UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SHADOW RATE MODELY ÚROKOVÝCH MIER

Diplomová práca

Bratislava, 2024

Bc. Lenka Košútová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SHADOW RATE MODELY ÚROKOVÝCH MIER

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci:	doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2024

Bc. Lenka Košútová





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Lenka Košútová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Shadow rate modely úrokových mier
Shadow rate models of interest rates

Anotácia: Základnou myšlienkou shadow rate modelov je existencia určitej tieňovej miery, ktorá sa modeluje stochastickou diferenciálnou rovnicou. Od nej je skutočná krátkodobá úroková miera nejakým spôsobom odvodená. Prvé modely mali za cieľ neumožniť záporné úrokové miery, v čase záporných úrokových mier začali vznikať aj také shadow rate modely, ktoré takéto hodnoty pripúšťajú. Diplomová práca obsahuje prehľad rôznych shadow rate modelov a ich numerické ukážky. Podrobnejšie sa následne zaoberá jedným z modelov pripúšťajúcich záporné úrokové miery. Študuje sa oceňovanie dlhopisov pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc a z nich vyplývajúce výnosové krivky, ktoré sa porovnávajú s reálnymi dátami.

Vedúci: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 10.01.2023

Dátum schválenia: 11.01.2023 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

KOŠÚTOVÁ, Lenka: Shadow rate modely úrokových mier [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., 2024, 55 s.

Problematikou, ktorou sa v diplomovej práci zaoberáme je koncept tieňových úrokových mier, ktoré sú viac známe pod pojmom *shadow rate*. Ako už názov napovedá, tieto úrokové miery nejakým spôsobom kopírujú iné úrokové miery. Jedným z cieľov našej práce je čitateľa oboznámiť s týmto a inými pojmami súvisiacimi s danou témou. Medzi ostatné ciele patrí predstavenie niekoľkých existujúcich modelov využívajúcich sa na modelovanie *shadow rate* úrokovej miery, a napokon hlbšie predstavenie a podrobné odvodenie jedného z modelov. Model, ktorému sa venujeme najpodrobnejšie je formulovaný pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice pre *shadow rate*. Tento model následne používame v praxi a to na ocenenie dlhopisov pomocou numerického výpočtu odvodenej parciálnej diferenciálnej rovnice, resp. porovnanie úrokov vyplývajúcich z vypočítanej ceny dlhopisov s dostupnými skutočnými dátami.

Kľúčové slová: shadow rate, short rate, long rate, shadow rate modely

Abstract

KOŠÚTOVÁ, Lenka: Shadow rate models of interest rates [Diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., 2024, 55 p.

The issue addressed in the thesis is the concept of shadow interest rates. As the name suggests, these interest rates somehow copy other interest rates. One of the objectives of our work is to familiarize the reader with this and other terms related to the topic. Among other objectives is the presentation of several existing models used to model the shadow rate of interest, and finally, a deeper introduction and detailed derivation of one of the models. The model we focus on most extensively is formulated using a stochastic differential equation for the shadow rate.We then apply this model in practice to value bonds using numerical computation of the derived partial differential equation, or to compare the interest rates implied by the calculated bond prices with available actual data.

Key words: shadow rate, short rate, long rate, shadow rate models

Predhovor

Úroková miera je pojem, ktorý je známy takmer každému. Stretávame sa s ním v každodennom živote, väčšina ľudí sa s týmto pojmom stretla najmä v správach, novinách či pri návšteve banky. Záporná úroková miera avšak už taká bežná nie je.

Práve tento fakt a zvedavosť ma presvedčili si vybrať túto tému a spracovať ju tak, aby modelovanie záporných úrokových mier nebolo aj naďalej také neznáme.

Práca je určená najmä pre ľudí, ktorí sa už s podobnou problematikou stretli, resp. pre ľudí, ktorí majú nadobudnuté poznatky z teórie pravdepodobnosti a štatistiky, stochastického kalkulu a finančných derivátov.

Touto cestou by som sa chcela poďakovať najmä vedúcej diplomovej práce pani doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za trpezlivosť a užitočné rady počas celého vedenia diplomovej práce. V neposlednom rade ďakujem aj svojej rodine, priateľovi a kamarátom za podporu počas celého štúdia.

Obsah

Úvod **8**

1 Základná teória - vety a definície použité v práci **11**

2 Pojem *shadow rate* a modely úrčené na modelovanie *shadow rate* **13**

2.1 *Shadow rate* modely 15

2.1.1 Blackov model 16

2.1.2 Krippnerov model 17

2.1.3 Wu a Xia model 18

2.1.4 Bauer a Rudebusch model 18

2.1.5 Priebschov model 19

3 Jednofaktorový model s použitím parametrov pre krátkodobú úrokovú mieru **21**

3.1 Formulácia modelu 21

3.2 Metodika práce a odhad parametrov Vašičkovho procesu 23

3.3 Odvodenie podmienenej hustoty 24

3.4 Metóda maximálnej vierohodnosti pre odhad kalibračného parametra k 28

3.5 Výsledky a ich analýza 29

3.6 Testovanie hypotézy o Vašičkovom modeli 32

4 Implementácia jednofaktorového modelu na výpočet ceny dlhopisov a trhovej ceny rizika **34**

4.1 MOL metóda 34

4.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre ocenenie dlhopisov 36

4.2.1 Odhadnutie trhovej ceny rizika 37

4.2.2 Odvodenie PDR pre výpočet ceny dlhopisu so zahrnutím trhovej ceny rizika 37

4.3 Implementácia MOL metódy 40

4.4 Maticová exponenciála 44

4.4.1 Vlastnosti maticovej exponenciály 45

4.5 Testovanie presnosti numerickej MOL metódy 45

4.6 Minimalizačná funkcia určená na odhadnutie parametra λ 48

Záver **51**

Zoznam použitej literatúry **53**

Úvod

S pojmom *úroková miera* sa stretávame ako populácia pomerne často. Takmer každý deň môžeme toto slovné spojenie počuť v spravodajstve, čítať o ňom v novinách. Štandardne sa stretávame s úrokmi, ktoré sú kladné, čo znamená, že v prípade, že požiadame o pôžičku, budeme musieť jej poskytovateľovi vrátiť viac. O čom ale počúvame nie až tak často, je záporná úroková miera, keďže tento jav sa až tak bežne nevyskytuje.

Existencia záporných úrokových sadzieb bola v minulosti neprípustná, o čom svedčí aj fakt, že väčšina modelov určených na modelovanie úrokových mier takúto mieru ani nepripúšťala. V roku 1995 ale Fischer Black vo svojom článku [3] upozornil na fakt, že úroky v skutočnosti môžu byť aj záporné, takýmto úrokom dal názov *shadow rate* a predstavil aj prvý model určený na odhad takejto úrokovej miery. Neskôr na tento model nadviazali ďalší iní matematici a v súčasnosti existuje viacero modelov zaoberajúcich sa *shadow rate* úrokovou mierou.

Prečo je ale možné, že úroky sú záporné? Podľa [2], monetárna politika je nástroj, vďaka ktorému vie vláda znížiť negatívny dopad na krajinu v čase krízy, resp. zlých časov, kedy sa ekonomika nachádza v recesii. Najčastejšie krajiny prežívajú zlé časy počas rôznych ekonomických kríz, no ako sme sa presvedčili pred pár rokmi, takéto neprajné časy môže spôsobiť aj celosvetová pandémia.

Znížením úroku, ktorý je považovaný za monetárny zásah, dokáže vláda zmierniť následky krízy na krajinu, keďže tým motivuje ľudí k investíciam, čím dochádza k stimulu ekonomiky. Avšak, pri znížení nominálnej úrokovej sadzby na takmer nulovú, niekedy aj zápornú úroveň, nastáva problém. Kvôli nulovej (resp. zápornej) úrokovej miere je náročné opísať reálny ekonomický stav krajiny a rozsah monetárnych zásahov, ktoré sa určujú najmä z výnosovej krivky. V takomto prípade je potrebné zohľadniť všetky informácie, ktoré vieme zistiť z výnosovej krivky, čo si vyžaduje odhadnúť výnosovú krivku s obmedzenou úrokovou mierou. Práve z tohto dôvodu vznikla *shadow*

rate miera.

Shadow rate je tieňová miera, ktorá ale nie je pozorovateľná na trhu. Na jej výpočet sa z tohoto dôvodu používajú rôzne matematické modely. Cieľom našej práce bude čitateľa oboznámiť s viacerými modelmi, ktoré sa používajú na modelovanie *shadow rate*. S predstavenými modelmi povieme alebo ukážeme, na čo konkrétne bol ten-ktorý model použitý.

Úvodná kapitola diplomovej práce bude venovaná základným definíciám a vetám z niekoľkých oblastí matematiky ako napríklad pravdepodobnosť a štatistika alebo teória stochastického kalkulu. Tieto poznatky budú kľúčové hlavne pri tretej a štvrtej kapitole, ktorá je venovaná nami uvažovanému modelu.

Druhá kapitola sa bude zaoberať históriou vzniku *shadow rate*, no najmä bude obsahovať prehľad už existujúcich modelov. V tejto kapitole predstavíme viaceré nami vybrané modely, v jednoduchosti vysvetlíme ako fungujú a uvedieme, na čo konkrétne boli použité. Čerpáme najmä z originálnych článkov a publikácií, v ktorých boli jednotlivé modely predstavené. Pri predstavení Blackovho modelu vychádzame zo spomínaného článku [3], Krippnerov model opíšeme na základe publikácie [12]. Wu a Xia model opíšeme na základe článkov [23] a [24]. Napokon model Bauera a Rudebuscha opíšeme využitím článku [1] a Priebschov model použitím [17].

Najdôležitejším prínosom našej práce bude predstavenie modelu, ktorému sa budeme venovať v najväčšej miere. Kapitola bude obsahovať hlavnú ideu fungovania modelu, teda jeho predpis a podrobné matematické odvodenie. Hlavnou motiváciou k hlbšej analýze modelu je využitie ľahko dostupných dát *short rate*, na základe ktorých pomocou špeciálneho kalibračného parametra vymodelujeme *shadow rate*. Táto časť práce bude obsahovať viaceré grafické výstupy a tabuľky s hodnotami parametrov vystupujúcich v modeli, ktoré budeme odhadovať použitím metódy maximálnej vierohodnosti.

V poslednej, štvrtej kapitole využijeme uvažovaný model z predchádzajúcej ka-

pitoly. Najskôr uvedieme odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre ceny dlhopisov konkrétne pre uvažovaný model. Takýto postup je štandardný, avšak pri využití nášho modelu dochádza k miernej modifikácii. Táto úprava v odvodení PDR spočíva v tom, že stochastickú rovnicu nebudeme uvádzať pre *short rate* r ako je to štandardne zvykom, ale pre *shadow rate* s. Z cien dlhopisov následne použitím prevodného vzťahu budeme vedieť získať hodnoty úrokovej miery. Na numerický výpočet odvodenej parciálnej diferenciálnej rovnice využijeme semidiskretizačnú metódu, a to metódu vertikálnych priamok. Pri využití tejto metódy sa inšpirujeme článkom [19], v ktorom je táto metóda aplikovaná na model podobný tomu, ktorý v práci uvažujeme my.

V tejto kapitole sa navyše oboznámime s pojmom maticovej exponenciály, keďže tú budeme využívať v riešení PDR a aplikovaní riešenia do štatistického softvéru R. Poslednou časťou kapitoly bude odhad trhovej ceny rizika na základe minimalizácie súčtu štvorcov hodnôt *long rate* úrokovej miery a nami numericky výpočítaných hodnôt.

V závere práce už len stručne zhrnieme výsledky, ktoré v práci dosiahneme.

1 Základná teória - vety a definície použité v práci

V úvodnej kapitole našej práce uvádzame základne matematické vety, tvrdenia a definície, ktoré budeme používať v celej práci a budeme sa na ne odvolávať. Pokiaľ nie je uvedené inak, vychádzame z literatúry [14].

Definícia 1 *Nech $t \geq 0$, Wienerov proces je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- *s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie $W_t(\omega)$ spojité*
- *pre W_0 platí, že $W_0 = 0$*
- *$W_{t+s} - W_s$ má $N(0,t)$ rozdelenie*
- *W_t má nezávislé prírastky, t.j W_{t_1}, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ... ,$W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sú nezávislé pre všetky $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$.*

Dôležitým dôsledkom vyššie uvedených vlastností je fakt, že náhodná premenná W_t má normálne rozdelenie $N(0,t)$.

Vašičkov model je jedno-faktorový short-rate proces. Patrí do triedy mean-reversion procesov (Ornstein-Uhlenbeckove procesy).

Definícia 2 *Krátkodobú úrokovú mieru pri reálnej miere P modelujeme vo Vašičkovom modeli stochastickou rovnicou*

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)d_t + \sigma dW_t,$$

kde σ, θ a κ sú konštanty, pričom σ a κ nadobúdajú len kladné hodnoty a W_t je Wienerov proces.

Pre pravdepodobnostné rozdelenie úrokovej miery, ktorá sa riadi Vašičkovým procesom platí tvrdenie:

Veta 1

$$r_t \sim \left(Nr_0 e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \right).$$

Konečné diferencie sú podľa [5] diskrétnou analógiu k derivácii.

Definícia 3 *Konečné diferencie rozdeľujeme na tri základné typy, ktorých schémy sú nasledovné:*

- *centrálna diferencia:* $u'(x_i) \sim \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h}$
- *dopredná (upwind) diferencia:* $u'(x_i) \sim \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$
- *dozadná (upstream) diferencia:* $u'(x_i) \sim \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$

pričom h je veľkosť kroku medzi jednotlivými bodmi delenia.

Veta 2 *Nech proces x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw.$$

Nech $f \in C^2$, $f(x,t) : \mathbb{R} \times \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$. Potom pre diferenciál funkcie f platí

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

2 Pojem *shadow rate* a modely úrčené na modelovanie *shadow rate*

V úvodnej kapitole našej diplomovej práce sa budeme bližšie venovať pojmu *shadow rate* (tieňová úroková sadzba), ktorý sa v práci bude štandardne označovať ako s_t.

Prvý krát tento pojem zaviedol Fischer Black vo svojom článku *Interest rates as options* [3]. Hlavným predpokladom, na ktorom je postavená celá idea o fungovaní *shadow rate* úrokovej miery je fakt, že mena, resp. peniaze sa do istej miery správajú ako opcia. V jednoduchosti môžeme túto skutočnosť interpretovať tak, že pokiaľ niekto disponuje hotovosťou, má dve možnosti: buď túto hotovosť použije hneď, alebo si ju odloží a použije ju neskôr. Takýto koncept implikuje, že nominálna krátkodobá úroková sadzba bude vždy kladná, resp. rovná nule. Pre lepšie pochopenie tejto myšlienky môžeme uviesť názorný príklad. V prípade, že by to tak nebolo a tieto úrokové sadzby by boli záporné, v podstate by to znamenalo, že pokiaľ by nejaký investor požičal peniaze pri takomto úroku, na konci obdobia by sa mu vrátilo menej peňazí ako bolo požičaných.

V článku [3] Black predstavuje nominálnu úrokovú mieru v prípade, že by bolo možné, aby bola záporná a nebola by obmedzená žiadnou spodnou hranicou. Túto úrokovú mieru nazval *shadow rate*. V princípe môžeme *shadow rate* chápať ako nástroj, ktorý pomáha najmä ekonómom, finančníkom, politikom a iným pochopiť správanie sa úrokovej miery v prípade, že je obmedzená touto nulovou spodnou hranicou. Hovoríme o nej ako o nástroji, pretože *shadow rate* v skutočnosti nie je pozorovaná na trhu. Hovorí nám len o tom, ako by mohli úroky vyzerať bez spodného ohraničenia. Práve skutočnosť, že úrokové sadzby sú takto ohraničené stojí za tým, že v prípade, kedy je výška úroku nulová, resp. mierne záporná, neodráža skutočnú ekonomickú situáciu v krajine.

Samozrejme vieme, že v skutočnosti je možné, že úroky sa pohybujú aj v zápor-

ných hodnotách, avšak takéto prípady sú ojedinelé. Podľa [4] sa väčšinou vyskytujú práve v situáciách kedy sa konvenčná monetárna politika (napríklad kvantitatívne uvoľňovanie) ukáže ako neefektívna a centrálne banky sa rozhodnú stimulovať ekonomiku práve znižovaním úrokovej miery. Jednou z najznámejších krajín, ktorá bola, resp. stále je známa zápornými úrokovými mierami, je Japonsko. Podľa [20] hlavným dôvodom, prečo Japonsko zaviedlo záporné úrokové miery bolo, že krajina sa dlhé roky nachádzala v hlbokej ekonomickej recesii. Napriek viacerým pokusom o vylepšenie ekonomickej situácie pomocou kvantitatívneho a kvalitatívneho uvoľňovania ekonomika nezaznamenala žiaden nárast po dobu 25 rokov, preto pristúpili k rapídnemu znižovaniu úrokových mier. Medzi krajinami, ktoré zaznamenali znižovanie úrokových mier až do záporných hodnôt sa nachádzajú aj viaceré európske krajiny ako Švédsko, Švajčiarsko a krajiny patriace do eurozóny.

Pri záporných úrokoch sú komerčné banky povinné platiť tým centrálnym za uloženie peňazí. Pre zníženie poplatkov sú nútené tieto peniaze ďalej požičiavať, čím docielia, že ľudia začnú viac investovať a míňať, čo znamená, že budú menej šetriť. Takýmto spôsobom sa do obehu dostáva viac a viac peňazí, čím sa ekonomika v zlých časoch zotavuje.

Na druhej strane, takéto rapídne zníženie úrokov nezaručuje okamžitý pozitívny impulz v ekonomike, práve naopak, môže sa stať, že budeme pozorovať presný opak. Podľa [4] uvádzame aj niekoľko dôvodov prečo by sme sa mali záporným úrokovým mieram vyhnúť. Záporné úrokové sadzby môžu spôsobiť, že komerčné banky budú kvôli zníženej profitabilite menej ochotné požičiavať ľuďom peniaze. Môže dôjsť k javu, že verejnosť so zápornymi úrokovými mierami bude očakávať istú formu krízy, respektíve zlých časov, kvôli čomu sa rozhodne peniaze namiesto investovania radšej ušetriť, čo je vlastne presný opak toho, čo centrálne banky zavedením záporneho úroku chcú dosiahnuť. Takéto úrokové sadzby môžu ovplyvniť aj celkovú finančnú stabilitu na trhu. Záporné úroky môžu prispieť k vzniku rôznych finančných bublín na trhu. Hlavným dôvodom vzniku takýchto bublín je, že investori môžu pri nízkych úrokoch investovať

aj do príliš rizikových aktív.

Pre vyššie spomenuté a aj iné dôvody sa centrálne banky radšej usilujú o stimul ekonomiky pri takmer nulových úrokoch inými monetárnymi zásahmi, napríklad už spomenutým kvantitatívnym uvoľňovaním. Kvantitatívne uvoľňovanie spočíva v prilievaní nových peňazí do obehu, čo prispieva k zvýšenej likvidite. Takýto krok od centrálnej banky môže trh vnímať pozitívne, keďže to môžu chápať ako určitý záväzok centrálnej banky, že sa bude snažiť pozitívne stimulovať ekonomiku. Takisto ale platí, že aj zavedenie takéhoto druhu monetárnej politiky prináša svoje výhody aj nevýhody (napr. vznik finančných bublín, deflácia, a podobne).

V ďalších častiach tejto kapitoly sa budeme venovať matematickým modelom, ktoré slúžia na výpočet, resp. odhad *shadow rate* úrokovej miery.

2.1 *Shadow rate* modely

Ako sme spomenuli v úvode našej diplomovej práce, *shadow rate* miera nie je reálne pozorovaná na finančnom trhu. Je to len akýsi nástroj, ktorý nám pomáha analyzovať ekonomickú situáciu v prípadoch, kedy skutočná úroková sadzba pozorovaná na finančnom trhu neodráža skutočnosť z dôvodu, že sa dlhodobo pohybuje v blízkosti nuly. V minulosti bola existencia zápornej úrokovej miery neprípustná, preto viaceré modely s takouto alternatívou ani nerátajú. V prípade, že nastane situácia, že sa úroky pohybujú v blízkosti nuly, alebo sú aj pod ňou, nie je možné použiť tieto modely, keďže nevedia zohľadniť aj záporné hodnoty, resp. priamo využívajú členy takého typu, ktoré nemôžu byť záporné. Z tohoto dôvodu sa postupne začali vyvíjať a zavádzať rôzne matematické modely, ktoré túto skutočnosť berú do úvahy a vedia zohľadniť aj záporné úrokové sadzby. V takomto prípade hovoríme o *shadow rate* modeloch.

V princípe teda uvidíme, že každý model môže *shadow rate* odhadnúť inak, keďže, ako si ukážeme neskôr, neexistuje jednoznačný spôsob, ako ju odhadnúť. Základnou myšlienkou modelov je ale odhadnúť vývoj *shadow rate* úrokovej miery v prípade,

kedy sa reálna úroková miera približuje k nulovej hranici. Každý autor modelov môže k tomuto pristúpiť inak. Ako aj uvidíme, autori modelov využívajú odlišné matematické alebo štatistické nástroje na určenie *shadow rate* úrokovej miery. Každý z modelov má svoje silné a slabé stránky. Výber modelu, závisí najmä od toho aký je účel jeho použitia.

V tejto kapitole ponúkame stručný prehľad nami vybraných existujúcich *shadow rate* modelov, a zároveň uvádzame na čo konkrétne boli modely v praxi využité.

Ako sme načrtli v úvode tejto kapitoly, nosnou myšlienkou niektorých modelov je skutočnosť, že existencia hotovosti zaručuje určitú dolnú nezápornú hranicu pre úrokovú mieru. Túto hranicu nazývame *zero lower bound*, ďalej v texte ZLB.

Ďalej v práci uvidíme, že ZLB nemusí byť štandardne nulová, respektíve sa budeme bližšie venovať aj modelom, ktoré žiadne spodné ohraničenie nemajú. Napríklad v modeli Wu a Xia je táto hranica nastavená na 0,25%. Na druhú stranu, v modeli od Bauera a Rudebuscha je opäť nulová. Takisto existujú aj *shadow rate* modely, ktoré ZLB berú ako parameter a túto hodnotu nemajú fixnú, teda sa ju snažia využitím dostupných dát odhadnúť. Medzi takéto modely patí napríklad model od Priebscha, s ktorým sa taktiež stretneme v závere tejto kapitoly.

2.1.1 Blackov model

Prehľad začneme pôvodným modelom, ktorý stojí na začiatku celej problematiky. Tento model sme už viackrát spomenuli v úvodných častiach našej práce. Ako uvidíme aj neskôr, pri predstavení iných modelov, práve Blackov model položil základy, na ktorých tvorcovia iných modelov mohli stavať.

Blackov model v skratke stanovuje vzťah medzi tieňovou nominálnou krátkodobou úrokovou sadzbou a skutočnou nominálnou krátkodobou úrokovou sadzbou. Platí, že keď je tieňová sadzba kladná, obidve sadzby sú rovnaké. Avšak, v prípade, že sa *shadow rate* dostane do záporných hodnôt, skutočná úroková miera je na nule alebo

nad ňou. To môžeme formálne vyjadriť triviálnou rovnicou v tvare:

$$r_t = \max(0, s_t). \tag{1}$$

Výhodou Blackovho modelu je, že Black vo svojej práci podrobne opísal okolnosti, v ktorých by nulové dolné obmedzenie na nominálnych výnosoch mohlo byť relevantné, no na druhej strane, neposkytol konkrétne informácie o implementácii tohoto modelu do praxe, čo patrí medzi jeho hlavné nedostatky. Z tohoto dôvodu sa v ostatných modeloch objavujú aj konkrétne metódy, ktorými sa dajú modely aplikovať.

2.1.2 Krippnerov model

Ďalším veľmi známym modelom určeným na modelovanie tieňovej sadzby je model od Lea Krippnera, ktorý prezentoval vo svojej publikácii [12], pričom jeho počiatočné modely boli využívané v *Reserve Bank of New Zealand*, keďže tam v minulosti pôsobil ako ekonóm.

Krippnerov model navrhuje alternatívny prístup založený na opciách, avšak konceptuálne je veľmi podobný modelu od Fischera Blacka. V princípe je jeho model konceptovaný tak, že zabezpečuje, aby celá krivka forwardovej sadzby ostala nezáporná. To zabezpečí tým, že ku krivke shadow forwardovej sadzby sa pridá explicitná funkcia maturity, ktorá predstavuje opciu vyplývajúcu zo súčasnej a budúcej dostupnosti hotovosti.

V článku [21] sa iný autor venoval dôchodkovým fondom a zabezpečovaniu proti riziku pri takýchto fondoch. V článku sa venuje porovnávaniu modelovania krátkodobej úrokovej miery s použitím a bez použitia zápornej úrokovej miery, pričom pri záporných úrokových mierach používa práve Krippnerov model a kalibráciu parametrov z jeho článku [12].

2.1.3 Wu a Xia model

Medzi najznámejšie modely patrí jednoznačne model od matematičiek Jing Cynthia Wu a Fan Dora Xia, ktorý bol predstavený v článkoch [23] a [24]. Tento model je využívaný na odhad tieňovej úrokovej sadzby vo federálnej banke v Atlante, kde je aj pravidelne aktualizovaný a voľne prístupný pre verejnosť. Aj my sme informácie k tomuto modelu získavali práve z oficiálnej stránky banky dostupnej na adrese [25].

Takisto ako všetky ostatné *shadow rate* modely, aj tento je postavený na myšlienke Blackovho modelu. Hlavným rozdielom týchto dvoch modelov je líšiaca sa dolná hranica úrokov, keďže tento model nepatrí do skupiny modelov s nulovou spodnou hranicou. V tomto prípade je hranica nastavená na 25 percentuálnych bodov. Vždy, keď je ich tieňová sadzba vyššia ako $\underline{r} = 0{,}25\%$, je presne rovnaká ako modelom daná jednomesačná úroková sadzba.

Matematicky je teda základnou ideou modelu rozšírená pôvodná myšlienka Blacka, ktorú vieme formálne zapísať v tvare:

$$r_t = \max(\underline{r}, s_t). \tag{2}$$

Dôležitým prvkom modelu je práve voľba dolnej hranice. Od konca roku 2008 platí Fed úroky so sadzbou 0,25%, preto je táto hodnota považovaná ako vhodná spodná hranica.

2.1.4 Bauer a Rudebusch model

Model vytvorený Bauerom a Rudebuschom je opäť inšpirovaný myšlienkou Blackovho modelu, avšak tvorcovia modelu ju opäť vylepšili. Pri predstavení tohoto modelu čerpáme z literaúry [1], čo je pôvodný článok, v ktorom bol model navrhnutý. Je dôležité povedať, že tento model veľmi úzko súvisí s Gausovskými afínnymi modelmi.

Základnú myšlienku ich modelu môžeme spísať pomocou dvoch rovníc. Prvou

rovnicou je rovnica:

$$s_t = \delta_0 + \delta_1' X_t, \tag{3}$$

ktorá hovorí o tom, že *shadow rate* úroková miera je afínna vo faktoroch X_t, pre ktoré platí, že sa riadia Vašičkovým procesom definovanom v definícii 2. Druhá rovnica:

$$r_t = \max(s_t, r_{\min}), \tag{4}$$

je opäť podobná rovnici (1) z Blackovho modelu, akurát hodnota r_{min} nemusí byť fixne nastavená na nulu.

Avšak, rovnako ako Black, aj tvorcovia tohoto modelu zvolili najskôr hranicu pre $r_{min} = 0$, ktorá je opäť motivovaná existenciou hotovosti. Napriek tomu sa ale vo svojej práci taktiež venujú skúmaniu senzitivity svojho modelu na rôznu voľbu hodnoty ZLB. Taktiež sa venujú výhode zahrnutia makroekonomických ukazovateľov do modelov pre *shadow rate* úrokovú mieru.

Modelom demonštrovali, že modely, ktoré neberú ohľad na ZLB poskytujú menej kvalitné odhady *short rate* úrokovej miery v budúcnosti, naopak *shadow rate* modely sú v tomto ohľade lepším nástrojom.

Pri aproximácii cien dlhopisov sa rozhodli použiť prístup vytvorený Priebschom, ktorý uvedieme v nasledujúcej časti textu.

2.1.5 Priebschov model

Priebsch vo svojom článku [17], z ktorého čerpáme, hovorí, že jeho prístup k *shadow rate* nie je výpočtovo náročný. Prístup Priebscha takisto využíva vlastnosti Gaussovských afínnych modelov.

Toto je jeden z modelov, kde ZLB nie je fixná hodnota, no je to jeden z parametrov, ktorého vhodnú hodnotu sa snažíme určiť. Fakt, že dolná hranica pri Blackovom

a mnohých iných modeloch je nulová, je založený na arbitráži medzi fyzickou menou a dlhopismi. Avšak v praxi tieto dve zložky nemusia byť vždy úplne nahraditeľné, z rôznych dôvodov, ako napríklad riziko neschopnosti splácať (*default risk*), rôzne zákonne požiadavky a podobne. Takýto prístup môže empirickú dolnú hranicu posunúť do mierne kladných alebo mierne záporných hodnôt. Je ale možné rovnicu (4) upraviť tak, aby zohľadňovala nenulovú dolnú hranicu, a to do tvaru:

$$r_t = \max(s_t, r_{\min}) = r_{\min} + \max(s_t - r_{\min}, 0). \tag{5}$$

Na základe tejto úpravy pôvodnej rovnice (4) Priebsch uvažoval aj iné hodnoty pre dolnú hranicu úrokov. Dolná hranica r_{min} môže byť nastavená na konkrétnu hodnotu, alebo sa môže považovať za voľný parameter a odhadovať sa.

Priebsch navrhol na ocenenie dlhopisov aproximačnú metódu založenú na kumulantoch, pričom kumulant je veličina, ktorá slúži ako alternatíva k momentom rozdelenia.

3 Jednofaktorový model s použitím parametrov pre krátkodobú úrokovú mieru

3.1 Formulácia modelu

V tejto časti si priblížime model, ktorému sa v našej práci budeme venovať do najväčšej hĺbky. Dôvodom je, že síce sa tento model v miernej modifikácii už v literatúre [19] vyskytol, my v práci uvádzame jeho detailnejšiu analýzu, ako napríklad odvodenie hustoty pravdepodobnostného rozdelenia, ktorým sa v tomto modeli riadi úroková miera.

Model je založený na modelovaní *shadow rate* úrokovej miery použitím známych dát pre *short rate* úrokovú mieru a špeciálneho kalibračného parametra k. Fungovanie uvažovaného modelu je opäť do istej miery inšpirované nosnou myšlienkou Blackovho modelu, avšak s miernou modifikáciou. Hlavnou ideou modelu je odhadnúť úrokovú mieru *shadow rate* na základe dostupných dát pre *short rate*, a to tak, že v prípade záporných hodnôt *short rate* sa tieto hodnoty prenásobia zatiaľ neznámym koeficientom k. Toto môžeme formálne zapísať v rovnici:

$$r_t = \begin{cases} s_t & \text{ak } s_t \geq 0 \\ ks_t & \text{ak } s_t < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Našim cieľom je správnou voľbou špeciálneho koeficientu k zmenšiť výkyvy úrokov v záporných hodnotách. Na základe tohto cieľa je intuitívne, že parameter k bude pochádzať z otvoreného intervalu (0,1). Ako sme napísali vyššie, zatiaľ je tento parameter neznámy. Jeho presnú hodnotu získame kalibráciou použitím metódy maximálnej vierohodnosti, na ktorej použitie bude potrebné odvodiť hustotu procesu, ktorým sa vyššie predstavený model riadi.

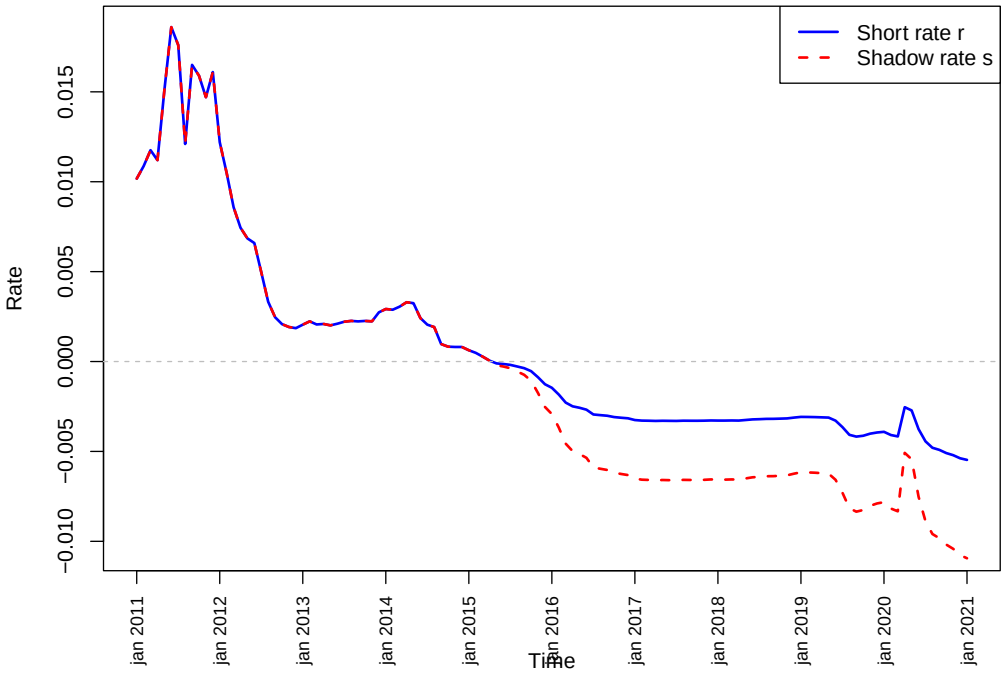
Kľúčovým predpokladom pri modelovaní úrokovej miery je fakt, že počítame

s tým, že *shadow rate* sa riadi Vašičkovým procesom, ktorý vieme na základe definície 2 zapísať v tvare

$$ds_t = \kappa(\theta - s)dt + \sigma dWt,$$

kde κ, θ a σ sú parametre Vašičkovho procesu, ktoré budeme taktiež odhadovať a W_t je Wienerov proces z definície 1.

Na grafe 1 uvádzame pre lepšie pochopenie myšlienky nami uvažovaného modelu názorný príklad modelovania *shadow* úrokovej miery. Pri tejto ukážke sme zvolili hodnotu kalibračného parametra na fixnú hodnotu $k = \frac{1}{2}$, pričom dáta pre *short rate* sme získali zo zdroja [10]. Ide o mesačné dáta pre *Euro Area*, čo je oblasť 19 európskych krajín. Použili sme desaťročné časové okno, konkrétne obdobie od januára 2011 do januára 2021. *Short rate* môžeme chápať ako priemery denných úrokových mier. Na tých istých dátach budeme neskôr aj odhadovať presné hodnoty potrebných parametrov.



Obr. 1: Aplikovanie rovnice 6 na mesačné dáta získané z [10] pri fixne nastavenej hodnote kalibračného parametra k na hodnotu $k = \frac{1}{2}$.

Na grafe 1 môžeme vidieť, že pokiaľ je *short rate* úroková miera kladná, tak *shadow rate* je rovná tejto úrokovej miere. Avšak, v prípade, že sú *short rate* úroky záporné, *shadow rate* úroková miera je ešte v zápornejších hodnotách.

3.2 Metodika práce a odhad parametrov Vašičkovho procesu

Prvým krokom pri modelovaní bude si z dát pre *short rate*, ktoré máme k dispozícii vytvoriť priebeh *shadow rate*. To urobíme na základe predpisu uvedeného v rovnici (6). Dáta, s ktorými pracujeme pochádzajú z [10]. Našim cieľom je odhadnúť parametre Vašičkovho procesu, teda parametre κ, θ a σ pre vytvorenú *shadow rate* pomocou metódy maximálnej vierohodnosti.

Keďže predpokladáme, že *shadow rate* úroková miera s_t sa riadi Vašičkovým procesom, podľa vety 1 uvedenej v prvej kapitole o nej vieme, že má normálne rozdelenie s nasledovnými parametrami:

$$s_t|s_0 \sim \left(Ns_0e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \right).$$

Vašičkov proces patrí do triedy *mean reversion procesov*, teda takých, ktoré majú nejakú ustálenú hodnotu, na ktorej sa po čase zastabilizujú. Parameter κ môžeme interpretovať ako rýchlosť procesu, ktorým sa vracia k ustálenej hodnote. Hodnota θ reprezentuje dlhodobý priemer tohoto procesu, teda spomínanú ustálenú hodnotu procesu. A napokon máme parameter σ, ktorá je volatilitou procesu.

Na odhad parametrov pomocou metódy maximálnej vierohodnosti využijeme vzorce uvedené v [6]. Vzorce slúžia na výpočet pomocných hodnôt $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ a $\hat{v^2}$, ktoré uvádzame v rovnici:

$$\hat{\alpha} = \frac{n\sum_{t=2}^{n} s_{t-1}s_{t-(n+1)} - \sum_{t=2}^{n} s_{t-1}\sum_{t=2}^{n} s_{t-(n+1)}}{n\sum_{t=2}^{n} s_{t-(n+1)}^2 - \left(\sum_{t=2}^{n} s_{t-(n+1)}\right)^2},$$
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=2}^{n} s_{t-1} - \hat{\alpha}\sum_{t=2}^{n} s_{t-(n+1)}}{n(1-\hat{\alpha})}, \tag{7}$$
$$\hat{v}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}\left(s_{t-1} - \hat{\alpha}s_{t-(n+1)} - \hat{\beta}(1-\hat{\alpha})\right)^2.$$

Následne vzniknuté parametre $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ a $\hat{v^2}$ transformujeme na základe prevodných vzťahov a získame odhad potrebných hodnôt pre parametre použité vo Vašičkovom modeli. Prevodné vzťahy sú:

$$\hat{\kappa} = -\frac{\log(\hat{\alpha})}{\mathrm{dt}},$$
$$\hat{\theta} = \hat{\beta}, \tag{8}$$
$$\hat{\sigma^2} = \frac{\hat{v}^2 2\hat{\kappa}}{1 - e^{-2\hat{\kappa}\mathrm{dt}}}.$$

3.3 Odvodenie podmienenej hustoty

Keďže je našim cieľom odhadnúť optimálnu hodnotu parametra k pomocou metódy maximálnej vierohodnosti, je potrebné aby sme poznali pravdepodobnostné rozdelenie *short rate*. Ďalším potrebným krokom teda bude odvodiť hustotu r_{t+dt} pri danej hodnote r_t. To dosiahneme tak, že najskôr odvodíme podmienenú distribučnú funkciu, z ktorej následným zderivovaním získame potrebnú hustotu, na základe ktorej budeme vedieť určiť pravdepodobnostné rozdelenie *short rate* úrokovej miery.

Podmienenú distribučnú funkciu, ktorú budeme odvodzovať vieme zapísať ako:

$$F(x) = P(r_{t+dt} < x \,|\, r_t).$$

Z dôvodu vetvenia sa predpisu pre r_t uvedeného v (6) je dôležité podotknúť, že aj distribučná funkcia bude rozvetvená. Pri vetvení budeme brať ohľad na kladnosť resp. zápornosť r_t a x, čím vzniknú 4 rôzne tvary, ktoré bude táto distribučná funkcia nadobúdať.

Nasledovný výpočet podmienenej distribučnej funkcie zodpovedá prípadu, kedy

r_t a x nadobúdajú kladné hodnoty, teda:

$$\begin{aligned} F(x \geq 0 \,|\, r_t \geq 0) &= P(r_{t+dt} < x \,|\, r_t) = P(s_{t+dt} < x \,|\, s_t = r_t) \\ &= P\left[\frac{s_{t+dt} - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} < \frac{x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - (s_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - (r_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Druhou vetvou je prípad, kedy r_t je opäť kladná no x je záporná. Toto odvodenie podmienenej distribučnej funkcie uvádzame v nasledujúcej rovnici:

$$\begin{aligned} F(x < 0 \,|\, r_t \geq 0) &= P(r_{t+dt} < x \,|\, r_t) = P(s_{t+dt} < \frac{1}{k}x \,|\, s_t = r_t) \\ &= P\left[\frac{s_{t+dt} - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} < \frac{\frac{1}{k}x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{k}x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{k}x - (s_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{k}x - (r_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

V nasledujúcich dvoch prípadoch odvodíme distribučnú funkciu pre záporné hodnoty

úrokovej miery r_t:

$$\begin{aligned} F(x \geq 0 \,|\, r_t < 0) &= P(r_{t+dt} < x \,|\, r_t) = P(s_{t+dt} < x \,|\, s_t = \frac{1}{k} r_t) \\ &= P\left[\frac{s_{t+dt} - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} < \frac{x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} \right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} \right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - (s_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}} \right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - (\frac{1}{k} r_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}} \right), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F(x < 0 \,|\, r_t < 0) &= P(r_{t+dt} < x \,|\, r_t) = P(s_{t+dt} < \frac{1}{k} x \,|\, s_t = \frac{1}{k} r_t) \\ &= P\left[\frac{s_{t+dt} - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} < \frac{\frac{1}{k} x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} \right] \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{k} x - E(s_{t+dt} \,|\, s_t)}{\sqrt{D(s_{t+dt} \,|\, s_t)}} \right) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{k} x - (s_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}} \right) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{k} x - (\frac{1}{k} r_t e^{-\kappa dt} + (1 - e^{-\kappa dt})\theta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa dt})}} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Ako sme uviedli vyššie, zderivovaním odvodenej distribučnej funkcie podľa premennej x získame potrebnú hustotu. Postupne uvedieme zderivované hodnoty distri-

bučnej funkcie pre všetky 4 vetvy:

$$f(x \geq 0 \,|\, r_t \geq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}} e^{-\left(\frac{(x-(r_t e^{-\kappa dt}+(1-e^{-\kappa dt})\theta))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}}\right)^2}, \tag{13}$$

$$f(x < 0 \,|\, r_t \geq 0) = \frac{1}{k\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}} e^{-\left(\frac{(\frac{1}{k}x-(r_t e^{-\kappa dt}+(1-e^{-\kappa dt})\theta))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}}\right)^2}, \tag{14}$$

$$f(x \geq 0 \,|\, r_t < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}} e^{-\left(\frac{(x-(\frac{1}{k}r_t e^{-\kappa dt}+(1-e^{-\kappa dt})\theta))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}}\right)^2}, \tag{15}$$

a nakoniec

$$f(x < 0 \,|\, r_t < 0) = \frac{1}{k\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}} e^{-\left(\frac{(\frac{1}{k}x-(\frac{1}{k}r_t e^{-\kappa dt}+(1-e^{-\kappa dt})\theta))}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa}(1-e^{-2\kappa dt})}}\right)^2}. \tag{16}$$

Na základe odvodenej hustoty už vieme v našej práci pokračovať ďalej. V nasledujúcej podkapitole uvedieme podrobný postup toho, ako sme zo získanej hustoty použitím metódy maximálnej vierohodnosti implementovanej v štatistickom softvéri R získali optimálnu hodnotu kalibračného parametra k.

3.4 Metóda maximálnej vierohodnosti pre odhad kalibračného parametra *k*

Metódu maximálnej vierohodnosti, ktorú môžeme poznať aj pod názvom likelihood metóda môžeme aplikovať na združenú hustotu.

Likelihood funkcia sa používa v tvare:

$$L(k, \kappa, \theta, \sigma) = \prod_{t=1}^{n} f(r_{t+dt} \mid r_{t_k}),$$

kde r_t sú pozorované dáta v čase t a k je odhadovaný parameter. Výraz r_{t_k} reprezentuje hodnotu úroku v čase t podmienenú hodnotou parametrov k, κ, θ a σ.

V našom prípade sme sa rozhodli pracovať s log-likelihood funkciou. Táto metóda má tvar:

$$\log L(k, \kappa, \theta, \sigma) = \sum_{t=1}^{n} \log f(r_{t+dt} \mid r_{tk}),$$

kde namiesto súčinu hustôt uvažujeme ich súčet a následne hľadáme maximum logaritmu likelihood funkcie, keďže použitím takejto transformácie sa argument extrému nezmení.

Pre daný parameter k vieme z dostupných dát pre *short rate* zostaviť na základe vzťahu (6) priebeh *shadow rate*. Pomocou explicitných vzorcov uvedených v (7) a následnej transformácie uvedenej v (8) vieme odhadnúť zvyšné parametre κ, θ a σ. S využitím odhadnutých parametrov a vzťahov (13) až (16) získame hodnotu log-likelihood funkcie.

Keďže chceme získať optimálne hodnoty jednotlivých parametrov, je potrebné vyššie opísaný postup aplikovať na všetky možné hodnoty parametra k a následne vybrať takú hodnotu, kedy nadobúda funkcia log-likelihood maximum. Požadovaný výpočet získame pomocou zabudovanej funkcie `optim` v štatistickom softvéri R, ktorá využíva metódu `L-BFGS-B`. Podľa [7] sa BFGS metódy štandardne využívajú na hľadanie extrémov viacrozmerných nelineárnych funkcií. Ide o kvázi-Newtonovu metódu, teda

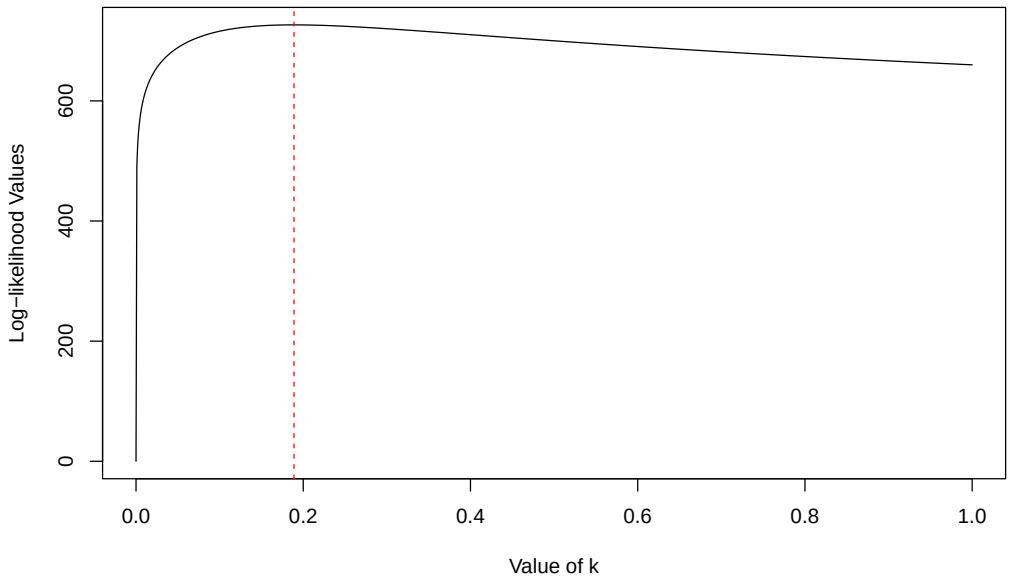
metódu, ktorá extrém hľadá pomocou aproximácie druhých derivácií funkcie. Nami použitá metóda `L-BFGS-B` je len rozšírením klasickej BFGS o hornú a dolnú hranicu, na ktorých sa extrém hľadá.

Jedným zo vstupných parametrov tejto metódy je aj štartovací bod, respektíve počiatočná hodnota odhadovaného parametra. V práci uvidíme, že rôzne hodnoty štartovacieho bodu menia počet iterácií, teda rýchlosť konvergencie metódy. Ďalšími parametrami, ktoré vstupujú do metódy sú ohraničenia pre k. Ako sme už vyššie napísali, hľadáme takú hodnotu, ktorá bude z intervalu (0,1).

3.5 Výsledky a ich analýza

V tejto časti sa zameriame na výsledky, ktoré sme získali implementáciou predchádzajúcich odvodení a výpočtov v štatistickom softvéri `R`.

Na grafe 2 je znázornený vývoj log-likelihood funkcie vzhľadom na hodnotu kalibračného parametra k.



Obr. 2: Hodnoty log-likelihood funkcie pri meniacej sa hodnote kalibračného parametra k. Červená zvislá čiara znázorňuje optimálnu hodnotu parametra k, teda maximum log-likelihood funkcie.

Keďže vyššie spomínaná metóda `optim` vyžaduje štartovaciu hodnotu pre parameter k, rozhodli sme sa porovnať získané hodnoty parametrov pre rôzne štartovacie hodnoty. Ako je uvedené v tabuľke 1, metóda najrýchlejšie skonvergovala (čo sa týka počtu iterácií) k optimálnej hodnote parametra $k \sim 0,189$ pri štartovacej hodnote $k = 0,1$. Vidíme, že hodnoty parametrov sa takmer nemenia, keďže k rozdielom pri jednotlivých štartovacích hodnotách dochádza až na vzdialenejších desatinných miestach. Z daných výsledkov je teda zrejmé, že výber štartovacieho bodu nie je rozhodujúci čo sa týka hodnoty parametrov, jeho správna voľba však dokáže urýchliť čas konvergencie použitej metódy. V našom prípade by sme však zdôraznili najmä to, že metóda skonvergovala veľmi rýchlo pre akýkoľvek štartovací bod.

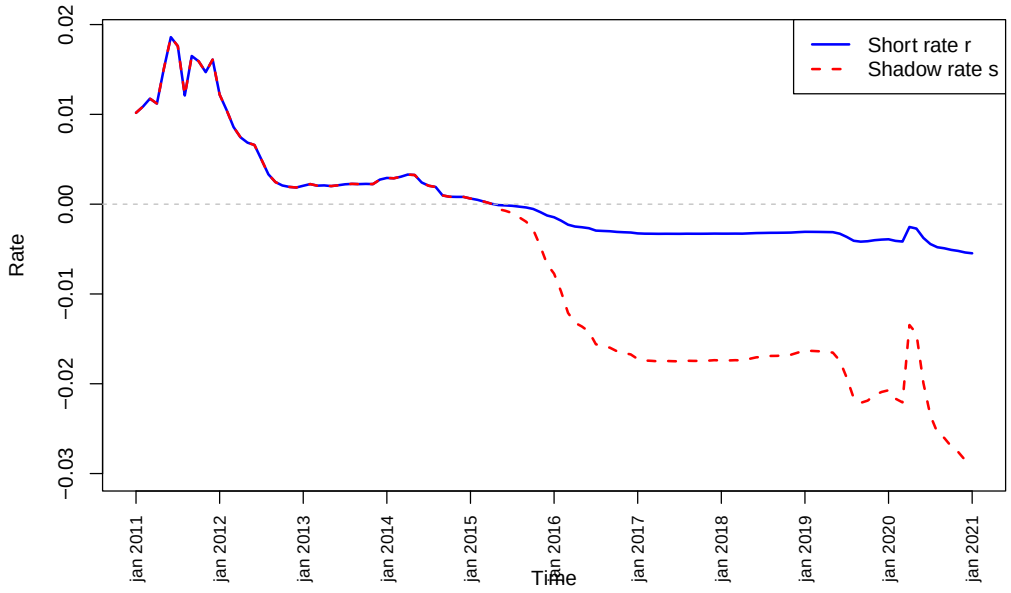
Štartovacia hodnota	Počet iterácií	Optimálne k	κ	θ	σ^2
0,1	30	0.1887272	0.02160226	-0.1881861	$2.638568e^{-05}$
0,2	51	0.1887254	0.02160113	-0.188197	$2.638598e^{-05}$
0,3	102	0.1887234	0.02159991	-0.1882088	$2.63863e^{-05}$
0,4	177	0.1887252	0.02160101	-0.1881982	$2.638601e^{-05}$
0,5	207	0.1887254	0.02160113	-0.188197	$2.638598e^{-05}$
0,6	240	0.1887273	0.02160228	-0.188186	$2.638568e^{-05}$
0,7	300	0.188724	0.0216003	-0.188205	$2.63862e^{-05}$
0,8	330	0.1887254	0.02160113	-0.188197	$2.638598e^{-05}$
0,9	354	0.1887254	0.02160113	-0.188197	$2.638598e^{-05}$
1	429	0.1887244	0.02160052	-0.1882029	$2.638614e^{-05}$

Tabuľka 1: Hodnoty odhadnutých parametrov Vašičkovho modelu a optimálneho k vzhľadom na rôznu hodnotu štartovacieho bodu použitej optimalizačnej metódy `optim`.

Napokon na grafe 3 je uvedené porovnanie *short rate* a *shadow rate* pri použití optimálnej hodnoty kalibračného parametra k, ktorú sme získali, a teda $k = 0,189$.

Pre porovnanie zmien hodnôt ostatných odhadovaných parametrov uvádzame v tabuľke 2 hodnoty iných parametrov, ktoré získame pri fixne zvolenej hodnote kalibračného parametra k. Takisto sme do tabuľky doplnili riadok s optimálnou hodnotou parametrov, ktoré sme získali implementovaním už vyššie spomenutej zabudovanej funkcie `optim`.

Pri takomto prístupe si môžeme všimnúť, že hodnoty odhadnutých parametrov



Obr. 3: Aplikovanie rovnice (6) na mesačné dáta pri danej optimálnej hodnote kalibračného parametra k = 0,189.

sú viac rozkolísané. Čo ale stojí za povšimnutie je, že s rastúcou hodnotou parametra k sa zvyšuje aj hodnota parametra θ, teda sa aj zvyšuje hodnota dlhodobého priemeru.

Hodnota k	κ	θ	σ^2
0,1	-0.03372042	0.1773323	$6.504063e^{-05}$
0.1887254	0.02160113	-0.188197	$2.638598e^{-05}$
0,2	0.02843473	-0.1383508	$2.473795e^{-05}$
0,3	0.08430112	-0.03714301	$1.731561e^{-05}$
0,4	0.1304980	-0.02025909	$1.473395e^{-05}$
0,5	0.1677940	-0.01369072	$1.354795e^{-05}$
0,6	0.1978672	-0.01027277	$1.290933e^{-05}$
0,7	0.2223050	-0.008.198145	$1.252807e^{-05}$
0,8	0.2423834	-0.006812117	$1.228328e^{-05}$
0,9	0.2590760319	-0.0058234427	$1.21174e^{-0.5}$
1	0.2731149381	-0.0050838886	$1.20002e^{-0.5}$

Tabuľka 2: Hodnoty odhadnutých parametrov Vašičkovho modelu, pri fixne zvolenej hodnote parametra k spolu s hodnotami parametrov získaných optimalizačnou metódou `optim` pre optimálnu hodnotu kalibračného parametra k.

3.6 Testovanie hypotézy o Vašičkovom modeli

V tejto podkapitole sa budeme bližšie venovať testovaniu signifikantnosti modelu, a teda, či je model, ktorý sme sformulovali pomocou vzťahu (6) štatisticky významný oproti modelu, v ktorom má kalibračný parameter k hodnotu 1. V takom prípade ide o Vašičkov model, keďže podľa rovnice (6) dostaneme pre *short rate* predpis v tvare:

$$r_t = \begin{cases} s_t & \text{ak } s_t \geq 0 \\ 1s_t & \text{ak } s_t < 0, \end{cases}$$

a predpokladáme, že *shadow rate* sa riadi Vašičkovým procesom.

Na testovanie využijeme známy likelihood ratio test, ktorý budeme označovať skratkou LRT. Tento test spočíva v porovnaní hodnôt log-likelihood funkcií pre oba modely. Otestujeme či je rozdiel medzi modelom, v ktorom $k = 1$ štatisticky významný oproti modelu, v ktorom parameter k nadobúda optimálnu hodnotu, ktorú sme odhadli v predchádzajúcej časti, teda $k = 0,189$. Formálne môžeme toto testovanie hypotéz zapísať ako:

$$H_0 : \ k = 1 \ ,$$
$$H_1 : \ k \neq 1 \ .$$

Testova štatistika nadobudne tvar:

$$\text{LRT} = -2 \times (\text{log-likelihood pre (k = 1)} - \text{log-likelihood pre (k = 0,189)}).$$

Po dosadení konkrétnych hodnôt dostávame testovú štatistiku LRT rovnú hodnote:

$$\text{LRT} = -2 \times (660.0174 - 726.5453) = 133,0558.$$

Získanú testovu štatistiku porovnáme s $p - hodnotou$ chí-kvadrát testu s jed-

ným stupňom voľnosti, keďže testujeme jeden parameter. Výsledná $p-hodnotou$ vyšla ako veľmi malé číslo blízke nule konkrétne $p - hodnota = 8,790599e^{-31}$, čo znamená, že hypotézu H_0 môžeme zamietnuť. Lepšie povedané, týmto testovaním sme ukázali, že rozdiel medzi modelom, v ktorom vystupuje optimálna hodnota kalibračného parametra $k = 0,189$ je štatisticky významný od modelu, v ktorom tento kalibračný parameter nadobúda hodnotu $k = 1$, teda od Vašičkovho modelu.

V tejto kapitole sme detailnejšie predstavili jeden z modelov určených na modelovanie *shadow rate* úrokovej miery. V ďalšej kapitole našej práce tento model využijeme aj prakticky, a to konkrétne na ocenenie dlhopisov pomocou prislúchajúcich parciálnych diferenciálnych rovníc a ďalšiu praktickú analýzu.

4 Implementácia jednofaktorového modelu na výpočet ceny dlhopisov a trhovej ceny rizika

V štvrtej kapitole našej práce sa zameriame na implementáciu nami uvažovaného modelu z predchádzajúcej kapitoly. Našim cieľom bude modelovať výnosové krivky, ktoré získame na základe použitia tohoto modelu, pričom následne tieto získané výnosové krivky porovnáme s reálnymi dostupnými dátami.

V úvode odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorú využijeme na výpočet ceny dlhopisu, z ktorej ďalej využitím prevodného vzťahu určime úrokovú mieru.

Spomenutá rovnica určená na výpočet ceny dlhopisu patrí do triedy parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré budeme ďalej v práci označovať skratkou PDR. Na samotný výpočet rovnice využijeme numerickú metódu použitú v článku [19], keďže autori tohoto článku využívajú model podobný tomu, ktorý v práci uvažujeme aj my. Numerická metóda, s ktorou budeme pracovať sa nazýva metóda priamok a jej hlavná idea pochádza zo známej metódy sietí. Ďalej v práci budeme na túto metódu odkazovať ako na MOL metódu (*z anglického method of lines*). V nasledujúcej podkapitole MOL metódu bližšie predstavíme najmä použitím informácií získaných z už spomenutého článku [19] a takisto z dokumentu [9] .

4.1 MOL metóda

Parciálne diferenciálne rovnice sú charakteristické tým, že v nich vystupujú derivácie viacerých premenných. Obmedzme sa na prípad, kedy sa v PDR vyskytujú dve premenné, tak ako to uvidíme aj neskôr v tejto kapitole, keďže aj PDR, ktorú budeme riešiť v tejto práci obsahuje derivácie dvoch premenných. Typicky je jednou z premenných čas, a druhou premennou je v našom prípade faktor x.

Hlavným princípom MOL metódy je, že derivácie jednej z premenných aproximujeme jej konečnými diferenciami, čo je bližšie charakterizované v úvodnej kapitole

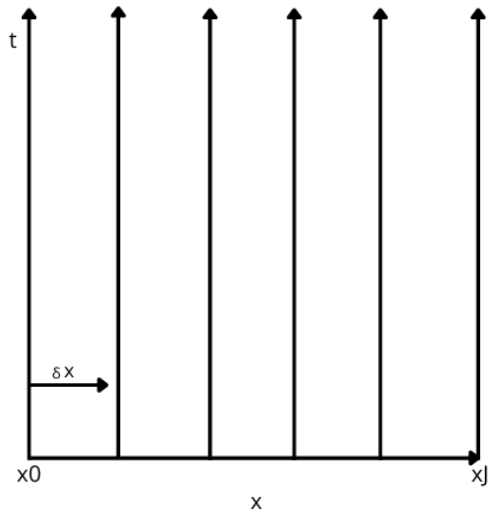
práce obsahujúcej definície, konkrétne v definicii 3. Pre využitie aproximácie jednej premennej sa tejto metóde hovorí aj semidiskrétna metóda. Vieme rozlíšiť dva typy MOL metódy vzhľadom k tomu, k diskretizácii ktorej premennej dochádza:

- Vertikálna MOL metóda - v takomto prípade diskretizujeme priestorovú premennú x, pričom časová premenná t ostáva spojitá.
- Horizontálna MOL metóda - naopak, pri horizontálnej MOL metóde diskretizujeme časovú premennú t.

V našej práci využijeme vertikálnu metódu priamok, tak ako to je navrhnuté v článku [19]. Využijeme fakt, že derivácie priestorovej premennej x vieme nahradiť jej konečnými diferenciami, čím docielime to, že diskretizácia nenastane v čase, ale len v priestore. V článku [19] je uvedené, že na základe simulácii, ktoré uskutočnili sa MOL metóda javí ako rýchlejšia, presnejšia a stabilnejšia v porovnaní s inými implicitnými metódami na výpočet PDR. Práve z tohoto dôvodu sme sa rozhodli z numerických metód určených na výpočet PDR vybrať práve túto. V článku takisto tvrdia, že na základe vykonaných simulácii je vyššia stabilita riešenia použitím tejto metódy spôsobená diskretizáciou len jednej premennej.

V našom prípade budeme uvažovať priestor x s krajnými bodmi $[x_0; x_J]$. Tento interval rozdelíme na J rovnakých častí s veľkosťou, resp. s krokom $\delta x = \frac{x_J - x_0}{J}$, čo je znázornené na obrázku 4.

Použitím vertikálnej MOL metódy docielime to, že pôvodná PDR sa zúži na systém viacerých obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR), keďže v nich už bude vystupovať derivácia iba jednej premennej. Takýmto prístupom budeme riešenie pôvodnej PDR aproximovať vzniknutým systémom ODR, čo sa v článku [19] ukázalo ako dostatočne presné riešenie.



Obr. 4: Znázornenie priestorového delenia pre MOL metódu.

4.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre ocenenie dlhopisov

Stochastický proces, ktorým sa riadi úroková miera môže byť definovaný dvoma spôsobmi a to :

- stochastickou diferenciálnou rovnicou v rizikovo neutrálnej miere,
- stochastickou diferenciálnou rovnicou v reálnej pravdepodobnostnej miere so zahrnutou trhovou cenou rizika.

Každý zo spôsobov charakteristiky dynamiky procesu ponúka iné možnosti ako tento proces analyzovať. Proces opísaný v reálnej miere nám vo všeobecnosti môže poslúžiť na odhad parametrov, na základe ktorých môžeme určovať rôzne vlastnosti procesu. Presne tak sme urobili aj v tretej kapitole práce. Na druhú stranu, proces opísaný v rizikovo neutrálnej miere, ktorá neumožňuje vznik arbitráže sa využíva pri oceňovaní derivátov. V ďalšej časti práce sa budeme zaoberať práve odvodením príslušnej PDR pre proces daný v reálnej pravdepodobnostnej miere, čím sa dostávame k pojmu trhovej ceny rizika.

4.2.1 Odhadnutie trhovej ceny rizika

Doteraz sme v práci používali dáta pre *short rate*, ktoré sme použili na odhadnutie reálnych parametrov κ, θ, σ a k modelu úrokovej miery. Spomínané parametre sme v našej práci odhadli použitím metódy maximálnej vierohodnosti, čo nám lepšie pomohlo analyzovať priebeh *short rate*. Avšak, takýmto prístupom nemôžeme analyzovať výnosové krivky. Na to potrebujeme odhadnúť ešte jeden posledný parameter, a to je parameter λ, ktorý môžeme interpretovať práve ako vyššie spomínanú trhovú cenu rizika.

Pre parameter λ platí, že pokiaľ máme nejaký model charakterizovaný v reálnej miere, tak je zaručená existencia takého parametra λ, ktorý reprezentuje nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Ďalším faktom súvisiacim s trhovou cenou rizika je skutočnosť, že je spoločná pre všetky dlhopisy, tým pádom nie je závislá od maturity dlhopisu T. Na tieto fakty upriamime väčšiu pozornosť pri podrobnom odvodení PDR, čomu sa budeme venovať v nasledujúcej podkapitole.

V momente, keď budeme mať odhadnutý aj parameter λ, budeme môcť porovnávať presnosť reálnych výnosových kriviek zostrojených na základe reálnych dát a tých kriviek, ktoré získame aplikovaním už spomenutej MOL metódy.

4.2.2 Odvodenie PDR pre výpočet ceny dlhopisu so zahrnutím trhovej ceny rizika

V tejto podkapitole uvádzame odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice, v ktorej bude vystupovať už spomenutá trhová cena rizika λ, pričom postupujeme analogicky ako v [15]. Dôvodom prečo nemôžeme použiť priamo výsledok z [15] je skutočnosť, že v našom prípade je definovaný stochastický proces pre faktor x, nie pre úrokovú mieru r ako je zvykom. Našim cieľom je teda odvodiť príslušnú PDR pre cenu dlhopisu $P = P(x, t, T)$.

Uvažujme, že faktor x sa riadi Vašičkovým stochastickým procesom, teda podľa

definície 2 platí, že:

$$dx = \kappa(\theta - x_t)dt + \sigma dw.$$

Zároveň uvažujme, že úroková miera r je funkciou faktoru x a podľa prevodného vzťahu, na ktorom je založený nami uvažovaný model platí vzťah:

$$r = \max(x, kx). \tag{17}$$

Použitím Itóovej lemy uvedenej vo vete 2 dostávame pre funkciu P diferenciál v tvare:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\kappa(\theta - x_t) + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x}\frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \frac{\partial P}{\partial x}\sigma dw,$$

pričom prvý člen označuje drift ceny dlhopisu a druhý člen je volatilita ceny dlhopisu. Preto môžeme zaviesť značenie:

$$dP = \mu_B(x,t)dt + \sigma_B(x,t)dw.$$

Ďalším krokom bude zostrojenie portfólia Π, ktoré sa bude skladať z jedného dlhopisu so splatnosťou v čase T_1 a s $\triangle$ dlhopisov so splatnosťou v čase T_2, teda hodnota portfólia Π je

$$\Pi = P(x,t,T_1) + \triangle P(x,t,T_2).$$

Pre zmenu hodnoty nášho portfólia bude platiť vzťah:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dP(x,t,T_1) + \triangle dP(x,t,T_2) \\ &= \mu_B(x,t,T_1)dt + \sigma_B(x,t,T_1)dw + \triangle\mu_B(x,t,T_2)dt + \triangle\sigma_B(x,t,T_2)dw \\ &= \left(\mu_B(x,t,T_1) + \triangle\mu_B(x,t,T_2)\right)dt + \left(\sigma_B(x,t,T_1) + \triangle\sigma_B(x,t,T_2)\right)dw. \end{aligned} \tag{18}$$

Keďže chceme, aby nami zhotovené portfólio bolo bezrizikové, musíme eliminovať ná-

hodnosť, čo znamená, že prirodzenou voľbou pre parameter $\triangle$ bude:

$$\triangle = -\frac{\sigma_B(x,t,T_1)}{\sigma_B(x,t,T_2)}.$$

Po dosadení $\triangle$ do rovnice (18) dostávame pre zmenu hodnoty portfólia tvar:

$$d\Pi = \left(\mu_B(x,t,T_1) - \frac{\sigma_B(x,t,T_1)}{\sigma_B(x,t,T_2)}\mu_B(x,t,T_2)\right)dt.$$

Keďže chceme vylúčiť arbitráž, je dôležité aby platilo, že výnos bezrizikového portfólia sa musí rovnať hodnote bezrizikovej úrokovej miery, teda formálne $d\Pi = r\Pi dt$. Ako sme napísali vyššie, pre hodnotu úrokovej miery r platí rovnosť $r = \max(x, kx)$. Po dosadení a algebraických úpravách dostávame rovnosť:

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\Pi dt, \\ \mu_B(x,t,T_1) - \frac{\sigma_B(x,t,T_1)}{\sigma_B(x,t,T_2)}\mu_B(x,t,T_2) &= \max(x,kx)\Big(P(x,t,T_1) \\ &\quad - \frac{\sigma_B(x,t,T_1)}{\sigma_B(x,t,T_2)}P(x,t,T_2)\Big), \\ \frac{\mu_B(x,t,T_1) - \max(x,kx)P(x,t,T_1)}{\sigma_B(x,t,T_1)} &= \frac{\mu_B(x,t,T_2) - \max(x,kx)P(x,t,T_2)}{\sigma_B(x,t,T_2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

V rovnici (19) si teraz môžeme všimnúť, že ľavá strana rovnice závisí od T_1 a pravá strana rovnice závisí od T_2. Avšak, hneď pri tvorbe portfólia sme tieto parametre zvolili ako ľubovoľné, čo implikuje skutočnosť, že výrazy na oboch stranách nemôžu záviseť od maturity T. Preto musí existovať taká funkcia $\lambda(x,t)$ nezávislá od maturity T, pre ktorú bude platiť, že:

$$\lambda(x,t) = \frac{\mu_B(x,t,T) - \max(x,kx)P(x,t,T)}{\sigma_B(x,t,T)}. \tag{20}$$

Po dosadení výrazov $\mu_B(x,t,T)$ a $\sigma_B(x,t,T)$ do predpisu (20) získavame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v tvare:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial x}(\kappa(\theta - x) - \lambda(x,t)\sigma) - P\max(x,kx) = 0 \tag{21}$$

s koncovou podmienkou $P(x, T, T) = 1$.

Môžeme vidieť, že v rovnici (21) je λ funkciou premenných x a t. V našej práci budeme uvažovať konštantú hodnotu parametra λ, preto dostávame konečnú rovnicu, ktorú budeme riešiť v tvare:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial x}(\kappa(\theta - x) - \lambda\sigma) - P\max(x, kx) = 0. \tag{22}$$

4.3 Implementácia MOL metódy

V tejto časti sa už konkrétne pozrieme na PDR, ktorú budeme v našej práci MOL metódou riešiť. Cieľom výpočtu našej PDR, bude vypočítať ceny dlhopisov. Cenu dlhopisu P budeme aproximovať vektorom riešení PDR $u = (u_1, u_2, ..., u_J)$. Rozmer riešenia teda bude rovný hodnote premennej J.

Na vyriešenie rovnice (22) sú okrem koncovej podmienky potrebné aj okrajové podmienky. Pri určení podmienok v krajných bodoch sme postupovali ako v článku [19] a preto nadobúdajú tvar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} = 0, \tag{23}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} = 0. \tag{24}$$

Pre takto zadanú rovnicu už môžeme pokračovať vo výpočtoch a implementácii numerickej metódy.

Ako sme spomenuli vyššie, pre použitie numerickej MOL metódy, tak ako to navrhli aj v článku [19], je potrebné nahradiť derivácie priestorovej premennej x jej diferenciami. My konkrétne použijeme nahradenie centrálnou diferenciou pre vútorné body riešenia a doprednou/dozadnou diferenciou pre okrajové body riešenia. Typy diferencií charakterizujeme v definícii 3. Diskretizovaná rovnica (22) pre ocenenie dlhopisu

P, ktorej riešenie budeme aproximovať vektorom $u = (u_1, u_2, ..., u_J)$ má tvar:

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tau} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\delta x)^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{\delta x}\frac{\kappa(\theta - x_j) - \lambda\sigma}{2} - \max(x_j, kx_j)u_j \qquad \forall j = 2, ..., J-1. \tag{25}$$

Diskretizácia rovnice v okrajových bodoch $\frac{\partial u_1}{\partial \tau}$ a $\frac{\partial u_J}{\partial \tau}$ nadobúda iný tvar. V týchto bodoch treba zohľadniť okrajové podmienky, ktoré sme sformulovali v rovniciach (23) a (24). Takisto treba brať do úvahy, že ak by sme použili centrálnu diferenciu, tak ako v diskretizácii vnútorných bodov, potrebovali by sme poznať členy u_0 a u_{J+1}. Z tohoto dôvodu použijeme pre diskretizáciu v bode $j = 1$ doprednú diferenciu a v bode $j = J$ dozadnú diferenciu. Aplikovaním vyššie uvedeného postupu získavame diskretizáciu rovnice (22) pre okrajový bod $j = 1$ v tvare

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = (u_2 - u_1)\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x} - \max(x_1, kx_1)u_1 \tag{26}$$

a pre okrajový bod $j = J$ v tvare

$$\frac{\partial u_J}{\partial \tau} = (u_J - u_{J-1})\frac{\kappa(\theta - x_J) - \lambda\sigma}{\delta x} - \max(x_J, kx_J)u_J. \tag{27}$$

Parametre κ, μ, σ a k vystupujúce v rovnici sme už určili v predošlej kapitole použitím metódy maximálnej vierohodnosti. Hodnota premennej $\tau = T - t$ je definovaná ako rozdiel času maturity dlhopisu a aktuálneho času. Napokon δx je hodnota, ktorá určuje krok, resp. delenie priestoru definovaného vektorom x. Toto delenie sme už vysvetlili a graficky znázornili v predchádzajúcej podkapitole.

Rovnice (25) až (27) sa dajú spísať aj kompaktnejšie, a to použitím maticového

zápisu:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \mathbb{M}u, \tag{28}$$

$$u(\tau = 0) = 1_J, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \\ ... \\ \frac{\partial u_J}{\partial \tau} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Rovnica $u(\tau = 0) = 1_J$ reprezentujúca počiatočnú podmienku je ekvivalentná s koncovou podmienkou $u(T = 1) = 1_J$. Matica $\mathbb{M}$ bude v tomto prípade tridiagonálna matica, ktorá nadobúda tvar

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2\mathbb{A}_1 + \mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 - \mathbb{A}_1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & .. & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & \mathbb{A}_{J-1} & \mathbb{B}_{J-1} & \mathbb{C}_{J-1} \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & \mathbb{A}_J - \mathbb{C}_J & \mathbb{B}_J + 2\mathbb{C}_J \end{pmatrix},$$

pričom pre jednotlivé prvky matice platia predpisy

$$\mathbb{A}_j = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{\kappa(\theta - x_j) - \lambda\sigma}{\delta x}\right), \tag{31}$$

$$\mathbb{B}_j = -\max(x_j, kx_j) - \left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2, \tag{32}$$

$$\mathbb{C}_j = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{\kappa(\theta - x_j) - \lambda\sigma}{\delta x}\right). \tag{33}$$

Môžeme vidieť, že prvý a posledný riadok matice $\mathbb{M}$ nadobúdajú iný tvar, keďže reprezentujú diskretizáciu rovnice (22) v krajných bodoch riešenia, teda tak ako je uvedené v rovniciach (26) a (27). Tento tvar matice $\mathbb{M}$ sme prebrali z článku [19], keďže takýto maticový zápis nám neskôr uľahčí výpočty v softvéri R.

Konkrétne sa pozrime na členy prvého riadku matice $\mathbb{M}$, teda členy $2\mathbb{A}_1 + \mathbb{B}_1$ a $\mathbb{C}_1 - \mathbb{A}_1$. Ak použijeme predpisy uvedené v rovniciach (31), (32) a (33) a zároveň tento

riadok vynásobíme zložkami vektora u, tak ako je uvedené v (28), získame prvú zložku riešenia systému. Výsledný tvar riešenia pre prvú zložku aj s algebraickými úpravami uvádzame v nasledujúcom vzťahu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= (2\mathbb{A}_1 + \mathbb{B}_1)\, u_1 + (\mathbb{C}_1 - \mathbb{A}_1)\, u_2 \\
&= \left[2\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right)\right] + \left(-\max(x_1, kx_1) - \left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2\right)\right] u_1 \\
&+ \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right)\right]\right] u_2 \\
&= \left[\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x} - \max(x_1, kx_1) - \left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2\right] u_1 \\
&+ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right] u_2 \\
&= \left[-\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x} - \max(x_1, kx_1)\right] u_1 + \left[\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right] u_2 \\
&= (u_2 - u_1)\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x} - \max(x_1, kx_1) u_1.
\end{aligned} \tag{34}$$

Vidíme, že po úpravách dostávame vzťah identický s rovnicou (26). Analogicky, pre poslednú zložku riešenia systému rovníc platia vzťahy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_J}{\partial \tau} &= (\mathbb{A}_J - \mathbb{C}_J)\, u_{J-1} + (\mathbb{B}_J + 2\mathbb{C}_J)\, u_J \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right)\right]\right] u_{J-1} \\
&+ \left[-\max(x_J, kx_J) - \left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + 2\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{\kappa(\theta - x_J) - \lambda\sigma}{\delta x}\right)\right]\right] u_J \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\kappa(\theta - x_1) - \lambda\sigma}{\delta x}\right] u_{J-1} \\
&+ \left[-\max(x_J, kx_J) - \left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\delta x}\right)^2 + \frac{\kappa(\theta - x_J) - \lambda\sigma}{\delta x}\right] u_J \\
&= \left[-\frac{\kappa(\theta - x_J) - \lambda\sigma}{\delta x}\right] u_{J-1} + \left[-\max(x_J, kx_J) + \frac{\kappa(\theta - x_J) - \lambda\sigma}{\delta x}\right] u_J \\
&= (u_J - u_{J-1})\frac{\kappa(\theta - x_J) - \lambda\sigma}{\delta x} - \max(x_J, kx_J) u_J.
\end{aligned} \tag{35}$$

Takisto sme po úpravách získali člen, ktorý je rovnaký ako člen, ktorý uvádzame v rovnici (27).

Teraz už môžeme pokračovať v riešení uvedeného systému ODR. Využitím separácie premenných, ktorá je jednou z efektívnych metód určených pre riešenie ODR

dostávame riešenie systému (28) v tvare:

$$u(\tau) = \exp(\tau \mathbb{M}) u(0),$$

čo nás privádza k pojmu maticová exponenciála.

4.4 Maticová exponenciála

Maticová exponenciála je obzvlášť dôležitá pri riešení systému obyčajných diferenciálnych rovníc, s ktorým sa stretávame aj my v našej práci. Pri priblížení tohoto pojmu budeme čerpať z knihy [22].

Vezmime si najjednoduchšiu ODR v tvare:

$$u' = au.$$

Jednoducho vidíme, že riešením takejto rovnice bude $u(t) = e^{at}u(0)$. V prípade, že máme takýchto ODR viac (napr. n), hovoríme, že máme systém ODR, ktorý môže vyzerať takto:

$$u' = Au,$$

pričom u je $n \times 1$ vektor a A je $n \times n$ matica. Pokiaľ postupujeme anlogicky ako pri riešení jednej ODR, riešenie takéhoto systému ODR bude vyzerať $u(t) = e^{At}u(0)$, čo nás privádza k maticovej exponenciále.

Pre štvorcovú $(n \times n)$ maticu A sa maticová exponenciála definuje pomocou vzťahu:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^k}{k!}A^k + ..., \tag{36}$$

ktorý vychádza z Taylorovho rozvoja. Prirodzene, aj pre matice platí, že A^0 je rovná matici identity. Takáto nekonečná postupnosť konverguje pre všetky t a pre akúkoľvek

štvorcovú maticu A.

4.4.1 Vlastnosti maticovej exponenciály

Maticová exponenciála má rôzne špecifické vlastnosti a charakteristiky, no na druhej strane viaceré z jej vlastností sú analogické s obyčajnou exponeniálou.

Definujme opäť matice A a B, pre ktoré platí, že sú to štvorcové $(n \times n)$ matice, premenné t a $s \in \mathbb{R}$. Maticové exponenciála e^{At} má podľa [8] nasledujúce vlastnosti:

- $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$
- $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- $\det e^{At} \neq 0$
- špeciálne, ak platí, že $AB = BA$, tak potom $e^{At}e^{Bt} = e^{t(A+B)}$

Čo sa týka výpočtu maticovej exponenciály numericky, teda v softvéri R, v práci budeme používať knižnicu `expm`, ktorá využíva metódu s názvom `Padé` opísanú v [13]. Túto metódu použili pri výpočte aj autori článku [19], z ktorého pri implementácii nášeho modelu pri využití MOL metódy čerpáme.

4.5 Testovanie presnosti numerickej MOL metódy

Pri výpočte cien dlhopisov, respektíve pri výpočte úrokovej miery implementujeme vyššie predstavenú MOL metódu v štatistickom softvéri R.

V prvom rade sa ale budeme bližšie zaoberať presnosťou a správnosťou použitej numerickej metódy. Na túto kontrolu nám bude slúžiť už známy Vašičkov proces. Pre pevne zadané hodnoty parametrov J, x_0 a x_J a odhadnuté hodnoty parametrov κ, θ, σ a k sa pokúsime určiť vývoj úrokovej miery. Najskôr aplikovaním MOL metódy na systém (28), na základe ktorého získame ceny dlhopisov. Z cien dlhopisov následne použitím prevodného vzťahu získame hodnoty úrokovej miery. Úrok R z cien dlhopisu

dopočítame použitím vzťahu:

$$R(t,T) = \frac{-ln(P(t,T))}{\tau}, \tag{37}$$

kde P je cena dlhopisu v čase t s maturitou v čase T.

V prípade, že v našom modeli nastavíme hodnotu kalibračného parametra $k = 1$, získavame Vašičkov proces, pre ktorý vieme získať aj explicitné riešenie danej PDR. Podľa knihy [15], riešením PDR pre cenu dlhopisu, ktorého úroková miera sa riadi Vašičkovým procesom je funkcia:

$$P(x,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)\max(kx,x)}, \tag{38}$$

kde

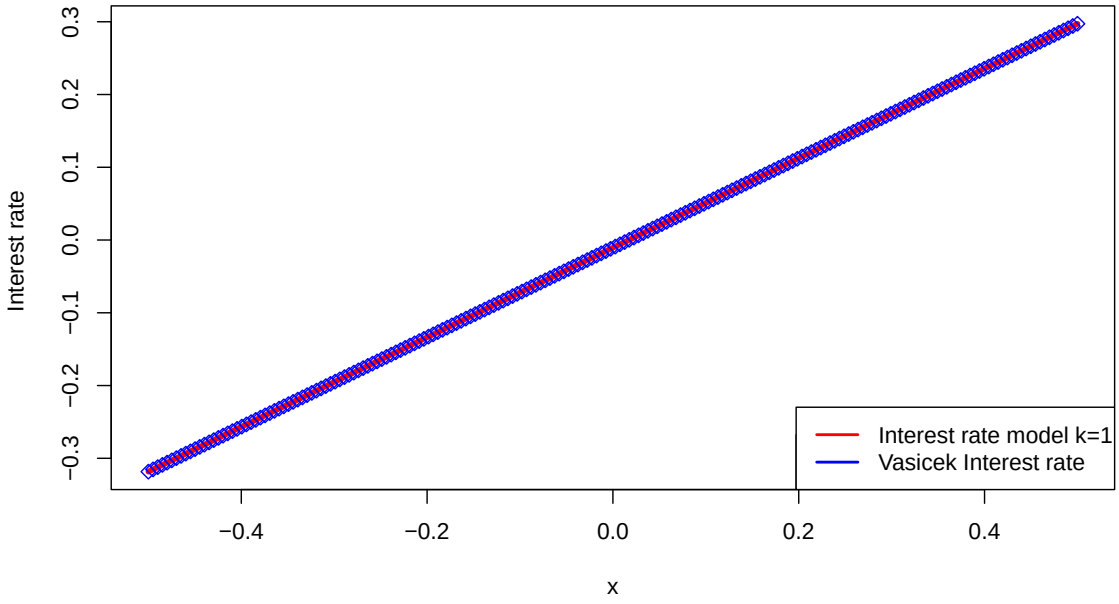
$$A(\tau) = \exp\left[\left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\left(\frac{1}{\kappa}(1-e^{-\kappa\tau}) - \tau\right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1-e^{-\kappa\tau})^2\right]$$

a

$$B(\tau) = \left(\frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\right).$$

Presnosť použitej numerickej metódy budeme testovať porovnaním hodnôt úrokovej miery získaných použitím MOL metódy práve s hodnotami, ktoré získame použitím vzťahu (38), pričom výsledky ešte prevedieme aplikovaním vzťahu (37).

Pre kontrolu sme sa rozhodli nastaviť hodnoty ostatných parametrov nasledovne: $J = 200$, $x_0 = -0,5$ a $x_J = 0,5$. Pre ostatné parametre použijeme odhadnuté hodnoty, a to $\kappa = 0.02160052$, $\theta = -0.1882029$ a $\sigma^2 = 2.638614e^{-05}$. Po aplikovaní vyššie opísaného postupu sme sa presvedčili o presnosti použitia numerickej MOL metódy, keďže na grafe 5 vidíme, že úroková miera vypočítaná využitím numerickej MOL metódy a Vašičkovým procesom je veľmi blízka, keďže na grafe sa priamky znázorňujúce úrokové miery prekrývajú.



Obr. 5: Grafické znázornenie porovnania výpočtu úrokovej miery použitím štandardného Vašičkovho procesu a použitím numerickej MOL metódy.

Čo sa týka kvantitatívneho porovnania vypočítaných úrokových mier, uvádzame ho v tabuľke 3. Tabuľka sumarizuje rôzne štatistiky ako minimum a maximum, kvartily, priemer a medián. Na základe hodnôt štatistík uvedených v tabuľke 3 je očividné, že rozdiely hodnôt úrokových mier získaných využitím MOL metódy a explicitné riešenie použitím Vašičkovho modelu nie sú relevantné.

Štatistika	Hodnota rozdielu
Min.	$-5.466e^{-05}$
1. Qu.	$-7.422e^{-06}$
Median	$-3.206e^{-06}$
Mean	$-3.443e^{-06}$
3. Qu.	$1.010e^{-06}$
Max.	$7.172e^{-06}$

Tabuľka 3: Sumárna tabuľka rozdielov pri výpočte úrokovej miery použitím MOL metódy a nami uvažovaného modelu s hodnotou kalibračného parametra $k = 1$ a Vašičkovým modelom.

4.6 Minimalizačná funkcia určená na odhadnutie parametra λ

Berme do úvahy situáciu, kedy už máme odhadnuté parametre κ, θ, σ a k. Trhovú cenu rizika budeme odhadovať minimalizáciou funkcie v tvare:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{J} (R_i - R_{num}(x_i))^2, \tag{39}$$

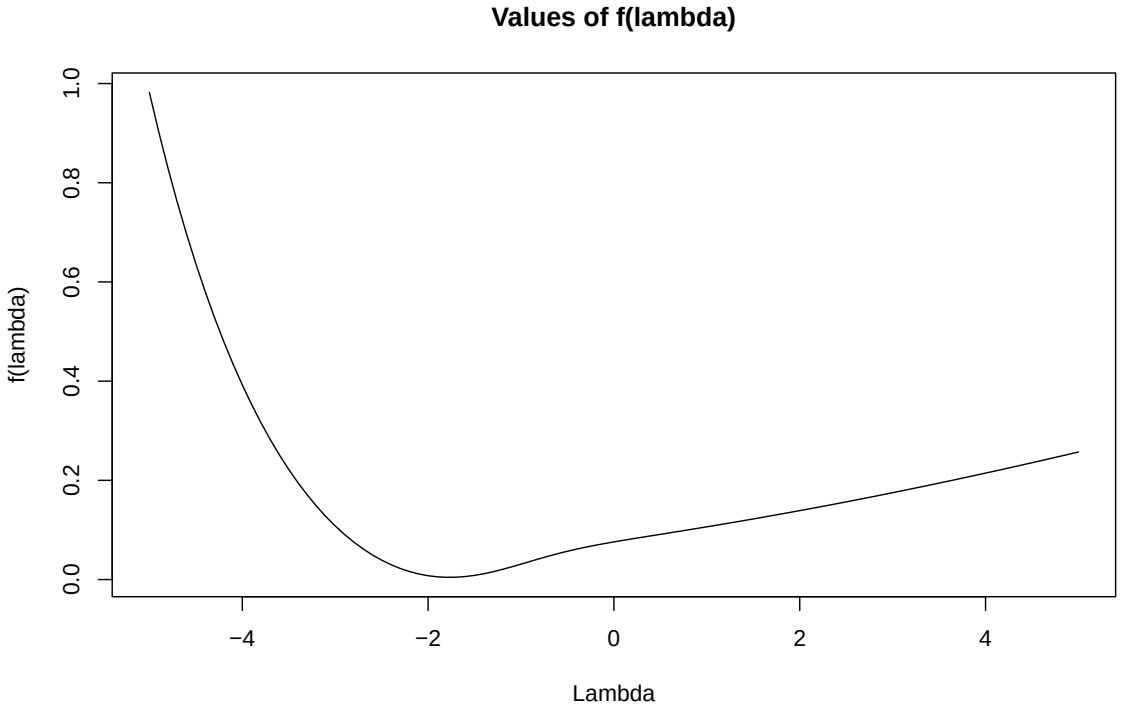
kde R_i je skutočná hodnota *long rate* v i-tom dni a hodnota $R_{num}(x_i)$ predstavuje numericky získanú hodnotu (aplikovaním MOL metódy) úrokovej miery pre x zodpovedajúcu x_i, teda procesu x v i-ty deň. Príslušnú hodnotu procesu x sme získali prevodným vzťahom (17) z dostupných hodnôt pre *short rate* r. Hodnoty *long rate* úrokových mier sme získali z [11]. Opäť ide o dáta pre oblasť *Euro area* za desaťročné obdobie, od januára 2011 do januára 2021. Hodnoty *short rate* používame tie isté ako aj v predošlých výpočtoch.

Aby sme získali hodnoty pre $R_{num}(x_i)$, okrajové hodnoty priestorovej premennej sme nastavili na $x_0 = -0,05$ a $x_J = 0,05$. Takisto sme hodnotu parametra τ nastavili na 10, keďže hodnoty *long rate* úrokovej miery, s ktorými budeme numerické výsledky porovnávať sú hodnoty pre dlhopisy s 10-ročnou maturitou. Napokon sme použitím MOL metódy s takto nastavenými hodnotami získali výpočet ceny dlhopisu P, z ktorej sme pomocou vzťahu (37) získali aj príslušnú hodnotu úrokovej miery R.

Ďalším dôležitým krokom pri získaní hodnôt premennej $R_{num}(x_i)$ je interpolácia. Je zrejmé, že nie všetky hodnoty short-rate úrokovej miery r sa budú nachádzať medzi deliacimi bodmi priestorovej premennej x, preto je potrebné tieto hodnoty aproximovať. V našej práci sme sa rozhodli použiť lineárnu interpoláciu pomocou zabudovanej funkcie `approx` v štatistickom softvéri R.

Napokon, k samotnej optimalizácii lambdy, prvým krokom je zistenie z akého približne intervalu môže parameter λ pochádzať. Rozhodli sme sa preto tento interval určiť na základe vizualizácii hodnôt minimalizačnej funkcie pri rôznych hodnotách lambdy. Najskôr sme hodnoty vykreslili pre parameter patriaci do pomerne širokého

intervalu a to $\lambda \in \langle -5, 5 \rangle$. Výpočet hodnôt minimalizačnej funkcie $f(\lambda)$ pre takto široký interval si vyžadoval pomerne veľa času. Na grafe 6 je znázornený vývoj hodnôt minimalizačnej funkcie $f(\lambda)$.

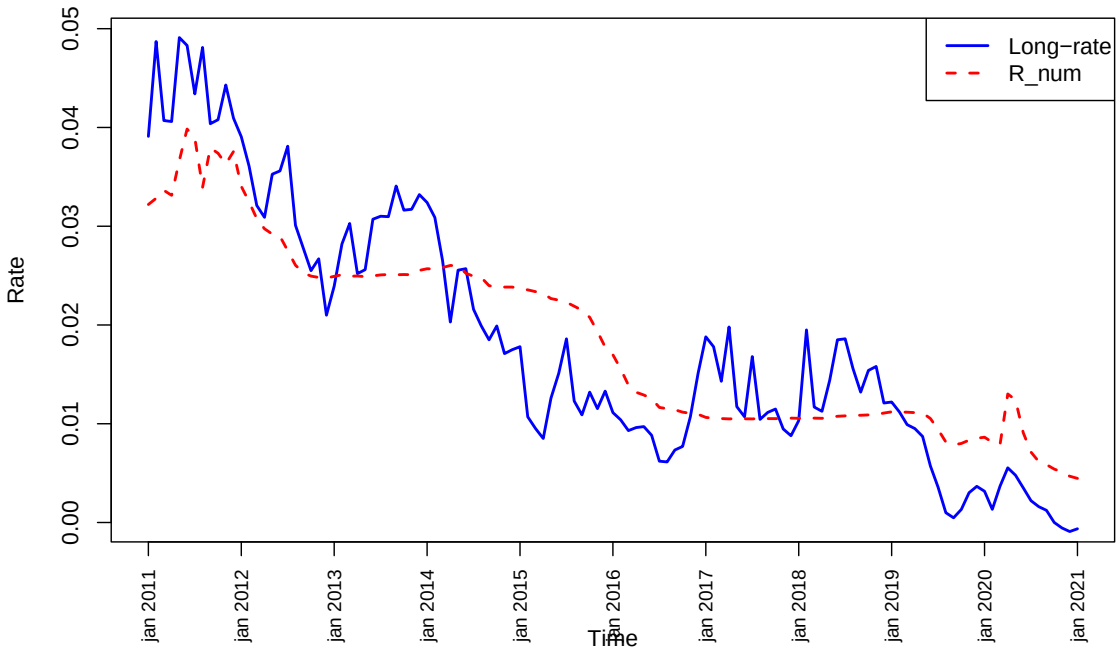


Obr. 6: Grafické znázornenie vývoja hodnôt minimalizačnej funkcie $f(\lambda)$ pri rôznych hodnotách trhovej ceny rizika λ.

Pomocou grafu 6 sme zistili, že optimálna hodnota trhovej ceny rizika, teda parametra λ sa bude nachádzať niekde v intervale od $\langle -4, 0 \rangle$.

Na zistenie optimálnej hodnoty použijeme zabudovanú funkciu `optimize`. Táto funkcia patrí do triedy optimalizačných funkcií, ktorá na výpočet využíva metódu, ktorá nepotrebuje derivácie, ale vystačí si s funkčnými hodnotami funkcie určenej na optimalizáciu. Podľa [16] v tomto prípade využíva metódu, ktorá je kombináciou zlatého rezu a postupnej parabolickej interpolácie. Vstupnými hodnotami tejto metódy sú: optimalizačná funkcia, interval, upresnenie či hľadáme minimum alebo maximum funkcie. Výstupom funkcie `optimize` je argument, v ktorom funkcia nadobúda hľadaný extrém a hodnota funkcie v bode extrému. V našom prípade sme teda vstupy nastavili nasledovne `optimize(`$f(\lambda)$`, (-4,0), maximum = false)`. Napokon sme získali opti-

málnu hodnotu trhovej ceny rizika, ktorá je $\hat{\lambda} = -1.768653$.



Obr. 7: Grafické znázornenie hodnôt *long rate* a numericky získaných hodnôt pri použití optimálnej hodnoty parametra $\hat{\lambda} = -1.768653$.

Na záver uvádzame graf 7, na ktorom je znázornený priebeh *long rate* úrokovej miery a nami numericky vypočítanej úrokovej miery. Môžeme si všimnúť, že nami vypočítaná úroková miera, ktorá je v tomto prípade znázornená červenou prerušovanou čiarou má oveľa "jemnejší" priebeh čo sa týka výkyvov hodnôt, avšak v princípe kopíruje správanie sa *long rate* úrokovej miery. Taktiež vidíme, že úrokové sadzby sú nad nulou. Dôvodom je, že dlhodobé úrokové sadzby berú do úvahy aj budúcnosť a perspektívu zlepšujúcej sa ekonomickej situácie.

Záver

Ako sme už spomenuli v úvode, hlavným cieľom našej práce je čitateľov oboznámiť s nie veľmi známym pojmom *shadow rate*. V práci sme sa zameriavali hlavne na predstavenie tohoto pojmu a ostatných pojmov, ktoré s ním veľmi úzko súvisia a sú kľúčové k pochopeniu celej problematiky.

Prvá kapitola diplomovej práce bola venovaná najmä pojmom, definíciám a vetám, ktoré sme v nasledujúcich kapitolách použili. Znalosť vybraných pojmov, ktoré sme uviedli v tejto kapitole považujeme za dôležité pre pochopenie danej témy. Väčšina definícií pochádzala pre študentov odboru ekonomickej a finančnej matematiky známej literatúry a to [14]. Znalosti sa týkajú najmä oblastí pravdepodobnosti a štatistiky, finančných derivátov či stochastického kalkulu.

Po oboznámení sa so základnymi pojmami sme v druhej kapitole čitateľom priblížili hlavnú myšlienku vzniku, resp. zavedenia pojmu *shadow rate*, ktorá bola prvý krát prezentovaná v článku [3]. Myšlienkou je jednoduchý fakt, že na menu sa môžeme pozerať ako na opciu, preto je nominálna krátkodobá úroková miera nanajvýš rovná nule.

Ďalším dôležitým krokom v našej práci bolo predstavenie viacerých, nami vybraných už existujúcich *shadow rate* modelov. Prvým predstaveným modelom bol práve model Fischera Blacka. Krippnerov model predstavený v [12] zas využil úplne iný prístup pri odhadovaní *shadow rate* úrokovej miery, a to prístup založený na opciách. Model Wu a Xia, pri ktorom sme čerpali zo zdrojov [23] a [24], bol iný v tom, že ZLB bola na rozdiel od Blackovho modelu nenulová. Taktiež sme predstavili aj model, ktorý ZLB bral ako parameter, ktorý sa môže odhadovať. Do triedy týchto modelov patrí model vyvinutý Priebschom, ktorý prezentoval v článku [17].

V tretej kapitole sme predstavili najdôležitejší prínos našej diplomovej práce, a to predstavenie a implementovanie jedného z modelov určených na modelovanie *shadow rate*. V úvode kapitoly sme sa venovali najmä hlavnej myšlienke modelu, ktorá je uve-

dená v rovnici (6). Vstupnými dátami do nášho modelu boli dostupné dáta pre *short rate*, z ktorých *shadow rate* vznikla prenásobením kalibračným parametrom k, pričom sme predpokladali, že *shadow rate* sa bude riadiť Vašičkovým procesom. V práci sme tento model matematicky korektne sformulovali a všetko dôkladne vysvetlili. Táto kapitola bola taktiež doplnená o viaceré grafické ukážky a taktiež aj tabuľky s odhadnutými hodnotami parametrov potrebných pre modelovanie tieňovej sadzby, ktoré sme odhadovali použitím metódy maximálnej vierohodnoti. Pri odhadovaní hodnoty kalibračného parametra k sme získali optimálnu hodnotu 0,189. V závere kapitoly sme signifikantnosť uvažovaného modelu otestovali LRT testom.

Napokon štvrtá, posledná kapitola našej práce bola venovaná implementácii uvažovaného modelu z predchádzajúcej kapitoly. Najskôr sme uviedli odvodenie PDR pre ocenenie dlhopisu konkrétne pre náš model. Poslednou časťou štvrtej kapitoly bol odhad parametra λ, ktorý reprezentuje trhovú cenu rizika. Na numerický výpočet ceny dlhopisu a následne hodnoty úrokovej miery sme sa rozhodli použiť vertikálnu metódu priamok, pričom sme sa inšpirovali autormi článku [19], ktorí túto metódu aplikovali na model podobný tomu, ktorý sme v práci uvažovali my.

Odhad λ sme získali na základe minimalizácie funkcie, ktorá predstavovala sumu štvorcov rozdielov skutočných dostupných dát pre *long rate* úrokovú mieru a nami vypočítaných úrokov použitím nášho modelu a MOL metódy. Presnosť MOL metódy sme otestovali porovnaním riešenia PDR MOL metódou s explicitným riešením použitím Vašičkovho procesu. Kapitola je doplnená viacerými grafickými výstupmi aj s príslušnými komentármi.

Hlavným prínosom našej práce sú hlavne tretia a štvrtá kapitola, ktoré obsahujú predstavenie, podrobné a exaktné formulovanie modelu a jeho následnú implementáciu.

Zoznam použitej literatúry

[1] Bauer, M., D., Rudebusch, G., D.: Monetary policy expectations in zero lower bound, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper 2013-2018.

[2] Beers, B.: What Is a Negative Interest Rate, and Why Would We Have Them? [online]. 2024. [cit. 22.04.2024] Dostupné na adrese: https://www.investopedia.com/terms/n/negative-interest-rate.asp#toc-consequences-of-negative-rates.

[3] Black, F.: Interest rates as options, The Journal Of Finance, 50, 1995, 1371-1376.

[4] Buckley, D.: Shadow Rate - Purpose, Assumptions, Models - DayTrading.com [online].2023 [cit. 02.04.2024] Dostupné na adrese: https://www.daytrading.com/shadow-rate.

[5] Brandner, M., Míka, S., Přikryl, P.: Speciální numerické metody: Numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice, Vydavatelský servis, Plzeň, 2006.

[6] Brigo, D., Mercurio, F.: Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer, Heidelberg, 2007.

[7] Brownlee, J.: Convex Optimization in R [online]. 2019. [cit. 25.12.2023] Dostupné na adrese: https://machinelearningmastery.com/convex-optimization-in-r/#:~:text=BFGS%20is%20an%20optimization%20method,of%20the%20function%20being%20optimized.

[8] Hall, B. C.: Lie groups and lie algebras: Their representations, generalisations and applications, Computers & Mathematics with Applications, 36, 1998, 119.

[9] Hamdi, S., Schiesser, E. W., Griffiths, G. W.: Method of lines. [cit. 27.02.2024] Dostupné na adrese: http://www.pdecomp.net/Scholarpedia/MOLfinal.pdf.

[10] Interest rates - Short-term interest rates - OECD Data [online].[cit. 23.11.2023] Dostupné na adrese: https://data.oecd.org/interest/short-term-interest-rates.htm.

[11] Interest rates - Long-term interest rates - OECD Data [online].[cit. 21.03.2024] Dostupné na adrese: https://data.oecd.org/interest/long-term-interest-rates.htm.

[12] Krippner, L.: Modifying Gaussian Term Structure Models when Interest Rates Are Near the Zero Lower Bound, Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper Series, 2012.

[13] Matrix Exponential, Log, "etc" [R package expm version 0.999-9] [online]. 2024. [cit. 09.04.2024] Dostupné na adrese: https://CRAN.R-project.org/package=expm.

[14] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V.: Kapitoly z finančnej matematiky. Epos, Bratislava, 2005.

[15] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009.

[16] Optimize function - RDocumentation [online][cit. 30.04.2024] Dostupné na adrese: https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/optimize.

[17] Priebsch, M.: Computing Arbitrage-Free Yields in Multi-Factor Gaussian Shadow-Rate Term Structure Models, 2013.

[18] R Core Team (2023). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
Dostupné na adrese: https://www.R-project.org/.

[19] Realdon, M.: Tests of non linear Gaussian term structure models, Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 44, 2016, 128–147.

[20] Ross, S.: Why Negative Interest Rates Are Still Not Working in Japan [online]. 2023. [cit. 03.04.2024] Dostupné na adrese: https://www.investopedia.com/articles/markets/080716/why-negative-interest-rates-are-still-not-working-japan.asp.

[21] Sender, S, J.: Zerotopia - Bounded and Unbounded Pension Adventures (Term Structure Modelling with and without Negative Short Rates), NETSPAR, 2016.

[22] Strang, G.: Linear algebra and its aplications, Academic Press (1976), Fourth Edition: Brooks/Cole/Cengage, 2006.

[23] Wu, J. C., Xia, F. D.: Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound, Journal of Money, Credit, and Banking, 48 (2–3), 2016, 253–291.

[24] Wu, J. C., Xia, F. D.: Negative Interest Rate Policy and Yield Curve, Journal of Applied Econometrics, 35 (6), 2020, 653–672.

[25] Wu-Xia Shadow Federal Funds Rate [online].[cit. 03.01.2024] Dostupné na adrese: https://www.atlantafed.org/cqer/research/wu-xia-shadow-federal-funds-rate#Tab1.