby elektriny **18**

2.1 Optimálne riadenie 18

2.2 Zmiešané celočíselné lineárne programovanie 20

2.3 Problém optimálnej prevádzky 22

3 Aproximácie nelineárnych funkcií **24**

3.1 Regresný model 24

3.1.1 Lineárna aproximácia 24

3.1.2 Kvadratická aproximácia 25

3.2 Po častiach lineárna aproximácia 25

3.2.1 Jednorozmerná po častiach lineárna aproximácia 26

3.2.2 Dvojrozmerná po častiach lineárna aproximácia 27

4 Prípadová štúdia **29**

4.1 Vodná elektráreň Kráľová 29

4.2 Metóda dynamického programovania 32

4.3 Lineárna aproximácia 33

4.4 Kvadratická aproximácia 35

4.5 Po častiach lineárna aproximácia 37

4.5.1 Aproximácia výkonu v priestore spádu a prietoku 37
4.5.2 Aproximácia pomocou prietoku a objemu hornej hladiny 40
4.5.3 Inkrementálna metóda 41
4.6 Porovnanie jednotlivých aproximácií 42

5 Simulácia na ročných dátach **46**
5.1 Porovnanie nasadení 46
5.2 Porovnanie zisku 49
5.3 Rozšírenie prípadovej štúdie 50
5.4 Vyhodnotenie prínosu 52

Záver **53**

Zoznam použitej literatúry **55**

Príloha A **58**

Príloha B **59**

Zoznam použitých symbolov

$\boldsymbol{MW}$	Megawatt, jednotka výkonu
$\boldsymbol{MWh}$	Megawatthodina, dodaná energia
$\boldsymbol{GWh}$	Gigawatthodina, dodaná energia
$\boldsymbol{Q}$	Prietok cez VE
$\boldsymbol{Q^{in}}$	Prítok do VE
$\boldsymbol{H}$	Spád
$\boldsymbol{P}$	Výkon
$\boldsymbol{W}$	Objem hornej nádrže
$\boldsymbol{HH}$	Horná hladina
$\boldsymbol{DH}$	Dolná hladina
$\boldsymbol{p}$	Cena elektriny
$\boldsymbol{t}$	Časová jednotka
$\boldsymbol{T}$	Posledný časový údaj
$\mathbf{m^3 \,.\, s^{-1}}$	m^3 za 1 sekundu

Zoznam použitých skratiek

VE	Vodná elektráreň
PVE	Prečerpávacia vodná elektráreň
MVE	Malá vodná elektráreň
URSO	Úrad pre reguláciu sieťových odvetví
OKTE	Organizátor krátkodobého trhu s elektrinou
MIP	Zmiešané celočíselné programovanie
MILP	Zmiešané celočíselné lineárne programovanie
MINP	Zmiešané celočíselné nelineárne programovanie
***SOS*1**	Špeciálne usporiadaný súbor typu 1
***SOS*2**	Špeciálne usporiadaný súbor typu 2
***SOS*3**	Špeciálne usporiadaný súbor typu 3
LIN	lineárna aproximácia
***KV*1**	kvadratická aproximácia, jednoduchšia (51)
***KV*2**	kvadratická aproximácia, zložitejšia (54)
***PW*1**	Po častiach lineárna aproximácia, (Q, H), menej bodov
***PW*2**	Po častiach lineárna aproximácia, (Q, H), podľa efektivity
***PW*3**	Po častiach lineárna aproximácia, (Q, H), viac bodov
***PW*4**	Po častiach lineárna aproximácia (Q, V)
IC	Inkrementálna metóda
MDP	Metóda dynamického programovania

Úvod

Ľudstvo sa od nepamäti snaží čo najviac uľahčiť si prácu. Jedným zo spôsobov, ako si prácu uľahčiť, je využiť silu prírodných živlov. Každý zo živlov dokáže byť prínosom aj obtiažou a výnimkou nie je ani voda. Voda uľahčuje ľudskú prácu už stovky rokov. Začalo sa to cestovaním a prepravou, pokračovalo to zavlažovaním pôdy až pokiaľ človek nevytvoril prvé vodné koleso, ktoré dokázalo uľahčiť mechanickú prácu. V súčasnosti sa už pôvodné vodné koleso transformovalo na turbíny, ktoré sú inštalované do vodných elektrární, pričom výstupom je výroba elektrickej energie [16]. Elektrárne spočiatku vznikali pri veľkých fabrikách ako lokálne zdroje elektriny, až postupom času sa elektrifikovali aj domácnosti.

Ak sa pozrieme na výrobu elektrickej vodnej energie z fyzikálneho hľadiska, jej výroba primárne závisí od objemu vody, ktorá prejde cez turbínu a z akej výšky sa do turbíny dostane. To zapríčiní, akou rýchlosťou sa konkrétna turbína otočí a koľko MWh elektriny vyprodukuje. Elektrická energia získaná silou toku vody sa v súčasnosti považuje za jeden z najefektívnejších obnoviteľných zdrojov energie.

Elektrická energia sa stala komoditou obchodovanou na dennej báze: jej cena sa mení každú hodinu na základe ponuky a dopytu. Primárnym cieľom výrobcu elektriny je maximalizovať zisk, ktorý je tvorený objemom elektriny, vyrobenej za konkrétnu cenu a v rovnakú hodinu dodaný do siete.

Vodná elektráreň, na rozdiel od iných typov elektrární, nevyrába stály objem energie. Jej výroba môže byť počas dňa každú hodinu rozdielna, pričom je možné ju prispôsobiť aktuálnym cenovým trendom.

Optimalizácia prevádzky je jedným z hlavných problémov v hydroenergetike. Pri stanovení výroby (nasadenia) je nutné zohľadniť konštrukčné a prevádzkové obmedzenia danej elektrárne. Pre nastavenie správneho nasadenia výroby musia byť do výpočtu zahrnuté konštrukčné obmedzenia konkrétnej elektrárne. Na prvý pohľad jednoduchá optimalizačná úloha má svoje úskalia. Z výpočtového hľadiska situáciu komplikuje najmä prítomnosť nelineárnych funkcií, ktoré reprezentujú vzťahy medzi premennými modelu. Ide najmä o výpočet výkonu, ktorého závislosť od prietoku a spádu popisuje kubická funkcia. Z matematického hľadiska je problém stanovenia optimálneho nasadenia prevádzky úlohou optimálneho riadenia.

Štandardné metódy na riešenie úloh optimálneho riadenia nespĺňajú požiadavku na rýchlosť výpočtu v reálnych situáciách. V určitých situáciách môže byť preto riešením transformácia na úlohu lineárneho programovania. Takýto prístup vyžaduje nájdenie vhodného spôsobu linearizácie príslušných nelineárnych funkcií vstupujúcich do modelu. Existuje niekoľko metód takejto transformácie, ktoré v práci popisujeme.

Diplomová práca je rozdelená do piatich kapitol. V prvej kapitole priblížime stručnú históriu vývoja elektrární a predstavíme základné typy vodných elektrární. Záver kapitoly je venovaný vodným elektrárňam na Slovensku. V druhej kapitole spracujeme spomenuté teoretické poznatky danej problematiky ako úlohu optimálneho riadenia. Následne vysvetlíme, ako túto úlohu transformovať na problém celočíselného lineárneho programovania. Kapitola 3 je venovaná numerickým metódam, ktorých cieľom je nájsť čo najpresnejšie aproximovanie funkcie výkonu. Predstavíme metódu lineárnej a kvadratickej aproximácie a niekoľko variácií metódy po častiach lineárnej aproximácie. Vo štvrtej kapitole predstavené metódy otestujeme na simulačnom príklade vodnej elektrárne Kráľová, ktorá je súčasťou Vážskej kaskády. Následne porovnáme jednotlivé aproximácie výpočtu z hľadiska presnosti a času výpočtu. V poslednej kapitole sa zameriame na rozšírenie simulačného príkladu aplikovaním vybraných metód na reálne ročné dáta. Na záver práce vyhodnotíme primeranosť využitia konkrétnych metód, porovnáme jednotlivé metodiky výpočtu z dlhodobého hľadiska a rozhodneme, ktorá aproximácia je najviac využiteľná v praxi.

1 Vodné elektrárne

Vodné elektrárne ponúkajú jeden z najvýznamnejších spôsobov výroby elektrickej energie z obnoviteľných zdrojov. Fungujú na princípe premeny mechanickej energie vody na elektrickú energiu. V minulosti sa vodná energia využívala najmä na mechanické mletie, napr. obilia. V súčasnosti sa energia, ktorá je produkovaná stálym prúdením vody, využíva hlavne na roztáčanie rotora turbín vodných elektrární. Turbíny sú prepojené s elektromagnetickým generátorom, ktorý vyrába elektrinu pri rotácii rotora. Celosvetovo sa vodné elektrárne podieľajú na výrobe elektrickej energie asi 16 % ([12], [18], [28]).

1.1 História

Ľudia využívajú vodu na prácu už tisíce rokov. Starovekí gréci používali vodné kolesá na výrobu múky mletím pšenice už pred viac ako 2000 rokmi. Egypťania používali Archimedove vodné nástroje na zavlažovanie v treťom storočí pred naším letopočtom [27]. V Číne počas Dinastie Han medzi 202 p.n.l. a 9. st. n.l. sa nástroje podobné dnešným kladivám poháňané vertikálnym vodným kolesom podobne využívali na drvenie a lúpanie obilia, rovnako ako lámanie hornín, rudy a v začiatkoch výroby papiera [16].

Až o storočia neskôr ľudia začali uvažovať o využití vodnej energie v širšom ponímaní. Evolúcia modernej hydroenergetickej turbíny sa začala v polovici 18. storočia, keď francúzsky hydraulický a vojenský inžinier Bernard Forest de Bélidor napísal prelomovú knihu *Architecture Hydraulique* [27]. V tejto knihe rozvinul teóriu vodných kolies. Dostupnosť vodnej energie je už dlho úzko spojená s naštartovaním ekonomického rastu. V roku 1771 založil Richard Arkwright v anglickom údolí Derwent tzv. Cromford Mill jeden z prvých továrenských vodných systémov na svete, ktorého zdrojom energie bola vodná energia, používaná na spriadanie bavlny.

Kľúčový posun vo vývoji hydroenergetickej technológie nastal v prvej polovici 19. storočia. V roku 1827 francúzsky inžinier Benoit Fourneyron skonštruoval reakčnú turbínu schopnú produkovať okolo 6 konských síl. V roku 1849 britsko-americký inžinier James Francis zostavil prvú modernú turbínu - Francisovu turbínu, ktorá zostáva dodnes najpoužívanejšou vodnou turbínou na svete. V sedemdesiatych rokoch 19. storočia americký vynálezca Lester Allan Pelton vyvinul Peltonovo koleso, impulznú vodnú turbínu, ktorú

si následne nechal patentovať v roku 1880. V roku 1913 vyvinul rakúsky profesor Viktor Kaplan turbínu vrtuľového typu s nastaviteľnými lopatkami, nazývanú Kaplanovou turbínou [16].

Prvý hydroelektrický systém na svete bol použitý na napájanie lampy v Notrhumberlande v Anglicku v roku 1878. O štyri roky neskôr bola vo Wisconsine v USA otvorená prvá vodná elektráreň, ktorá slúžila systému súkromných a komerčných zákazníkov. V roku 1881 boli v severnej Amerike inštalované viaceré elektrárne, avšak slúžili len na zásobovanie mlynov a osvetlenie niektorých miestnych budov. Na prelome storočí sa táto technológia rozšírila po celom svete. V roku 1891 Nemecko vyrobilo prvý trojfázový hydroelektrický systém a v roku 1895 Austrália spustila prvý systém vodnej elektrárne vo verejnom vlastníctve na južnej pologuli. Do roku 1900 boli v prevádzke stovky malých vodných elektrární, nakoľko sa vznikajúca technológia rozšírila do celého sveta [16]. V dnešnej dobe je vodná energia najdôležitejším zdrojom obnoviteľnej energie na výrobu elektrickej energie na celom svete [20].

1.2 Typy vodných elektrární

Vodné elektrárne nie sú identické, majú svoje špecifiká. Podľa [9], [10], [11] a [20] projekty vodných elektrární možno klasifikovať na základe viacerých kritérií:

- podľa spádu (rozdiel vo výške hladiny vody nad a pod priehradou): môže byť vysoký alebo nízky, podľa toho sa určuje nastavenie typu hydraulickej turbíny, ktorá má byť použitá
- podľa skladovacej kapacity: prietokové alebo nádržové
- podľa účelu: jednoúčelový alebo viacúčelový
- podľa veľkosti: veľké, malé, mikro, atď

Podľa spôsobu prevádzky (spôsobu hospodárenia s vodou) a koncepčného riešenia vodného diela môžeme vodné elektrárne rozdeliť do troch hlavných typov nasledovne:

- Záchytné zariadenia (Akumulačná schéma)
- Prietokové zariadenia (Regulačná schéma)
- Prečerpávacie zariadenia

1.2.1 Záchytné zariadenia (Akumulačná schéma)

Pri tejto technológii sa hrádze využívajú na vybudovanie veľkej zásobárne vody. Nádrže zadržiavajú vodu za hrádzou, aby sa umožnila regulácia prietoku počas celého roka na dennej alebo mesačnej báze. Nádrž tiež poskytuje rezervu energie pre potreby dopytu po elektrine počas obdobia sucha alebo v období špičky (vysokej ceny elektriny v určitý čas). Schémy nádrží ponúkajú oveľa širší rozsah potenciálnych energetických výhod ako schémy čistého prietoku rieky. Skladovanie energie je základným prínosom týchto projektov, keďže produkciu elektrárne je možné prispôsobiť kolísaniu spotreby energie, a to ako pre základné, tak aj pre špičkové zaťaženie. Okrem toho regulácia rieky umožňuje rozvoj viacerých prietokových elektrární po prúde, v skutočnosti opätovné použitie tej istej vody na výrobu ďalšej elektriny, čím sa znižujú environmentálne a sociálne vplyvy súvisiace s výrobou elektriny. Pokiaľ ide o veľkosť, rozloha nádrží sa líši o niekoľko rádov v závislosti od výšky priehrady, miestnej topografie a očakávaných požadovaných energetických služieb.

1.2.2 Prietokové zariadenia (Regulačná schéma)

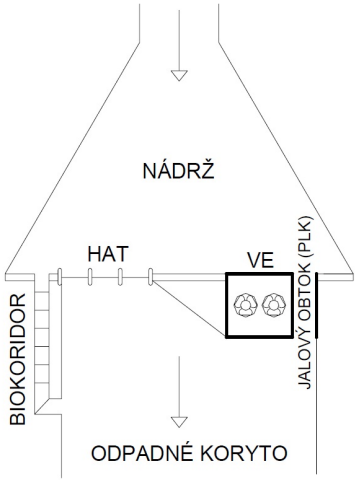
Tento typ výroby vodnej energie využíva tok vody v rámci prirodzeného rozsahu rieky. Preto nedochádza k žiadnemu alebo len k malému napúšťaniu nádrže. Môžu byť navrhnuté s malým spádom, všeobecne na veľkých riekach s miernym spádom alebo s vysokým spádom, všeobecne na malých riekach so strmým spádom.

Projekty s tečúcou riekou môžu využívať celý tok rieky alebo len jeho zlomok. V prípade, keď sa prietok rieky počas roka mení, menia sa aj prítoky do elektrárne. V dôsledku toho sa množstvo energie vyrobenej týmto typom prietoku môže v priebehu roka značne líšiť. Ak sa však obdobie vyšších prietokov nezhoduje so špičkovým dopytom, rozšírenie kapacity elektrárne nie je vo všeobecnosti nákladovo efektívne. Väčšina prietokových elektrární je preto koncipovaná tak, aby poskytovali rovnaký výkon po celý rok pre základný dopyt, pričom využívajú len zlomok celkového prietoku rieky. Bežnou stratégiou na optimalizáciu energetického výkonu vodných elektrární na rieke je vybudovanie veľkej akumulačnej nádrže v hornom povodí, ktorá bude vyrovnávať prietoky pre niekoľko prietokových alebo menších nádržových elektrární po prúde. Z pohľadu prevádzky (spôsobu hospodárenia s vodou) ide o vodné elektrárne, ktoré sú postavené pri zdržiach resp. nádržiach

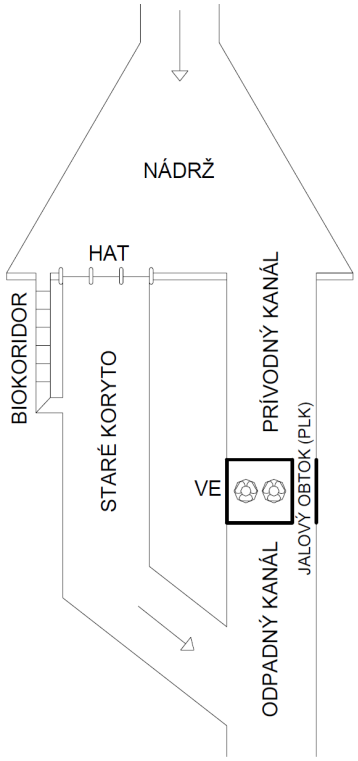
s krátkodobou reguláciou prietokov (dennou resp. týždňovou). Regulačné schémy je možné z hľadiska koncepcie rozdeliť na:

- príhaťové schémy (obr. 1),
- kanálové schémy (obr. 2).

V prípade, ak v kanálovej schéme nasleduje za prvou (riadiacou) vodnou elektrárňou ďalšia alebo niekoľko ďalších, hovoríme o kaskáde vodných elektrární.



Obr. 1: Príhaťová schéma



Obr. 2: Kanálová schéma

Zdroj: Dušička P. [9]

1.2.3 Prečerpávacie zariadenia

Prečerpávacie elektrárne na rozdiel od vyššie spomínaných druhov elektrární sú typy zariadení, ktoré dokážu tú istú vodu použiť niekoľkokrát. Tieto elektrárne čerpajú vodu do hornej akumulačnej nádrže počas hodín mimo špičky pomocou prebytočnej elektriny z elektrární so základným zaťažením. Následne obrátia tok na výrobu elektriny počas obdobia denného zaťaženia v špičke. Sú považované za jednu z najefektívnejších dostupných technológií na skladovanie energie. Koncepcia čerpania vody späť do hornej

nádrže počas hodín mimo špičky znamená, že tieto elektrárne sú čistými spotrebiteľmi energie: na čerpanie vody dohornej nádrže je potrebné viac energie, ako je produkované elektrárňou. Vo všeobecnosti sa 65-75 % elektriny potrebnej na čerpanie získa počas fázy výroby.

Rozvoj prečerpávacích elektrární je nákladovo efektívny, keď iné elektrárne v sieti vyrábajú hlavne základnú energiu s malou flexibilitou, ako sú uhoľné a jadrové elektrárne. V takýchto prípadoch môžu byť náklady na elektrinu v špičkovej prevádzke dvojnásobne vyššie alebo vyššie ako náklady na elektrinu mimo špičky. Malý horný bazén, ktorý sa vyprázdňuje veľmi rýchlo v krátkych intervaloch - jeden alebo dvakrát do týždňa - charakterizuje prečerpávacie elektrárne. Vypúšťanie hornej nádrže je preto veľmi výrazné. Tieto nádrže sú často vytvorené človekom a nestanú sa stabilným vodným prostredím. Prečerpávacie zariadenia môžu využívať ako dolnú nádrž rieku, jazero alebo existujúcu nádrž. V iných prípadoch musí byť vytvorená nová dolná nádrž, ktorej charakteristiky (t.j. odber, veľkosť) závisia od topografických a hydraulických podmienok lokality.

1.3 Vodné elektrárne na Slovensku

História vodných elektrární (VE) na Slovensku siaha do začiatku 20. storočia. Prvou elektrárňou uvedenou do prevádzky na území dnešnej Slovenskej republiky bola malá vodná elektráreň (MVE) Rakovec s inštalovaným výkonom 0,5 MW na rieke Hnilec. Postupne pribúdali ďalšie: v roku 1931 to bola MVE Krompachy (výkon 0,33 MW) na Hornáde a následne v roku 1936 vodné dielo Ladce na Váhu (výkon 13,8 MW). Vodné dielo Ladce položilo základ dnešnej vážskej sústavy vodných elektrární. Skúsenosťami získanými zo stavby tohto diela sa pokračovalo na Váhu vybudovaním ďalších VE. V roku 1946 bola uvedená do prevádzky VE Ilava (výkon 15 MW) a následne v roku 1949 elektráreň Dubnica, čím vznikla prvá kaskáda vodných elektrární na jednom derivačnom kanáli [22]. Ťažisko energetického prínosu Váhu je v strednej časti toku. Spočiatku výstavba vodných diel sústreďovala najmä na túto časť rieky, pretože sa tu sústreďovala pomerne veľká časť strojárenského priemyslu. Vzhľadom na konfiguráciu terénu, štrkonosnosť rieky, vtedajšie technické vymoženosti a iné, boli na rieke Váh stavané väčšinou kanálové stupne, a to série 3-4 VE na Spoločnej hati. Prvá kaskáda Ladce-Ilava-Dubnica mala spoločnú hať v Kočkovciach. Štvrtou VE na vtedajšej Vážskej kaskáde bola VE Skalka (dnes VE

Trenčín) s podobným výkonom ako ostatné diela [25].

Medzníkom v histórií vodných elektrární bol rok 1953, kedy boli uvedené do prevádzky VE Orava a prvá väčšia prečerpávacia vodná elektráreň (PVE) Dobšiná. Výstavba PVE pokračovala Liptovskou Marou v roku 1975 a Čiernym Váhom v roku 1981. V roku 1985 bola do prevádzky uvedená VE Kráľová, ktorá je v súčasnosti poslednou veľkou VE na Váhu. Jej výstavba poslúžila pre staviteľov Gabčíkova ako prototyp: otestovali výstavbu veľkého vodného diela v menšom na Vážskej kaskáde. Následne v roku 1992 bolo vybudované vodné dielo Gabčíkovo (výkon 720 MW), najväčšia VE na Slovensku. Táto elektráreň stihne vyrobiť za 20 dní rovnaké množstvo elektriny ako VE Kráľová za rok [22] [24]. V zozname Úradu pre reguláciu sieťových odvetví (URSO) sa nachádza 21 regulovaných vodných subjektov a 217 malých vodných elektrární. Podľa STN 1989-75 0128: Vodné hospodárstvo, sú malé vodné elektrárne chápané ako vodné diela s inštalovaným výkonom do 10 MW. V tomto zozname sa nenachádzajú najväčšie VE na Slovensku: VE Gabčíkovo, PVE Čierny Váh, PVE Liptovská Mara a Ružín [29].
V tabuľke 1 uvádzame zoznam regulovaných VE na území Slovenska.

Umiestnenie/ katastrálne územie	Výkon (MW)	Ročná výroba (MWh)
Bytča (MVE Mikšová)	93,6	164 570
Nimnica	67,5	136 820
Považská Bystrica	55,2	97 820
Kráľová nad Váhom	45,06	107 550
Madunice	43,2	123 720
Vrútky	38,4	82 320
Sučany	38,4	88 110
Horný Hričov	31,5	49 380
Nové Mesto nad Váhom	25,5	116 730
Horná Streda	25,5	122 830
Chocholná	25,5	121 280
Krpeľany	24,75	56 100
Trstená	21,75	32 730
Ladce	18,9	85 320
Dubnica nad Váhom	16,5	87 170
Trenčín	16,1	90 790
Ilava	15	79 340
Slovenská Kajňa	12,4	12 388

Tabuľka 1: Zoznam regulovaných VE na Slovensku

Zdroj: URSO [26]

2 Optimalizácia výroby elektriny

Formulovanie optimálneho manažmentu prevádzky systému vodných nádrží je jednou z hlavných oblastí štúdií v energetickom systéme. Cieľom prevádzkovej politiky vodných elektrární je riadiť prevádzku nádrží tak, aby produkcia bola v ich najlepšom záujme [5]. Na stanovenie optimálneho množstva výkonu manažment vodných elektrární využíva modely z oblasti matematického programovania. V tejto kapitole si predstavíme základný optimalizačný model, vychádzať budeme z prác [3], [9], [14] a [15].

2.1 Optimálne riadenie

Z matematického hľadiska možno problém riadenia vodnej elektrárne popísať ako úlohu optimálneho riadenia. V tejto časti si predstavíme základné pojmy a naformulujeme problém diskrétnej dynamickej optimalizácie. Pri formulácii úlohy sme vychádzali z knihy [14].

Vo všeobecnosti pod úlohou optimálneho riadenia rozumieme nasledujúci problém. Predpokladajme, že správanie určitého objektu potrebujeme riadiť v priebehu k časových etáp. Predpokladajme, že na začiatku i-tej, kde $i = 0, ..., k-1$ etapy vieme popísať stav systému stavovou premennou $x_i \in X_i$. Symbolom X_i sme označili množinu povolených stavov v i-tej etape. V i-tej etape ovplyvňujeme správanie objektu pomocou riadiacej premennej $u_i \in U_i$. Symbolom U_i sme označili množinu povolených hodnôt riadenia i-tej etapy. Hodnoty x_i a u_i nám jednoznačne určujú hodnotu v nasledujúcej, $i+1$ etape, pomocou stavovej rovnice $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$. Výnos v čase i je určený hodnotou $f_i^0(x_i, u_i)$. Predpokladáme, že f_i a f_i^0 sú známe deterministické funkcie. Ďalej predpokladáme, že počiatočná hodnota stavovej premennej x_0 je známa a rovná K a koncová hodnota x_k je z danej množiny cieľových stavov C. Úlohou je v každej etape určiť hodnotu riadiacej premennej u_i tak, aby boli splnené všetky podmienky a zároveň, aby súčet výnosov zo všetkých etáp bol maximálny. Formálne môžeme diskrétnu úlohu optimálneho riadenia

zapísať nasledovne:

$$\text{maximalizovať} \qquad \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \tag{1}$$

$$\text{pri podmienkach} \qquad x_{i+1} = f_i(x_i, u_i), \quad i = 0, ..., k-1 \tag{2}$$

$$x_0 = K, \tag{3}$$

$$x_k \in C, \tag{4}$$

$$u_i \in U_i, \quad i = 0, ..., k-1 \tag{5}$$

$$x_i \in X_i, \quad i = 0, ..., k-1 \tag{6}$$

Štandardne sa úloha (1) s podmienkami (2) - (6) rieši pomocou metódy dynamického programovania. Podstata dynamického programovania spočíva v tom, že sa konkrétna úloha zaradí do systému podúloh a riešenie dostaneme postupným riešením úloh z tohoto systému. Pri riešení nasledujúcej úlohy sa vždy využije riešenie predchádzajúcej. Výsledkom takéhoto postupu je rekurentný vzťah, ktorý nazývame Bellmanova rovnica dynamického programovania, viď (7):

$$V_i(x) = \max_{u_i \in \Gamma_i(x)} \{f_i^0(x_i, u_i) + V_{i+1}(f_i(x_i, u_i))\}, \quad i = 0, ..., k-1, \quad x \in X_i \tag{7}$$

Symbolom V_i sme označili tzv. hodnotovú funkciu a symbol Γ_i je množina prípustných riadení pre daný stav v i-tej etape. Táto funkcia nám udáva rekurentný vzťah, ktorý umožňuje spätne od konca vypočítať hodnotové funkcie V:

$$V_k(x) = 0, \quad V_{k-1}(x), ..., V_0(x) \quad \text{ak} \quad x_k \in C$$

a tým nájsť optimálne riadenie v, čo predstavuje množinu prípustných riadení. Využitím môžeme dospieť k podstatným úsporám pri výpočte optimálneho riadenia oproti pasívnemu prehľadávaniu. Výsledky dynamického programovania využijeme pri porovnaní s ostatnými aproximáciami.

2.2 Zmiešané celočíselné lineárne programovanie

Úlohu optimálneho riadenia je možné za istých podmienok naformulovať ako problém celočíselného programovania (MIP). Ako už názov napovedá, transformácia všeobecnej úlohy optimálneho riadenia sa vykoná tak, aby sa odstránili všetky nelineárne vzťahy a ohraničenia, ktoré sa v úlohe vyskytujú, na úkor zavedenia dodatočných pomocných premenných celočíselného typu. Problém celočíselného lineárneho programovania (MILP) vieme pomerne efektívne riešiť, metódy riešenia vychádzajú z techník lineárneho programovania (viď nižšie). Transformácia úlohy optimálneho riadenia na úlohu celočíselného lineárneho programovania nám teda umožní využiť širšiu triedu techník pri riešení úlohy optimálnej prevádzky.

Úlohu celočíselného lineárne programovania môžeme v kanonickom tvare zapísať nasledovne:

$$\text{maximalizovať} \qquad c_1^T x + c_2^T y \tag{8}$$

$$\text{pri podmienkach} \qquad A_1 x \leq b_1, \tag{9}$$

$$A_2 y \leq b_2, \tag{10}$$

$$x, y \geq 0, \tag{11}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

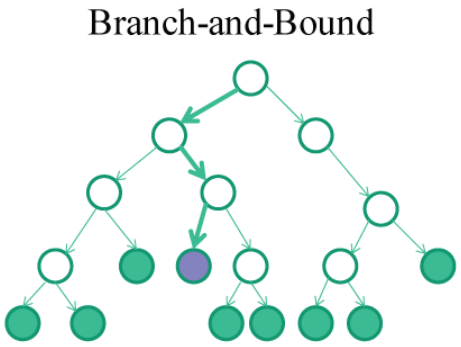
$$y \in \mathbb{Z}^m, \tag{13}$$

kde x a y reprezentujú optimalizačné premenné z množiny reálnych čísel $\mathbb{R}^n$ a celých čísel $\mathbb{Z}^m$. Parametre modelu označujeme symbolmi A_1, A_2, c_1, c_2, b_1 a b_2. Účelovú funkciu, ktorú maximalizujeme, predstavuje vzťah (8). V prípade kanonickej úlohy vymedzujú ohraničenia (9), (10) a (11) priestor konvexného polytopu, v ktorom je úloha optimalizovaná. To nám umožní využiť techniky z lineárneho programovania [8], [15].

Problémy zmiešaného celočíselného programovania sa vo všeobecnosti riešia využitím lineárneho programovania založeného na vetvenom a viazanom algoritme (angl. Branch and Bound). Základné vetvenie a viazanie na báze lineárneho programovania možno opísať nasledovne. Program začne s pôvodným zmiešaným celočíselným programovaním (MIP). Keďže nie je známe, ako tento problém priamo vyriešiť, odstránia sa všetky celočíselné obmedzenia. Takto modifikovaná úloha sa nazýva relaxácia lineárneho programovania pôvodnej MIP úlohy. Následne sa tento zjednodušený problém rieši ako štandardná úloha

lineárneho programovania. Ak riešenie spĺňa všetky celočíselné obmedzenia, aj keď neboli explicitne formulované, tak máme aj optimálne riešenie pôvodnej úlohy. Ak nespĺňa tieto ohraničenia, potom je ďalším postupom vybrať takú premennú, pri ktorej sa nachádza celočíselné ohraničenie, ale ktorej hodnota v relaxácii už nie je celočíselná. Pre ilustráciu predpokladajme, že táto premenná je x a jej hodnota v relaxácii je 6,3. Potom program môže túto hodnotu vylúčiť tým, že zavedie ohraničenia v tvare $x \leq 6$ a $x \geq 7$.

Označme si pôvodnú úlohu ako P_0. Rovnako si označme dve nové MIP ako P_1 a P_2, v ktorých sú uložené ohraničenia $x \leq 6$ a $x \geq 7$. V takomto prípade sa premenná x nazýva vetviaca premenná a hovorí sa, že sme vetvili na x, čím vznikajú dve čiastkové MIP. Program dokáže vypočítať optimálne riešenie pre obe P_1 a P_2. Následne zoberie lepšie z týchto riešení, čo bude optimálnym riešením pre problém P_0. Týmto spôsobom sa nahradila pôvodná úloha P_0 dvoma jednoduchšími, viac obmedzenými MIP. Následne sa aplikuje rovnaká myšlienka na tieto dve MIP, pričom sa rieši zodpovedajúca relaxácia. Takýmto spôsobom vygenerujeme tzv. vyhľadávací strom. MIP generované procedúrou vyhľadávania sa nazývajú uzly stromu, pričom P_0 sa označuje ako koreňový uzol. Listy stromu sú všetky uzly, ktoré sa ešte nerozvetvovali. Vo všeobecnosti, ak dosiahneme bod, v ktorom môžeme vyriešiť alebo inak zlikvidovať všetky listové uzly, potom budeme mať vyriešený pôvodný MIP problém (pre viac informácii viď [13]).



Obr. 3: Vetvený a viazaný algoritmus

Zdroj: Gurobi [13]

2.3 Problém optimálnej prevádzky

V tejto časti naformulujeme problém optimalizácie prevádzky vodnej elektrárne. Prevádzku vodnej elektrárne budeme optimalizovať v krátkodobom horizonte: dĺžka časového horizontu bude T hodín. Označme si veľkosť prietoku ako Q (používané vo fyzike), spád symbolom H (z angl. Head), výkon ako P (z angl. Power) a malým p si označme cenu elektriny (z angl. price). Prítok z medzipovodia označme Q^{in}. Ďalej budeme označovať hornú hladinu skratkou *HH*, objem hornej hladiny W a dolnú hladinu *DH*. Cena elektriny sa určuje na hodinovej báze a a preto uvažovaná časová jednotka bude jeden deň. Výkon vodnej elektrárne primárne závisí od veľkosti prietoku cez turbínu a od výšky spádu, t.j. rozdielu hornej a dolnej hladiny. Jednotlivé veličiny sú uvedené v nasledujúcich jednotkách:

$$Q_t = m^3.s^{-1}, \quad Q_t^{in} = m^3.s^{-1}, \quad H_t = m, \quad P_t = MW,$$
$$W_t = m^3, \quad HH_t = m.n.m \quad DH_t = m.n.m. \quad p_t = EUR/MWh$$

Problém optimalizácie vodnej elektrárne môžeme naformulovať ako:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{T-1} P_t \times p_t \tag{14}$$
$$P_t = P(Q_t, H_t) \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{15}$$
$$H_t = HH_t - DH_t \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{16}$$
$$HH_t = g_1(W_t) \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{17}$$
$$DH_t = g_2(Q_t) \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{18}$$
$$W_{t+1} = W_t + Z(-Q_t + Q_t^{in}) \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{19}$$
$$W_0 = w_0 \tag{20}$$
$$W_T \in \langle \bar{W}_{min}, W_{max} \rangle \tag{21}$$
$$Q_t \in \{0\} \cup \langle Q_{min}, Q_{max} \rangle \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{22}$$
$$P_t \in \{0\} \cup \langle P_{min}, P_{max} \rangle \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{23}$$
$$H_t \in \langle H_{min}, H_{max} \rangle \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{24}$$
$$W_t \in \langle W_{min}, W_{max} \rangle \qquad t = 0, ..., T-1 \tag{25}$$

Vyššie uvedená úloha predstavuje zjednodušený model optimalizácie prevádzky vodnej elektrárne. Ako sme už spomenuli, cieľom prevádzkovateľa elektrárne je maximalizovať

zisk z predaja elektriny (14). Zisk je daný súčinom ceny a vyrobeného množstva výkonu v každú hodinu dňa samostatne. Funkcia (15) nám stanovuje, ako výkon závisí od prietoku a spádu. Táto závislosť je vo všeobecnosti nelineárna z dôvodu konštrukčných vlastností a fyzikálnych zákonov. Vzťahy (16), (17) a (18) sú pomocné vzťahy kvôli lepšej zrozumiteľnosti vzťahom v optimalizačnom probléme. Vo všeobecnosti je dolná hladina závislá nie len od prietoku, ale napr. od objemu nasledujúcej nádrže, od dlhšieho prerušenia prevádzky a pod. V prípade, ak za optimalizovanou elektrárňou už nenasleduje ďalšia elektráreň, je výška dolnej hladiny závislá výlučne od prietoku (18). V probléme stanovenia optimálnej prevádzky VE bude riadiacou premennou veľkosť prietoku v jednotlivé hodiny dňa. Stavovou premennou je objem hornej nádrže (19), resp. výška hornej hladiny. Vstupnými parametrami do modelu je počiatočný (20) a koncový (21) objem hornej hladiny. Ohraničenie na riadenie (22) a ohraničenia (23) a (24) vymedzujú jednotlivým vstupom a konkrétnemu výstupu minimálne a maximálne hodnoty, ktoré sú prípustné pre riešenie. Tieto obmedzenia sú špecifické pre každú elektráreň. Funkcia (17) definuje vzťah medzi výškou hornej hladiny a objemom hornej nádrže. V (19) počítame zmenu objemu hornej nádrže v čase $t+1$ nasledovne: je to súčet objemu v čase t spolu s prítokmi do nádrže a prietokom cez elektráreň. Keďže objem hornej nádrže je v m^3 a prítoky do elektrárne spolu s prietokom cez elektráreň je v $m^3.s^{-1}$, je potrebné konvertovať tieto jednotky na spoločné. Parameter Z tvorí jednotku prevodu zo sekundy na časovú jednotku t a tým zabezpečí, že jednotky výpočtu budú rovnaké.

3 Aproximácie nelineárnych funkcií

V predchádzajúcej kapitole sme stručne popísali dva spôsoby, ako z matematického hľadiska pristúpiť k problému optimalizácie vodnej elektrárne. Nakoľko však vo všeobecnosti je funkcia výkonu (15) v predstavenej úlohe o stanovení optimálnej prevádzky v časti 2.3 nelineárna, použitie techník zmiešanej celočíselnej lineárnej optimalizácie vyžaduje nájsť vhodnú aproximáciu. V tejto kapitole si predstavíme niekoľko spôsobov ako k danému problému pristupovať, pričom budeme vychádzame z [2], [3], [6], [7], [17] a [21].

3.1 Regresný model

Označme symbolom $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ maticu pozorovaní (x_{ij}), kde je n počet pozorovaní a k je počet sledovaných vlastností a platí: $k \leq n$. Predpokladajme, že pre náhodný vektor $Y = (Y_1, ..., Y_n)^T$ platí:

$$Y = X\beta + e, \tag{26}$$

kde $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)^T$ je vektor neznámych parametrov a $e = (e_1, ..., e_n)^T$ je náhodný vektor spĺňajúci podmienky $\mathrm{E}(e) = 0, e = \sigma^2 I$. Hodnota parametra σ^2 je tiež neznáma. Model (26) sa nazýva regresný model.

Pre regresné modely požadujeme, aby matica X mala lineárne nezávislé stĺpce. Keďže predpokladáme, že $k \leq n$, dostávame $h(X) = k$. Z vlastností matíc vyplýva, že matica $X^T X$ je regulárna. Potrebné je si uvedomiť, že vektor $X\beta$ je nenáhodný. Preto platí $\mathrm{E}(Y) = X\beta$ a var $Y = \sigma^2 I$. Vo všeobecnosti regresný model môže byť buď lineárny alebo nelineárny.

3.1.1 Lineárna aproximácia

Najjednoduchším spôsobom ako aproximovať vzťah medzi vysvetľujúcou a vysvetľovanou premennou je použiť lineárny regresný model. Pre prípad $n \geq 3$, $k = 1$ dostaneme model v tvare:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \quad i = 1, ..., n \tag{27}$$

kde e_i označuje chybu medzi reálnou hodnotou Y_i a hodnotou vypočítanou modelom. Označme:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ ... & ... \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}, \quad X^T Y = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum x_i Y_i \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Ak vektor $(x_1, ..., x_n)^T$ nemá rovnaké prvky, matica X bude mať plnú hodnosť. Označme $\overline{x} = \sum x_i/n, \overline{Y} = \sum Y_i/n$, teda aritmetický priemer. Odhad metódou najmenších štvorcov je nasledovný:

$$b_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum Y_i - \sum x_i \sum x_i Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \qquad b_1 = \frac{n \sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{29}$$

Podľa týchto vzorcov sa obyčajne počíta len b_1 zatiaľ čo b_0 sa vypočíta vzťahom

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 + \overline{x}. \tag{30}$$

3.1.2 Kvadratická aproximácia

V prípade, ak lineárny regresný model neaproximuje vzťah medzi závislou a určujúcou premennou dostatočne presne, ďalšou alternatívou je napríklad použiť kvadratický regresný model. V prípade $n \geq 4$, $k = 1$ ho môžeme zapísať nasledovne:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i, \quad i = 1, ..., n, \tag{31}$$

kde e_i označuje chybu medzi reálnou hodnotou Y_i a hodnotou vypočítanou modelom. Kvadratickej regresii odpovedajú matice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ ... & ... & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \quad X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix}, \quad X^T Y = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum x_i Y_i \\ \sum x_i^2 Y_i \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Tieto matice sa využívajú pri odhade jednotlivých parametrov v nelineárnom systéme.

3.2 Po častiach lineárna aproximácia

Zvýšená efektívnosť softvérových nástrojov zmiešaného celočíselného lineárneho programovania (MILP) v posledných rokoch podnietila ich využitie aj pre efektívne riešenie nelineárnych celočíselných problémov (MIP). Takýto prístup si vynucuje potrebu efektívnych

techník na linearizáciu nelineárnych funkcií jednej alebo viacerých premenných. Štandardné metodiky spočívajú vo využití po častiach lineárnej aproximácii takýchto funkcií. Tento prístup si predstavíme v ďalšej časti.

3.2.1 Jednorozmerná po častiach lineárna aproximácia

Pre funkcie jednej premennej sa po častiach lineárna aproximácia získa zavedením množstva vzorkovacích súradníc na osi (bodov zlomu), na ktorých sa mení lineárna krivka spolu s ľavým a pravým koncovým bodom. Nelineárna funkcia je následne aproximovaná lineárnymi segmentmi $[(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))]$ pre všetky $i = 1, ..., n-1$. Presnejšie povedané, pre danú hodnotu $\overline{x}$ takú, že $x_i \leq \overline{x} \leq x_{i+1}$, je funkčná hodnota aproximovaná konvexnou kombináciou $f(x_i)$ a $f(x_{i+1})$. Nech λ je hodnota medzi $\langle 0, 1\rangle$ taká, že:

$$\overline{x} = \lambda x_i + (1 - \lambda)x_{i+1} \tag{33}$$

Potom aproximovaná hodnota je

$$f^{\alpha}(\overline{x}) = \lambda f(x_i) + (1 - \lambda)f(x_{i+1}) \tag{34}$$

Túto metódu možno alternatívne opísať cez sklon $(f(x_{i+1}) - f(x_i))/(x_{i+1} - x_i)$ interpolačnej funkcie, a to

$$f^{\alpha}(\overline{x}) = f(x_i) + (\overline{x}_i - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{35}$$

Aby bolo možné použiť vyššie uvedenú techniku MILP solvera, je potrebné zahrnúť do modelu premenné a obmedzenia, ktoré zabezpečia, aby akákoľvek hodnota x bola spojená so správnym párom po sebe nasledujúcich bodov zlomu (alebo s jedným bodom, v prípade že $x \in \{x_1, ..., x_n\}$). Zavedieme spojitú premennú α_i pre každý bod zlomu i takú, že $\alpha_i \in \langle 0, 1\rangle : \forall i = 1, ..., n$. Nech h_i je binárna premenná prislúchajúca i-temu intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle : \forall i = 1, ..., n-1$, s fiktívnymi (dummy) hodnotami $h_0 = h_n = 0$ v krajných bodoch. Približnú, resp. aproximovanú hodnotu f^{α} potom možno získať zavedením nasledovných

obmedzení:

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_i = 1, \tag{36}$$

$$\alpha_i \leq h_{i-1} + h_i \quad i = 1, ..., n, \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \tag{38}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i, \tag{39}$$

$$f^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(x_i). \tag{40}$$

Ohraničenie (36) označuje, že iba jedna hodnota h_i, povedzme $h_{\overline{1}}$, nadobudne hodnotu 1. Obmedzenie (37) teda implikuje, že jediné hodnoty α_i odlišné od 0 môžu byť $\alpha_{\overline{1}}$ a $\alpha_{\overline{1}+1}$. Z nasledovných (39), (46) vyplýva, že $\alpha_{\overline{1}} = \lambda$ a $\alpha_{\overline{1}+1} = 1 - \lambda$, viď. (33). Ohraničenie (46) potom zaisťuje správny výpočet približnej hodnoty podľa (34).

3.2.2 Dvojrozmerná po častiach lineárna aproximácia

Zložitejšiu metódu možno získať rozšírením techniky s jednou premennou na dvojrozmerný prípad, tzv. trojuholníková metóda. Nech máme n súradníc vzorky $x_1, ..., x_n$ na osi x a m súradníc vzorky $y_1, ..., y_m$ na osi y. Funkcia $f(x, y)$ sa vyhodnocuje pre každý bod zlomu (prerušenia) (x_i, y_j) pre všetky $(\acute{\imath} = 1, ..., n; j = 1, ..., m)$.

Pre každý daný bod (x, y), povedzme $(\overline{x}, \overline{y})$ taký, že $x_i \leq \overline{x} \leq x_{i+1}$ a $y_j \leq \overline{y} \leq y_{j+1}$ vytvárára obdĺžnik s vrcholmi $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$ a dva trojuholníky s uhlopriečkou $[(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})]$. (pozn. rovnako môžeme použiť trojuholníky tvorené druhou uhlopriečkou). Hodnota funkcie sa aproximuje konvexnou kombináciou funkčných hodnôt hodnotených na vrcholoch trojuholníka obsahujúcich $(\overline{x}, \overline{y})$. Konkrétne ide o konvexnú kombináciu, ktorá vyzerá nasledovne:

$$f^a(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda f(x_i, y_j) + \mu f(x_{i+1}, y_{j+1}) + (1 - \lambda - \mu)\overline{f} \tag{41}$$

kde

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x_{i+1}, y_j) & \text{if} \quad \overline{y} \leq y_j + (\overline{x} - x_i)\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i+1} - x_i} \\ f(x_i, y_{j+1}) & \text{inak} \end{cases} \tag{42}$$

kde $\lambda \in [0,1], \mu \in [0,1]$ a $(1-\lambda-\mu) \in [0,1]$ sú váhy konvexnej kombinácie vrcholov vhodného trojuholníka, ktorý obsahuje $(\overline{x}, \overline{y})$. V modeli MILP sa (41) a (42) vykonávajú zavedením nm kontinuálnych premenných $\alpha_{ij} \in [0,1]$ a výpočet konvexných kombinácií nasledovne:

$$1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}, \tag{43}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} x_i, \tag{44}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} y_j, \tag{45}$$

$$f^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} f(x_i, y_j). \tag{46}$$

Premenné α_{ij} by sa mali definovať ako špeciálne usporiadaný súbor typu 3, tzv. SOS3 (z angl. Special Ordered set). SOS3 je množina premenných, kde najviac 3 premenné sú nenulové. SOS1 a SOS2 majú rovnaké vlastnosti, kde typ, resp. číslo, hovorí koľko nenulových premenných množina obsahuje. Na rozdiel od SOS1 a SOS, ktorých syntax je automatická, u SOS3 musíme túto syntax dodefinovať. Povedzme, že máme spomínaný obdĺžnik $[x_i, x_{i+1}]$ a $[y_j, y_{j+1}]$. Na zistenie, v ktorom trojuholníku sa nachádzame je potrebné dodefinovať binárne premenné h_{ij}^u a h_{ij}^l, teda horný (upper) a dolný (lower) trojuholník. Z týchto vlastností dostávame nasledovné obmedzenia:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (h_{ij}^u + h_{ij}^l) = 1, \tag{47}$$

$$\alpha_{ij} \leq h_{ij}^u + h_{i,j-1}^u + h_{i-1,j-1}^u + h_{ij}^l + h_{i-1,j-1}^l + h_{i-1,j}^l \tag{48}$$

Obmedzenie (47) ukladá, že spomedzi všetkých trojuholníkov sa pre konvexnú kombináciu používa práve jeden. Potom obmedzenia (48) ukladajú, že jediné α_{ij} hodnoty odlišné od 0 môžu byť tie, ktoré sú spojené najviac s tromi vrcholmi takéhoto trojuholníka.

4 Prípadová štúdia

Jednotlivé výpočtové prístupy, ktoré sme predstavili v predchádzajúcej kapitole, budeme testovať v prípadovej štúdii vodnej elektrárne Kráľová. Cieľom práce je optimalizovať prevádzku danej elektrárne. V tejto časti si najprv uvedieme konkrétne špecifiká modelovanej elektrárne a následne porovnáme jednotlivé modely z hľadiska presnosti a výpočtového času.

4.1 Vodná elektráreň Kráľová

Vodná elektráreň Kráľová je umiestnená pri nádrži Kráľová, využíva úsek Váhu od Serede po Šaľu. Ide o poslednú veľkú vodnú elektráreň Vážskej kaskády nachádzajúcej sa na rieke Váh. Elektráreň Kráľová pozostáva z dvoch turbín typu Kaplan, ktorých prietok je $2 \times 235\,\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ a celkový hodinový výkon tvorí 45MW. Jej priemerná ročná výroba elektrickej energie je 117,3 GWh. Do prevádzky bola uvedená v roku 1985. Vodná elektráreň patrí do akumulačnej schémy a ide o regulačnú príhaťovú vodnú elektráreň [23].

Aby sme vedeli optimalizovať prevádzku tejto elektrárne, potrebujeme poznať technické obmedzenia, ktoré musí výrobný plán spĺňať. Ako sme už spomínali, elektráreň má dve turbíny. Prietok (Q) každej z turbín sa môže pohybovať v rozmedzí od 100 do 235 $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$. Priemerná nadmorská výška hladiny hornej nádrže (HH) je 123 m.n.m. a spodná hladina (DH) sa pohybuje v rozmedzí od 110-118 m.n.m., čím nám vzniká maximálny spád (H) 13m. Hranice hodnoty prietokov a aktuálna výška spádu nám stanovujú minimálny a maximálny výkon jednej turbíny, čím dostávame obmedzenie na stanovenie veľkosti výkonu (P) v jednotlivé hodiny dňa z intervalu $\langle 10, 22.5\rangle$ MW. Pri optimalizácii prevádzky musíme zohľadniť najmä veľkosť jednotlivých prítokov z medzipovodia rieky Váh a hlavný prítok, ktorý reguluje VE Madunice. Poslednými parametrami vstupujúcimi do optimalizačného modelu sú výšky počiatočnej a koncovej hornej hladiny a jej objemy.

Pri spomínaných technických obmedzeniach je našim cieľom nájsť optimálnu prevádzku v krátkodobom horizonte: pre každú hodinu stanoviť výšku prietoku tak, aby sme dosiahli maximálny zisk. Optimalizačný problém naformulujeme za predpokladu vopred známych cien elektriny v jednotlivé hodiny dňa. V ilustračnom príklade budeme pracovať s reálnymi cenami elektriny, za ktoré sa elektrina obchodovala v deň 10. 10. 2021, viď tabuľka 3.

Závislosť výkonu jednej turbíny od prietoku a spádu pre vodnú elektráreň Kráľová bola odhadnutá na základe empirických meraní, ktoré uskutočnila katedra hydrotechniky STU [9] nasledovne:

$$P(Q_t, H_t) = (N - S(Y - H_t))Q_t^2 + (O - U(Y - H_t))Q_t + (R - W(Y - H_t)) \qquad (49)$$

pričom hodnoty parametrov N, S, O, Y, U, R, W sú uvedené v tabuľke 2.

N	-7.05e-05	U	0.009574264
S	2.18e-08	R	-1.499670231
O	0.137838901	W	0.007712283
Y	13		

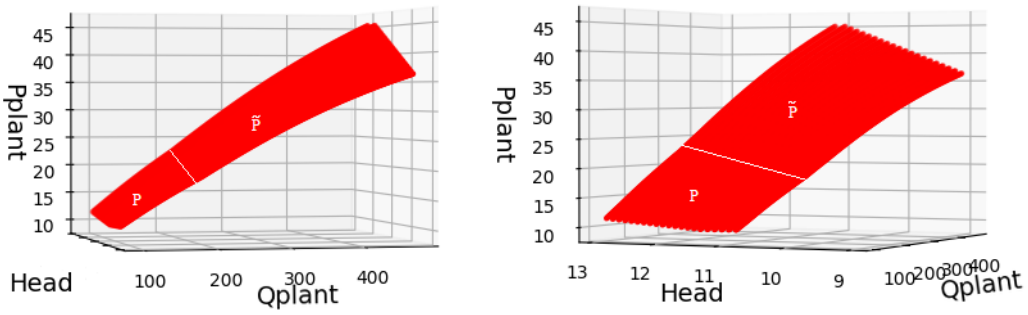
Tabuľka 2: Hodnoty parametrov funkcie výkonu

Zdroj: STU [9]

Špecifikom VE Kráľová je, že táto elektráreň obsahuje práve dve turbíny. Ak sú obe turbíny v prevádzke, prietok cez vodnú elektráreň sa rovnomerne rozdelí medzi obe turbíny. Z vlastností turbín vstavaných do VE Kráľová vieme, že ich minimálny prietok je 100 $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ a maximálny 235 $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$. To znamená, že ak je prietok väčší ako 200 $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ a zároveň menší ako 235 $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$, môžeme rozhodnúť, či ponecháme zapnutú len jednu turbínu, alebo prietok rozdelíme do oboch. Keďže hodnota výkonu pri zapnutí jednej či dvoch turbín sa líši, rozhodnutie o zapnutí druhej turbíny je záležitosťou maximalizácie výkonu. Funkciu výkonu P_t pri uvážení špecifika dvoch turbín môžeme zapísať v tvare:

$$P_t = \begin{cases} P(Q_t, H_t) & \text{ak} \quad Q_t \in \langle 100, 200) \\ \max(P(Q_t, H_t), 2P(Q_t/2, H_t)) & \text{ak} \quad Q_t \in \langle 200, 235\rangle \\ 2P(Q_t/2, H_t) & \text{ak} \quad Q_t \in (235, 470\rangle \end{cases} \qquad (50)$$

Na obr. 4 môžeme vidieť vykreslenú trojrozmernú funkciu výkonu (50). Z obrázku si tiež môžeme všimnúť, že funkcia je kvadratická v prietoku a lineárna v spáde, rovnako ako uvádzame v (50).



Obr. 4: Funkcia výkonu (Pplant)

V numerickej analýze sme stanovili počiatočnú výšku vodnej hladiny hornej nádrže na hodnotu $HH_0 = 123.5$ a požadovanú koncovú hodnotu výšky hornej hladiny na konci dňa $HH_{24} = 122.5$. Objemy sme dopočítali podľa (17) a ceny elektriny sú získané z portálu OKTE [19].

čas	1	2	3	4	5	6	7	8
prítoky	9	15	64	28	89	93	29	8
cena	134.54	116.18	114.42	113.45	115.60	123.05	172.54	195.13

čas	9	10	11	12	13	14	15	16
prítoky	73	0	40	36	16	11	54	88
cena	197.10	187.65	178.44	170.55	170.39	170.91	171.82	174.69

čas	17	18	19	20	21	22	23	24
prítoky	62	33	72	78	49	51	54	77
cena	177.75	177.58	193.16	216.95	192.58	174.77	162.28	146.05

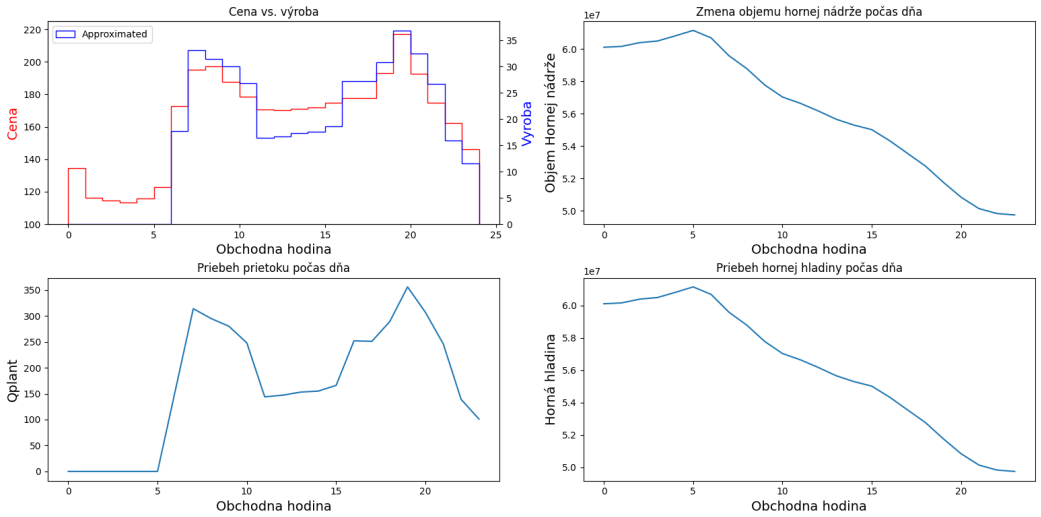
Tabuľka 3: Vstupné parametre

Vstupné hladiny sú určené tak, aby sme počas dňa pracovali s väčším množstvom vody. Tým docielime, že jednotlivé aproximácie sa budú viac líšiť a rozdiely budú výraznejšie. Na druhej strane, v našom numerickom experimente sme pracovali s pomerne malou ale rovnomernou výškou prítokov v jednotlivé hodiny, viď tabuľka 3. Ako sme už spomenuli, pracovali sme s trhovými cenami elektriny, ktoré boli na trhu dňa 10.10.2021. Môžeme si všimnúť, že ceny elektriny uvedené v tabuľke 3 podliehajú istému trendu počas dňa: v nočných hodinách sú najnižšie, zatiaľ čo vo večerných hodinách najvyššie. Tento fenomén

pozorujeme na trhu s elektrinou aj vo všeobecnosti. Nelineárnu funkciu (50) sme aproximovali použitím metodík predstavených v častiach (3.1) a (3.2) a následne sme tieto metodiky implementovali v programe AMPL [1] a ako externý solver sme použili Gurobi [13]. V numerickej analýze sme hodnotu prietoku nakrokovali s krokom 1 $m^3.s^{-1}$ a spád krokom 10 cm.

4.2 Metóda dynamického programovania

V tejto časti si predstavíme výsledky pre optimálne riadenie prevádzky vodnej elektrárne stanovenej na základe metódy dynamického programovania (MDP) popísanej v časti 2.1. V predstavenom modeli (1) - (6) je z numerického hľadiska jednoduchšie stanoviť stavovú premennú objem hornej hladiny, pričom rovnako by sme mohli zvoliť výšku spádu. Poznamenajme, že z hodnoty objemu hornej hladiny v m^3 vieme jednoznačne stanoviť výšku hornej hladiny v m.n.m. Rozdielom hornej a dolnej hladiny získame výšku spádu, ktorá potom vstupuje do výpočtu výkonu. Riadiacou premennou ostáva výška prietoku cez vodnú elektráreň v jednotlivé hodiny dňa. Pre praktickú implementáciu výpočtu založeného na základe rovnice dynamického programovania (7) sme priestor stavov aproximovali 1000 hodnotami objemu hornej hladiny a priestor riadení 371 hodnotami veľkosti prietoku. Krok stavu medzi jednotlivými hladinami bol 1 mm a krok riadení bol 1 $m^3.s^{-1}$. Počet hodnôt sme experimentálne upravili tak, aby sme dosiahli vyhovujúcu požiadavku na presnosť a dobu trvania výpočtu. Výsledky z prvého experimentu sme graficky znázornili na obr. 5. Na obrázku vľavo hore vidíme konkrétne nasadenie na výrobu podľa MDP, ktoré sa správa podobne, ako vývoj ceny elektriny. Pod pojmom nasadenie, resp. nasadenie na výrobu budeme rozumieť, že sú to optimálne hodnoty prietoku, používané bežne pri výrobe v hydromodelovaní. Hodnota zisku stanovená metódou dynamického programovania bola odhadnutá vo výške 79 945.46€.



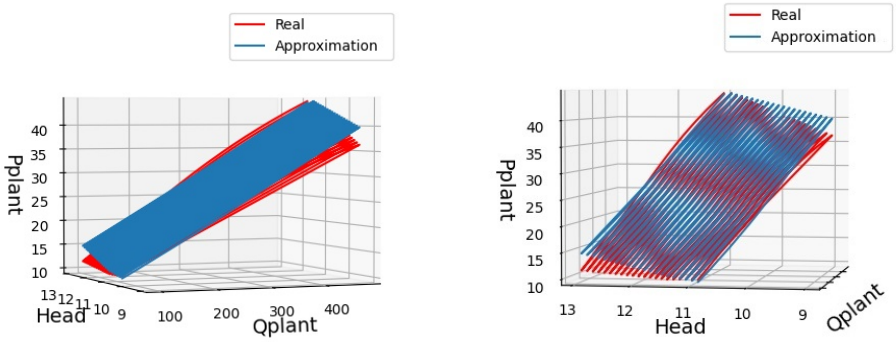
Obr. 5: Prehľad dennej výroby - MDP (Prietok, Objem HH)

4.3 Lineárna aproximácia

V tejto časti sa pozrieme, akú optimálnu stratégiu na prevádzku vodnej elektrárne dostaneme, ak použijeme lineárnu aproximáciu (viď časť (3.1)) funkcie výkonu (50), pričom využijeme vstavané solvre na riešenie úloh lineárneho programovania v prostredí gurobi. To znamená, že namiesto kubickej funkcie výkonu budeme pracovať s lineárnou funkciou v tvare

$$P_{aprox1}(Q_t, H_t) = aQ_t + bH_t + c,$$

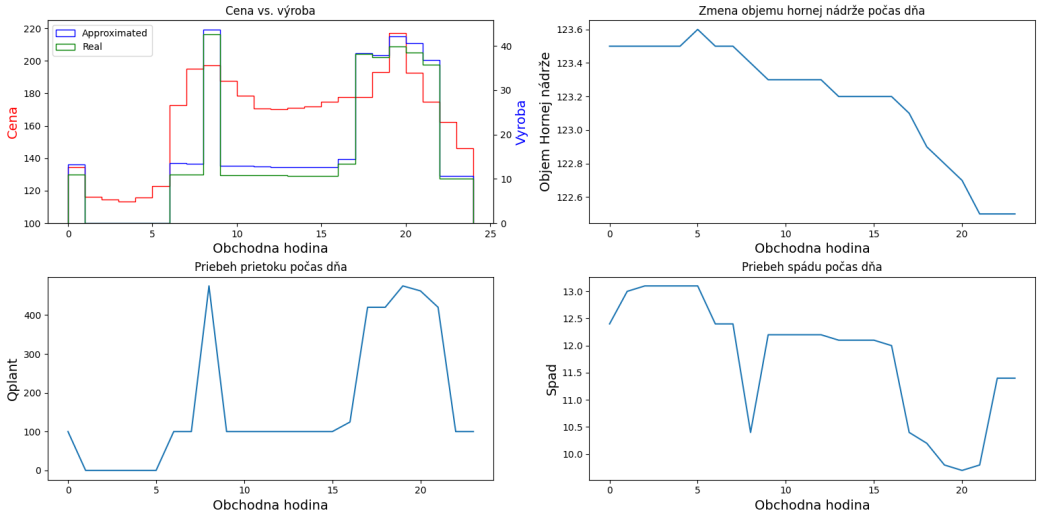
kde Q je prietok, H je spád, koeficienty a a b sú koeficienty pri jednotlivých premenných a c je konštantný člen. Na obr. 6 môžeme graficky porovnať pôvodnú funkciu výkonu a jej lineárnu aproximáciu. Taktiež budeme pracovať s predpokladom, že funkcie hornej



Obr. 6: Funkcia výkonu a lineárna aproximácia

hladiny (17) a dolnej hladiny (18) sú nelineárne funkcie a pre potreby výpočtu sme ich čiastočne linearizovali.

Obrázok 7 zobrazuje už konkrétne nasadenie pre modelový príklad. Na obrázku vľavo hore môžeme vidieť, že lineárna aproximácia nevie rozlišovať stredné ceny elektriny, pretože je málo citlivá na zmenu ceny. V nich nasadí výrobu na približne rovnaké prietoky. Prirodzene optimálna výroba je najvyššia počas hodín, keď je cena elektriny najvyššia. Dávame to za príčinu tomu, že v minimálnych a maximálnych hodnotách sú najväčšie rozdiely oproti reálnej funkcii. V ostatných grafoch ukazujeme, ako sa počas dňa mení prietok, spád a objem hornej nádrže. Celkový čas výpočtu je 0.1s, čo je dostačujúco rýchle. Našim



Obr. 7: Prehľad dennej výroby, lineárna regresia

cieľom je maximalizovať zisk rovnako ako minimalizovať výpočtový čas. V tomto prípade, zisk vypočítaný aproximáciou je 74 267.65€. Ak sme ale dorátali reálne hodnoty výkonu podľa (50) v rovnakých hodnotách prietoku a spádu, ako pri aproximácii, tak zisk vyšiel značne menší a to 68 907.33€. Môžeme posúdiť, že model je dostatočne rýchly, ale nie dostatočne presný.

4.4 Kvadratická aproximácia

Ďalšou zo základných aproximácií je využitie kvadratickej aproximácie. V našom modeli vystupujú dve premenné (prietok Q, spád H), tým pádom pri kvadratickej aproximácii máme viaceré možnosti. Zo všetkých možností jednotlivých kombinácií považujeme za najviac adekvátne nasledovné:

$$P_{aprox2}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + bQ_t + cH_t + C \tag{51}$$

$$P_{aprox3}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + bQ_t + cH_t + dH_t^2 + C \tag{52}$$

$$P_{aprox4}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + bQ_t + cH_t + dH_t^2 + eQ_tH_t + C \tag{53}$$

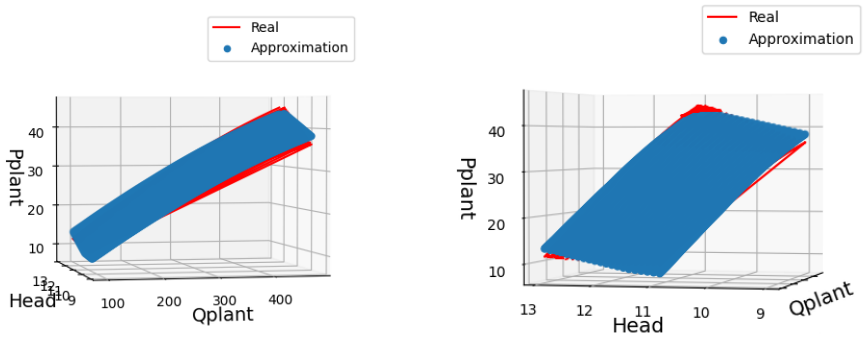
$$P_{aprox5}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + bQ_t + cH_t + eQ_tH_t + C \tag{54}$$

$$P_{aprox6}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + b_tQ + dH_t^2 + eQ_tH_t + C \tag{55}$$

$$P_{aprox7}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + cH_t + dH_t^2 + eQ_tH_t + C \tag{56}$$

$$P_{aprox8}(Q_t, H_t) = aQ_t^2 + bQ_t + eQ_tH_t + C \tag{57}$$

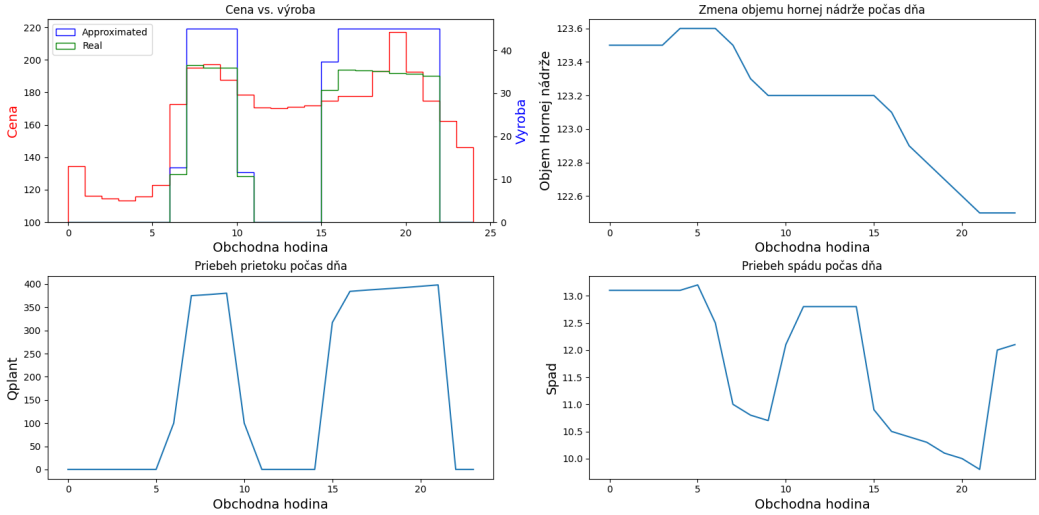
V našej práci sme sa zamerali na dve z týchto aproximácii. Jednou z nich je základná, najjednoduchšia č. (51). Napriek tomu, že sme ohodnotili všetky spomínané aproximácie, za druhú z možností sme zvolili (54) z jednoduchých dôvodov: čas optimalizácie bol najkratší a kombinácia lineárnych a kvadratických premenných je najprirodzenejšia v porovnaní s funkciou výkonu. Presnosť základnej aproximácie (51) v porovnaní s funkciou výkonu (50) môžeme vidieť na obr. 8. Vidíme, že aproximácia je výrazne presnejšia, než pri lineárnej regresii, ale stále tam môžeme vidieť väčšie odchýlky v okrajových bodoch.



Obr. 8: Porovnanie funkcie výkonu a jej kvadratickej aproximácie podľa modelu (51)

Optimálnu úroveň prietokov v jednotlivé hodiny dňa sme opäť graficky znázornili,

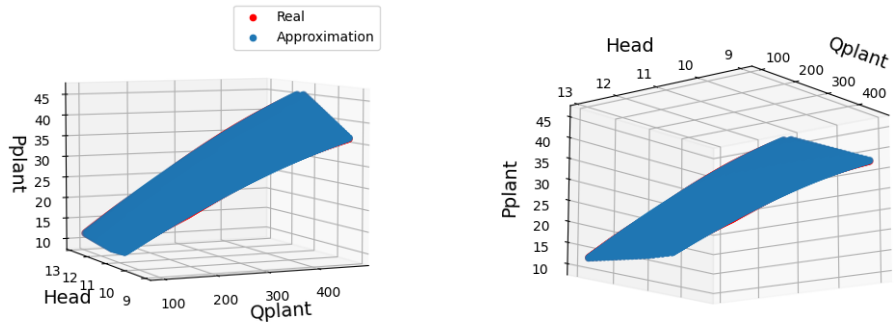
viď obr. 9 ľavý horný roh. Vidíme, že kvadratická aproximácia nevie presne aproximovať funkciu v nižších cenách elektriny a naopak vo vyšších cenách im dokáže prideliť veľmi podobné, či až rovnaké hodnoty. Taktiež vidíme, že pri nižších a stredných cenách elektriny táto aproximácia necháva elektráreň vypnutú, čím nevyužíva naplno jej potenciál. Celkový



Obr. 9: Prehľad dennej výroby pomocou kvadratickej regresie

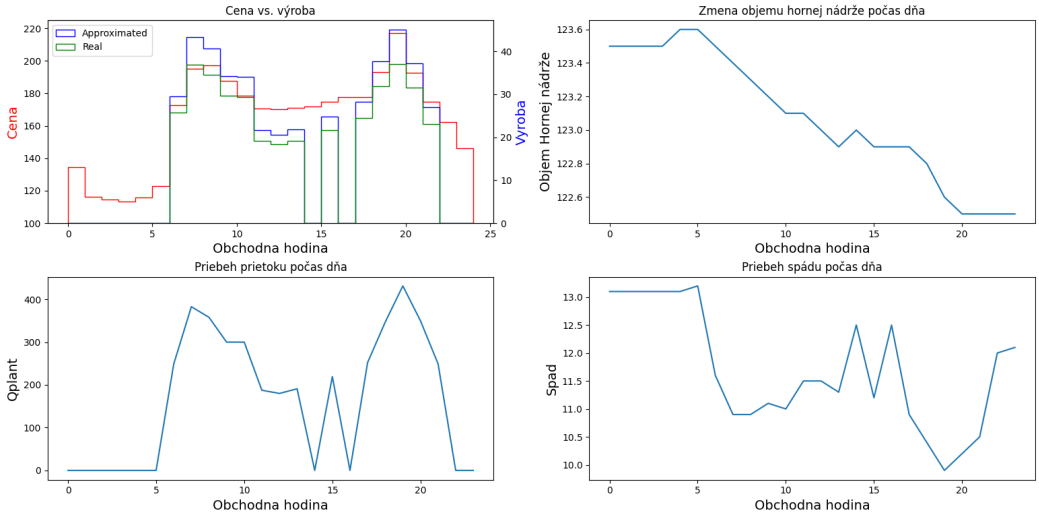
čas optimalizácie sú 3 s, čo je dostačujúco rýchle. V prípade kvadratickej aproximácie, vypočítaný zisk je 87 865.09€, zatiaľ čo reálny zisk je značne nižší v hodnote 69 707.85€. Vidíme, že aproximácia nadhodnocuje reálny možný stav. Môžeme teda posúdiť, že aj keď je model dostatočne rýchly, jeho presnosť je stále nedostačujúca.

Ako druhú sme brali do úvahy aproximáciu popísanú rovnicou (54). Pri vykreslení tejto aproximácie môžeme vidieť, že pomerne presne kopíruje funkciu výkonu, obr. 10. Modrou farbou je znázornená aproximovaná plocha, ktorej hodnoty sú o niečo vyššie ako pri červenej, reálnej ploche.



Obr. 10: Porovnanie funkcie výkonu a jej kvadratickej aproximácie podľa modelu (54)

Výsledky numerického experimentu, v ktorom sme funkciu výkonu nahradili aproximáciou (54) sme zobrazili na obr. 11. Môžeme vidieť, že presnosť nasadenia oproti cene sa zvyšuje.



Obr. 11: Prehľad dennej výroby pomocou kvadratickej regresie

Pridaním viacerých kombinácií premenných sa čas optimalizácie zvýšil na 21 s. Aproximovaný zisk je 83 269.41€, zatiaľ čo reálny zisk pri rovnakom prietoku a spáde je 71 389.23€. Môžeme skonštatovať, že rýchlosť aproximácie sa zvýšila spolu so ziskom.

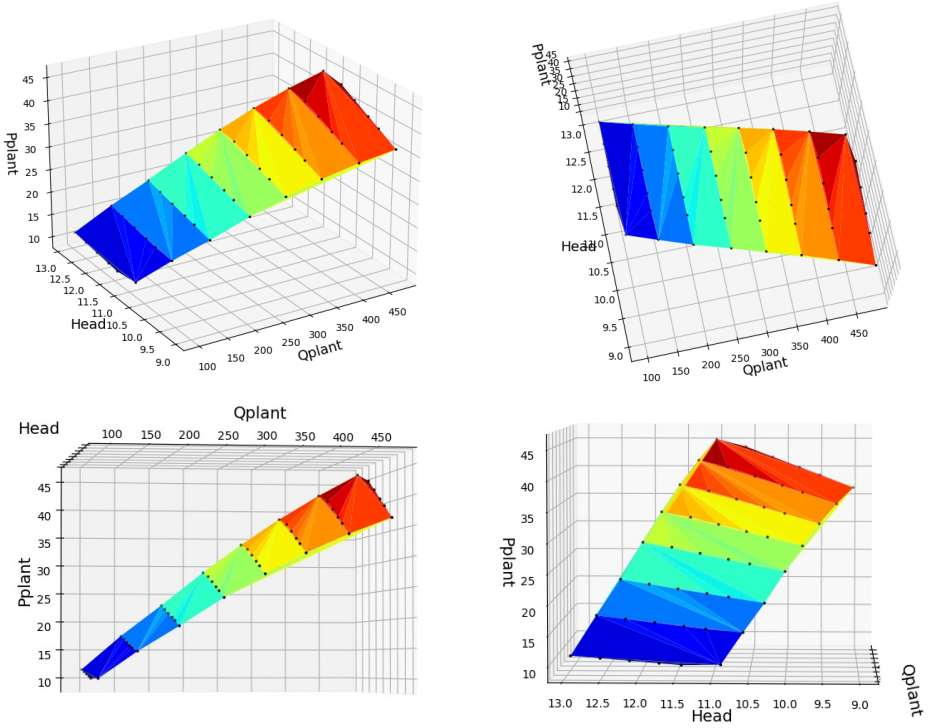
4.5 Po častiach lineárna aproximácia

Ďalšou z implementovaných aproximácií funkcie výkonu je po častiach lineárna aproximácia, viď časť 3.2. V numerickom experimente sme uvažovali dve možnosti ako túto metodiku aplikovať na funkciu výkonu popísanú rovnicou (50). Prvou z uvažovaných možností je aproximovanie v priestore spádu a prietoku súčasne. Druhou z uvažovaných možností je aproximácia v priestore objemu hornej hladiny a prietoku.

4.5.1 Aproximácia výkonu v priestore spádu a prietoku

V prvom prístupe sme funkciu výkonu aproximovali priamo v priestore spádu a prietoku. Hlavnou myšlienkou tohto prístupu je rozdeliť plochu vymedzenú prípustnými hodnotami spádu a prietoku na segmenty, ktoré majú spoločné hrany. Dôležitou otázkou ostáva, koľko týchto segmentov je optimálnych a efektívnych. Uskutočnili sme viacero numerických experimentov s cieľom nájsť vhodný počet segmentov. Ako najlepší kompromis medzi

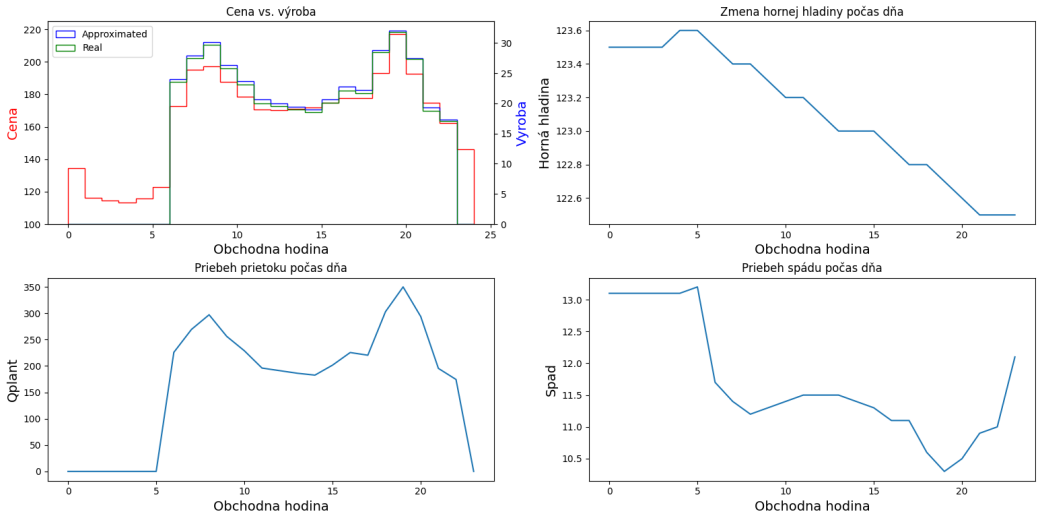
presnosťou a rýchlosťou sa ukázalo delenie 8×6, čo znamená, že sme zvolili 8 bodov na osi prietoku a 6 bodov na osi spádu. Situáciu sme graficky znázornili na obr. 12.



Obr. 12: Po častiach lineárna aproximácia funkcie výkonu v priestore prietoku a spádu

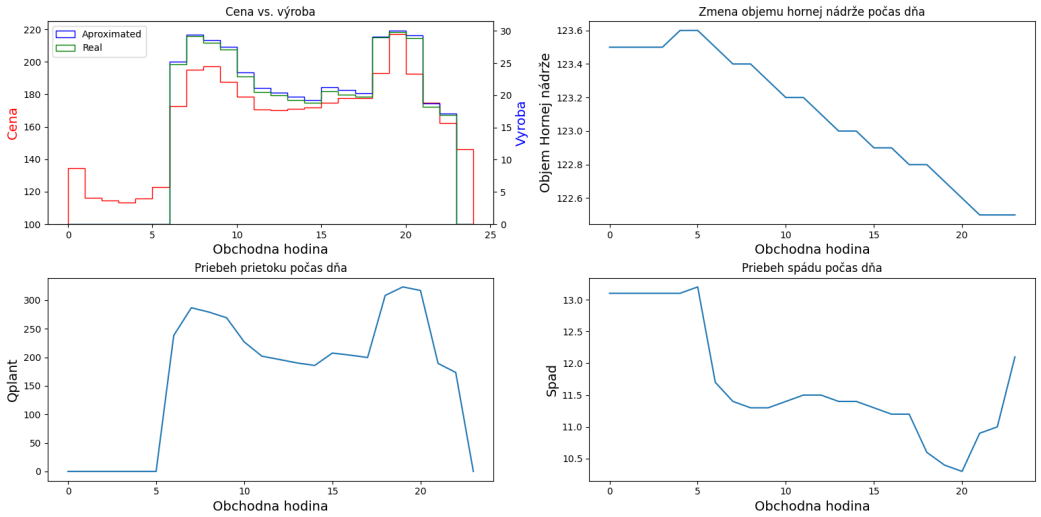
Podmienkou pre správnu optimalizáciu je, aby jednotlivé plochy tvorili konvexnú množinu. Ak je táto podmienka splnená, tak model dokáže nájsť kombináciu spádu a prietoku na tejto ploche. Následne nájdením tejto kombinácie mu priradí hodnotu výkonu pomocou konvexnej kombinácie najbližších bodov ako popisujeme v (42). To znamená, že hodnota výkonu je daná lineárnou plochou najbližších 3 bodov. Taktiež je potrebné spomenúť, že jednotlivé funkcie hornej a dolnej hladiny sú nelineárne funkcie. Numerický prístup vyžaduje aj linearizáciu hornej a dolnej hladiny, ale len v jednorozmernom priestore.

Optimálne hodnoty prietoku, ktoré sme získali využitím po častiach lineárnej aproximácie sme graficky znázornili na obr. 13. Môžeme pozorovať, že aproximované a reálne hodnoty výkonu sú takmer totožné. Taktiež môžeme pozorovať, že získaná stratégia spomedzi doteraz prezentovaných najlepšie kopíruje cenovú ponuku. Aproximovaná hodnota zisku je vo výške 73 795.07€, pričom reálna hodnota je 72 422.59€. Presnosť týchto hodnôt je 98.14 % a rýchlosť výpočtu je 0.02s.



Obr. 13: Prehľad dennej výroby, po častiach lineárna aproximácia $8 \times 6 bodov$

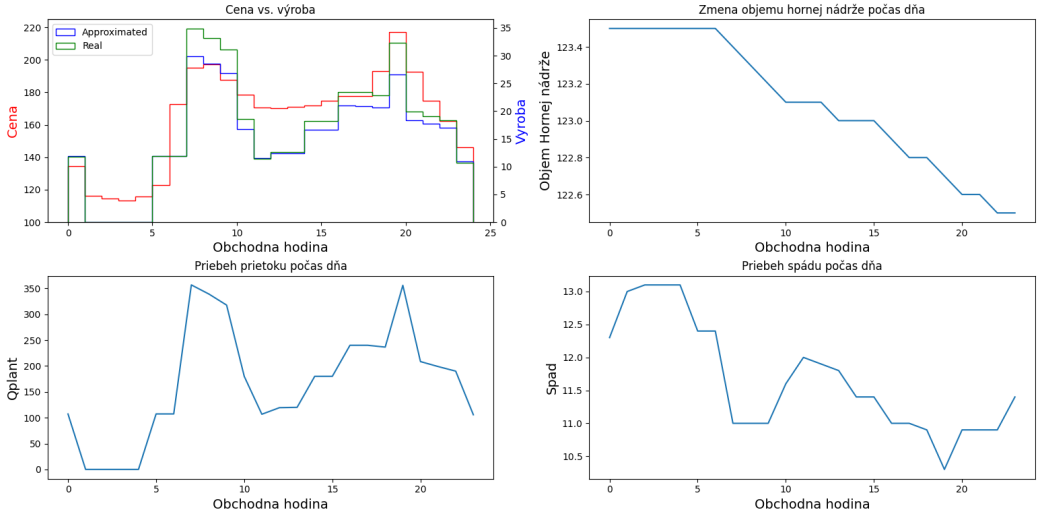
Keďže výsledky boli relatívne uspokojujúce a čas výpočtu tiež nebol zdĺhavý, rozhodli sme sa vyskúšať menší počet bodov delenia. Najprv sme znížili počet bodov delenia na 6×3. Výsledky boli podobné, než pri predchádzajúcom delení. Čas výpočtu bol približne rovnaký súčasne ako aj zisk. Aproximovaný zisk pri tomto rozdelení je 73 687.28€, zatiaľ čo reálny zisk 72 433.33€. Jednotlivé nasadenie je zobrazené na obr. 14.



Obr. 14: Prehľad dennej výroby, po častiach lineárna aproximácia 6×3 bodov

Pri predchádzajúcich aproximáciách pomocou prietoku a spádu sme rozdeľovali jednotlivé intervaly pomocou najvyššej presnosti aproximácie voči reálnej funkcii. Začali sme s pomerne zložitým delením, potom sme skúsili jednoduchšie delenie a nakoniec sme sa rozhodli plochu aproximovať len pomocou jedného vnútorného bodu a 8 okrajových. Cel-

kovo bola plocha rozdelená len na 8 častí. Vnútorný bod sme odhadli ako bod, v ktorom je podiel výkonu a prietoku maximálny, čím je najviac efektívny.



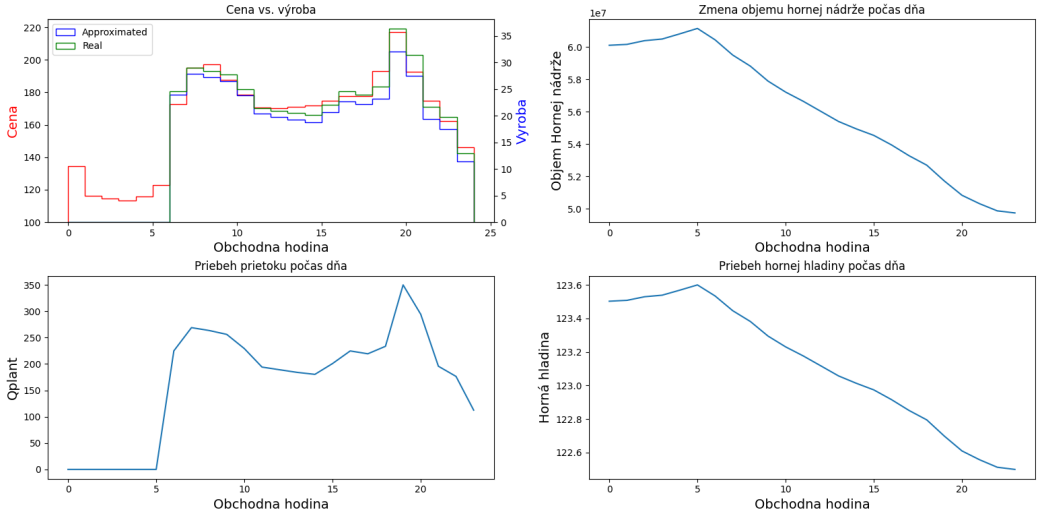
Obr. 15: Prehľad dennej výroby - po častiach lineárna aproximácia podľa efektivity

Nasadenie získané takouto aproximáciou je graficky znázornené na obr. 15. Môžeme vidieť, že nasadenie v jednotlivých hodinách je adaptívne na cenu, aj keď je značne podhodnotené. Aproximovaný zisk je len 64 797.48€. Pri rovnakom nasadení je ale reálny zisk 71 629.14€. Aj keď myšlienka jedného efektívneho bodu sa nám zdala ako potenciálne zaujímavý nápad, numerický experiment nepreukázal dostatočnú presnosť.

4.5.2 Aproximácia pomocou prietoku a objemu hornej hladiny

Druhou metódou po častiach lineárnej aproximácie je aproximácia funkcie výkonu v priestore prietoku a hornej hladiny. Tento prístup je založený na alternatívnom vyjadrení závislosti funkcie výkonu. Podľa (15) z časti 2.3 je výkon jednoznačne určený hodnotou prietoku a spádu. Podľa (16) je však spád určený ako rozdiel hornej a dolnej hladiny. Výška hornej hladiny je funkciou závislou od objemu hornej hladiny (17). Objem hornej hladiny je funkciou závislou od prietoku a prítoku z medzipovodia (19). Dolná hladina je taktiež funkciou prietoku (18). Skombinovaním jednotlivých vlastností dokážeme alternatívne stanoviť hodnotu výkonu na základe prietoku a objemu hodnej hladiny, teda zjednodušíme model. Výpočet je odbremenený od počítania samostatných funkcií hornej a dolnej hladiny a ich linearizácie. Namiesto toho počíta len s objemom hornej hladiny, čím docielime menšiu chybovosť. Preto dochádzame k záveru, že funkcia výkonu bude

závislá len od prietoku a objemu hornej hladiny, teda $P_t = P(Q_t, W_t)$. Predpokladáme, že týmto prístupom dôjde nielen k zvýšeniu efektivity, ale aj presnosti.



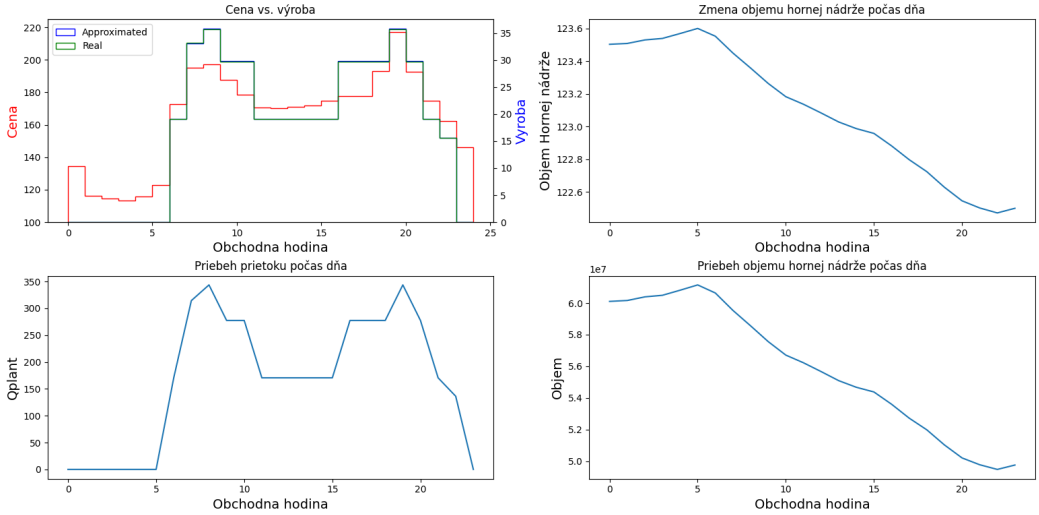
Obr. 16: Prehľad dennej výroby, po častiach lineárna aproximácia (Prietok, Objem HH)

Podobne ako pri predchádzajúcom modeli sme na alternatívne vyjadrenie funkcie výkonu využili po častiach lineárnu aproximáciu s 8×6 bodmi delenia. Na obr. 16 môžeme pozorovať, že hodnoty optimálneho prietoku získaného danou aproximáciou v priestore prietoku a objeme hornej hladiny kopírujú vývoj cien elektriny v jednotlivé hodiny dňa. Výška aproximovaného zisku pri takto stanovenej stratégii je 73 667.54€, pričom hodnota reálneho zisku 79 438.95€. Rýchlosť výpočtu pri tomto modeli je 0.02 s.

4.5.3 Inkrementálna metóda

Rozšírením po častiach lineárnej aproximácie je tzv. inkrementálna metóda (metóda prírastkov). Táto metóda nachádza využitie hlavne pri hydro-optimalizačných úlohách [4]. Hlavnou myšlienkou tejto metódy je rozdeliť aproximovanú plochu na viac častí pomocou určitých vlastností. S ohľadom na charakteristiky problému predstaveného v časti 4.1 sme sa rozhodli aproximovanú plochu rozdeliť na dve časti podľa využitia generátorov. Dôvod, prečo sme sa tak urobili, je že funkcia výkonu je rozdielna v týchto prípadoch, viď (50). Rozdelením plochy sme docielili, že aproximujeme dve samostatné konkávne funkcie. Hranica zlomu je pri prietoku 207 $m^3.s^{-1}$. Rozdelenie plochy sme zvolili podľa prietoku a objemu hornej nádrže, pričom metóda výpočtu ostáva neznemená, teda po častiach lineárna aproximácia. Keďže aproximujeme dve samostatné plochy, ich body delenia boli

nasledovné: interval $\langle 100, 207\rangle$ sme rozdelili na 4×6 bodov a interval $(207, 470\rangle$ na 5×6 bodov. Optimálnu hodnotu prietokov v jednotlivé hodiny dňa môžeme v prípade použitia inkrementálnej metódy vidieť na obr. 17.



Obr. 17: Prehľad dennej výroby - inkrementálna metóda (Prietok, Objem HH)

Aproximovaný zisk podľa inkrementálnej metódy je 79 835.03€ a reálny zisk 79 849.11€. Táto metóda je relatívne presná nie len z pohľadu reálnych a aproximovaných hodnôt, ale rovnako je presná v porovnaní s výsledkami dynamického programovania. Rýchlosť výpočtu je 0.05 s.

4.6 Porovnanie jednotlivých aproximácií

V predchádzajúcich častiach tejto kapitoly graficky zobrazujeme hodnoty jednotlivých optimálnych nasadení, ktoré sme získali pomocou predstavených aproximácií. V tejto časti zhrnieme výsledky z jednotlivých prístupov v numerickej podobe a porovnáme nasadenia v konkrétne hodiny. Pre lepší prehľad v tabuľke 4 uvádzame skratky jednotlivých aproximácií.

Tabuľky 5, 6, 7 sme konštruovali rovnakým štýlom. V prvom stĺpci môžeme vidieť časový údaj, v nasledujúcom stĺpci ceny elektriny pre konkrétne hodiny a v ďalších stĺpcoch konkrétne výsledky z jednotlivých aproximácií. Ceny elektriny sme označili farebnou škálou, kde od najnižších zelených hodnôt sa farebná škála mení ku najvyšším červený hodnotám. Rovnako tak sme zvýraznili aj konkrétne nasadenia, kde žltou sú

LIN	lineárna aproximácia (4.3)
KV1	kvadratická aproximácia, jednoduchšia (51)
KV2	kvadratická aproximácia, zložitejšia (54)
PW1	Po častiach lineárna aproximácia, (Q, H), menej bodov
PW2	Po častiach lineárna aproximácia, (Q, H), podľa efektivity
PW3	Po častiach lineárna aproximácia, (Q, H), viac bodov
PW4	Po častiach lineárna aproximácia (Q, V)
IC	Inkrementálna metóda
MDP	Metóda dynamického programovania

Tabuľka 4: Prehľad zavedených skratiek pre jednotlivé výpočtové techniky

označené nulové hodnoty a sýtosťou zelenej sú preškálované veľkosti jednotlivých nasadení.

Ako prvé sme sa zamerali na jednotlivé nasadenia, teda výšky prietokov v jednotlivých hodinách, viď tabuľka 5. Môžeme si všimnúť, že takmer všetky aproximácie pracujú s približne rovnakým množstvom vody v priebehu dňa, zatiaľ čo dynamické programovanie využije o 12 000m^3 viac . Dávame to za príčinu tomu, že ide o diskrétnu úlohu a konečný stav zaokrúhli s touto chybou.

V tabuľke 5 môžeme sledovať, ako sa jednotlivé aproximácie prispôsobujú volatilite ceny, pričom presnosť jednotlivých metód a grafické zobrazenie nasadení spomíname samostatne. Môžeme si všimnúť, že každá metóda volí rôzne nasadenie, aj keď konečný objem prietokov je takmer rovnaký. Napríklad lineárna a kvadratická aproximácia sústreďuje nasadenie na menší počet hodín s vyššími cenami v modelom zvolenými hodinami. Príčinou môže byť nepresná aproximácia v okrajových bodoch a tým pádom aj nasadenie v týchto bodoch nie je také presné v porovnaní s reálnym výkonom. Pri po častiach lineárnych aproximáciách rovnako ako pri metóde dynamického programovania vidíme nasadenia, ktoré viac kopírujú vývoj ceny elektriny v jednotlivé hodiny dňa.

V tabuľke 6 sa zameriavame na rozdelenie výkonu v jednotlivé hodiny. Môžeme si všimnúť, že hodnota výkonu závisí od jednotlivých prietokov z tabuľky 5. Je zrejmé, že v nočné hodiny, keď je cena elektriny nízka, nie je nasadená žiadna výroba.

Hodina	Cena v €	LIN	KV1	KV2	PW1	PW2	PW3	PW4	IC	MDP
1	134,54	100	0	0	0	107,2	0	0	0	0
2	116,18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	114,42	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	113,45	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	115,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	123,05	0	0	0	0	107,3	0	0	0	0
7	172,54	100	100	248,7	238,2	107,3	225,8	224,8	170,6	157
8	195,13	100	375	382,8	286,8	356,7	269,3	268,9	314,4	314
9	197,1	475	377,4	358	279,2	339	297,1	263,5	343,6	295
10	187,65	100	380,4	300	269,2	317,7	256,1	256,1	277,4	280
11	178,44	100	100	300	226,9	180	228,8	229,1	277,4	248
12	170,55	100	0	187,5	202	106,7	196	194,1	170,6	144
13	170,39	100	0	180	196,1	119,4	191,1	189	170,6	147
14	170,91	100	0	190,9	190,1	120	186,2	184	170,6	153
15	171,82	100	0	0	185,7	180	182,6	180,3	170,6	155
16	174,69	100	317,1	219,3	207,4	180	201,6	200,8	170,6	166
17	177,75	124,6	384,3	0	203,8	240	225,5	224,7	277,4	252
18	177,58	420	387,2	252,2	199,6	240	220,4	219,3	277,4	251
19	193,16	420	389,7	346,8	308,4	236,5	302,9	233,5	277,4	289
20	216,95	475	392,3	431,4	323,3	355,9	349,9	349,9	343,6	356
21	192,58	462,2	395,2	349,9	317,1	208,5	293,7	294,2	277,4	307
22	174,77	420	398,2	249,1	189,2	198,9	195,4	195,7	170,6	246
23	162,28	100	0	0	173,5	190	174,4	176,4	136,3	139
24	146,05	100	0	0	0	105,7	0	112,4	0	101
Spolu v $m^3.s^{-1}$		3996,8	3996,8	3996,6	3996,5	3996,8	3996,8	3996,7	3996,5	4000
Spolu v m^3		14 388 480	14 388 480	14 387 760	14 387 400	14 388 480	14 388 480	14 388 120	14 387 400	14 400 000

Tabuľka 5: Optimálna veľkosť prietoku: porovnanie jednotlivých prístupov v $m^3.s^{-1}$

Rovnako môžeme vidieť, že aj keď všetky aproximácie pracovali s približne rovnakým množstvom vody, už pri výkone sa ukazujú väčšie rozdiely. Ako vidíme, najlepšie spomedzi aproximácii v porovnaní ku dynamickému programovaniu vychádza po častiach lineárna aproximácia rozdelená podľa prietoku a objemu hornej hladiny (PW4). Podobne je na tom aj inkrementálna metóda, kde ten rozdiel nie je taký výrazný. Horšie obstáli lineárne a nelineárne aproximácie. Dôvodom je nedostatočná presnosť týchto aproximácii. Rozdiel približne 60 MW za jeden deň tvorí takmer 14 % dennej výroby.

Hodina	Cena v €	LIN	KV1	KV2	PW1	PW2	PW3	PW4	IC	MDP
1	134,54	11	0	0	0	11,74	0	0	0	0
2	116,18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	114,42	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	113,45	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	115,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	123,05	0	0	0	0	11,86	0	0	0	0
7	172,54	11	11,1	25,74	24,85	11,86	23,5	24,51	19,15	17,76
8	195,13	11	36,52	36,87	29,21	34,82	27,41	28,94	33,2	33,16
9	197,1	42,65	36,01	34,6	28,17	33,15	29,69	28,41	35,76	31,42
10	187,65	10,81	35,92	29,69	27,14	31,12	25,79	27,68	29,76	30,01
11	178,44	10,81	10,71	29,4	22,96	18,6	23,16	24,95	29,76	26,87
12	170,55	10,81	0	19,16	20,55	11,38	19,98	21,44	19,15	16,4
13	170,39	10,81	0	18,43	19,99	12,69	19,51	20,95	19,15	16,72
14	170,91	10,71	0	19,12	19,23	12,64	19,03	20,47	19,15	17,35
15	171,82	10,71	0	0	18,81	18,26	18,51	20,1	19,15	17,56
16	174,69	10,71	30,75	21,73	20,67	18,26	20,13	22,07	19,15	18,68
17	177,75	13,38	35,53	0	20,14	23,42	22,16	24,5	29,76	27,27
18	177,58	38,17	35,4	24,42	19,75	23,42	21,63	23,94	29,76	27,17
19	193,16	37,37	35,24	31,89	29,03	22,84	28,52	25,4	29,76	30,86
20	216,95	39,91	34,71	37,05	29,79	32,35	31,82	36,29	35,76	36,8
21	192,58	38,52	34,57	31,49	28,92	19,98	27,37	31,35	29,76	32,53
22	174,77	35,75	34,04	23,15	18,23	19,11	18,8	21,59	19,15	26,67
23	162,28	10,03	0	0	16,95	18,31	17,04	19,72	15,57	15,86
24	146,05	10,03	0	0	0	10,65	0	12,92	0	11,6
Spolu v MW		374,18	370,5	382,74	394,39	396,46	394,05	435,23	432,9	434,69

Tabuľka 6: Výkon jednotlivých aproximácií v MW

Aby čitateľ mal prehľad nie len o výkonnosti, ale aj o ziskovosti, v tabuľke 7 sme porovnali jednotlivé prístupy na základe ziskov v konkrétne hodiny. Ide o násobky cien s výkonom, ktoré reprezentujú jednotlivé zisky v konkrétne hodiny v €. Môžeme si všimnúť, že rozdiel zisku za jeden deň môže tvoriť aj sumu 10 000 €. Ak pri výpočte je nasadená nepresná aproximácia, za rok sa táto hodnota môže vyšplhať na niekoľko miliónov eur.

Hodina	Cena v €	LIN	KV1	KV2	PW1	PW2	PW3	PW4	IC	MDP
1	134,54	1 479,9 €	0 €	0 €	0 €	1 579,5 €	0 €	0 €	0 €	0 €
2	116,18	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €
3	114,42	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €
4	113,45	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €
5	115,6	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €
6	123,05	0 €	0 €	0 €	0 €	1 459,4 €	0 €	0 €	0 €	0 €
7	172,54	1 897,9 €	1 915,2 €	4 441,2 €	4 287,6 €	2 046,3 €	4 054,7 €	4 229,0 €	3 304,1 €	3 064,3 €
8	195,13	2 146,4 €	7 126,1 €	7 194,4 €	5 699,7 €	6 794,4 €	5 348,5 €	5 647,1 €	6 478,3 €	6 470,5 €
9	197,1	8 406,3 €	7 097,6 €	6 819,7 €	5 552,3 €	6 533,9 €	5 851,9 €	5 599,6 €	7 048,3 €	6 192,9 €
10	187,65	2 028,5 €	6 740,4 €	5 571,3 €	5 092,8 €	5 839,7 €	4 839,5 €	5 194,2 €	5 584,5 €	5 631,4 €
11	178,44	1 928,9 €	1 911,1 €	5 246,1 €	4 097,0 €	3 319,0 €	4 132,7 €	4 452,1 €	5 310,4 €	4 794,7 €
12	170,55	1 843,6 €	0 €	3 267,7 €	3 504,8 €	1 940,9 €	3 407,6 €	3 656,6 €	3 266,0 €	2 797,0 €
13	170,39	1 841,9 €	0 €	3 140,3 €	3 406,1 €	2 162,2 €	3 324,3 €	3 569,7 €	3 263,0 €	2 848,9 €
14	170,91	1 830,4 €	0 €	3 267,8 €	3 286,6 €	2 160,3 €	3 252,4 €	3 498,5 €	3 272,9 €	2 965,3 €
15	171,82	1 840,2 €	0 €	0 €	3 231,9 €	3 137,4 €	3 180,4 €	3 453,6 €	3 290,4 €	3 017,2 €
16	174,69	1 870,9 €	5 371,7 €	3 796,0 €	3 610,8 €	3 189,8 €	3 516,5 €	3 855,4 €	3 345,3 €	3 263,2 €
17	177,75	2 378,3 €	6 315,5 €	0 €	3 579,9 €	4 162,9 €	3 938,9 €	4 354,9 €	5 289,8 €	4 847,2 €
18	177,58	6 778,2 €	6 286,3 €	4 336,5 €	3 507,2 €	4 158,9 €	3 841,1 €	4 251,3 €	5 284,8 €	4 824,8 €
19	193,16	7 218,4 €	6 807,0 €	6 159,9 €	5 607,4 €	4 411,8 €	5 508,9 €	4 906,3 €	5 748,4 €	5 960,9 €
20	216,95	8 658,5 €	7 530,3 €	8 038,0 €	6 462,9 €	7 018,3 €	6 903,3 €	7 873,1 €	7 758,1 €	7 983,8 €
21	192,58	7 418,2 €	6 657,5 €	6 064,3 €	5 569,4 €	3 847,7 €	5 270,9 €	6 037,4 €	5 731,2 €	6 264,6 €
22	174,77	6 248,0 €	5 949,2 €	4 045,9 €	3 186,1 €	3 339,9 €	3 285,7 €	3 773,3 €	3 346,8 €	4 661,1 €
23	162,28	1 627,7 €	0 €	0 €	2 750,6 €	2 971,3 €	2 765,3 €	3 200,2 €	2 526,7 €	2 573,8 €
24	146,05	1 464,9 €	0 €	0 €	0 €	1 555,4 €	0 €	1 887,0 €	0 €	1 694,2 €
Spolu v €		68 907,3 €	69 707,9 €	71 389,2 €	72 433,3 €	71 629,1 €	72 422,6 €	79 439,0 €	79 849,1 €	79 855,8 €

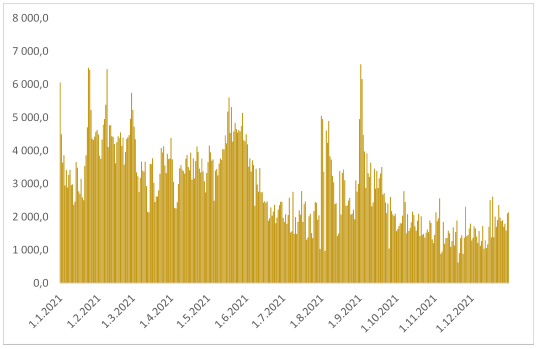
Tabuľka 7: Ziskovosť jednotlivých aproximácií v €

5 Simulácia na ročných dátach

V predchádzajúcej časti práce sme porovnali výsledky z jednotlivých výpočtových metód pre prípad jedného obchodného dňa. V tejto časti sme najprv vybrali najpresnejšie metódy: metódu dynamického programovania, po častiach lineárnu aproximáciu a inkrementálnu metódu, všetky závislé od prietoku a objemu hornej hladiny. Následne sme vybraté metódy testovali na reálnych ročných dátach, ktoré nám poskytli Slovenské elektrárne. Ide o údaje za rok 2021 pre vodnú elektráreň Kráľová. Ako vstupy do modelu sú počiatočné a koncové hladiny v každý deň, pričom koncová hladina v jeden deň je počiatočnou hladinou na ďalší. Ďalším vstupom sú prítoky z predchádzajúcej elektrárne spolu s prítokmi z medzipovodia a taktiež reálne ceny elektriny za každú hodinu všetkých obchodovaných dní v roku 2021.

5.1 Porovnanie nasadení

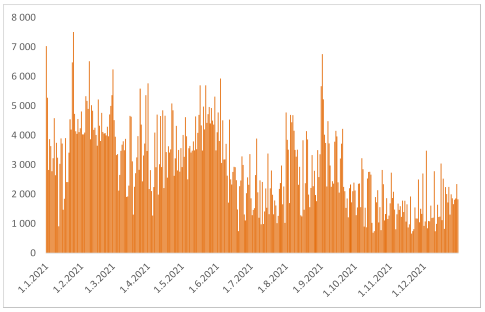
Ako prvé budeme porovnávať nasadenia jednotlivých modelov. Zaujímať nás budú denné prietoky cez vodnú elektráreň spolu s výkonom. Pre ilustráciu najprv uvádzame vstupné dáta prítokov do elektrárne, s akým množstvom vody elektráreň pracuje, viď. obr. 18. Pri reálnych dátach sa prítoky v jednotlivé hodiny pohybujú v rozmedzí od 0 do 420 $m^3.s^{-1}$, zatiaľ čo denné prítoky boli v intervale od 600 do 6600 $m^3.s^{-1}$. Priemerný denný prítok je 2655 $m^3.s^{-1}$. Tieto prítoky závisia od prietokov cez predchádzajúcu VE Madunice spolu s prítokmi z medzipovodia. Spolu za rok pritieklo do VE Kráľová 1 065 516m^3. Môžeme si všimnúť, že najvýraznejšie obdobie s najväčšími prítokmi je od februára do apríla, neskôr v auguste a septembri. Je to z dôvodu topenia sa snehu a väčších zrážok.



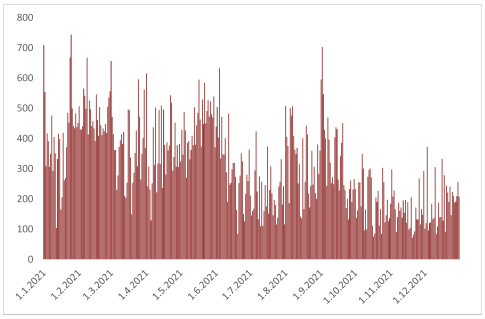
Obr. 18: Prítoky v $m^3.s^{-1}$ do VE Kráľová

Zdroj: Databáza SE

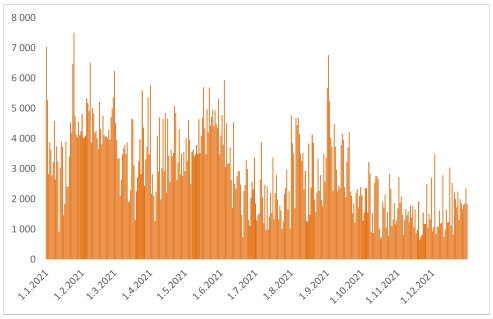
Od prítokov do elektrárne primárne závisí výroba elektriny konkrétnej vodnej elektrárne. Na obr. 19, 21, 23 sme graficky znázornili jednotlivé denné prietoky v $m^3.s^{-1}$ do VE Kráľová, s ktorými optimalizačný model počíta. Ku konkrétnym nasadeniam prietokov jednotlivých modelov sme zobrazili aj výkony v konkrétne dni, viď obr. 20, 22, 24.



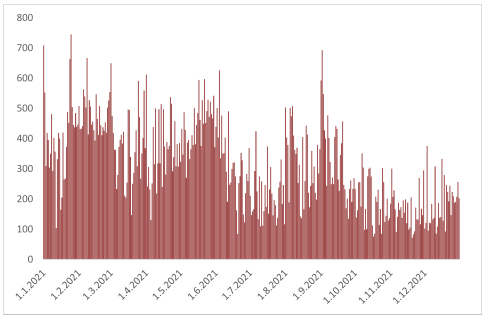
Obr. 19: Prietoky v $m^3.s^{-1}$, IC



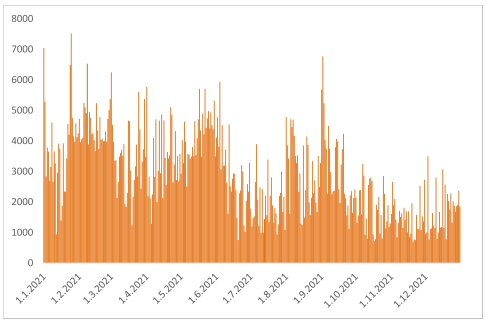
Obr. 20: Výkon v MW, IC



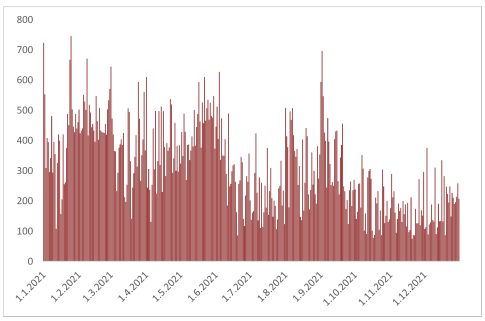
Obr. 21: Prietoky v $m^3.s^{-1}$, PW4



Obr. 22: Výkon v MW, PW4



Obr. 23: Prietoky v $m^3.s^{-1}$, MDP



Obr. 24: Výkon v MW, MDP

Môžeme si všimnúť, že rozdiel denných nasadení jednotlivých modelov nie je až taký výrazný, zatiaľ čo nasadenie v konkrétne dni po hodinách sa môže líšiť. Nasadenia výkonu primárne závisia od prietoku a spádu. Z dlhodobého hľadiska prevádzky VE Kráľová sa horná hladina pravidelne udržuje vo výške 123 m.n.m. Keďže hladina sa mení minimálne a

teda aj spád je zväčša rovnaký, to zapríčiňuje, že jednotlivé nasadenia prietokov kopírujú nasadenia výkonu. Taktiež môžeme pozorovať rovnakú sezónnosť z obr. 19, 21, 23 ako pri obr. 20, 22, 24. Čím je väčší predpoklad zrážok v danom období, tým je možné prečerpať viac vody cez elektráreň a následne vyrobiť viac elektrickej energie.

V tabuľkách 8 a 9 môžeme vidieť minimálne a maximálne denné hodnoty prietokov a výkonov počas roka, priemerné a celkové prietoky a výkony podľa jednotlivých aproximácií (hodnoty prietokov sú v $m^3.s^{-1}$, hodnoty výkonov sú v MW). Taktiež uvádzame percentuálnu zmenu celkovej ročnej výroby jednotlivých aproximácií v porovnaní s metódou dynamického programovania.

Metóda	Minimum	Maximum	Priemer	Celková výroba	% zmena
IC	660	7509	2574	1 066 113	+ 0.168
PW4	660	7509	2575	1 066 188	+ 0.175
MDP	696	7518	2568	1 064 326	-

Tabuľka 8: Porovnanie prietoku jednotlivých aproximácií v $m^3.s^{-1}$

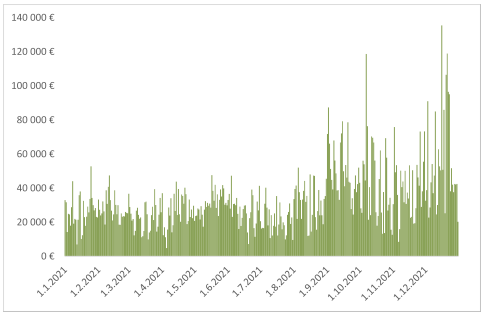
Metóda	Minimum	Maximum	Priemer	Celková výroba	% zmena
IC	71.5	744.1	279.0	114 490.6	- 0.196
PW4	71.3	745.0	279.5	114 716.8	+ 0.002
MDP	74.8	745.9	279.3	114 714.6	-

Tabuľka 9: Porovnanie výkonu jednotlivých aproximácií v MW

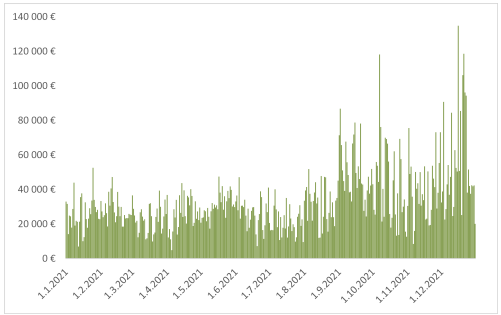
Aj keď ide o ročný odhad prietokov a výkonov, rozdiely medzi jednotlivými modelmi sú minimálne. Vidíme, že všetky typy aproximácii dokázali vyprodukovať približne rovnaké celkové množstvo elektriny v MW. Napriek tomu, že denné nasadenia sa môžu líšiť, môžeme usúdiť, že menšie denné výkyvy nemajú dopad na ročnú výrobu.

5.2 Porovnanie zisku

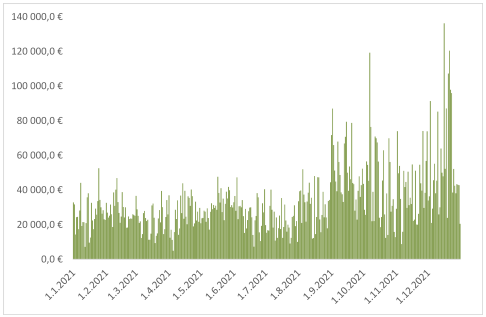
V predchádzajúcej časti sme porovnali prietoky a výkony v jednotlivé dni roka 2021 pre vybrané tri výpočtové metódy. V tejto časti porovnáme efektívnosť týchto metód s ohľadom na dosiahnutý ročný zisk. Na obr. 25, 26, 27 sme graficky znázornili ziskovosť v jednotlivých dňoch počas roka pre metódy IC, PW4, MDP. Napriek tomu, že prietoky a výroba boli počas zimných a jarných mesiacov vyššie ako po zvyšok roka, pri zisku pozorujeme opačný trend: najziskovejšie obdobie je v jesenných mesiacoch. Príčinou je prudký rast cien elektriny. Zatiaľ čo začiatkom roka 2021 sa priemerná cena elektriny pohybovala okolo sumy 50€ za MWh, koncom roka sa cena šplhala aj na 400 € za MWh.



Obr. 25: Zisk v €, IC



Obr. 26: Zisk v €, PW4



Obr. 27: Zisk v €, MDP

V tabuľke 10 sme zhrnuli minimálny a maximálny zisk, priemerný a celkový zisk podľa jednotlivých aproximácií. Rovnako ako pri nasadeniach prietoku a výkonu vidíme, že rozdiely v zisku jednotlivých modelov sú minimálne. Keďže sme zvolili metódy, ktoré v prípadovej štúdii aplikovanej na jeden konkrétny deň mali najviac podobné výsledky, očakávali sme tento trend aj pri ročných dátach. Môžeme zhodnotiť, že zvolené aproximácie dokázali z dlhodobého hľadiska najefektívnejšie využiť potenciál VE Kráľová, čím spĺňajú požiadavku presnosti výpočtu.

Metóda	Minimum	Maximum	Priemer	Celková výroba	% zmena
IC	4 884	135 428	29 712	12 275 773	+ 0.284
PW4	4 879	134 820	29 607	12 231 989	- 0.073
MDP	4 924	136 226	29 572	12 240 960	-

Tabuľka 10: Porovnanie zisku jednotlivých aproximácií v €

5.3 Rozšírenie prípadovej štúdie

V predchádzajúcich častiach sme simulovali výrobu elektriny vo VE Kráľová počas roku 2021. V tabuľkách 8, 9, 10 sme zhrnuli hodnoty prietoku, výkonu a zisku jednotlivých aproximácii. Na záver numerických experimentov sme sa rozhodli porovnať jednotlivé výpočtové metódy v ,,extrémnych" situáciách. Rovnako ako v prípadovej štúdii v kapitole 4 sme sa rozhodli preskúmať dennú výrobu v tieto dni. V prvom prípade sme analyzovali situáciu, keď prítoky do elektrárne boli malé, zatiaľ čo ceny elektriny vysoké. Následne sme sa pozreli na opačný prípad: keď prítoky sú vysoké, ale ceny elektriny sú nízke. Z tohto dôvodu sme si zvolili dva konkrétne dni a to 25.1.2021 a 4.12.2021. Ako sme ukázali v časti 5.2, ceny elektriny za minulý rok stúpli niekoľkonásobne. Januárový dátum sme zvolili z dôvodu, že v tento deň bol prítok do elektrárne Kráľová najvyšší počas celého roka 2021. Súčasne, ako sme už spomenuli, jedny z najnižších cien elektriny boli v minulom roku práve v januári. Decembrový dátum sme zvolili pre kontrast tak, aby prítoky do elektrárne boli čo najnižšie a súčasne cena elektriny čo najvyššia. Špecifikom tohto dňa je aj to, že napriek nízkym prítokom bola stanovená podmienka doplniť nádrž tak, aby objem na konci dňa bol väčší než bol na začiatku.

Výsledky pre deň 25.1.2021 sme zhrnuli v tabuľke 11. V ľavej časti tabuľky vidíme vstupné údaje: cenu elektriny za konkrétnu hodinu a prítoky do elektrárne. Vstupmi boli taktiež výška počiatočnej a koncovej hornej hladiny, ktorých hodnoty boli nasledovné: $HH_0 = 123.35$ a $HH_{24} = 122.98$. V pravej časti tabuľky prehľadne vidíme nasadenie prietoku a výkonu spolu so ziskom pre vybrané aproximácie.

Môžeme si všimnúť, že pri veľkých prítokoch je nasadenie prietokov takmer maximálne pri vysokých a stredných cenách elektriny. Môžeme taktiež pozorovať, že napriek najvyššej výrobe pri metóde dynamického programovania je zisk vyšší pri inkrementálnej metóde.

25.1.2021			Prietok v $m^3.s^{-1}$			Výkon v MW			Zisk v €		
Hodina	Cena v €	Prítoky	IC	PCWS	MDP	IC	PCWS	MDP	IC	PCWS	MDP
0	38,02	184,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	24,14	180,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	19,98	152,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	19,98	165,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	25,06	180,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	46,06	166,2	136,3	0	0	15,6	0	0,0	717 €	0	0
6	60,49	167,1	343,6	286,7	307	35,8	30,7	32,5	2 163 €	1 854 €	1 968 €
7	77,59	151,2	470,0	430,6	428	45,2	42,5	42,3	3 506 €	3 300 €	3 285 €
8	79,19	161,9	470,0	437,4	438	45,2	43,0	43,0	3 578 €	3 405 €	3 408 €
9	80,67	95,8	470,0	431,6	436	45,2	42,6	42,9	3 645 €	3 437 €	3 462 €
10	77,01	342,5	470,0	430,0	428	45,2	42,5	42,3	3 479 €	3 271 €	3 261 €
11	74,74	391,5	470,0	429,4	418	45,2	42,4	41,6	3 377 €	3 172 €	3 111 €
12	71,22	404,6	416,2	429,0	425	41,5	42,4	42,1	2 955 €	3 020 €	3 000 €
13	69,33	410,6	406,5	428,7	419	40,8	42,4	41,7	2 827 €	2 939 €	2 891 €
14	67,70	414,2	406,5	410,3	411	40,8	41,1	41,1	2 761 €	2 780 €	2 783 €
15	68,38	383,8	406,5	428,0	416	40,8	42,3	41,5	2 789 €	2 895 €	2 836 €
16	71,35	363,0	470,0	426,8	442	45,2	42,3	43,3	3 224 €	3 015 €	3 091 €
17	79,95	358,8	470,0	465,0	461	45,2	44,9	44,6	3 612 €	3 587 €	3 566 €
18	80,57	340,2	470,0	465,0	470	45,2	44,9	45,2	3 640 €	3 614 €	3 640 €
19	76,00	299,1	470,0	465,0	465	45,2	44,9	44,9	3 434 €	3 409 €	3 409 €
20	66,04	283,5	406,5	442,2	460	40,8	43,3	44,5	2 693 €	2 862 €	2 941 €
21	58,00	273,1	343,6	414,8	409	35,8	41,4	41,0	2 074 €	2 401 €	2 376 €
22	53,34	281,1	277,4	376,3	364	29,8	38,5	37,5	1 587 €	2 051 €	1 998 €
23	46,83	284,9	136,3	312,8	321	15,6	33,1	33,8	729 €	1 548 €	1 582 €
Spolu		6436,3	7509,4	7509,6	7518,0	743,7	745,0	745,9	52 789 €	52 560 €	52 608 €

Tabuľka 11: Porovnanie výpočtových metód pre deň 25.1.2021

Príčinou väčšieho celkového prietoku môže byť, že pri dynamickom programovaní ide o diskrétnu úlohu a metóda sa nedokáže trafiť do presného konečného objemu hornej hladiny. Jednotlivé nasadenia prietokov sme graficky zobrazili v Prílohe A.

Druhý prípad, na ktorý sme sa pozreli samostatne je deň 4.12.2021. Priloženú tabuľku 12 sme konštruovali rovnakým spôsobom ako tabuľku 11. Počiatočná hodnota hornej hladiny pre tento deň bola $HH_0 = 122.99$. Požadovaná koncová hodnota hornej hladiny je $HH_{24} = 123.27$.

Vidíme, že v prípade, keď elektráreň narába s menším objemom vody sú výsledky nadobudnuté metódou dynamického programovania značne nižšie, než pri ostatných metódach. Taktiež táto metóda využíva celkovo menšie množstvo vody v m^3. Ak sa pozorne pozrieme, môžeme si taktiež všimnúť, že MDP pri podobne vysokých cenách radšej rozloží výrobu medzi viacero hodín, než by mala sústrediť výrobu v menší počet hodín, na rozdiel od metódy PW4. Grafické zobrazenie výsledných nasadení uvádzame v Prílohe B.

4.12.2021			Prietok v $m^3.s^{-1}$			Výkon v MW			Zisk v €		
Hodina	Cena v €	Prítoky	IC	PCWS	MDP	IC	PCWS	MDP	IC	PCWS	MDP
0	129,23	11,07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	125,28	9,23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	171,46	2,74	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	185,00	7,19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	185,01	11,24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	183,79	14,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	187,60	11,92	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	205,00	78,05	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	222,79	83,55	0	0	103	0	0	11,84	0	0	2 637,8 €
9	235,01	84,19	129,9	0	116	14,87	0	13,32	3 494,6 €	0	3 130,3 €
10	239,55	100,75	136,3	128,1	115	15,57	14,67	13,21	3 729,8 €	3 514,2 €	3 164,5 €
11	235,01	100,38	100	127,8	109	11,49	14,64	12,53	2 700,3 €	3 440,5 €	2 944,7 €
12	237,92	82,66	136,3	127,4	120	15,57	14,6	13,77	3 704,4 €	3 473,6 €	3 276,2 €
13	222,00	79,90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	218,73	144,32	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	210,00	153,14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	233,71	157,89	100	131,2	108	11,49	15,02	12,41	2 685,3 €	3 510,3 €	2 900,3 €
17	243,05	148,28	136,3	193,2	110	15,57	21,35	12,64	3 784,3 €	5 189,1 €	3 072,2 €
18	230,57	171,00	100	131,2	0	11,49	15,02	0	2 649,2 €	3 463,2 €	0
19	196,77	84,20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	200,27	83,22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	157,71	7,77	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	150,89	10,30	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	119,86	12,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Spolu		1649,8	838,8	838,9	781,0	96,1	95,3	89,7	22 748 €	22 591 €	21 126 €

Tabuľka 12: Porovnanie výpočtových metód pre deň 4.12.2021

5.4 Vyhodnotenie prínosu

Metódy výpočtu analyzované v tejto diplomovej práci ponúkajú efektívne riešenie problematiky niekoľkými spôsobmi. Naprieč všetkými modelmi, ktoré sme teoreticky vysvetlili a následne prakticky implementovali, hodnotíme inkrementálnu metódu popísanú v časti 4.5.3 ako najvhodnejšiu aplikovanú metódu. Táto metóda spĺňa všetky požiadavky optimalizácie: minimalizovať čas výpočtu a maximalizovať zisk. Spomedzi všetkých metód by bol zisk dosiahnutý za minulý rok práve týmto spôsobom najvyšší, aj keď celkový výkon bol pri iných metódach vyšší. Hodnotíme teda, že rozloženie jednotlivých denných nasadení pomocou inkrementálnej metódy je najefektívnejšie. Vodná elektráreň Kráľová má pri súčasných cenách elektriny potenciál vyprodukovať celkový zisk vyšší než 12 mil. € za rok.

Záver

Elektrická energia sa stáva čoraz žiadanejšou komoditou na obchodovanom spotovom trhu. Hlavným cieľom pri obchodovaní na tomto trhu je nakúpiť energiu lacnejšie ako ju predať. Ak sa na takýto problém pozrieme z pohľadu výrobcu, jeho hlavným cieľom je predať vyrobenú elektrinu za čo najvyššiu cenu. Pri typoch elektrární, ktoré nevyrábajú stály objem elektrickej energie, je preto dôležité, aby svoj potenciál využili na maximum. Medzi takýto typ elektrární patrí aj vodná elektráreň. Konštrukcia vodnej elektrárne umožňuje upraviť veľkosť prietoku cez elektráreň v každú hodinu dňa a tak prispôsobiť výrobu meniacim sa trhovým cenám elektriny. Pri výrobe elektriny pomocou vodnej sily primárne záleží od množstva vody, ktoré prejde cez elektráreň a od výšky spádu medzi hornou a dolnou hladinou. Preto je dôležité skĺbiť veľkosť prietoku a výšku spádu a využiť tak potenciál výroby čo najefektívnejšie pri maximalizácii zisku.

V tejto práci sme sa zamerali na stanovenie optimálnej prevádzky vodnej elektrárne v krátkodobom horizonte. Našim cieľom bolo stanoviť veľkosť prietoku v každú hodinu tak, aby zisk vodnej elektrárne bol maximálny a súčasne boli dodržané všetky technické a konštrukčné obmedzenia danej vodnej elektrárne.

V úvode práce sme popísali stručnú históriu hydroenergetiky, aké turbíny sa postupom času vyvinuli a aké typy elektrární sa vďaka nim postavili. Následne sme stručne popísali stav vodných elektrární na Slovensku. V druhej kapitole sme predstavili základný problém v hydromodelovaní: sformulovali sme úlohu stanovenia optimálnej prevádzky. Následne sme vysvetlili dva teoretické pohľady na daný problém. V prvom z nich sme problém optimálneho manažmentu prevádzky vodnej elektrárne reprezentovali ako úlohu optimálneho riadenia. Nakoľko štandardné výpočtové techniky pre takýto typ úlohy sú časovo a pamäťovo náročné a teda z praktického hľadiska nevyhovujúce, bolo nevyhnutné hľadať alternatívne prístupy. Jadrom práce bolo hľadanie vhodných aproximácii nelineárnych funkcií, ktoré v úlohe vystupujú (napr. funkcia výkonu). Takáto transformácia umožnila využiť na riešenie problému optimálnej prevádzky efektívne techniky z oblasti celočíselného programovania. V tretej kapitole sme predstavili niekoľko typov aproximácie: lineárna regresia, kvadratická regresia, po častiach lineárna aproximácia a jej variácie. V štvrtej kapitole sme predstavené typy aproximácií testovali na prípade vodnej elektrárne Kráľová. Tu sme najprv popísali všeobecné špecifiká danej elektrárne,

ktorou je VE Kráľová. Definovali sme všetky ohraničenia výpočtu, rovnako ako aj funkciu výkonu. Následne sme využili metódy z teoretickej časti a aplikovali ich na konkrétny modelovaný deň. Jednotlivé metódy sme porovnali z hľadiska presnosti výpočtu a dĺžky výpočtového času. Porovnali sme aj optimálne stratégie, získané na základe predstavených numerických prístupov. V poslednej kapitole sme testovali vybrané najperspektívnejšie metódy zo štvrtej kapitoly na reálnych dátach za celý rok 2021. Ďalej sme naprogramovali simulačný model, v ktorom sme aplikovali optimalizačný výpočet na reálne vstupné dáta VE Kráľová za rok 2021, ktoré nám poskytli Slovenské elektrárne, a.s.. Zo všetkých modelovaných dní sme vybrali dva konkrétne, ktoré sme analyzovali detailnejšie po hodinách. Tieto dni boli vybrané v kontraste, čo znamená, že sme zvolili hraničné dni z pohľadu objemu výroby s rozdielnymi cenovými úrovňami.

Na základe numerickej analýzy ročných dát sme porovnali presnosť, rýchlosť a ziskovosť jednotlivých metód. Spomedzi uvažovaných metód sme ako najpresnejšiu vyhodnotili inkrementálnu metódu, ktorá je variáciou po častiach lineárnej aproximácie. Táto metóda bola zo všetkých uvažovaných metód najpresnejšia, najviac efektívna v porovnaní zisku ku výrobe a rýchlosť výpočtu nebola výrazne vyššia ako pri ostatných metódach aproximácií.

V numerickej časti tejto práce sme sa výlučne venovali len VE Kráľová. Otázkou preto ostáva, či použitie inkrementálnej metódy možno považovať za najefektívnejší prístup aj vo všeobecnosti. Prirodzeným pokračovaním tejto práce by preto bola analýza inej vodnej elektrárne, nakoľko každá z vodných elektrární Vážskej kaskády má svoje technické a výrobné špecifiká.

Zoznam použitej literatúry

[1] AMPL Optimization Inc.: *Optimalizačný solver*, získané z internetu: https://ampl.com/

[2] Anděl, J.: *Statistické metody*, MatfyzPress, Praha, 2007

[3] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, Preprint, Praha, 2002

[4] Borghetti A. a kol., *An MILP Approach for Short-Term Hydro Scheduling and Unit Commitment With Head-Dependent Reservoir*, IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS, vol. 23, no3, August 2008

[5] Breeze P., *Hydropower*, Elsevier Ltd., Veľká Británia, 2018,

[6] Chang J., Li X. W. Y., Wang Y.: *Energy*, Hydropower plant operation rules optimization response to climate change (2018), 886-897, dostupné na internete (5.1.2022): https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S036054421831363X

[7] D'Ambrosio C., Lodi A., Martello S.: *Operations Research Letters*, Piecewise linear approximation of funcions of two variables in MILP models (2010), 39-46, dostupné na internete (20.09.2022): https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637709001072

[8] Dantzig G. B., Thapa M.N.: *Linear programming 2: Theory and Extensions*, Springier-Velgar, New York, 1997

[9] Dušička P., Šulek P.: *Popis algoritmov hydromodelovania navrhnutých pre SW model prípravy prevádzky VE*, katedra hydrotechniky STU, Bratislava, 2006

[10] Elavarasan, R. M.: *European Journal of Sustainable Development Research*, The Motivation for Renewable Energy and its Comparison with Other Energy Sources: A Review (2019), dostupné na internete (5.1.2022): https://www.ejosdr.com/download/the-motivation-for-renewable-energy-and-its-comparison-with-other-energy-sources-a-review-4005.pdf

[11] Egré D., Milewski J. C., Policy, The diversity of hydropower projects (2002), 1225-1230, dostupné na internete (12.1.2022): https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421502000836

[12] Gláucia, F., Leonardo, G. a Luiz, B. (2018), A risk-hedging tool for hydropower plants. Renewable and Sustainable Energy Rewiews, 90, 370-378: https://doi.org/10.1016/j.rser2018.03.081 (11.1.2022)

[13] Gurobi Optimization, LLC: *Gurobi Optimizer Reference Manual*, dostupné na internete (01.01.2022): www.gurobi.com

[14] Halická M., Brunovský P., Jurča P.: *Optimálne riadenie*, EPOS, Bratislava, 2009

[15] Hamala M., Trnovská M.: *Nelineárne programovanie*, EPOS, Bratislava, 2013

[16] International hydropower association,: *A brief history of hydropower*, dostupné na internete (9.1.2022): https://www.hydropower.org/iha/discover-history-of-hydropower

[17] Janková K., Pázmaň A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2012

[18] Jawahar, C. Prawin, M (2017), A review on turbines for a micro hydropower plant. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 72, 882-887: https://doi.org/10.1016/j.rser2017.01.133 (11.1.2022)

[19] OKTE, a.s.: *Organizátor krátkodobého trhu s elektrinou*, dostupné na internete (25.10.2021): https://www.okte.sk/sk/

[20] Sachdev H. S., Akella A. K., Kumar N.: *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Analysis and evaluation of small hydropower plants: A bibliographical survey (2015), 1013-1022, dostupné na internete (14.1.2022): https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032115006371

[21] Seber G. F., Lee A. J.: *Linear Regression Analysis*, Second Edition, John Wiley Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003

[22] Slovenské elektrárne, a.s.: *Závod Vodné elektrárne*, dostupné na internete (25.3.2022): https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/Public/40/098/40098475.pdf?r=1

[23] Slovenské elektrárne, a.s.: *Vodná elektráreň Kráľová*, dostupné na internete (14.1.2022): www.seas.sk/elektraren/ve-kralova/

[24] Slovenské elektrárne, a.s.: *V Kráľovej odskúšali prototyp vodnej elektrárne Gabčíkovo*, dostupné na internete (25.3.222): https://www.seas.sk/novinky/v-kralovej-odskusali-prototyp-vodnej-elektrarne-gabcikovo/

[25] Tekeľ L.: *Vodné elektrárne v prevádzke*, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1961

[26] Úrad pre reguláciu sieťových odvetví, dostupné na internete: www.urso.gov.sk

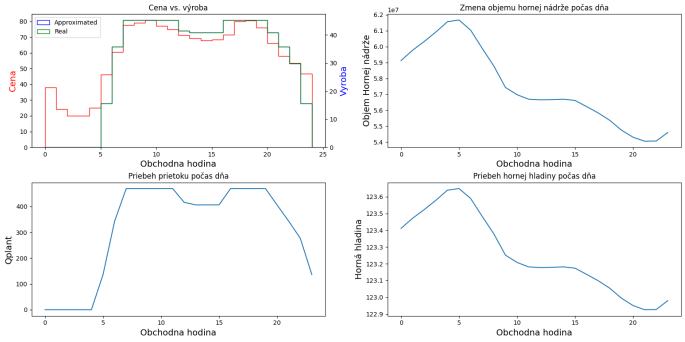
[27] U.S. department of energy: *History of Hydropower*, dostupné na internete (9.1.2022) - link v maili

[28] Vineet, S. and Singal, S. (2017), *Operation of hydropower plants-a review*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 69, 61-619: https://doi.org/10.1016/j.rser2016.11.169 (11.1.2022)

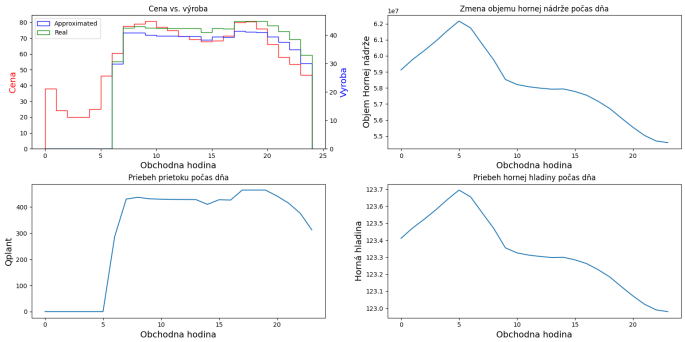
[29] www.energie-portal.sk: *Vodné elektrárne v SR*, dostupné na internete (25.3.2022): https://www.energie-portal.sk/Dokument/vodne-elektrarne-v-sr-100207.aspx

Príloha A

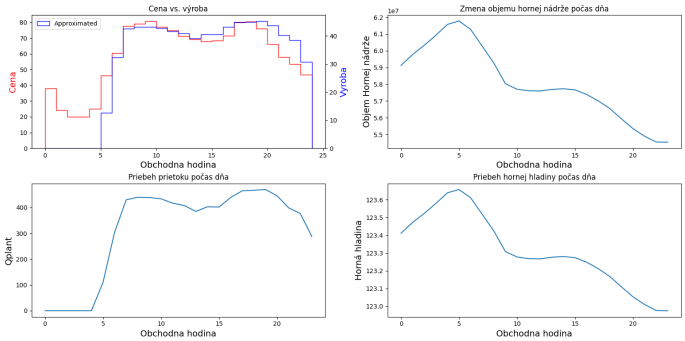
Grafické zobrazenie jednotlivých aproximácií za deň 25.1.2021



Obr. A.1: Prehľad výroby dňa 25.1.2021, IC



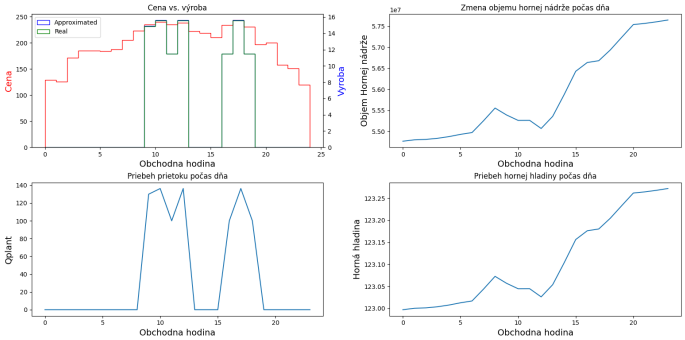
Obr. A.2: Prehľad výroby dňa 25.1.2021, PW4



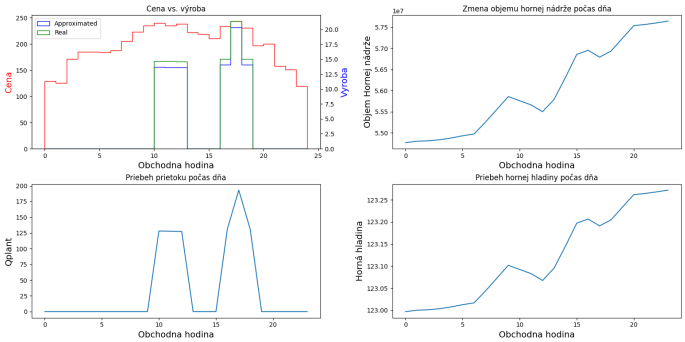
Obr. A.3: Prehľad výroby dňa 25.1.2021, MDP

Príloha B

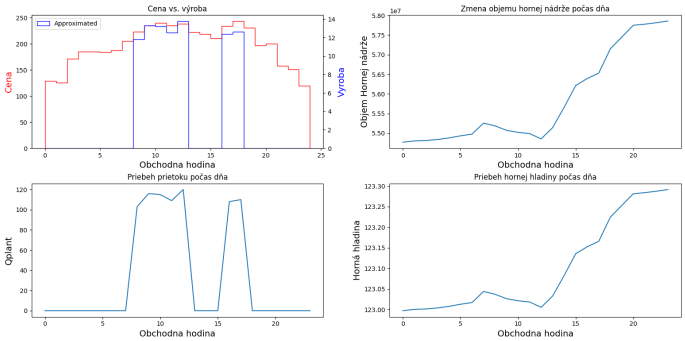
Grafické zobrazenie jednotlivých aproximácií za deň 4.12.2021



Obr. B.4: Prehľad výroby dňa 4.12.2021, IC



Obr. B.5: Prehľad výroby dňa 4.12.2021, PW4



Obr. B.6: Prehľad výroby dňa 4.12.2021, MDP