UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MATEMATICKÉ MODELOVANIE FUNGOVANIA DYCHOVÝCH HUDOBNÝCH NÁSTROJOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024 Bc. Alžbeta KRÁLIKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Matematické modelovanie fungovania dychových hudobných nástrojov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Peter Mederly, CSc.

Bratislava 2024 **Bc. Alžbeta KRÁLIKOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Alžbeta Králiková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Matematické modelovanie fungovania dychových hudobných nástrojov
Mathematical modelling of wind musical instruments

Anotácia: Dychové hudobné nástroje tvoria jednu z hlavných kategórií hudobných nástrojov. Zvuk v nich je generovaný chvením vzduchového stĺpca, ktorého základným matematickým modelom je parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu známa ako vlnová rovnica. Pri modelovaní reálneho fungovania dychových hudobných nástrojov je však potrebné využiť aj ďalšie matematické nástroje.

Cieľ: Charakterizovať matematické modely vybraných aspektov fungovania dychových hudobných nástrojoch.

Vedúci: doc. RNDr. Peter Mederly, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 10.01.2023

Dátum schválenia: 11.01.2023 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcela poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Petrovi Mederlymu, CSc., za jeho neoceniteľnú podporu, inšpiráciu a vedenie počas písania práce. Jeho trpezlivosť, odborné rady, podnetné pripomienky a ochota venovať do práce svoj čas výrazne prispeli k úspešnému dokončeniu práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

Králiková, Alžbeta: Matematické modelovanie fungovania dychových hudobných nástrojov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Peter Mederly, CSc., Bratislava, 2024, 74 s.

Diplomová práca sa zaoberá nátrubkovými nástrojmi bežne nazývanými plechovými dychovými nástrojmi, ktoré tvoria jeden z troch hlavných druhov dychových hudobných nástrojov. Jej hlavným výstupom, ktorý bol cieľom práce, je charakterizácia elementárneho matematického modelu procesov, ktorých výsledkom je hra na nátrubkových nástrojoch. Po úvodných dvoch kapitolách venovaných potrebným poznatkom z hudobnej akustiky a vymedzeniu miesta nátrubkových nástrojov v systéme hudobných nástrojov prostredníctvom Hornbostel-Sachsovej klasifikácie sa v práci podrobne rozoberajú všetky faktory ovplyvňujúce fungovanie tohto druhu nástrojov, ktoré sú dôležité pre matematické modelovanie v tejto oblasti. Základným predmetom modelovania sú vibrácie pier hudobníka ako primárneho, tlakom ovládaného ventilového zdroja zvuku a akustické rezonancie vzduchového stĺpca nástroja, ktoré sú prepojené úzkou spätnou väzbou. Hlavnými matematickými nástrojmi, ktoré sa pritom využívajú, sú diferenciálne rovnice popisujúce kmitavý pohyb a šírenie zvukových vĺn v rôznych podmienkach. Práca vychádza z viacerých zdrojov, pričom hlavným bolo monografia The Science of Brass Instruments, ktorej autormi sú M.Campell, J.Gilbert a A.Myers. Okrem riešenia odborných problémov bolo cieľom práce tiež vytvoriť ucelený slovenský text v tejto oblasti, ktorý podľa našich vedomostí v súčasnosti neexistuje.

Kľúčové slová: nátrubkové nástroje, vibrácie pier, akustické rezonancie, zvukové vlny, vlnová rovnica

Abstract

KRÁLIKOVÁ, Alžbeta: Mathematical modelling of wind musical instruments [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Peter Mederly, CSc., Bratislava, 2024, 74p.

In this thesis, we deal with brass instruments, which form one of the three main types of wind instruments. Its main outcome, which was the aim of the thesis, is the characterisation of an elementary mathematical model of the processes that result in the playing of brass instruments. After first two chapters two chapters devoted to the necessary knowledge of musical acoustics and to the definition of the place of brass instruments in the system of musical instruments by means of the Hornbostel-Sachs classification, the thesis discusses in detail all the factors influencing the functioning of this kind of instruments, which are important for mathematical modelling in this field. The basic objects of modelling are the vibration of the player's lips as the primary, pressure-controlled valve sound source and the acoustic resonances of the instrument's air column, which are closely linked by a feedback loop. The differential equations are the main mathematical tools used to describe the oscillatory motion and propagation of sound waves under different conditions. The work is based on a several sources, the main one is the monograph The Science of Brass Instruments, written by M.Campell, J.Gilbert and A.Myers. In addition to solving technical problems, the aim of the work was also to create a comprehensive Slovak text in this field, which to our knowledge does not currently exist.

Keywords: brass instruments, lip vibration, accoustic resonances, sound waves, wave equation

Obsah

Úvod **8**

1 Základné informácie z hudobnej akustiky **11**

2 Dychové hudobné nástroje a ich miesto v sústave hudobných nástrojov **17**

3 Úvod k tvorbe matematického modelu fungovania nátrubkových nástrojov **22**

3.1 Objektívne merateľné vlastnosti a črty hry na nátrubkovom nástroji 22

3.1.1 Zvuk nástroja vyžarovaný do okolitého priestoru 22

3.1.2 Zvuk meraný vo vnútri nátrubku 23

3.1.3 Tlakové pomery v ústnej dutine 25

3.1.4 Vibrácie pier ako ventilový zdroj zvuku 26

3.1.5 Cyklus počas vibrácie pier 27

3.1.6 Prúdenie a rýchlosť vzduchu 29

3.1.7 Mechanické vibrácie stien nátrubkového nástroja 30

3.1.8 Vplyv zohrievania nátrubkového nástroja 31

3.2 Vymedzenie prístupu k modelovaniu fungovania nátrubkových nástrojov . . 31

3.2.1 Východiská elementárneho modelu fungovania nátrubkových nástrojov 31

3.2.2 Spätná väzba 33

3.2.3 Pery ako samo-udržujúci sa oscilátor 34

3.2.4 Vzťah prirodzených tónov a harmonických radov 35

3.2.5 Ako sa pomocou ventilov vypĺňajú medzery medzi prirodzenými tónmi 37

3.2.6 Paradox nátrubkových nástrojov 38

4 Modelovanie fungovania jednotlivých častí systému pri hre na nátrubkových nástrojoch **40**

4.1 Modelovanie vibrácií pier ako primárneho zdroja zvuku pri hre na nátrubkových nástrojoch 40

4.1.1 Charakteristika vibrácie pier 40

4.1.2 Rovnica popisujúca pohyb pier 42

4.1.3 Model posuvných dverí 44
4.1.4 Model výkyvných dverí 45
4.1.5 Plátky reagujúce dnu a plátky reagujúce von 48
4.1.6 Prúdenie vzduchu cez kanál medzi perami 50
4.1.7 Rovnica akustického objemového prietoku 52
4.2 Modelovanie akustických rezonancií vzduchového stĺpca v nátrubkovom nástroji 53
4.2.1 Akustické rezonátory 53
4.2.2 Stojaté vlnenie 54
4.2.3 Časový prístup a frekvenčný prístup 60
4.2.4 Odpoveď na vstupný impulz a reflexná funkcia 61
4.2.5 Vstupná impedancia 63

5 Formulácia elementárneho modelu hry na nátrubkových nástrojoch 66
5.1 Prvá rovnica modelu: dynamika pier 67
5.2 Druhá rovnica modelu: podmienky prúdenia 68
5.3 Tretia rovnica modelu: akustika nástroja 69
5.4 Konečný tvar elementárneho modelu 69

Záver 70

Zoznam použitej literatúry 72

Príloha A 75

Príloha B 78

Úvod

Dychové hudobné nástroje tvoria najväčšiu a najstaršiu podskupinu hudobných nástrojov. Hlavnou črtou, ktorá ich odlišuje od iných hudobných nástrojov, je skutočnosť, že zatiaľ čo u ostatných nástrojov sa pre generovanie zvukových vĺn do okolitého prostredia (vzduchu) používajú najrôznejšie typy pružných materiálov, ako sú napríklad struny, blany, tyče a ďalšie, u dychových nástrojov sú zdrojom zvukových vĺn zvukové vlny vo vnútri samotného nástroja.

Táto odlišnosť stavia dychové nástroje do osobitného postavenia spočívajúceho v tom, že niektoré procesy ich fungovania sú jednoduchšie ako u nástrojov, u ktorých cesta od primárneho zdroja tónu (napríklad struny) k jeho konečnej podobe prechádza zložitejším procesom, napríklad prenosom cez kobylku na ozvučnú časť tela nástroja, ktorá je konečným zdrojom zvuku nástroja.

Na druhej strane, u dychových nástrojov, a to osobitne u nátrubkových, ktoré sa bežne nazývajú plechovými dychovými nástrojmi, je hráč zviazaný s nástrojom podstatne užšie, ako u iných nástrojov. Je to tým, že pri hre sa súčasťou nástroja stane de facto aj časť jeho tela, konkrétne jeho pery. Táto skutočnosť vnáša do snahy o pochopenie činnosti nátrubkových nástrojov osobitnú dimenziu a robí ich fungovanie oproti ostatným nástrojom zložitejším.

Podľa zadania je cieľom tejto diplomovej práce charakterizovať matematické modely vybraných aspektov fungovania dychových hudobných nástrojov. Pre naplnenie tohto cieľa sme vybrali práve matematické modelovanie procesov pri hre na nátrubkových nástrojoch.

Práca vychádza z viacerých zdrojov, pričom hlavným bola monografia The Science of Brass Instruments, ktorej autormi sú M.Campell, J.Gilbert a A.Myers. Pri vypracovávaní práce sme intenzívne hľadali aj zdroje v slovenčine zaoberajúce sa touto problematikou. Takéto zdroje sme súrne potrebovali najmä z dôvodov získať informácie o odbornej slovenskej terminológii v tejto oblasti. Problémy, s ktorými sme sa pri tomto snažení stretli, nás viedli k tomu, že sme si stanovili ako ďalší cieľ tejto práce, okrem riešenia odborných problémov, vytvoriť ucelený slovenský text, ktorý by mohol slúžiť ako vstupný dokument pre záujemcov o túto problematiku.

Z hľadiska štruktúry pozostáva práca z piatich kapitol.

V prvej kapitole sú zrekapitulované základné informácie z oblasti hudobnej akustiky,

ktoré sú potrebné v ďalších častiach práce.

V druhej kapitole uvádzame všeobecnú charakteristiku hudobných nástrojov z hľadiska ich hlavných častí. Potom predstavujeme dnes najrozšírenejší systém na triedenie hudobných nástrojov, ktorým je Hornbostel-Sachsova klasifikácia. Pomocou nej formulujeme všeobecnú charakterizáciu dychových nástrojov a ich členenia, ktoré nám následne umožní presnejšie špecifikovať nátrubkové nástroje ako hlavný predmet nášho skúmania v tejto práci.

Tretia kapitola je úvod k tvorbe matematického modelu fungovania nátrubkových nástrojov. Najprv sa v nej venujeme objektívne merateľným vlastnostiam týchto nástrojov, ktorých poznanie je nevyhnutným predmetom modelovania ich fungovania. Následne formulujeme východiská prístupu k modelovaniu, ktoré budeme v ďalšom využívať. V tejto časti sa venujeme aj jednej z kľúčových tém potrebných pre pochopenie fungovania dychových nástrojov všeobecne, a to téme vzťahu prirodzených tónov nástroja a harmonických radov. V jednej časti tretej kapitoly sa venujeme aj riešeniu špeciálneho problému, s ktorým sa stretávame pri nátrubkových nástrojoch, a to problému mechanizmov na vypĺňanie medzier medzi prirodzenými tónmi.

Vo štvrtej kapitole, ktorá je rozdelená na dve časti, sa už konkrétne venujeme modelovaniu fungovania jednotlivých častí systému pri hre na nátrubkových nástrojoch. V prvej časti je predmetom modelovania vibrácia pier ako primárneho zdroja zvuku pri týchto nástrojoch. Druhá časť tejto kapitoly je venovaná procesom týkajúcim sa vzduchového stĺpca obsiahnutého v trubici nástroja. Predstavujeme dva možné prístupy k popisom dejov v tejto oblasti, a to frekvenčný a časový. Tak sa dostávame aj k jednému z najdôležitejších pojmov pre pochopenie fungovania nátrubkových nástrojov, ktorým je pojem vstupnej impedancie.

Posledná piata kapitola je venovaná stručnému zhrnutiu získaných poznatkov a predstaveniu finálnej verzie elementárneho modelu ich fungovania.

Na záver ešte niekoľko technických poznámok. Pojmy „hudobník“ a „hráč“ používame v práci v rovnakom význame. Pre označovanie nôt používame tzv. vedecký systém pozostávajúci z označenia tónu a čísla oktávy. V tomto systéme je napríklad jednočiarkovaná oktáva oktávou číslo 4, takže nota jednočiarkované c má označenie $C4$. Uvedenie označenia noty pred názvom nástroja hovorí o jeho ladení, $B-$trubka má teda základný tón B.

Často používaný symbol pre akustický tlak, ktorý vo všeobecnosti závisí od priestorových premenných a času, sa v našich úvahách najčastejšie vyskytuje ako označenie vzťahované na jedno konkrétne miesto, napríklad nátrubok. Vtedy ho označujeme ako funkciu jednej premennej, a to času, teda $p(t)$. Keď ho však používame pre popis zvukovej vlny v trubici, uplatňuje sa jeho závislosť aj od priestorovej premennej aj od času, a preto vystupuje ako funkcia dvoch premenných, teda $p(x, t)$. Na záver ešte jedna typografická poznámka: v časti týkajúcej sa Hornbostel-Sachsovej klasifikácie používame typografiu z jej oficiálnych dokumentov, ktorá sa čiastočne odlišuje od typografie používanej vo zvyšku práce.

1 Základné informácie z hudobnej akustiky

V tejto kapitole si objasníme kľúčové pojmy z oblasti hudobnej akustiky, ktoré sú potrebné pre pochopenie obsahu ďalších častí našej práce. Pre túto kapitolu bol hlavnou predlohou zdroj [14].

V bežnej reči má slovo *„zvuk“* dva významy. V prvom prípade sa ním označuje sluchový vnem. V takomto význame sa slovo „zvuk“ vyskytuje napríklad vo vete „počujem tu nejaký zvuk“. V druhom význame sa slovom „zvuk“ označuje fyzikálny jav spočívajúci najčastejšie v tlakových zmenách šíriacich sa vzduchom, ktorý u poslucháča vyvolá sluchový vnem.

Oba tieto významy slova „zvuk“ sa uplatňujú pri skúmaní zvukových alebo akustických javov, ktoré sa vyskytujú všade okolo nás a ovplyvňujú náš život mnohými spôsobmi. Napríklad nás vystríhajú pred nebezpečenstvom, umožňujú komunikáciu s inými, otravujú nás vo forme hluku alebo nás uchvacujú a očarúvajú vo forme hudby.

Zvuk je bezpochyby jeden z najdôležitejších zmyslových vnemov človeka a ako sa uvádza v [19] „sluchový (auditórny) systém je jedným z majstrovských inžinierskych kúskov ľudského tela. Na vstupe do tohto systému sa nachádza sústava miniatúrnych akustických detektorov umiestnených vo vnútornom uchu v priestore o veľkosti hráška. Tieto detektory vedia transformovať vibrácie s veľkosťou priemeru atómu rýchlosťou 100-násobne väčšou ako vizuálne fotoreceptory.“

Z uvedeného vyplýva, že pri presnom vyjadrení je potrebné rozlišovať zvukový signál ako objektívne existujúci fyzikálny jav a vnímanie zvukového signálu človekom (sluchový vnem), ktoré má subjektívny charakter. V odbornej literatúre sa práve tento sluchový vnem označuje slovom *„zvuk“* (sound). Na ilustráciu sa často zvykne uvádzať nasledujúci príklad: ak v lese padne strom, tak vždy vznikne zvukový signál, ale zvuk vznikne len vtedy, ak v tom lese je niekto, kto počul padnutie toho stromu.

V prípadoch, keď nehrozí nedorozumenie, budeme kvôli zjednodušeniu vyjadrovania hovoriť niekedy jednoducho len o zvuku.

Zvukový jav pozostáva z troch fáz, ktorými sú generovanie zvukového signálu nejakým zdrojom, prenos zvukového signálu cez nejaké médium, obvykle vzduchom, a zachytenie a spracovanie zvukového signálu prijímateľom, v našom prípade pôjde väčšinou o človeka.

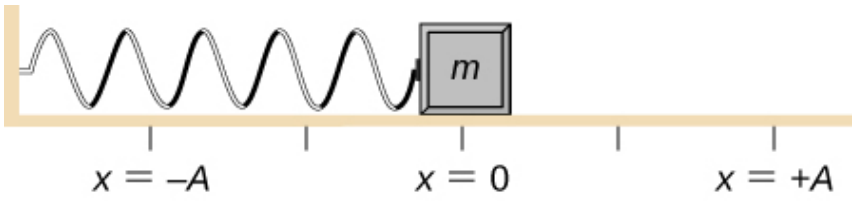
Zdrojom zvukového signálu je vždy nejaký druh vibrácie resp. kmitania alebo chvenia,

napríklad kmitanie struny, blany bubna alebo vzduchového stĺpca vo vnútri dychového hudobného nástroja.

Základnou charakteristikou kmitania ako druhu mechanického pohybu je striedavé vzďaľovanie sa a približovanie pohybujúceho sa predmetu od resp. do svojej rovnovážnej polohy. Maximálna vzdialenosť kmitajúceho predmetu od rovnovážnej polohy sa nazýva *amplitúda*. Doba potrebná na vykonanie jedného kmitu, ktorým sa rozumie pohyb z rovnovážnej polohy do polohy s najväčšou výchylkou (rovnou amplitúde) a odtiaľ cez rovnovážnu polohu na opačnú stranu a späť do rovnovážnej polohy sa nazýva doba kmitu alebo *perióda*. Počet kmitov za jednu sekundu sa nazýva frekvenciou kmitavého pohyb. Jednotkou frekvencie je 1 Hz (Hertz), ktorému zodpovedá 1 kmit za 1 sekundu.

Najjednoduchším kmitavým pohybom je jednoduchý harmonický pohyb. Pri jednoduchom harmonickom pohybe sa predpokladá pohyb objektu po priamke alebo po krivke, teda v jednorozmernom priestore, pričom po vychýlení z rovnovážnej polohy pôsobí naň sila, ktorá je úmerná vzdialenosti od rovnovážnej polohy, a ktorá sa ho snaží do rovnovážnej polohy vrátiť.

Na ilustráciu jednoduchého harmonického pohybu si vezmime teleso (blok) s hmotnosťou m pripevnené k pružine a položené na rovnej pevnej ploche bez trenia. Druhý koniec pružiny je pevne uchytený. Predpokladajme, že teleso sa môže pohybovať na tejto ploche po priamke a nech jeho poloha je daná súradnicou x. Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1: Blok pripevnený k pružine umiestnený na pevnej ploche bez trenia v rovnovážnej polohe $x = 0$. [1]

Rovnovážna poloha objektu (pružina nie je ani napnutá, ani stlačená) je označená $x = 0$. V tejto polohe je sila, ktorou pružina pôsobí na teleso, nulová. Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy nejakou vonkajšou silou a následne táto vonkajšia sila prestane pôsobiť, teleso sa pod vplyvom sily, ktorou naň pôsobí pružina, začne pohybovať do rov-

novážnej polohy. Následne bude okolo nej vykonávať kmitavý pohyb typu jednoduchý harmonický pohyb.

Za predpokladu, že sila, ktorou pôsobí pružina na teleso, je priamo úmerná jeho vzdialenosti od rovnovážnej polohy s koeficientom úmernosti k, pričom jej smer je taký, že sa snaží teleso vrátiť do rovnovážnej polohy, možno na základe druhého Newtonovho pohybového zákona jednoduchým spôsobom odvodiť nasledujúcu diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje uvedený kmitavý pohyb telesa

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1}$$

V tejto rovnici je x funkciou času vyjadrujúcou veľkosť výchylky z rovnovážnej polohy, m je hmotnosť telesa a k je tuhosť pružiny určujúca vyššie uvedený koeficient úmernosti.

V realite na objekty pôsobia aj tlmiace sily (napr. trenie), ktoré spôsobujú postupný zánik pohybu, ak nie je prítomná ďalšia sila, ktorá daný pohyb udržuje. Ak budeme pri jednoduchom harmonickom pohybe zohľadňovať aj tlmiacu silu, ktorá pôsobí proti pohybu telesa a je úmerná jeho rýchlosti s koeficientom úmernosti b, bude pohyb popísaný rovnicou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2}$$

Na záver nášho príkladu ešte uveďme, že na kmitajúce teleso môže okrem tlmiacej sily pôsobiť aj ďalšia externá sila, označme ju F. Obvykle ide o silu závislú od času t dodávajúcu kmitajúcemu systému energiu s určitou frekvenciou f. Napríklad $F = F_0 \sin(2\pi f t)$. V takomto prípade hovoríme o *vynútenom harmonickom pohybe*, ktorý je popísaný rovnicou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F \tag{3}$$

Ako sme uviedli vyššie, zdrojom zvukového signálu je vždy nejaký druh vibrácie resp. kmitania. Tieto vibrácie sa vzduchom prenášajú vo forme *zvukových vĺn* (sound waves).

Zvukové vlny sú príkladom všeobecného fyzikálneho javu označovaného ako vlnenie, pri ktorom prichádza na základe nejakého rozruchu, ktorý vznikol v niektorom mieste priestoru, k časovej a priestorovej periodickej zmene stavu prostredia, ktorá má formu zmeny hodnoty nejakej fyzikálnej veličiny, pričom sa táto zmena šíri v priestore. V štandardnom prípade môže byť rozruch periodický, počas ktorého sa prostredím šíria kmity. Prípadne jednorazový, teda pulz, pri ktorom sa prostredím šíri pulzná vlna (pulse wave).

Vlnenie (waves, wave motion) sa vyskytuje v mnohých rôznych formách. Okrem zvukových vĺn sú to napríklad rádiové vlny, svetelné vlny alebo vlny na povrchu vodnej hladiny.

Rôzne druhy vlnenia majú niektoré spoločné vlastnosti: miesta s vrcholmi (peaks, crests) a údoliami (valleys, troughs), frekvenciu alebo frekvencie, smer šírenia (direction of propagation) a rýchlosť šírenia (speed of propagation).

Vlnenie a kmity majú spoločné niektoré základné charakteristické pojmy. Ide o *periódu* (označenie T), *frekvenciu* (označenie f, $f = \frac{1}{T}$) a *uhlovú frekvenciu* (označenie ω, $\omega = 2\pi f$). Na priestorový charakter vlnenia sú viazané nasledujúce špecifické pojmy: *vlnová dĺžka*, ktorá predstavuje vzdialenosť dvoch vrcholov resp. údolí (označenie λ, $\lambda = vT = v/f = (2\pi v)/\omega$, kde v je rýchlosť šírenia vlnenia) a *vlnové číslo* reprezentujúce počet vlnových dĺžok pripadajúcich na jednotku dĺžky ($\sigma, \sigma = \frac{1}{\lambda}$).

Pri vlnení prichádza k prenosu energie, hybnosti alebo informácie bez toho, aby prichádzalo k prenosu hmoty.

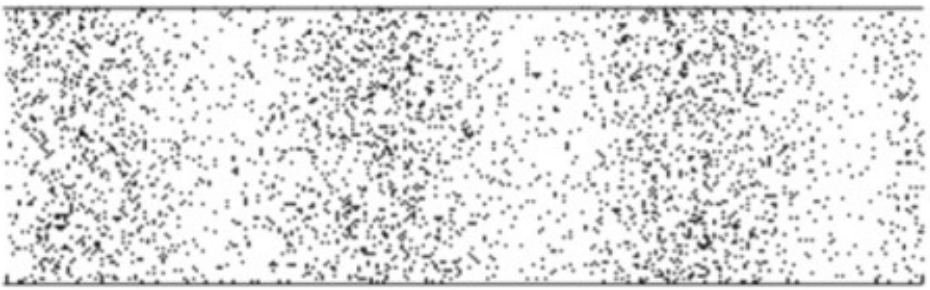
Zvukové vlny sa môžu šíriť v pevných látkach, v kvapalinách aj v plynoch. Pre našu prácu je dôležité ich šírenie vo vzduchu.

Gravitácia spôsobuje, že vzduch okolo nás je pod tlak označovaným ako *atmosferický tlak*. Tlak sa meria v jednotkách vyjadrujúcich veľkosť sily pôsobiacej na jednotku plochy (v sústave SI N/m^2, tiež označované ako pascal Pa). Atmosferický tlak má veľkosť okolo 100000 Pa, jeho štandardná hodnota na úrovni mora je 101325 Pa. Ide o veľký tlak, a jediný dôvod prečo nás nerozpučí je, že aj naše telo je zvnútra rovnako „natlakované“.

Zvuková vlna je opakovaná zmena (narušenie) tlaku vzduchu v mieste vzniku zvukového signálu, napríklad v mieste so znejúcim hudobným nástrojom, ktorá sa šíri priestorom. Vo vrcholoch zvukovej vlny je tlak vzduchu vyšší ako bežný atmosferický tlak a v údoliach zvukovej vlny nižší. Tieto rozdiely sú však veľmi malé oproti absolútnej veľkosti bežného atmosferického tlaku.

S každým vlnením sú spojené dva smery, a to smer šírenia a smer oscilácií (displacement), ktoré vlnenie spôsobujú. Podľa vzájomného vzťahu týchto dvoch smerov sa vlnenie delí na priečne (smer oscilácie je kolmý na smer šírenia vlny) a pozdĺžne (smer oscilácií rovnobežný so smerom šírenia vlny). Zvukové vlny môžu byť priečne aj pozdĺžne. Ale v našom prípade, teda pri šírení zvukového signálu vo vzduchu, ide o pozdĺžne vlnenie.

Na obr. 2 je trubica naplnená vzduchom, ktorou sa šíri pozdĺžna vlna zobrazená v istom časovom okamihu. Čierne body znázorňujú molekuly vzduchu. Najhustejšie zastúpené sú v miestach s najvyšším tlakom, teda vo vrcholoch vlny. V údoliach vlny, teda v oblastiach, v ktorých je tlak najmenší, je zastúpenie molekúl najredšie. Na obr. 2 sú pomerne dobre viditeľné tri vlnové dĺžky.



Obr. 2: Pozdĺžna vlna šíriaca sa trubicou naplnenou vzduchom v istom časovom momente [9]

Rýchlosť, ktorou sa zvukový signál šíri v danom prostredí, sa označuje ako *rýchlosť zvuku v danom prostredí*. Rýchlosť zvuku vo vzduchu pri izbovej teplote je $343,7\ m/s$. So zvyšovaním teploty rýchlosť zvuku stúpa.

Na ilustráciu rôznych skutočností v oblasti zvukových javov sa, podobne ako v iných oblastiach, používajú obrázky. Obrázky samozrejme používame aj v tejto práci. Ich správne pochopenie si však vyžaduje uvedomenie si nasledujúcich skutočností.

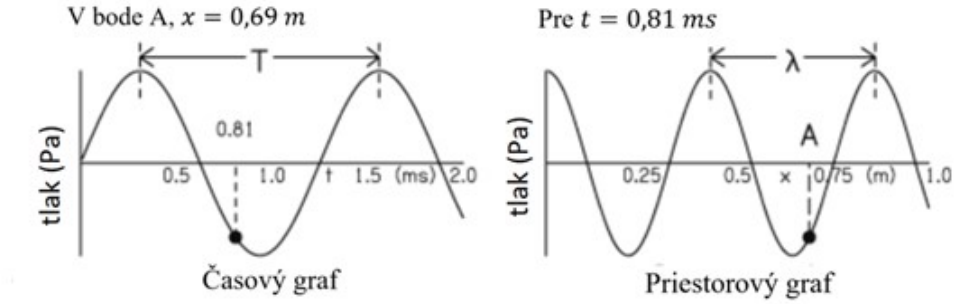
V prípade šírenia zvukových vĺn je potrebné uvažovať o troch priestorových dimenziách a jednej časovej dimenzii, a zároveň o hodnote tlaku v takomto 4-rozmernom priestore nezávislých premenných. Pre zjednodušenie pracujeme pri grafických zobrazeniach tlakových zmien tvoriacich zvukové vlny obvykle len s jednou dimenziou priestoru. Môže ísť napríklad o priamku od hudobníka, resp. hudobného nástroja k poslucháčovi. Táto dimenzia, ak ju označujeme ako x, bude spolu s časom t ako druhou nezávislou premennou, vytvárať rovinu (x, t), vzhľadom ku ktorej budeme sledovať hodnoty tlaku vzduchu vo vzťahu so zvukovými vlnami. Takto sa dostaneme k 3-rozmerným priestorovým grafom. Takéto grafy sú ešte stále dosť zložité, preto uprednostňujeme grafické znázorňovanie v dvoch dimenziách. To si vyžaduje u jednotlivých obrázkov rozlišovať, či chceme znázorniť vlnenie v priestore, teda na našej priamke, alebo v čase.

Ak sledujeme vlnenie v čase, zvolíme si jeden pevný bod, označme ho napríklad x_0 na

našej priamke, a v tomto bode budeme sledovať vývoj tlaku v čase. Ide teda o rovinný rez plochy grafu, ktorý znázorňuje hodnoty tlaku nad rovinou (x, t), rovinou kolmou na os priestorovej súradnice x v zvolenom bode x_0.

Ak sledujeme vlnenie v priestore, zafixujeme si čas $t = t_0$, a ďalej pozorujeme rozloženie hodnôt tlaku na rôznych miestach našej priamky v čase t_0. Opäť ide o rovinný rez plochy grafu tentoraz v kolmom smere na časovú os. Graf v danom časovom okamihu sa tiež nazýva „momentka“ alebo „snapshot“.

Na ilustráciu uvádzame nasledujúci obrázok



Obr. 3: Graf tlaku ako funkcia času (naľavo) a priestoru (napravo)[9]

Na ľavej strane máme graf, v ktorom je pevne stanovený bod v priestore. Je tu znázornený tlak v tomto bode ako funkcia času na intervale $\langle 0ms, 2ms\rangle$. Tento graf zodpovedá zvukovému signálu so sínusovým priebehom a frekvenciou 800 Hz. Vzdialenosť medzi susednými vrcholmi (perióda T) je $1,25$ ms, čo zodpovedá frekvencii 800 Hz. Pre úplnosť uvádzame, že tu nie sú zobrazované absolútne hodnoty tlaku, ale rozdiely hodnôt tlaku v zvukovej vlne oproti atmosferickému tlaku, v prípade, keď sa v ňom nešíri zvuková vlna.

Na pravej strane obr. 3 je fixne stanovený čas t, a teda ide o graf tlaku v zvolenom čase ako funkciu polohy na osi x v intervale $\langle 0m, 1m\rangle$. V tomto prípade vzdialenosť vrcholov, zodpovedá vzdialenosti, ktorú prejde vlna za čas rovný jednej perióde (vlnová dĺžka). Konkrétne ide o vzdialenosť $0,43$ m, ktorú sme vypočítali z rýchlosti šírenia zvukovej vlny 344 m/s delenej frekvenciou 800 s^{-1}.

2 Dychové hudobné nástroje a ich miesto v sústave hudobných nástrojov

V tejto kapitole budeme stručne charakterizovať hudobné nástroje, Hornbostel-Sachsovu klasifikáciu ako jeden zo systémov používaných na ich kategorizáciu a miesto dychových hudobných nástrojov v tejto klasifikácii. V závere kapitoly vymedzíme konkrétnu podskupinu dychových hudobných nástrojov, ktorých fungovanie bude predmetom matematického modelovania v tejto práci. Pri tvorbe tejto kapitoly sme vychádzali prevažne zo zdrojov [11], [12], [13], [15] a [18].

Hudobné nástroje sú špeciálne nástroje určené na produkciu hudobných zvukov - *tónov*. Rozširujú možnosti ľudského hlasu ako základného spôsobu, ktorým ľudia produkujú tóny.

V rôznych kultúrach po celom svete a počas celej histórie bolo skonštruovaných a používaných stovky až tisíce rôznych hudobných nástrojov. Hoci sa na prvý pohľad môžu od seba výrazne odlišovať, niektoré základné vlastnosti majú spoločné. V prvom rade ide o všeobecnú štruktúru hudobného nástroja, ktorá je u všetkých nástrojov založená na rovnakom princípe. U každého hudobného nástroja možno identifikovať nasledujúce zložky:

- *Vibrátor* - pružná časť nástroja schopná kmitania, ktoré je základným zdrojom zvuku produkovaného nástrojom (napr. struna, blana, vzduchový stĺpec, hmota, z ktorej je nástroj vyrobený)
- *Budič* - prostriedok, ktorý spôsobuje rozkmitanie vibrátora (napr.sláčik, prst hráča, brnkadlo)
- *Rezonátor* - časť nástroja, ktorá zosilňuje a dotvára tón vytvorený vibrátorom. Túto časť má väčšina hudobných nástrojov, existujú však aj nástroje, ktoré ju nemajú resp. je totožná s vibrátorom.

Existencia množstva hudobných nástrojov si z rôznych dôvodov vyžadovala ich klasifikáciu. Na tú vzniklo počas histórie viacero systémov. V súčasnosti najpoužívanejšou klasifikáciou je *Hornbostel-Sachsova* (v ďalšom HSK). Prvýkrát bola publikovaná v roku 1914 v Nemecku [12]. Hoci bola pôvodne navrhnutá na klasifikáciu zbierok hudobných nástrojov, zohrala a stále zohráva významnú úlohu aj v širšom kontexte vývoja organológie,

teda v oblasti muzikológie zameranej na štúdium hudobných nástrojov. Významnú úlohu pri šírení a podpore tejto klasifikácie zohral anglický preklad jej pôvodného znenia, ktorý vznikol až v roku 1961 [11], teda takmer 50 rokov po jej vzniku. Za najnovšiu verziu HSK sa podľa [13] pokladá verzia vypracovaná v rámci projektu Musical Instrument Museums Online (MIMO) [15] s dodatkami na [7], z ktorej čerpáme aj v tejto práci.

HSK má hierarchickú štruktúru. Názvy jednotlivých skupín hudobných nástrojov, ktoré túto štruktúru vytvárajú, začínajú číselným kódom. Tento kód kopíruje hierarchiu HSK a za ním nasleduje slovné označenie skupiny.

Na jej najvyššej úrovni HSK je definovaných päť skupín nástrojov, pričom rozlišovacím znakom je (fyzikálna) charakteristika spôsobu, ktorým sa v nástroji tvorí zvuk (vo vyššie uvedenom anglickom preklade originálu HSK [11] sa ako rozlišovací znak uvádza „physical characteristics of sound-production as the most important principle of division“). Pri voľnejšom chápaní by sme mohli stotožniť uvedený rozlišovací znak s druhom vibrátora z vyššie uvedeného modelu štruktúry hudobného nástroja, takéto stotožnenie však v niektorých prípadoch celkom neplatí. Je dôležité zdôrazniť, že v pôvodnom popise HSK z roku 1914 [12], ako aj v jeho anglickom preklade z roku 1961 [11], boli na najvyššej úrovni definované len štyri skupiny nástrojov. Piata skupina (elekrofóny) bola pridaná až v neskorších verziách.

Názvy a charakteristika uvedených piatich skupín na najvyššej úrovni klasifikácie sú nasledovné (charakteristiky uvádzame v znení zodpovedajúcom prekladu charakteristík uvedených v [15], alternatívne slovenské názvy sme prevzali z [18]):

1 **Idiofóny** (samozvučné) Celý materiál, z ktorého je nástroj vyrobený, je vďaka svojej pevnosti a pružnosti schopný vibrácií a generovania zvuku bez toho, aby obsahoval napnuté blany alebo struny
2 **Membranofóny** (blanozvučné) Zvuk je excitovaný pevne napnutou blanou
3 **Chordofóny** (strunozvučné) Jedna alebo viac strún sú napnuté medzi pevnými bodmi
4 **Aerofóny** (vzduchozvučné) Samotný vzduch je vibrátorom v primárnom zmysle; do tejto skupiny patria aj plátkové nástroje rozoznievané prúdom vzduchu, v ktorých primárnym vibrátorom je uvedený plátok
5 **Elektrické** Nástroje, ktoré používajú materiály produkujúce akustické zvuky, me-

chanicky riadené zdroje signálov, elektronicky uložené údaje alebo elektronické obvody na produkciu elektrických signálov, ktoré sú zavedené do reproduktora s cieľom generovania zvuku (neupravené akustické nástroje s pripevnenými mikrofónmi alebo snímačmi sa klasifikujú v skupinách 1 – 4 podľa primárneho zdroja zvuku)

Dychové nástroje patria v rámci HSK medzi aerofóny, konkrétne do ich podskupiny:

42 **Vlastné dychové nástroje** Vibrujúci vzduch je uzavretý vo vnútri samotného nástroja

Táto podskupina sa člení na ďalšie podskupiny, a to na:

421 **Hranové nástroje alebo flauty** Úzky prúd vzduchu je usmernený oproti hrane, aby excitoval vzduchový stĺpec v trubici nástroja alebo vzduchové teleso v nejakej dutine

422 **Plátkové nástroje** Vzduchový stĺpec je rozkmitávaný prerušovaným kontaktom s prúdom vzduchu vytváraným pomocou plátka alebo plátkov

423 **Nátrubkové nástroje (alebo plechové dychové nástroje)** Prúd vzduchu prechádza pomedzi vibrujúce pery, a tak prichádza do prerušovaného kontaktu so vzduchovým stĺpcom, ktorý sa má rozkmitať

Terminologická poznámka: Anglickým ekvivalentom slovenského označenia „plechové dychové nástroje“ je „brass instruments“. Definujúcim znakom tejto skupiny hudobných nástrojov je, že na začiatku generovania ich zvuku sú vibrujúce pery hráča. Vzhľadom na tento definujúci znak je označenie „brass instruments“ v angličtine, ako aj označenie „plechové dychové nástroje“ v slovenčine, nepresné až zavádzajúce. Existujú totiž dychové nástroje vyrobené z plechu, ktoré nepatria medzi plechové dychové nástroje (napríklad saxofón) a na druhej strane existujú dychové nástroje, pri ktorých sa tvorba zvuku začína vibrujúcimi perami, a pritom nie sú vyrobené z plechu (zo súčasných nástrojov napríklad alpský roh, z minulosti serpent, cornetto). V anglickej literatúre sa tento problém rieši pomenovaním „lip-reed instruments“ alebo „labrosone“ (z gréckeho „labros“ = pera a „sone“ = zvuk). Príslušná podskupina HSK má označenie 423 Labrosones (or lip-reed instruments). V slovenčine nemáme zaužívanú priamu analógiu ani jedného z uvedených anglických označení. Možno sa však stretnúť s označením „nátrubkové nástroje“, ktoré významovo presne zodpovedá tejto skupine nástrojov a je aj stručnejšie ako štandardne

používané označenie „plechové dychové nástroje“. Preto toto označenie budeme primárne využívať aj v tejto práci.

V našej práci sa konkrétne budeme venovať matematickému modelovaniu nátrubkových nástrojov, teda nástrojov patriacich do podskupiny 423 HSK. Preto si popíšeme aj ďalšie členenie tejto podskupiny nástrojov.

Na porozumenie nasledujúceho členenia je potrebné uvedomiť si, že podmienkou vygenerovania tónu s danou frekvenciou dychovým hudobným nástrojom všeobecne, a teda aj nátrubkovým nástrojom, je vznik stojatého vlnenia vo vzduchovom stĺpci v trubici nástroja pri tejto frekvencii. Frekvencie, pri ktorých stojaté vlnenie vzniká, závisia od dĺžky vzduchového stĺpca, a teda od dĺžky trubice nástroja. Nástroje, ktoré neumožňujú meniť dĺžku tejto trubice počas hry, sú schopné generovať len istú postupnosť tzv. *prirodzených tónov* prislúchajúcich danej dĺžke (neskôr uvidíme, že aj tvaru) trubice. Tieto nástroje vytvárajú v HSK osobitnú podskupinu nátrubkových nástrojov

423.1 **Prirodzené nátrubkové nástroje** Bez osobitých zariadení na zmenu výšky tónu iných ako zariadenia na zmenu dĺžky trubice, ktoré sa používajú na nastavenie nominálnej výšky pred hraním

Veľká časť dnes používaných nátrubkových nástrojov však má technické vybavenie, ktoré umožňuje meniť dĺžku ich trubice podľa potreby počas hry. Tieto nástroje vytvárajú tiež osobitnú podskupinu nátrubkových nástrojov v HSK

423.2 **Chromatické nátrubkové nástroje** S osobitnými zariadeniami umožňujúcimi meniť výšku tónu počas hry

Ďalšie členenie chromatických nátrubkových nástrojov potom vychádza z typu zariadenia na menenie výšky tónu počas hry, ktorým môžu byť buď ventily, teleskopické časti alebo tónové otvory.

Nátrubkové nástroje s tónovými otvormi (napríklad ophicleide, serpent, cornetto) sa dnes používajú prakticky už len v orchestroch zaoberajúcich sa historickými hudobnými formami (napríklad barokovou hudbou). Nás budú najviac zaujímať nátrubkové nástroje s ventilmi. Tieto nástroje sa ešte ďalej členia podľa veľmi dôležitého kritéria, a to podľa prevládajúceho typu profilu trubice. Z tohto hľadiska sa ventilové nátrubkové nástroje členia na kužeľové (napríklad krídlovka, tuba), čiastočne kužeľové (napríklad lesný roh)

a valcové (napríklad trúbka). Je dôležité zdôrazniť, že uvedené charakteristiky profilov hovoria o prevládajúcom type. Napríklad trúbka má síce prevažnú časť profilu valcovú, ale zvyšok má najmä kónický (kužeľový) charakter.

Poznamenajme, že profil trubice hrá významnú úlohu aj pri ostatných druhoch nátrubkových nástrojov, aj keď pri nich netvorí osobitné kritérium vrámci HSK.

3 Úvod k tvorbe matematického modelu fungovania nátrubkových nástrojov

V tejto práci vytvárame elementárny model fungovania nátrubkových nástrojov. Aby sme ho boli schopní zostaviť, a zároveň porozumieť jednotlivým veličinám, ktoré sa v ňom vyskytujú, je potrebné, aby sme najprv popísali jednotlivé javy, ktoré pri hre na nátrubkových nástrojoch nastávajú, a ako ovplyvňujú samotný zvuk daných nástrojov. Pri spracovávaní nasledujúcich častí sme vychádzali prevažne z literatúry [6], [20], [21], [22] a [23].

3.1 Objektívne merateľné vlastnosti a črty hry na nátrubkovom nástroji

V prípade vedeckých štúdii zohráva dôležitú úlohu pozorovanie a meranie relevantných javov. V našom prípade, teda v prípade hudobnej akustiky nátrubkových nástrojov, je kľúčový záznam a analýza zvuku generovaného nátrubkovým nástrojom. Na objasnenie danej problematiky je potrebné vysvetliť ako nástroj funguje počas hudobného predstavenia, počas ktorého dochádza k prepojeniu 4 aspektov: hudobníka, nástroja, priestoru na predstavenie a poslucháča. V prípade nátrubkových nástrojov je zvuk generovaný perami hudobníka, preto je interakcia medzi hudobníkom a nástrojom kľúčová aj na úplne základnej úrovni. V nasledujúcich častiach predstavíme hlavné vlastnosti a aspekty ovplyvňujúce hru na nátrubkový nástroj.

3.1.1 Zvuk nástroja vyžarovaný do okolitého priestoru

Zvuk vyžarujúci z nátrubkového nástroja dokážeme odmerať rôznymi typmi mikrofónov. Tieto mikrofóny zachytávajú zmenu tlaku vzduchu počas hry, ktorú spôsobuje dynamika hry. Pre ilustráciu si vezmeme zvuk vyžarovaný z trombónu pri note F4. Použijeme nameraný záznam obr. 4 z knihy [6].

Necelú sekundu po spustení nahrávania začal hudobník hrať notu F4, ktorá je zapísaná v notovom zápise na obr. 4(a). Prvú sekundu bola hraná na konštantnej úrovni hlasitosti, následne ju hudobník začal zvyšovať do forte a krátko po začatí štvrtej sekundy nahrá-

vania zažal opäť uberať na dynamike. Signál na obr. 4(b) ukazuje zmenu tlaku vzduchu v dôsledku zvukovej vlny vyžarovanej trombónom. Počas zmeny dynamiky je vidieť aj zmenu tlaku. Pre detailné rozlíšenie zmien zvukového signálu boli pridané aj časť 4(c) a 4(d), ktoré približujú dané časové úseky. Na obr. 4(c) je zväčšená oblasť znázornená na obr. 4(b) červeným rámčekom, ktorý predstavuje časový interval 230 ms v počiatočnom bode $t = 0,92\ s$. Interval začína drobným chvením, ktoré sa pohybuje v rozsahu $+/-5$ mPa, teda amplitúda tlaku je od minima k maximu len v rozsahu 10 mPa. Amplitúda v tomto úseku narastá najskôr pomaly, potom rýchlo a od $t = 1,02\ s$ je úroveň tlaku pomerne konštantná. Amplitúda sa po $t = 2s$ začína opäť zvyšovať, v tomto okamihu začína crescendo.

Zvyšovanie tlaku pokračuje až do $t = 4,25\ s$. V tomto bode začína zelený rámček, ktorý je zväčšený na obr. 4(d). Zvuk tu dosahuje maximálnu úroveň crescenda a rozsah amplitúdy zvukového signálu stúpol na úroveň $3,2\ Pa$. Na obr. 4(d) vidíme periodicky sa opakujúci priebeh signálu. Jeho charakter je nasledovný: výrazný nárast tlaku (kladný vrchol), menej výrazný pokles, malý nárast a veľký pokles tlaku (záporný vrchol). Tento priebeh sa následne konštantne opakuje každých $2,86\ ms$.

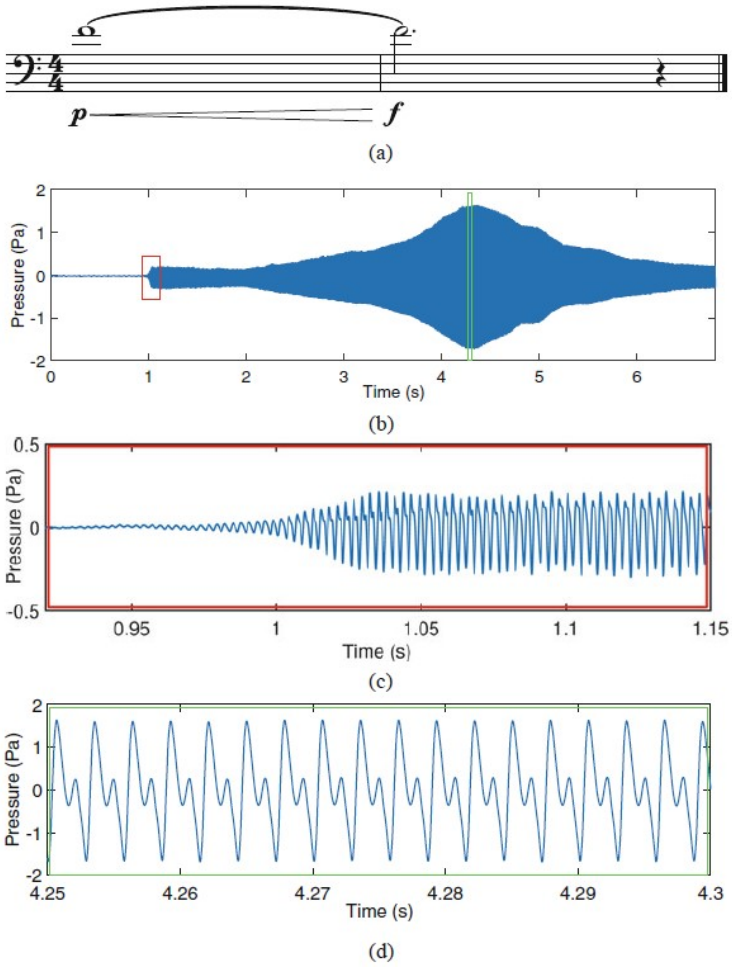
Na základe vzorca frekvencie ($f = \frac{1}{T}$) z kapitoly 1 dokážeme vypočítať, že frekvencia takéhoto signálu je $f = \frac{1}{0,00286} = 350\ Hz$. Túto frekvenciu opakovania signálu môžeme spojiť s vnímaním výšky tónu. Na obr. 4(b) je vidieť vzťah medzi amplitúdou signálu a úrovňou dynamiky hry. Pri zvyšovaní dynamiky z piana do forte došlo aj k zvyšovaniu rozdielu medzi maximálnou a minimálnou hodnotou tlaku. Taktiež forma priebehu signálu je spojená so zafarbením zvuku.

Na jednej strane máme výšku, hlasitosť a farbu, na druhej frekvenciu, amplitúdu a tvar vlny. Ich vzťah ale nie je taký priamočiary ako sme naznačili v predchádzajúcom odseku. Treba si uvedomiť, že sledovaný tlak vzduchu je akustický tlak, ktorý predstavuje zmenu ustáleného atmosferického tlaku (viac v časti 3.1.3).

3.1.2 Zvuk meraný vo vnútri nátrubku

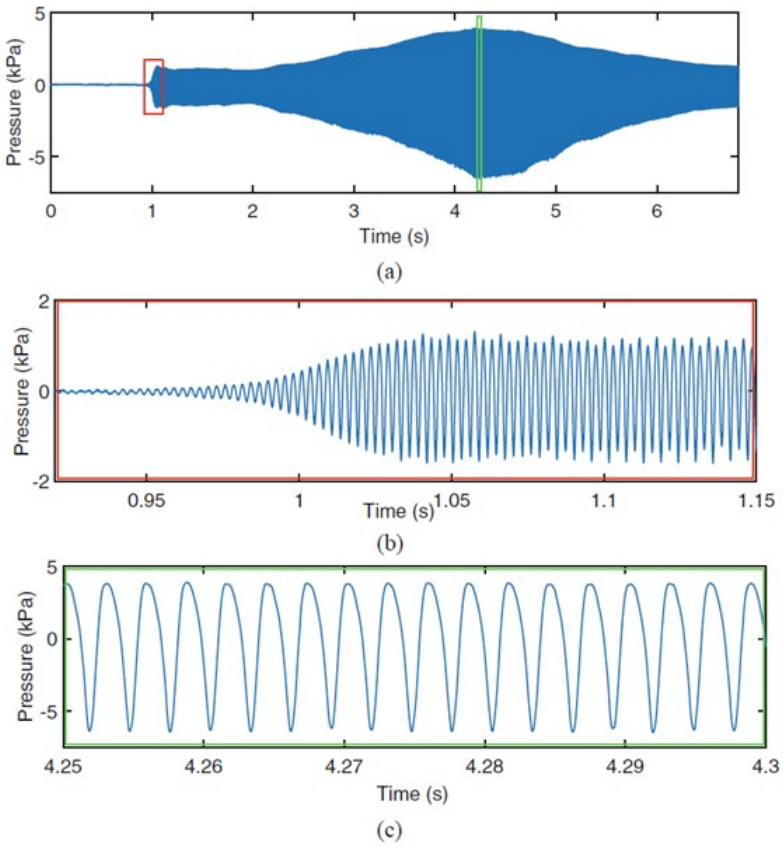
V tejto časti sa pozrieme na tlak meraný v nátrubku nástroja. Ide o rovnaký prípad, rovnakým spôsobom zahranú notu F4 (obr. 4(a)), ako v predchádzajúcej časti 3.1.1.

Na prvý pohľad sa môže zdať nameraný signál (obr. 5(a)) veľmi podobný s vyža-



Obr. 4: (a) Nota $F4$ hraná na tenorovom trombóne: notový zápis; (b) Vyžarovaný akustický tlak zaznamenaný na osi vo vzdialenosti 50 cm od ozvučnice; (c) Priblíženie časti vyžarovaného signálu v trvaní 230 ms s počiatočným časom $t = 0,92\ s$ (d) Priblíženie časti vyžarovaného signálu v trvaní 50 ms s počiatočným časom $t = 4,25\ s$; [6]

rovaným signálom z nástroja (obr. 4(b)), je tu ale podstatný rozdiel. V tomto prípade je stupnica tlaku meraná v kPa (kilo Pascaloch) a amplitúda tlaku v nátrubku je teda o niekoľko rádov vyššia ako v prípade vyžarovania zvuku z ozvučnice nástroja. Rozsah tlaku od vrcholu k vrcholu vo vnútri nátrubku v čase $t = 1,1\ s$ je $2,8\ kPa$, čo je výrazne vyššia hodnota ako v prípade tlakového signálu 50 cm od ozvučnice nástroja, kedy mal analogický rozsah hodnotu $0,46\ Pa$. Pozoruhodnou vlastnosťou všetkých nátrubkových nástrojov je, že amplitúda tlaku vyžarovaná z ozvučnice nástroja je len zlomkom amplitúdy vnútorného tlaku v nástroji.



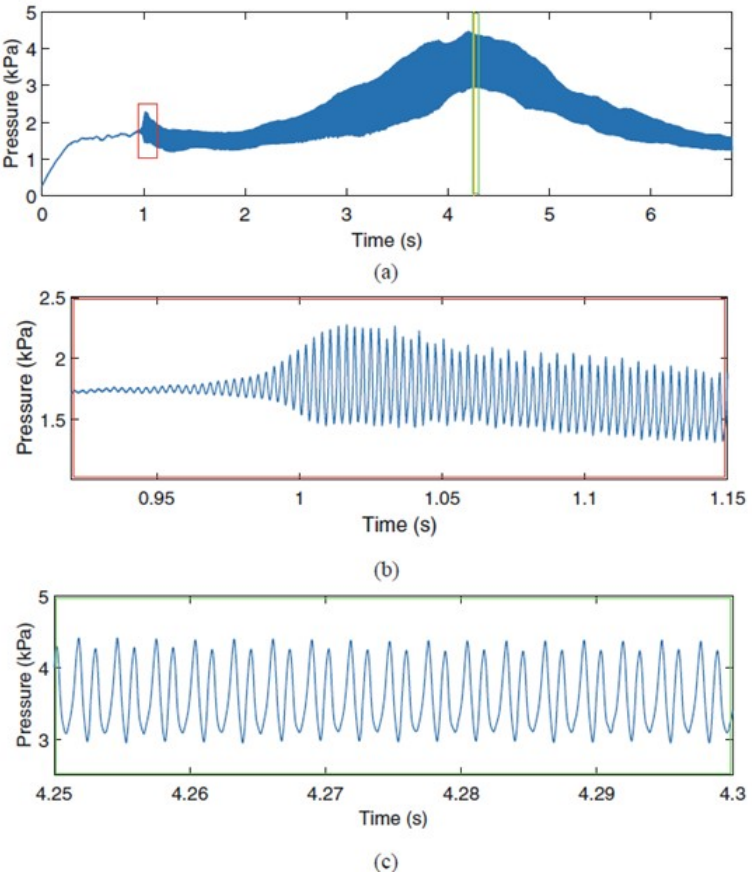
Obr. 5: (a) Akustický tlak vo vnútri nátrubku trombónu hrajúceho notu $F4$; (b) Priblíženie časti signálu v nátrubku v trvaní 230 ms s počiatočným časom $t = 0,92\ s$ (c) Priblíženie časti signálu v nátrubku v trvaní 50 ms s počiatočným časom $t = 4,25\ s$; [6]

3.1.3 Tlakové pomery v ústnej dutine

Z obr. 5 vyplýva, že počas hry tlak v nátrubku, teda pred perami, kolísal v rozsahu 10 kPa, teda v rozsahu okolo 10% atmosferického tlaku. Otázka je, čo sa v tomto čase dialo za perami hráča, teda v jeho ústach. Odpoveď na ňu dávajú merania, uskutočnené pri hre za rovnakých podmienok ako boli spomenuté vyššie, pri ktorých sa tlak p_m v ústach meral dvomi senzormi. Jeden meral pomaly sa meniaci statický tlak (nad úrovňou akustického tlaku) určovaný tlakom v hráčových pľúcach a druhý meral rýchlo sa meniaci akustický tlak ovplyvňovaný periodickým otváraním a zatváraním pier hráča.

Z týchto meraní vyplynulo, že aby tón zaznel, hráč musel zvýšiť p_m nad hodnotu $1,7$ kPa. Pri zvyšovaní hlasitosti hry táto hodnota stúpala a pri forte, teda vysokej hlasitosti, dosiahla stredná hodnota tlaku úroveň $p_m = 3,7\ kPa$.

Akustická zložka tlaku pritom kolísala od rozsahu vo veľkosti okolo 1 kPa na začiatku zaznenia tónu po $1,4$ kPa počas forte. Popísanú situáciu ilustruje obr. 6



Obr. 6: (a) Tlak v ústach trombonistu hrajúceho notu $F4$; (b) Priblíženie časti signálu v ústach v trvaní 230 ms s počiatočným časom $t = 0,92$ s (c) Priblíženie časti signálu v ústach v trvaní 50 ms s počiatočným časom $t = 4,25$ s; [6]

3.1.4 Vibrácie pier ako ventilový zdroj zvuku

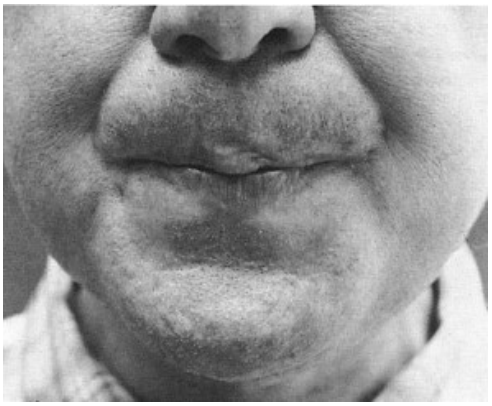
Je dôležité si uvedomiť, že je základný rozdiel medzi tým, ako vznikne zvuk po brnkutí na nejakú natiahnutú strunu (pružný pásik, tetivu luku), pri ktorom vzduch rozkmitá priamo struna, ktorá je s ním v kontakte (podobne, ako je tomu pri vibrujúcej membráne reproduktora), a medzi vznikom zvuku na základe vibrácie pier. Aj pri chvení pier síce prichádza k posunom vzduchu, ktorý je s nimi v kontakte, ale tieto posuny prispievajú k zvuku, ktorý vzniká minimálne.

Zdrojom zvuku vznikajúceho pri vibrácii pier je pravidelne prerušovaný prúd vzduchu,

ktorý vzniká na základe tlaku v ústnej dutine, ktorý za vhodných podmienok spôsobuje rozvibrovanie pier (časť 3.1.3). Vibrujúce pery si môžeme predstaviť ako ventil, ktorý sa periodicky otvára a zatvára, čím kontroluje prúd vzduchu, ktorý ním preteká. Takýto typ generátora zvuku sa označuje ako *zdroj zvuku založený na ventilovom efekte*, prípadne ako *ventilový zdroj zvuku*. Okrem pier môžeme medzi ventilové zdroje zvuku zaradiť napríklad aj vibrujúce plátky v nátrubkových nástrojoch.

3.1.5 Cyklus počas vibrácie pier

Hráč na nátrubkový nástroj vie vytvoriť určitú melódiu len za pomoci vlastných pier vytvorením vhodného *nátisku* („embouchure“), ako je znázornený na obr. 7. Teda zavrie ústa, stiahne pery späť do trochu zvláštneho úsmevu a fúkne. Takto vygenerovaný zvuk môže byť nízko položený tón alebo vysoký tón. Výsledný tón závisí od toho ako vysoké napätie je v perách hráča, do akej miery ich stiahne hudobník dozadu, ako intenzívne fúka a ďalších parametrov. Preto môžeme tvrdiť, že do určitej miery je schopný hrať len s vlastnými perami alebo nátrubkom, ale samotná hra je jednoduchšia za pomoci nátrubkového nástroja. Keď je prítomný nástroj, vzniknuté oscilácie spôsobujú stojaté vlnenie v trubici nástroja. Kolísanie tlaku v nátrubku môže pomôcť s pohybom pier pri hre.



Obr. 7: Odporúčaná podoba nátisku („embouchure“)[6]

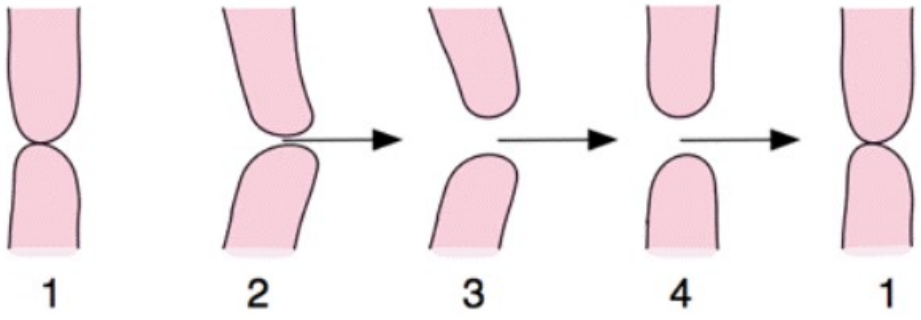
Pery sú pružné aspoň v dvoch smeroch. Vo vertikálnom (smerom nahor) a horizontálnom (smerom dopredu) od stabilnej polohy. Táto vlastnosť spolu so faktom, že pery majú svoju hmotnosť spôsobuje, že pery dokážu oscilovať. Vibrácia pier je podstatne kompliko-

vanejší proces ako klasická lineárna oscilácia. Ide o cyklus horizontálneho a vertikálneho pohybu, ktorý premieňa jednosmerný prúd vzduchu pri vysokom tlaku vychádzajúci z pľúc hudobníka na oscilujúci tlak a prúd vzduchu. [22]

Počas vystúpenia vie generovať hráč tlak v ústach až do 10 kPa (10% atmosferického tlaku), a aj vyššie. Vzniknutý tlak za perami tlačí prúd vzduchu cez otvor medzi nimi. Tento prúd vzduchu je zodpovedný za vytvorenie prostredia, v ktorom pery začnú spontánne vibrovať.

Otvorená oblasť pier sa počas vibrácií pravidelne zväčšuje a zmenšuje, čím efektívne otvára a zatvára ústa hráča raz za každý cyklus. Obr. 8 jednoducho a jasne zachytáva základnú podstatu jedného cyklu pier. V začiatočnej fáze cyklu, keď sú pery úplne zatvorené (1), je tlak vzduchu v ústach najvyšší, a výrazne vyšší ako tlak v nátrubku. Tento tlak zrýchľuje pery, ktoré sa začnú vydúvať smerom dopredu (2). Následne sa pery začnú otvárať a prúd vzduchu začne prúdiť jedným smerom cez vzniknutý priestor medzi nimi (2), (3), (4). Tlak medzi perami v tejto fáze je približne rovnaký ako tlak v nátrubku. V konečných fázach cyklu (4) sa pery postupne začnú sťahovať späť do pôvodnej polohy. V poslednej fáze cyklu sa pery opäť úplne zatvoria (1). Opísaný cyklus pier následne začne odznova.

Spomínaný tlakový rozdiel sa výrazne podieľa na práci pier počas cyklu. V dôsledku tohto cyklu prúd vzduchu z úst do nátrubku je periodicky prerušovaný a modulovaný prúd vzduch vháňa do nástroja vysokú úroveň akustickej energie [6].



Obr. 8: Zjednodušené schematické znázornenie jedného cyklu vibrujúcich pier[22]

Tvar pery sa počas cyklu mení a v niektorých fázach existuje výrazná pravo-ľavá asymetria. Cyklus pier u jednotlivých hudobníkov nie je identický. To znamená, že pri hraní jedného tónu majú jednotliví hudobníci odlišný tvar otvoru pier. Akustický tlak

generovaný v nátrubku závisí od objemu vzduchu pretekajúceho cez otvor pier. Tento objem je riadený hlavne plochou medzi perami a nie tvarom otvoru. Každý hudobník si vytvára individuálny nátisk. Zároveň skúsený hudobník dokáže zámerne modifikovať vibrácie pier, aby získal špecifické zafarbenie.

Ako sme už vyššie spomínali, pre rozozvučanie nátrubkového nástroja je potrebné rozvibrovať pery. Akonáhle zvuk v nástroji vibruje, časť energie vychádza z ozvučnice nástroja v podobe zvuku. Na druhej strane, oveľa väčšie množstvo energie sa stráca pri určitej forme trenia, ako je viskozita a teplotná strata, so stenou nástroja. Tieto straty sú ale nahradené energiou, ktorú generuje hudobník pri hre na nástroj.

Svaly v perách hráča na nátrubkový nástroj vyvíjajú takmer konštantné napätie. A práve pôsobenie aeróbnych a elastických síl spôsobuje vibrácie pier.

Ak hudobník použije pri vibrácii pier nátrubok, proces sa trochu pozmení. Okraj nátrubku zmenšuje pohyblivú plochu pier a zároveň umožňuje aby bol tlak mimo pier trochu odlišný od atmosferického, najmä pri vysokých frekvenciách. Mnoho hudobníkov umiesťuje nátrubok asymetricky, čo spôsobuje, že pokrýva väčšiu plochu hornej pery ako spodnej.[22]

3.1.6 Prúdenie a rýchlosť vzduchu

Dosiahnutie správnej kontroly tlaku pri výdychu a zároveň správneho prúdenia vzduchu je veľmi dôležité pre každého hudobníka hrajúceho na nátrubkový nástroj. Prúdenie vzduchu medzi perami pod dostatočným tlakom je nevyhnutné pri produkcii zvuku, keďže vedie k vibrácii pier, ktoré následne generujú akustický tlak v nátrubku. Teda pre generovanie zvuku je nevyhnutný kmitavý pohyb a prúdenie vzduchu. Samotné prúdenie vzduchu do nátrubku nástroja nie je plynulé, keďže počas hry na nástroj dochádza k otváraniu a zatváraniu pier pravidelne podľa frekvencii tónu.

Je pravda, že sa pri hre vzduchový stĺpec pohybuje trubicou nástroja a následne von cez ozvučnicu, ale samotný prúd vzduchu podieľajúci sa na tvorbe zvuku prestáva byť významný, keď prejde cez pery a vstúpi do nátrubku. Meniaci sa prúd vzduchu, ktorý vychádza z pier, si možno predstaviť ako stabilný tok so strednou hodnotou a akustického prúdu oscilujúceho okolo tejto strednej hodnoty s frekvenciou zodpovedajúcou hranému tónu. Ako sa uvádza v [6], spomínaný tok prechádzajúci trubicou nástroj nemá prakticky

žiaden vplyv na jeho akustický a hudobný prejav. Aj keď sa po vstupe do nátrubku prúd odkloní tak, aby neprešiel do nástroja, akustické tlakové vlny ďalej prenášajú zvuk z nátrubku prostredníctvom vzduchového stĺpca do ozvučnice, cez ktorú sa zvuk šíri von z nástroja. Tento jav sa dá interpretovať ako nezávislosť šírenia akustických vĺn a stredného prietoku vzduchu v nástroji.

Prúd vzduchu sa zvýši, ak zvýšime buď rýchlosť, ktorou vzduch prúdi alebo vnútorný priemer trubice nástroja. Priemerná rýchlosť vzduchu vynásobená vnútorný priemerom udáva priemerný prúd vzduchu. V prípade veľkého prierezu, rýchlosť prúdenia klesá. Ak by sa veľkosť vnútorného priemeru trubice zmenšovala, rýchlosť by sa zvyšovala. Rýchlosť prúdenia vzduchu je zvyčajne meraná v litroch za sekundu (l/s), prípadne v metroch za sekundu (m/s).

3.1.7 Mechanické vibrácie stien nátrubkového nástroja

Hudobníci a vedci sa zhodujú v tom, že steny nátrubkových nástrojov pri hre vibrujú. Dokážu tieto vibrácie ovplyvniť zvuk, ktorý z nátrubkového nástroja vychádza?

Vo vedeckej sfére prevláda jasný názor, že za generovaný zvuk je zodpovedný rezonujúci vzduchový stĺpec a vibrácie stien nemajú dostatočnú potenciálnu energiu na vytvorenie alebo výrazne ovplyvnenie stojatého vlnenia vo vnútri nástroja. [16]

Amplitúda je zvyčajne najväčšia v ozvučnici nástroja, a teda by sa dalo považovať túto časť nátrubkového nástroja za významnú pri generovaní zvuku. Vzduch, ktorý prechádza trubicou nástroja sa počas vibrácií striedavo stláča a rozťahuje, teda dostáva sa mimo pokojový stav, čo vedie k generovaniu zvukovej vlny.

V prípade nátrubkových nástrojov, silné zvukové vlny existujú už vo vzduchových stĺpcoch v trubici nástrojov, a preto nie je potrebné aby vibračný povrch fungoval ako zdroj zvuku, ako je tomu v prípade strunových a bicích nástrojov. Silným zdrojom generovaných zvukových vĺn je v prípade dychových nástrojov práve otvor v trubici, ktorý umožňuje unikať časti zvukovej energie. V prípade väčšiny nátrubkových nástrojov existuje len jeden koncový otvor, ozvučnica, ktorá je zdrojom takmer celého zvuku vychádzajúceho z nástroja.

Taktiež je vedecky dokázané, že hladiny akustického tlaku vo vzduchovom stĺpci nátrubkového nástroja môžu byť dostatočne vysoké na to aby vytvárali vibrácie, ktoré môže

hráč cítiť. Priame generovanie zvuku z ozvučnice je síce pravdepodobne bezvýznamné, ale to neznamená, že vibrácie stien nemajú na generovanie zvuk určitý vplyv. Nedávny výskum ukázal, že za určitých okolností môže spojenie medzi akustickými a mechanickými rezonanciami výrazne zmeniť vnútorný zvukový priestor, a tak nepriamo modifikovať generovaný zvuk. [6]

3.1.8 Vplyv zohrievania nátrubkového nástroja

Ovplyvňuje vlastnosti hry na nátrubkový nástrojov aj teplota samotného nástroja? Z určitého hľadiska áno. Zahrievanie nástroja mení jeho naladenie, teda výšky hraných tónov.

Zahrievanie dychového nástroja patrí k bežným aspektom prípravy hudobníkov pred hudobným vystúpením. V niektorých pasážach hry, v ktorých hudobník aktuálne nehrá, udržuje stálu teplotu svojho nástroja pravidelným dýchaním do neho.

Rýchlosť zvuku vo vzduchu sa zvyšuje so zvyšujúcou sa teplotou a vlhkosťou a klesá so zvyšujúcou sa koncentráciou CO_2 [5]. Zvýšená teplota a vlhkosť zvyšujú frekvencie rezonancií, a tým aj výšku hraných tónov. Je ale dôležité poznamenať, že samotný nástroj v danom okamihu nemá po celej svojej dĺžke konštantnú teplotu. Najvyššia teplota je v oblasti nátrubku a v mieste, na ktorom hudobník nástroj drží. Zatiaľ čo najnižšia teplota je v oblasti ozvučnice. Teplota nástroja sa v jednom momente, ak je nástroj dôkladne rozohriatý, môže pohybovať v rozsahu $20°\text{C} - 37°\text{C}$. [6]

3.2 Vymedzenie prístupu k modelovaniu fungovania nátrubkových nástrojov

3.2.1 Východiská elementárneho modelu fungovania nátrubkových nástrojov

Je zrejmé, že hra na nátrubkovom nástroji, ktorá prebieha v úzkej interakcii hráča a nástroja, je mimoriadne zložitý proces. Vytvorené modely na vysvetlenie procesov, ktoré pri nej prebiehajú, musia preto obsahovať viaceré zjednodušujúce predpoklady.

Pre pochopenie fungovania nátrubkového nástroja počas hudobného predstavenia je kľúčové uvedomiť si, že celý proces tvorby zvuku zahŕňa štyri prepojené a vzájomne sa ovplyvňujúce prvky: hráča na daný nástroj, nástroj samotný, priestor, v ktorom sa

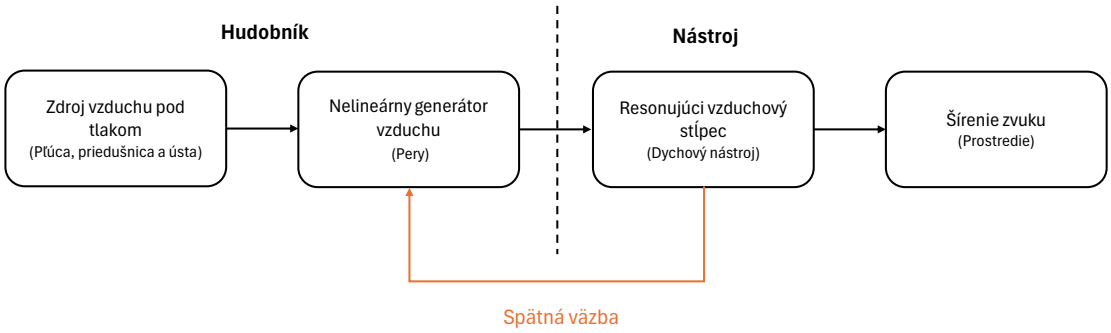
hudobné predstavenie koná a poslucháčov.

S cieľom vysvetliť základne črty fungovania nátrubkových nástrojov bolo vyvinutých viacero modelov. Pretože ide o mimoriadne zložitý proces, musia tieto modely obsahovať zjednodušujúce predpoklady. Jeden zo zjednodušených modelov môžeme zostaviť ako systém zložený z troch podsystémov:

1. hráč reprezentovaný pľúcami, priedušnicou, ústnou dutinou a perami;
2. nástroj vrátane nátrubku;
3. vonkajšie prostredie, do ktorého zvuk z nástroja vyžaruje

V tomto systéme budeme považovať nátrubok za integrálnu súčasť nástroja.

Ak sa pozrieme na vzťah medzi podsystémami hráč a nástroj, na prvý pohľad sa nám môže zdať pomerne jednoduchý a priamočiary. Je ale dôležité uvedomiť si, že tieto dva podsystémy sú silne prepojené *spätnou väzbou* z nástroja na hráča. Myslí sa tým, že zmena tlaku v nátrubku upravuje rýchlosť, ktorou vzduch prúdi medzi perami, čo zase mení tlak v nátrubku.



Obr. 9: Zjednodušený model dychového nástroja a hudobníka

Táto väzba je znázornená šípkou na obr. 9. Na obrázku však nie je žiadna podobná šípka, ktorá by naznačovala spätnú väzbu z vonkajšieho prostredia na hudobníka alebo nástroj. Z fyzikálneho hľadiska o takejto spätnej väzbe nie je potrebné uvažovať. Je pravdou, a každý hudobník to vie, že akustika miestnosti, v ktorej hrá, nepopierateľne ovplyvňuje

spôsob vystúpenia. Z tohto uhla pohľadu spätná väzba z prostredia na hudobníka existuje. Avšak nie je taká dôležitá ako vnútorná spätná väzba medzi hudobníkom a jeho nástrojom a z fyzikálneho hľadiska nemá modelovaný systém významnejší vplyv.

Ako sme uviedli vyššie, hra na nátrubkovom nástroji je veľmi zložitý proces, ktorý preto nie je možné podrobne popísať systémom rovníc. Modelovanie je vždy založené na aproximáciách, ktoré umožňujú výrazné zjednodušenie skúmaného systému. Tieto zjednodušenia sa ale robia tak, aby boli zachované jeho základné charakteristiky. Pri tvorbe nášho elementárneho modelu fungovania nátrubkového nástroja budeme vychádzať z nasledujúcich aproximácií vyplývajúcich z experimentálnych pozorovaní, ktoré sme opísali v časti 3.1

1. Akustický tlak v ústach je malý v porovnaní so statickým pretlakom v nich a aj v porovnaní s akustickým tlakom v nátrubku, preto ho môžeme pokladať za rovný 0.

2. Statický pretlak v nátrubku je veľmi malý v porovnaní so statickým pretlakom v ústach, a preto ho môžeme pokladať za rovný 0.

3. Vzhľadom na to, že podiel zvukovej energie, ktorá sa vyžaruje vo forme zvukového signálu z nástroja do vonkajšieho okolia, je veľmi malý v porovnaní so zvukovou energiou, ktorá zostáva „uväznená“ vo vibráciách vo vzduchovom stĺpci vo vnútri nástroja, môžeme predpokladať, že táto energia je nulová. To v praxi znamená, že predpokladáme, že z nástroja sa nešíri zvuk smerom von. Aj keď na hudobníka môže toto zjednodušenie pôsobiť ako neprijateľné, z fyzikálneho hľadiska nenarušuje základný cieľ, ktorý sa modelovaním fungovanie nátrubkového nástroja sleduje.

4. Vplyv vibrácií stien nástroja vyvolaných vibráciami vzduchového stĺpca v jeho vnútri na fungovanie nástroja je zanedbateľný.

3.2.2 Spätná väzba

Obr. 9 predstavuje blokovú schému modelu nátrubkového nástroja, v ktorej sú jednotlivé časti symbolicky pospájané vodorovnými šípkami. Schéma znázorňujú jednosmerný postup zvukového signálu od generovania hudobníkovými perami cez nástroj až do vonkajšieho prostredia. Zároveň je vidieť, že podsystémy hudobník a nástroj sú spojené v slučke so spätnou väzbou. To znamená, že správanie prvého podsystému závisí od prítomnosti

druhého podsystému. V praxi sa to prejavuje tak, že schopnosť udržať vibráciu pier tak, aby produkovaný tón mal danú výšku, podstatne závisí od toho, či sú pery spojené s nástrojom. Ak sa pery pri vibrácii opierajú len o okraj samotného nátrubku, ktorý nie je spojený s nástrojom, hráč vie vygenerovať tón so spojitou rastúcou výškou (glissando). Ak je však nátrubok pripojený k nástroju, dá sa bez námahy udržať len vibrácia pier s istými frekvenciami. Tóny s výškami zodpovedajúcimi týmto frekvenciám, sa nazývajú *prirodzené tóny* daného nástroja. Prirodzenými tónmi, ktoré by sme mohli charakterizovať aj ako nástrojom preferované tóny, sa podrobnejšie zaoberáme v časti 3.2.4

Šípka spätnej väzby na obr. 9 predstavuje návrat akustického signálu z nástroja k perách, čo má vplyv na veľkosť tlakového rozdielu na perách a následne na rýchlosť prúdu vzduchu z úst do nátrubku. Podrobnejšie o tomto vplyve píšeme v časti 4.1.6.

3.2.3 Pery ako samo-udržujúci sa oscilátor

Vychádzajúc z prvej aproximácie uvedenej v časti 3.2.1 môžeme hudobníka hrajúceho na nátrubkový nástroj modelovať ako systém transformujúci statický pretlak v ústach hráča na vyžarovaný zvukový signál. Systém, ktorý transformuje nejakú stálu veličinu na oscilujúcu takýmto spôsobom, sa nazýva *samo-udržujúci sa oscilátor*. Vibrujúce pery hráča sú prvkom, ktorý transformuje konštantný tlak v ústach na oscilujúci tlak pozdĺž trubice nástroja prostredníctvom ventilového efektu.

Samo-udržujúce sa oscilátory generujú rôzne typy oscilačných režimov. V prípade hudby je najdôležitejší periodický režim. Periodický režim s ustálenou základnou frekvenciou vytvára tón s konštantnou výškou. Každý prirodzený tón nástroja zodpovedá inému periodickému oscilačnému režimu.

Hoci sú oscilačné režimy výsledkom zložitej interakcie medzi vibrujúcimi perami hráča a vzduchovým stĺpcom v nástroji, frekvencie prirodzených tónov sú určené prevažne geometrickými vlastnosťami trubice nástroja, teda profilom jeho vnútorného priestoru alebo tiež vnútorným profilom, ktorým sa rozumie krivka zachytávajúca ako vnútorný polomer resp. priemer trubice nástroja závisí od osovej vzdialenosti od nátrubku po rovinu ozvučnice.

3.2.4 Vzťah prirodzených tónov a harmonických radov

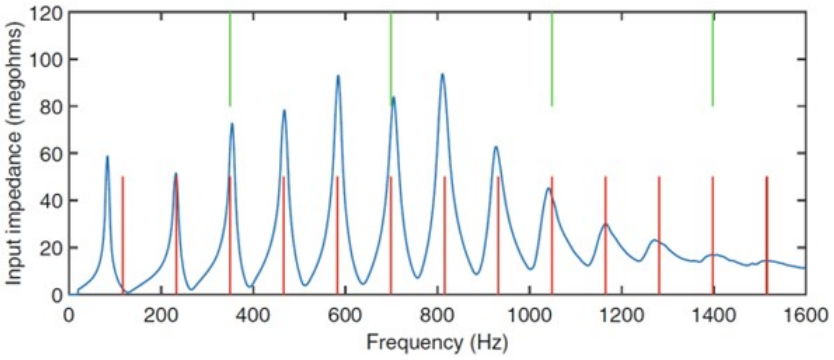
Ako prirodzené tóny nátrubkového nástroja sa označujú tie, ktoré sa dajú na ňom zahrať bez použitia prostriedkov, ktoré tento nástroj má za zmenu výšky tónu počas hry, napríklad ventilov. Z fyzikálneho hľadiska ide o tóny zodpovedajúce rezonančným frekvenciám vzduchového stĺpca nástroja ako akustického rezonátora (pozri časť 4.2.1). V hudobnej praxi sa o týchto tónoch často hovorí ako o *harmonických*, teda ako o rade frekvencii, v ktorom každý člen je celočíselným násobkom prvého člena, ktorého frekvencia sa označuje ako *prvá harmonická* alebo *fundamentálna*. Toto stotožnenie však vo všeobecnosti neplatí. Postupnosť rezonančných frekvencií akustického rezonátora nemusí tvoriť harmonický rad, a ako sme uviedli vyššie, je daná jeho vnútorným profilom.

Ako však ukážeme v ďalej, pri nátrubkových nástrojoch je dôležité, aby sa postupnosť ich prirodzených tónov v tých frekvenčných rozsahoch, ktoré sa využívajú pri hre, čo najmenej odlišovala od harmonickej postupnosti. Je to dané tým, že tóny generované nástrojom nemajú za normálnych okolností ako zvukové signály, teda časové zmeny akustického tlaku, jednoduchý sínusový priebeh. Pretože sú však periodickými funkciami dajú sa vždy rozložiť na harmonické zložky.

Teraz si všimneme vzťah medzi harmonickými zložkami hraného tónu a prirodzenými tónmi nátrubkového nástroja. Zmeny akustického tlaku v nátrubku sme popísali v 3.1.2 . Pomer akustického tlaku a akustického prúdu vzduchu v nátrubku sa nazýva *vstupná impedancia nástroja* (trubice). Krivka vstupnej impedancie, ktorá zachytáva závislosť vstupnej impedancie $Z(f)$ od frekvencie, je užitočná na ilustráciu akustickej odozvy nástroja. Každý vrchol tejto krivky zodpovedá jednej akustickej rezonancii vzduchového stĺpca obsiahnutého v nástroji, teda jedného prirodzeného tónu.

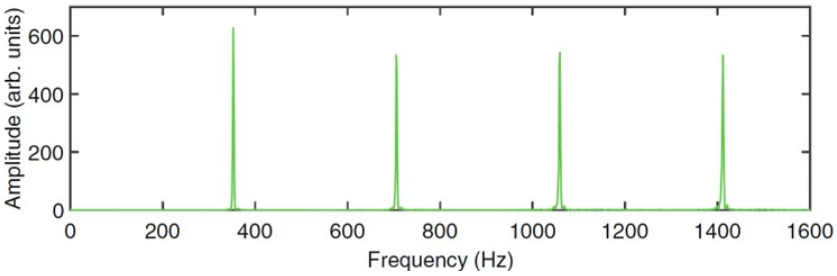
Na obr. 22 je krivka vstupnej impedancie pre B trúbku. Zvislými červenými úsečkami v dolnej časti obrázka kolmými na os s frekvenciami sú vyznačené aj frekvencie harmonického radu s fundamentálnou frekvenciou $B2$. Z obrázku vyplýva, že akustické rezonancie (prirodzené rezonancie) trúbky sa líšia veľmi málo od frekvencií harmonického radu. Výnimku tvorí prvá prirodzená frekvencia, ktorá je podstatne nižšia ako prvá harmonická radu $B2$, ktorej hodnota je $f_R = 116,5\ Hz$.

Analyzujeme teraz situáciu, keď chce hudobník zahrať napríklad tón $F4$ s frekvenciou 349 Hz (prvé štyri harmonické tohto tónu sú znázornené zvislými zelenými úsečkami vo



Obr. 10: Krivka vstupnej impedancie B trúbky; zvislé čiary zhora: harmonické noty $F4$; zvislé čiary zdola: harmonické noty $B2$; [6]

vrchnej časti obr.11). Aby ho zahral, musí si nastaviť napätie pier tak, aby vibrovali so základnou frekvenciou blízkou tretej akustickej rezonancii, teda tretiemu prirodzenému tónu. Akustická spätná väzba od tejto rezonancie vzduchového stĺpca zosilní a stabilizuje vibrácie pier. Pokiaľ prirodzené rezonancie tvoria alebo sú blízke harmonickému radu, šiesta akustická rezonancia bude podporovať druhú harmonickú rezonanciu pier pre tón $F4$ a podobne deviata resp. dvanásta akustická rezonancia bude podporovať tretiu resp. štvrtú harmonickú rezonanciu pier pre tón $F4$.



Obr. 11: Frekvenčné spektrum trúbky hraného tónu $F4$ [6]

Poznamenajme v tejto súvislosti, že nevyhnutnou zručnosťou hráča na nátrubkový nástroj je schopnosť takéhoto nastavovania nátisku pre zahranie jednotlivých prirodzených tónov. Základom je predstava tónu, ktorý má zaznieť, a na základe tejto predstavy dokáže mozog hráča vyslať perám nervové signály na správne napnutie. [18]

Z vyššie uvedenej spolupráce viacerých akustických rezonancií na podpore znejúceho tónu vyplýva dôležitosť požiadavky, aby prirodzené rezonancie nátrubkového nástroja tvorili alebo boli aspoň blízke harmonickému radu. Túto myšlienku ako prvý sformuloval

Bouasse (1929) [4] a dopracoval Benade (1968) [3] a označuje sa ako *„Bouasse-Benadeov predpis.“* [6]

3.2.5 Ako sa pomocou ventilov vypĺňajú medzery medzi prirodzenými tónmi

Väčšina nátrubkových nástrojov má ventily, ktoré sa stláčajú v rôznych kombináciách, čím dochádza k zmene dĺžky trubice a tým aj hraného tónu. Ak hudobník nestlačí žiaden z ventilov, vzduchový stĺpec prechádza len cez hlavnú trubicu nástroja. V tejto konfigurácii je hudobník schopný zahrať na nástroji len jeho prirodzené tóny. Pri stláčaní ventilov sa vzduchový stĺpec presunie aj do pridanej trubice, čím sa predĺži celková dĺžka trubice. To spôsobuje zníženie výšky hraného tónu. Pri troch ventiloch je systém obvykle skonštruovaný tak, že umožňuje zníženie od jedného poltónu po tri celé tóny, teda o šesť poltónov. Z akustických zákonov vyplýva, že pri dnes štandardnom rovnomerne temperovanom ladení je na zníženie výšky hraného tónu o jeden poltón potrebné predĺžiť celkovú dĺžku trubice o približne 6%. [2]

Vysvetlíme to na konkrétnom príklade. Majme trúbku s dĺžkou trubice 1.3 m, teda 130 cm. Ak chceme znížiť výšku hraného tónu (s niektorou z prirodzených frekvencií, ktoré sa hrajú bez použitia ventilov, teda s využitím základnej trubice s dĺžkou 130 cm) o poltón, potrebujeme pridať trubicu s dĺžkou $\frac{6 \cdot 130}{100} = 7.8$ cm. Nová dĺžka trubice bude $130 + 7.8 = 137.8$ cm.

Mohli by sme teraz predpokladať, že ak chceme znížiť hraný tón o dva poltóny, teda o jeden celý tón, musíme pridať 12%, teda $2 \cdot 7.8 = 15.6$ cm, k základnej dĺžke trubice. Nie je to však správny predpoklad. Pre zníženie o každý ďalší poltón musí byť pridané 6% z aktuálnej dĺžky trubice. Teda v prípade dvoch poltónov by to bola dĺžka $\frac{6 \cdot 137.8}{100} = 8.27$ cm. K hlavnej trubici by bolo potrebné pridať $7.8 + 8.27 = 16.07$ cm. Nová dĺžka trubice by bola $130 + 16.07 = 146.07$ cm.

Rovnaký proces by sme uplatnili pri pridaní troch poltónov. $\frac{6 \cdot 146.07}{100} = 8.76$ cm je nová dĺžka, ktorú potrebujem pridať, teda celkovo k základnej trubici pridáme dĺžku $7.8 + 8.27 + 8,76 = 24.83$ cm a nová dĺžka trubice bude $130 + 24.76 = 154.83$ cm.

Týmto procesom sme vypočítali dĺžky, ktoré sa pridávajú pri samostatnom použití každého z troch ventilov, ktoré tvoria súčasť trúbky. Prvý ventil, ktorým tón klesne o dva poltóny, má dĺžku pridanej trubice 16.07 cm. Pre druhý ventil, ktorým dôjde k poklesu o

jeden poltón, meria pridaná trubica 7.8 cm. A pridaná trubica pre posledný ventil, ktorým tón klesne o tri poltóny, meria 24.83 cm.

Ak hudobník hrá s jednotlivými ventilmi individuálne, dosahuje požadované poklesy. Problém nastáva ak začne kombinovať viaceré ventily. Vezmime si napríklad pokles o tri poltóny. Stlačením posledného ventilu, ktorým dosiahneme požadovaný pokles, pridá k trubici dodatočnú dĺžku $24,83$ cm. Druhý spôsob, ktorým by hudobník mohol zvažovať dosiahnutie poklesu o tri poltóny, je skombinovanie stlačenia prvého (dva poltóny) a druhého (jeden poltón) ventilu. Takto sa však k základnej dĺžke trubice pridá len dĺžka $16.07 + 7.8 = 23,87$ cm, čo je zhruba 1 cm menej ako v prípade stlačenia tretieho ventilu. V prípade zníženia tónu súčasným stlačením prvého a druhého ventilu teda nenastane zníženie o úplné tri poltóny. Získaný tón bude o niečo vyšší.

Ak by sme sa pozreli na prípad poklesu o štyri poltóny, po správnosti by sa mala pridať nová dĺžka $\frac{6 \cdot 154.83}{100} = 9.29$ cm. Tým by sa základná dĺžka trubice predĺžila o $9.29 + 24.83 = 34.12$ cm. Pri hre na trúbku sa na pokles o štyri poltóny používa kombinácia stlačenia druhého (jednej poltón) a tretieho (tri poltóny) ventilu, čím dostaneme navýšenie o $7.8 + 24.83 = 32.63$ cm, čo je o 1.5 cm menej ako by bolo potrebné. Pridávaním ďalších kombinácii ventilov s cieľom znížiť tón o päť alebo šesť poltónov sa tento rozdiel ešte navyšuje.

Riešenie spočíva v tom, že konštrukcia trúbky je urobená tak, že hudobník môže počas hry využiť tzv. *ventilové posúvače* (valve slides), ktorými môže predlžovať dĺžku pridanej trubice pri použití prvého a tretieho ventilu. Týmto spôsobom by mal byť skúsený hudobník schopný hrať všetky tóny v správnych výškach.

3.2.6 Paradox nátrubkových nástrojov

Amplitúda akustického tlaku vo zvukovej vlne vyžarovanej nátrubkovým nástrojom je výrazne menšia v porovnaní s amplitúdou akustického tlaku zvukovej vlny vo vnútri nástroja. Namerané hodnoty úrovne akustického tlaku môžu byť mimo nástroja o niekoľko desiatok dB nižšie ako vo vnútri nástroja [6]. Pretože účelom hudobného nástroja je generovať hudobné zvuky, mohlo by sa zdať žiaduce, aby vyžaroval do priestoru väčšinu zvukovej energie. Na druhej strane, vytvorenie stabilného periodického oscilačného režimu ventilového zdroja si vyžaduje silnú spätnú väzbu od rezonančného vzduchového stĺpca

nástroja. Úroveň sily spätnej väzby je závislá od množstva zvukovej energie, ktorá sa odráža z ozvučnice späť do nástroja. Vzniká paradox, že podmienka pre vznik silného zvuku je v protiklade s podmienkou silného vyžarovania zvuku

Riešenie tohto paradoxu je možné po pochopení spôsobu, akým odraz a prenos zvukovej vlny v ozvučnici závisí od frekvencie zvukovej vlny. Charakteristickým znakom akustického správania ozvučnice je, že je veľmi účinná pri odrážaní nízkofrekvenčných vĺn späť do nástroja a zároveň veľmi účinná pri vyžarovaní vysokých frekvencii von do okolia. *Hraničná frekvencia ozvučnice* (the cutoff frequency of the bell) je frekvencia, nad ktorou sú odrazy zanedbateľné. V prípade trombónu je táto frekvencia 800 Hz. Pre ilustráciu si uveďme ako príklad z [6], situáciu pri hre tónu $B3$ s frekvenciou 233 Hz na trombóne. Fundamentálna zložka zvukovej vlny sa takmer úplne odráža, keď dorazí do ozvučnice, čo vytvára silnú spätnú väzbu na posilnenie vibrácií pier. Zvuková vlna vo vnútri nástroja obsahuje frekvenčné zložky, ktoré sú harmonické s 233 Hz pričom vyššie harmonické, osobitne začínajúc štvrtou, sú vyžarované s veľmi veľkou účinnosťou. Teda pred tým ako zvuková vlna môže byť vyžarovaná do okolia (najefektívnejšie prostredníctvom vysokých harmonických), musí byť generovaná vibráciou pier (za pomoci najmä nízkych harmonických).

4 Modelovanie fungovania jednotlivých častí systému pri hre na nátrubkových nástrojoch

V tejto kapitole budeme matematicky modelovať fungovanie jednotlivých častí systému hráč-nástroj pri hre. Vysvetlíme vzťah prepojenia medzi hráčom a nástrojom a na záver dospejeme k rovniciam elementárneho modelu, ktorého cieľom je vedecky priblížiť spôsob, akým je zvuk generovaný a ovládaný pri hre na nátrubkových nástrojov.

4.1 Modelovanie vibrácií pier ako primárneho zdroja zvuku pri hre na nátrubkových nástrojoch

Vibrujúce pery predstavujú primárny zdroj zvuku pri hre na nátrubkových nástrojoch. Zároveň sú definičnou vlastnosťou tejto kategórie dychových nástrojov.

4.1.1 Charakteristika vibrácie pier

Na dobré ovládanie vibrujúcich pier pri hre na nástroji využíva hudobník svaly tváre, ktoré zabezpečujú ich správnu konfiguráciu. Tieto svaly a ich následné vhodné nastavenie sa nazýva *nátisk* (embouchure). Vďaka tomuto nastaveniu dokáže hudobník ovládať frekvenciu vibrácie pier, a tým aj generovaný tón. Po zvolení vhodného nátisku (napr. obr. 7), hudobník pritlačí svoje pery na obvod nátrubku a začne hrať.

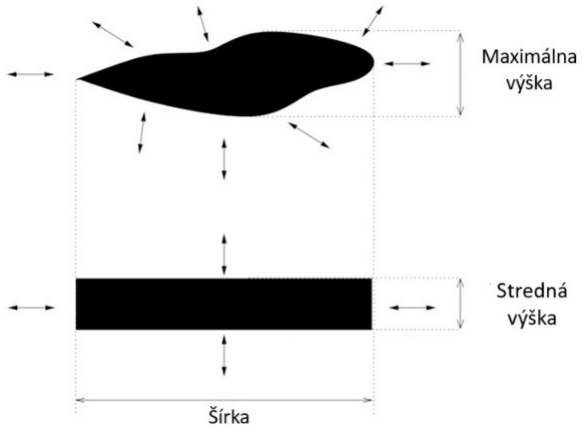
Hudobník upravuje nátisk aj počas hry. V prípade postupnosti tónov so stúpajúcou výškou musí prispôsobovať natisk tak, aby zvyšoval prirodzenú rezonančnú frekvenciu pier. Časť tohto prispôsobovania sa realizuje zvyšovaním statického tlaku pier na nátrubok.

Ďalšou dôležitou podmienkou adekvátnej vibrácie pier je okrem nastavenia správneho nátisku aj vyvinutie dostatočného pretlaku vzduchu v ústach hudobníka pomocou svalov kontrolujúcich výdych.

Pri modelovaní vibrácie pier počas hry na nátrubkových nástrojoch sa využíva vhodne zvolený pravouhlý súradnicový systém. My budeme v práci využívať systém s tromi súradnicami x, y, z. Os x tvorí vodorovná priamka prebiehajúca zľava doprava v strede medzi pootvorenými perami. Os z predstavuje priamka prebiehajúca zozadu dopredu v smere toku vzduchu prúdiaceho kanálom medzi perami do nástroja. Os y je kolmá na takto definované osi x a z a je orientovaná smerom nahor. Počiatok systému je v strede

kanála medzi perami. Smery osí x, y a z budeme niekedy označovať aj slovami laterálne, transverzálne a axiálne.

Tvar otvoru pier a jeho zmeny pri hre sú pre každého hráča jedinečné a špecifické. Jeden tón s rovnakou výškou môže byť zahraný pomocou rôzneho tvaru otvoru pier v závislosti od hráča, ktorý na nástroji hrá. Je to prirodzené, pretože každý hráč má vlastnú konfiguráciu pier a svalov, ktoré ich ovládajú. Osobitne odlišná býva laterálna asymetria otvoru medzi perami u jednotlivých hráčov. Napriek týmto skutočnostiam sú generované tóny rôznymi hráčmi takmer nerozlíšiteľné. Vysvetlenie tejto skutočnosti spočíva v povahe ventilového zdroja zvuku predstavovaného vibrujúcimi perami. Zároveň akustický tlak vytváraný v nátrubku závisí od objemového prietoku vzduchu prúdiaceho cez otvor pier a nie od tvaru tohto otvoru. Horný diagram na obr. 12 znázorňuje tvar otvoru pier získaný z fotografie pier hrajúceho hudobníka.[6]



Obr. 12: Fotografia otvoru pier (horný diagram); ekvivalentný obdĺžnik (spodný diagram)[6]

Zaznamenanú oblasť na hornom diagrame obr. 12 môžeme za účelom modelovania nahradiť ekvivalentným obdĺžnikom (spodný diagram obr. 12), ktorý má v čase t šírku $w(t)$ (meranú v smere osi x) a výšku $h(t)$ (v smere osi y), ktorá je daná strednou hodnotou výšky tohto reálneho otvoru meranej ako vzdialenosť rovnobežiek s osou x dotýkajúcich sa hornej resp. dolnej časti. Je jasné, že obsah tohto obdĺžnika, ktorý je daný vzťahom 4, zahŕňa rôzne tvary otvoru pier s rovnakým objemovým prietokom vzduchu.

$$S(t) = w(t)h(t) \tag{4}$$

Vibráciu pier možno modelovať ako kmitajúci systém s jedným stupňom voľnosti reprezentovaným strednou výškou otvoru medzi perami $h(t)$. Objemový prietok vzduchu do

nátrubku, ktorý je kľúčovým parametrom pri modelovaní hry na nátrubkových nástrojoch, je primárne určený plochou otvoru medzi mini. Aby sme vibrujúce pery z hľadiska sledovania plochy otvoru medzi nimi mohli modelovať ako kmitajúci systém s jedným stupňom voľnosti (s jednou premennou), je podstatné, aby táto plocha závisela len od jedného premenného parametra. Na tento účel bol na základe experimentov stanovený mocninový vzťah medzi plochou otvoru medzi perami $S(t)$ a jeho strednou výškou $h(t)$:

$$S(t) = S_0\Big(\frac{h(t)}{h_0}\Big)^q \tag{5}$$

V tomto vzťahu sú S_0 a h_0 počiatočnými hodnotami plochy otvoru medzi perami a priemernej výšky a q je exponent, ktorý sa určuje empiricky.

Pohľad na pery spredu poskytuje cenné informácie o zmenách prúdu vzduchu z úst hráča do nátrubku. Je ale dôležité si uvedomiť, že pery hráča sa pri hre nepohybujú len v rovine xy, ale aj v smere osi z (axiálnom), teda v smere prúdenia vzduchu.

4.1.2 Rovnica popisujúca pohyb pier

Pery hráča na nátrubkovom nástroji sú pružné súvislé štruktúry, ktoré sú vystavené aerodynamickým silám, ktoré závisia od tlakového poľa v ich okolí. Vibrujúcu časť pier obmedzuje okraj nátrubku, na ktorý sú pritlačené. Mnohé materiálne vlastnosti pier je náročné experimentálne merať a zároveň vnútorné sily vytvárané svalmi kontrolujúcimi nátisk hráča sú vo všeobecnosti neznáme. Úplný matematický model vibrácie pier by bol mimoriadne zložitý, pretože by obsahoval veľa premenných a tiež veľké množstvo parametrov, ktorých hodnoty sa nedajú presne určiť. Preto sa sústredíme na vytvorenie základného zjednodušeného modelu vibrácie pier s jednou priestorovou premennou závislou od času.

Pri tvorbe tohto zjednodušeného modelu si najprv budeme všímať len pohyb jednej pery. Budeme predpokladať, že hmotnosť pohyblivej časti pery je sústredená do jedného hmotného bodu a jej vibrácie budeme modelovať ako pohyb závažia s hmotnosťou m na pružine s tuhosťou k. Sily generované pružnosťou pery budú reprezentované touto pružinou. To znamená, že pri výchylke pery z jej rovnovážnej polohy y_{eq} do polohy y pôsobí na ňu sila $F_R = -k(y - y_{eq})$.

Z uvedeného vyplýva, že prirodzená rezonančná frekvencia pery, s ktorou by kmitala

po vychýlení z rovnovážnej polohy a následnom uvoľnení, je daný vzťahom

$$fr = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

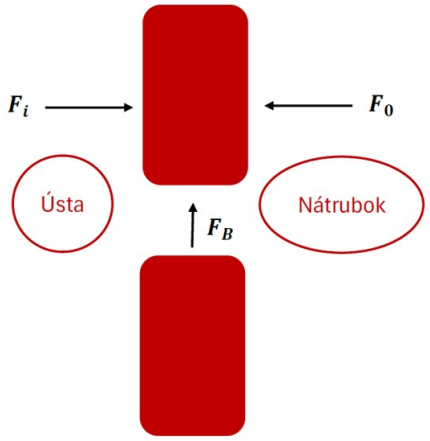
Tento vzťah predstavuje frekvenciu jednoduchého harmonického pohybu. Vhodnou úpravou nátisku je hudobník schopný meniť túto rezonančnú frekvenciu v rozsahu niekoľkých oktáv. Vzhľadom na mechanické vlastnosti pier, najmä ich vnútorné trenie, by prišlo po ich rozkmitaní, napríklad brnknutím na ne, veľmi rýchlo k utlmeniu ich vibrácií. Predstavujú teda systém s tlmením.

Je veľmi dôležité uvedomiť si, že pri činnosti pier ako ventilového zdroja zvuku nie je dôležitý samotný pohyb pier, ale zmena plochy S otvoru medzi nimi, ktorú tento pohyb spôsobuje. Ak budeme pre zjednodušenie predpokladať, že šírka $w(t)$ ekvivalentného obdĺžnika s výškou $h(t)$ zodpovedajúceho ploche otvoru medzi perami pri ich vibrácii je konštantná, a že pohyb dolnej pery je zrkadlovým obrazom pohybu hornej pery, je možné pohyb pier modelovať ako oscilátor s jedným stupňom voľnosti pozdĺž osi y nasledujúcou rovnicou

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_l}{q_l}\frac{dh}{dt} + \omega_l^2(h - h_{eq}) = \frac{F}{m} \tag{7}$$

kde parameter ω_l je mechanická rezonančná frekvencia pier s predpokladom, že ide o rovnakú frekvenciu pre obe pery. Parameter q_l je faktor kvality rezonancie pier, ktorý je nepriamo úmerný sile tlmenia. A parameter h_{eq} je vzdialenosť medzi perami, keď sú v pokoji. Hmota m sa rovná polovici hmoty každej pery, čo odráža skutočnosť, že posunutie h v rovnici 7 je dvojnásobkom posunutia každej z pier. F predstavuje zložku celkovej externej sily pôsobiacej na hornú peru v smere $+y$, pričom predpokladáme, že na dolnú peru pôsobí rovnako veľká sila v smere $-y$.

Externá sila F pôsobiaca na pery hráča je spôsobená tlakom okolitého vzduchu na pery. Keď hráč vytvorí nátisk a pritlačí pery na okraj nátrubku, priestor v ústach aj priestor v nátrubku obsahuje spočiatku vzduch s atmosferickým tlakom. V tomto štádiu nepôsobí na pery pretlak, keďže aj vnútorný tlak v perách je na úrovni atmosferického tlaku. Aby hráč inicioval zahratie tónu, zvýši tlak v ústach nad hodnotu atmosferického tlaku. Vzniká nerovnováha medzi tlakom v ústach a v nátrubku, ktorá vedie k nerovnováhe externých síl pôsobiacich na jednotlivé časti povrchu pier, ako môžeme vidieť na obr. 13.



Obr. 13: Sily, ktorými na hornú peru pôsobí okolitý vzduch.

4.1.3 Model posuvných dverí

Vzťah medzi tlakovým poľom pôsobiacim na pery a y-ovou zložkou externej sily závisí od predpokladu o mechanickom správaní pier a povahe prúdu vzduch prúdiaceho cez otvor medzi perami. Obr. 13 veľmi jednoducho opisuje základnú podstatu ako na povrch hornej pery pôsobia sily, ktoré vytvára tlak okolitého vzduchu. Vibrácie pier hráčov na nátrubkovom nástroji sa javia byť prevažne vertikálne (v smere osi y) pre vysoké tóny, a prevažne horizontálne (v smere osi z) pre nízke tóny. [6].

Pozrieme sa teraz na prípad hornej pery, ktorá sa pohybuje len v smere osi y. Tento pohyb si môžeme predstaviť ako otváranie a zatváranie posuvných dverí. Takýmto modelom dokážeme úspešne popísať správanie pier hudobníka len pre vysoké tóny. Na hornú peru pôsobí len jedna vonkajšia sila, na obr. 13 označená ako F_B, tiež označovaná ako Bernoulliho sila. Táto silá vznika vďaka tlaku v kanáli medzi perami a pôsobí na spodný povrch hornej pery. V zjednodušenom prípade obdĺžnikového kanálu s dĺžkou l, šírkou w, výškou h a tlakom p_{lc} vzniká sila veľkosti:

$$F_B = lwp_{lc} \tag{8}$$

Ak kanálom medzi perami neprúdi vzduch, na peru zo všetkých strán pôsobí atmosferický tlak a výslednica všetkých síl na ňu pôsobiacich je nulová. Ak chce hudobník rozoznieť hudobný nástroj, musí dôjsť k zvýšeniu tlaku v ústach p_m, čo spôsobí vznik prúdu vzduchu, ktorý preteká z úst cez kanál do nátrubku.

Existuje dôležitý rozdiel medzi tým, akú štruktúru má prúd vzduchu na vstupe a na výstupe kanála medzi perami. Vzduch sa plynule zbieha, teda bez vnútorných turbulencií, pri vstupe do kanála medzi perami. Rýchlosť prúdenia vzduchu postupne narastá a dochádza k výraznému poklesu tlaku. Pri výstupe z kanála vzniká turbulentný prúd. Kinetická energia prúdu sa rozptýli v nátrubku, ale zmena tlaku z kanála medzi perami do nátrubku je veľmi malá. Môžeme predpokladať, že $p_{lc} \simeq p$.

Pri hre dochádza k veľkým zmenám tlaku vzduchu $p(t)$ v nátrubku, ako môžeme vidieť v časti 3.1.2. V zjednodušenom modeli, ktorý popisujeme v tejto časti, zanedbávame menšie zmeny akustického tlaku, ku ktorým dochádza v ústach hráča. Tieto zmeny tlaku v nátrubku následne spôsobujú veľké zmeny sily F_B.

Výsledkom zmien sily F_B, ktorá pôsobí na pery vo vnútri kanála medzi nimi, je ich rozkmitanie v smere osi y.

Ak do rovnice 7 za F dosadíme hodnotu F_B z rovnice 8, dostaneme vzťah, ktorý obsahuje len 2 závislé premenné, $h(t)$ a $p(t)$:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{\omega_l}{q_l}\frac{dh(t)}{dt} + \omega_l^2(h(t) - h_{eq}) = \frac{lwp(t)}{m} = \frac{p(t)}{\mu} \tag{9}$$

kde $\mu = \frac{m}{lw}$ predstavuje efektívnu hmotnosť pripadajúcu na jednotku plochy vibrujúcich pier. Treba ale dodať, že sa v tomto zjednodušenom prípade nepočíta s kolíziami medzi perami. Ak amplitúda vibrácií dosiahne hodnotu h_{eq}, pery sa dostanú do kontaktu pri spätnej fáze vibračného cyklu. Je možné zahrnúť tento aspekt do rovnice 9 pridaním brzdiacej sily.

4.1.4 Model výkyvných dverí

Model posuvných dvier popísaný v časti 4.1.3 nie je dostatočne adekvátny na opis pohybu pier hudobníka v celom rozsahu hry na nátrubkových nástroj. Vhodné by bolo do modelu zahrnúť k pohybu pier v smere osi y, aj pohyb pier v smere osi z. Týmto spôsobom sme schopní modelovať aj hru tónov nižšieho registra.

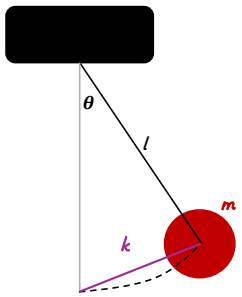
Pri uvažovaní o pohybe pier v smere osi z je dôležité si uvedomiť, že pery sú pritlačené k nátrubku nástroja, čím je ich pohyb v tomto smere značne obmedzený. Celkový pohyb pier v smere osí y a z si môžeme predstaviť ako otváranie a zatváranie výkyvných dverí, ktorých pánty sú na úrovni vnútorných hraníc nátrubku. Ako vidieť na obr. 13, sily F_i

a F_0 pôsobia na hornú peru z opačných smerov osi z. Zároveň sú vytvárané rozličnými tlakmi. Silu F_i v smere $+z$ generuje tlak v ústach p_m a silu F_o v smere $-z$ generuje tlak v nátrubku p. Ak pracujeme s predpokladom, že plocha S_{io} vnútorného aj vonkajšieho povrchu pery je rovnaká, výsledná sila F_{io} pôsobiaca na hornú peru v smere osi z sa bude rovnať:

$$F_{io} = F_i - F_o = (p_m - p)S_{io} = \Delta p S_{io} \tag{10}$$

Táto sila generuje krútiaci moment na perách, ktorý spôsobuje otváranie voľných častí pier neobmedzovaných nátrubkom nástroja.

Pre jednoduchosť predpokladáme, že ak výsledná sila $F_{io} = 0$, tak sa pery nachádzajú vo vertikálnej rovine vzdialené o h_0. Výkyvný pohyb pier prebieha v dvoch dimenziách a pre modelovanie všetkých efektov takéhoto typu ventilu tvoreného perami by bol potrebný viacrozmerný model. Aby sme dodržali rámec základného modelu, ktorý obsahuje len jeden stupeň voľnosti, budeme pracovať s predpokladom, že pery sa otáčajú bez deformácie, teda nedochádza k ich ohýbaniu. Výchylka pier v takomto modeli sa dá popísať jednou premennou θ.



Obr. 14: Model pohybu hornej pery obmedzenej nátrubkom

Pre lepšiu predstavu je spomínaný pohyb pier ilustrovaný na obr. 14. Hmotnosť pery m sa sústreďuje na konci tyče s pevnou dĺžkou l a zanedbateľnou hmotnosťou, ktorá vykonáva hojdavý pohyb. Smer sily F_{io} je vždy kolmý na vnútorný a vonkajší povrch pery, a preto sa otáča spolu s perou. Za predpokladu, že F_{io} pôsobí v strede povrchu pery, je krútiaci moment vzhľadom k otočnému bodu v dôsledku rozdielu tlaku:

$$\mathcal{T}_{io} = F_{io}\frac{l}{2} = (p_m - p)S_{io}\frac{l}{2} \tag{11}$$

Moment zotrvačnosti hmotného bodu vzhľadom na bod otáčania vypočítame ako $I = ml^2$. Svaly nátisku sú modelované ako pružina generujúca vratný krútiaci moment daný vzťahom

$$\mathcal{T}_{emb} = -kl^2\theta = -ml^2\omega_l^2\theta \tag{12}$$

kde parameter ω_l predstavuje rezonančnú frekvenciu pier zo základného vzťahu pre frekvenciu jednoduchého harmonického pohybu 6. Kvalitatívne v tomto vzorci ide o zachytenie skutočnosti, že pery sú vracané do pôvodnej polohy (vertikálne) silou, ktorá je tým väčšia, čím väčší je uhol vychýlenia θ, pričom koeficient úmernosti je k. Znamienko mínus identifikuje, že ide o silu opačne orientovanú ako θ.

Vďaka uvedeným rovniciam vieme zapísať rovnicu uhlového pohybu pre takto stanovený hojdavý pohyb pier:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{\omega_l}{Q_l}\frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_l^2\theta = \frac{S_{io}}{2ml}(p_m - p(t)) \tag{13}$$

Ak je pretlak v ústach p_m pod prahovou hodnotou samo-udržujúcej sa oscilácie (3.1.3), vzniká statická rovnovážna poloha uhla pier θ_{eq}, ktorá je daná vzťahom

$$\theta_{eq} = \frac{S_{io}p_m}{2ml\omega_l^2} \tag{14}$$

pri ktorej je vratný moment sily rovný momentu sily generovanému pretlakom $\Delta p = p_m$. Na rozdiel od modelu posuvných dverí, rovnovážna poloha pri modeli výkyvných dverí s narastajúcim pretlakom v ústach rastie.

V prípade, že pretlak v ústach presiahne prahovú hodnotu, dôjde k spontánnej oscilácii pier okolo rovnovážneho uhla zodpovedajúceho rovnovážnej polohe pre prahovú hodnotu tlaku. Vzťah medzi uhlom θ a výškou otvoru pier h je

$$h = h_0 + l(1 - cos\theta) \tag{15}$$

Vzhľadom na fakt, že spomínaná rovnica je nelineárna, jednoduchý harmonický pohyb pri modeli výkyvných dverí nevedie k sínusovej modulácii plochy otvoru medzi perami. Správanie pier okolo prahu kmitania však možno popísať za predpokladu, že v okolí rovnovážnej polohy sa pohyb hmoty (obr. 14) uskutočňuje pozdĺž dotyčnice k jej skutočnej kruhovej dráhe. Pohybová rovnica pre model výkyvných dverí sa pre malé amplitúdy potom môže zapísať s využitím výšku otvoru medzi perami ako

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{\omega_l}{q_l}\frac{dh(t)}{dt} + \omega_l^2(h(t) - h_{eq}) = -\frac{S_{io}\sin\theta_{eq}p(t)}{2m} = -\frac{p(t)}{\mu} \tag{16}$$

V tejto rovnici je efektívna hmotnosť pripadajúca na jednotkovú plochu vibrujúcich pier daná vťahom $\mu = \frac{2m}{S_{io}sin\theta_{eq}}$.

4.1.5 Plátky reagujúce dnu a plátky reagujúce von

Aby bol ventilový zdroj schopný generovať nepretržitý zvuk v dychovom hudobnom nástroji, musí byť schopný dodávať energiu na udržanie stojatého vlnenia vo vzduchovom stĺpci nástroja.V tejto súvislosti popíšeme dve možnosti správania ventilových zdrojov používaných tak pri plátkových, ako pri nátrubkových nástrojoch. Tieto dve možnosti popísal už v 19. storočí významný nemecký fyzik Hermann von Helmholtz vo svojom základnom diele [10].

Helmholtz pochopil, že pri plátkových dychových nástrojov sa plátok správa ako tlakovo riadený ventil, ktorý reguluje prúd vzduchu z úst hráča do nástroja. Rozdelil plátkové mechanizmy do dvoch samostatných skupín na základe usporiadania štruktúry s plátkom vzhľadom na smer prúdu vzduchu.

Ako plátky „reagujúce dnu“ (inward-striking) označil tie, pri ktorých pohyb (voľného konca) plátku v smere prúdu vedie k zmenšenie otvoru ovládaného plátku. Pri plátkoch „reagujúcich von“ (outward-striking), sa pohyb plátka v smere prúdu prejavuje zväčšením otvoru ovládaného plátkom. Túto úvahu aplikoval aj na pery hráča na nátrubkovom nástroji, ktoré vo všeobecnosti majú charakter plátkov reagujúcich von. Jeho prístup sa ujal a je stále využívaný.

Vlastnosti plátkov reagujúcich von možno rozlíšiť od plátkov reagujúcich dnu podľa toho, ako ich správanie závisí na tlakovom rozdieli Δp na plátku. Ak Δp pomaly narastá,

tak plátok reagujúci von má tendenciu sa otvárať, zatiaľ čo v prípade plátku reagujúcom dnu dochádza k uzatváraniu.

Špecifikácia pomalého otvárania je dôležitá, pretože pri oscilujúcom tlakovom rozdiele závisí fázový rozdiel medzi tlakom a otváraním plátku na frekvencii. Ak je plátok reagujúci von vystavený tlakovému rozdiel Δp výrazne presahujúcemu jeho prirodzenú rezonančnú frekvenciu, pri zvyšovaní Δp sa zatvára.

Rovnica popisujúca dynamiku modelu posuvných dverí bola vyjadrená vzťahom 9. Ak by sme uvažovali efekt veľmi pomalej zmeny tlaku v nátrubku $p(t)$, môžeme zanedbať prvé dva členy a dostaneme približnú rovnicu

$$\omega_r^2(h(t) - h_{eq}) \simeq \frac{p(t)}{\mu} \tag{17}$$

Z tejto rovnice vyplýva, že v modeli posuvných dverí má ventil pier charakter plátku reagujúceho dnu. Pokles výstupného tlaku $p(t)$ zodpovedajúci nárastu Δp sa prejaví v poklese výšky $h(t)$ otvoru medzi perami.

Pri malých amplitúdach vibrácií je správanie modelu výkyvných dverí popísané rovnicou 16, ktorú v prípade malých tlakových zmien môžeme zapísať ako

$$\omega_r^2(h(t) - h_{eq}) \simeq -\frac{p(t)}{\mu} \tag{18}$$

Záporné znamienko na pravej strane rovnice zabezpečuje, že tento model má charakter plátku reagujúceho von. Ak by sme teraz znížili tlak na výstupe $p(t)$, zvyšoval by sa Δp, a tým by došlo k zväčšeniu otvoru medzi perami $h(t)$.

Pri niektorých nástrojoch sa stretávame s plátkami, ktoré fungujú v oboch režimoch, pretože v nástroji prichádza k zmene smeru prúdenia vzduchu. Napr. harmonika, pri ktorej dochádza k ťahaniu mechov od seba aj k sebe.

Zovšeobecnenú dynamickú rovnicu opisujúcu malú amplitúdu pohybu obidvoch typov ventilov môžeme finálne zapísať ako

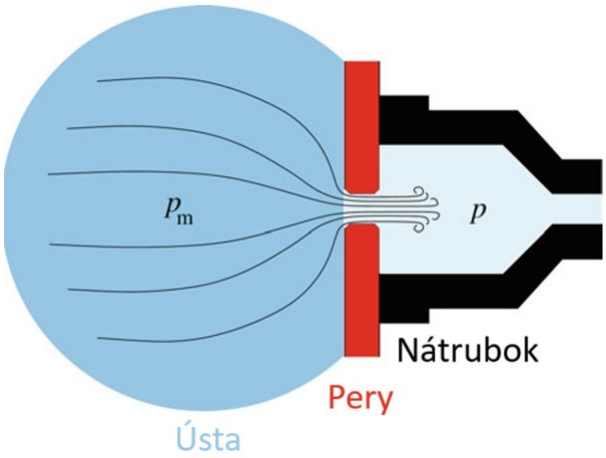
$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{\omega_l}{q_l}\frac{dh(t)}{dt} + \omega_r^2(h(t) - h_{eq}) = \pm\frac{p(t)}{\mu} \tag{19}$$

Záporné znamienko opisuje plátok reagujúci von a v prípade kladného znamienka ide o plátok reagujúci dnu.

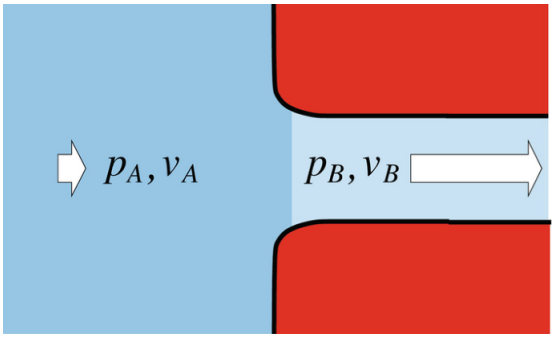
4.1.6 Prúdenie vzduchu cez kanál medzi perami

V tejto časti budeme uvažovať o hydrodynamickej charakteristike prúdenia vzduchu z úst cez kanál medzi perami do nátrubku nástroja. Odvodíme vzťah medzi objemom vzduchu prúdiacim cez tento kanál a tlakovým rozdielom pred a za ním. Rovnica vyjadrujúca tento vzťah predstavuje druhú zložku modelu fungovania hry na nátrubkových nástrojoch, ku ktorému smerujeme.

Na odvodenie tohto vzťahu uvažujme o stálom prúde vzduchu z hráčových pľúc prúdiaceho cez ústa rýchlosťou v_m ms^{-1}. Tlak v ústach označujeme ako p_m. Situácia je schematicky znázornená na obr. 15 a obr. 16. Predpokladajme, že pery sú stacionárne s



Obr. 15: Schematické znázornenie prúdu vzduchu z úst cez kanál medzi perami do nátrubku. Sýtosť znázornenia vzduchu indikuje veľkosť tlaku [6]



Obr. 16: Schematické znázornenie oblasti okolo vstupu z úst do kanála medzi perami. Sýtosť znázornenia vzduchu indikuje veľkosť tlaku a dĺžka šípky veľkosť rýchlosti prúdenia [6]

kanálom medzi nimi s dĺžkou l, šírkou w a výškou h, cez ktoré prúdi vzduch z úst do ná-

trubku. Pre jednoduchosť tiež predpokladajme, že vzduch prúdiaci z úst cez kanál medzi perami je nestlačiteľný, prúd bez trenia a je zložený z rovnobežných prúdnic.

Základný fyzikálny zákon zachovania hmoty vyžaduje, aby sa hmotnosť vzduchu opúšťajúceho ústa za jednu sekundu rovnala hmotnosti vzduchu pretekajúceho kanálom v rovnakom časovom intervale. Predpoklad nestlačiteľnosti znamená, že hustota vzduchu je všade v prúde rovnaká, teda objemový prietok je konštantný. Ak je plocha prierezu ústnej dutiny za perami S_m a priemerná rýchlosť prúdu vzduchu cez tento prierez v_m, potom objemový prietok cez ústa je $u = S_m v_m$. Keď prúd vzduchu vstupuje do kanála medzi perami, ktorého plocha prierezu S_{lc} je podstatne menšia ako S_m, zvyšuje sa priemerná rýchlosť prúdenia v_{lc}, tak aby sa udržal konštantný objemový prietok

$$u = S_m v_m = S_{lc} v_{lc} \tag{20}$$

Predpoklad, že prúdenie je bez trenia, znamená, že súčet kinetickej a potenciálnej energie je konštantný pre objemový prvok s pevnou hmotnosťou pohybujúci sa v prúde.

Tento zákon zachovania energie sa často vyjadruje pomocou Bernoulliho rovnice, ktorá vyjaduje vzťah medzi tlakom p a rýchlosťou v prúdovej častice v dvoch rôznych bodoch A a B na tej istej prúdnici. Táto rovnica, v ktorej ρ je hustota vzduchu, má tvar

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \tag{21}$$

Ako je znázornená na obr. 16, v našom prípade bod A zodpovedá priestoru v ústach a bod B priestoru v kanáli medzi perami. Rovnica ukazuje, že zvyšovaním rýchlosti vzduchu vstupujúceho do kanála musí dôjsť k zníženiu tlaku vyvíjaného vzduchom na povrch pier, ktoré tvoria steny kanála. Tento pokles tlaku vieme vyjadriť nasledovne

$$p_m - p_{lc} = \frac{1}{2}\rho(v_{lc}^2 - v_m^2) \tag{22}$$

Z rovnice 20 vieme odvodiť pomer priemernej rýchlosti cez ústa k priemernej rýchlosti v kanáli, ktorý sa rovná pomeru plôch prierezov kanála a úst. Ak ho následne skombinujeme s rovnicou 22, dostaneme vzťah medzi tlakom v ústach p_m a tlakom medzi perami p_{lc}

$$p_m - p_{lc} = \frac{1}{2}\rho v_{lc}^2 (1 - \frac{S_{lc}^2}{S_m^2}) \tag{23}$$

Plocha prierezu úst S_m hneď za perami závisí od polohy jazyka. Pre hru nízkych tónov sa odporúča udržiavať jazyk v spodnej polohe, čo podstatne zvyšuje hodnotu S_m v porovnaní

s plochou prierezu kanála medzi perami. V takomto prípade možno druhý člen v zátvorke zanedbať, čím dostaneme vzťah

$$p_m - p_{lc} \simeq \frac{1}{2}\rho v_{lc}^2 \tag{24}$$

4.1.7 Rovnica akustického objemového prietoku

Pri prechode prúdu vzduchu z úst do kanála medzi perami prúdnice konvergujú, rýchlosť častíc vzduchu rastie a tlak vzduchu klesá. Ak by sa prúd vzduchu správal analogicky aj na výstupe kanála medzi perami do dutiny nátrubku, prúdnice by plynulo divergovali, tlak vzduchu by sa zvýšil a rýchlosť jeho častíc by klesla. Ich výsledné hodnoty by záviseli od prierezu dutiny nátrubku. Oscilácie pier nemajú na uvedené správanie prúdu vzduchu žiaden vplyv, pokiaľ nedôjde k úplnému uzavretiu kanála medzi perami.

Reálna situácia je však iná. Mechanizmus, na základe ktorého fungujú pery ako efektívny ventilový zdroj zvuku, vychádza z jemných hydrodynamických efektov, týkajúcich sa toku kvapalín a plynov lokalizovaných v okrajových viskotermálnych vrstvách, teda vo vrstvách, v ktorých sa intenzívne prejavujú viskózne a termálne vlastnosti príslušnej látky, v našom prípade vzduchu, ležiacich blízko stien kanála medzi perami. Napriek tomu, že vzduch môže medzi perami prúdiť až rýchlosťou 10 ms^{-1}, jeho časti, ktoré sú v kontakte s povrchom pier, zostávajú v pokoji. V okrajovej vrstve prúdu s hrúbkou menej ako $1mm$ sa priečne nachádza vysoký rýchlostný gradient. V istom mieste pozdĺž kanála, ktorého poloha závisí od profilu kanála a rýchlosti prúdiaceho vzduchu, začnú nestability v okrajovej vrstve spôsobovať, že sa oddelí od steny kanála a zmení sa na voľný prúd. Poloha tohto miesta sa mení počas vibrácie pier.

V najjednoduchšom modeli sa tento bod separácie nachádza na výstupe kanála medzi perami. Vzniknutý voľný prúd je veľmi nestabilný a stáva sa turbulentným, čím príde k jeho zmiešaniu s okolitým stojacim vzduchom, k jeho spomaleniu a transferu momentu. Od určitej vzdialenosti od vyústenia kanála možno pokladať rýchlosť všetkých častí vzduchu na danom priereze nátrubku za rovnakú. Pretože stále platí zákon zachovania objemového prietoku, objemový prietok v nátrubku sa musí zhodovať s objemovým prietokom v kanáli medzi perami. Avšak počas zmiešania turbulentného prúdu s okolitým vzduchom príde k rozptýleniu časti energie vo forme tepla, v dôsledku čoho prestane platiť Bernoulliho rovnica 21 pre priestor nátrubku v tom smere, že redukcia rýchlosti častíc vzduchu sa

nepremietne do zvýšenia jeho tlaku. Inak povedané, kinetická energia znížená spomalením častíc vzduchu sa neuloží ako potenciálna energia, ale prostredníctvom turbulencií sa zmení na teplo.

Skutočnosť, že v priestore nátrubku nepríde k obnoveniu tlaku (po znížení rýchlosti častíc vzduchu) znamená, že tlakový rozdiel Δp medzi tlakom v ústach p_m a tlakom v nátrubku p je daný vzťahom

$$\Delta p = p_m - p = p_m - p_{lc} \tag{25}$$

V tomto vzťahu predpokladáme, že tlak v nátrubku p bude rovnaký ako tlak v kanáli p_{lc}.

Na základe týchto tvrdení a využitím rovníc 20, 24 a 25 dostaneme vzťah pre akustický objemový prietok $u(t)$ do nátrubku nástroja:

$$u(t) = S_{lc}(t)\sqrt{\frac{2(p_m - p(t))}{\rho}} \tag{26}$$

Z rovnice 26 vyplýva, že pri fixnom tlaku p_m v ústach závisí rýchlosť prúdenia vzduchu do nátrubku od plochy prierezu kanála medzi perami S_{lc} a tlaku v nátrubku p(t). Je dôležité uvedomiť si, že ak prúd vzduchu z kanála medzi perami smeruje do nátrubku pripojenému k nástroju, tlak $p(t)$ je ovplyvnený aktuálnymi vibráciami vzduchového stĺpca v nástroji a kolíše s amplitúdou a fázou, ktorá závisí od akustických vlastností nástroja.

4.2 Modelovanie akustických rezonancií vzduchového stĺpca v nátrubkovom nástroji

V nátrubkových nástrojoch vstupuje meniaci sa prúd vzduchu vychádzajúci spomedzi vibrujúcich pier hráča do trubice, ktorej dĺžka je omnoho väčšia ako jej najväčší priemer, a vyvoláva rezonancie vzduchového stĺpca, ktorý sa v nej nachádza. Rezonančné vlastnosti tohto vzduchového stĺpca a povaha zvuku, ktorý z neho vychádza, sú určené tvarom trubice a jej rozmermi.

4.2.1 Akustické rezonátory

Výšky tónov generované nátrubkovým nástrojom závisia od spôsobu, akým zvukové vlny prechádzajú vzduchom vo vnútri nástroja. Každý dutý objekt, ktorý má aspoň jednu

dieru vo svojej stene, má tú vlastnosť, že zvukové vlny so zodpovedajúcou frekvenciou sú schopné vyvolať silnú reakciu vo vzduchu nachádzajúcom sa v tomto objekte. Intenzita reakcie pre daný objekt závisí od frekvencie zvukových vĺn. Takéto objekty nazývame *akustickými rezonátormi*. Frekvencia vyvolávajúca maximálnu intenzitu sa nazýva *rezonančná frekvencia* a priebeh tlakových zmien, ktorý pri rezonancii nastáva, sa nazýva *akustický mód*. Takmer všetky nátrubkové nástroje majú akustické rezonátory s mnohými akustickými módmi, pričom každý z týchto módov má svoju vlastnú rezonančnú frekvenciu.

Príkladom jednoduchého typu akustického rezonátora je prázdna pivová fľaša. Jej objem a veľkosť jej hrdla určujú jej rezonančnú frekvenciu. Na vyvolanie rezonancie stačí fúkať vzduch ponad hrdlo vhodnou rýchlosťou alebo generovať zvukový signál s vhodnou frekvenciou napríklad vyslovovaním alebo spevom nejakých samohlások v blízkosti hrdla fľaše. Interakciou prúdu vzduchu alebo zvukového signálu so vzduchom vo vnútri fľaše dôjde k silnej oscilácii s frekvenciou blízkou rezonančnej. Vzduchom naplnené dutiny s podobným fungovaním sú známe pod názvom *Helmholtzove rezonátory*.

Akustické rezonátory delíme na *dutinové* a *distribuované*. O dutinovom rezonátore hovoríme, ak vlnová dĺžka zvukovej vlny s jeho rezonančnou frekvenciou je omnoho väčšia ako jeho maximálny rozmer. V opačnom prípade ide o distribuovaný rezonátor nazývaný tiež akustický vlnovod. Vyššie spomínaná pivová fľaša patrí medzi dutinové rezonátory a dutinovými rezonátormi sú aj nátrubky nátrubkových nástrojov. Trubice nátrubkových nástrojov patria vo väčšine prípadov medzi distribuované rezonátory.

4.2.2 Stojaté vlnenie

Ako sme uviedli v predchádzajúcej časti, trubica nátrubkového nástroja je distribuovaný rezonátor. Jeho rezonančné frekvencie zodpovedajú frekvenciám prirodzených tónov tohto nástroja (pozri časť 3.2.3).

Rezonancie v distribuovaných rezonátoroch majú podobu stojatého vlnenia. V tejto časti sa budeme venovať matematickému popisu tohto typu vlnenia.

Stojaté vlnenie v trubici nátrubkového nástroja vzniká sčítaním doprednej a odrazovej vlny šíriacej sa vo vzduchovom stĺpci nástroja. Podnetom na jeho vznik je rozvibrovanie pier hráča, ktorý sa rozhodol zahrať nejaký tón. Rozvibrovaním pier sa cez nátrubok

rozšíria do trubice nástroja tlakové impulzy, pod vplyvom ktorých vznikne v trubici na začiatku postupné vlnenie. Po príchode čela vlny na otvorený koniec trubice sa veľká časť z neho odrazí a postupuje späť smerom k nátrubku. Pritom sa sčítava s vlnením prichádzajúcim od nátrubku na základe pokračujúcej vibrácie pier. Tento proces sa opakuje.

Základnou rovnicou, ktorou sa riadia vibrácie vzduchu v trubici nástroja, je vlnová rovnica.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{27}$$

kde p predstavuje akustický tlak a c je rýchlosť zvuku.

V prípade *valcovej trubice otvorenej na obidvoch koncoch* je celkový tlak vzduchu p_{tot} na koncoch trubice vždy rovný atmosferickému tlaku p_{atmos}. To znamená, že akustický tlak p je v týchto bodoch nulový $p = p_{tot} - p_{atmos} = 0$.

Predpokladajme, že máme trubicu dĺžky L, teda pohyb vzduchového stĺpca je od $x = 0$ do $x = L$. Na výpočet akustického tlaku v trubici musíme nájsť riešenie rovnice 27 pri splnení okrajových podmienok $p = 0$ pri $x = 0$ a $x = L$. V skutočnosti existuje celý rad takýchto riešení, ktoré majú tvar

$$p(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(2\pi f_n t\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{28}$$

kde f_n je frekvencia vibrácií a A je amplitúda. Takáto funkcie $p(x,t)$ spĺňa okrajové podmienky za predpokladu, že n je celé číslo, a že ide o riešenie vlnovej rovnice, dokážeme dosadením do rovnice 27, čím dostaneme

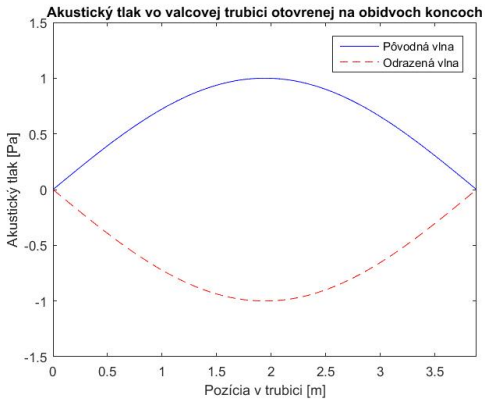
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -A\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(2\pi f_n t\right) \\ &\quad + A\left(\frac{2\pi f_n}{c}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(2\pi f_n t\right) \\ &= A\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(2\pi f_n t\right)\left[\left(\frac{2\pi f_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{29}$$

Tento výraz je rovný 0 a teda ide o riešenie vlnovej rovnice, ak platí

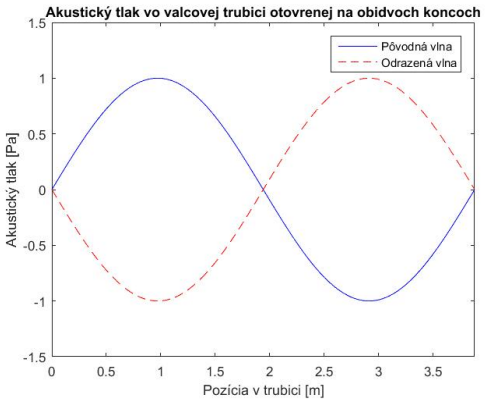
$$\left(\frac{2\pi f_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 = 0 \tag{30}$$

Po úprave rovnice 30 dostaneme

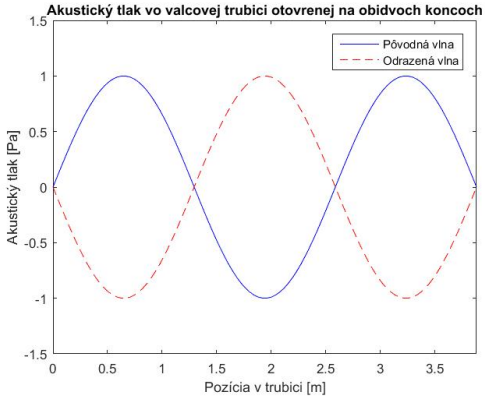
$$f_n = n\frac{c}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{31}$$



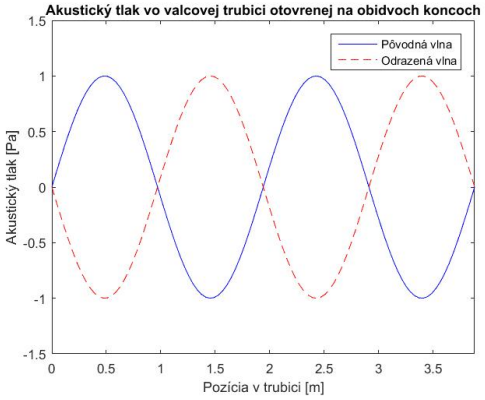
(a) Prvá rezonančná frekvencia ($n = 1$)



(b) Druhá rezonančná frekvencia ($n = 2$)



(c) Tretia rezonančná frekvencia (n=3)



(d) Štvrtá rezonančná frekvencia ($n = 4$)

Obr. 17: Modelovanie prvých štyroch rezonančných frekvencií vo valcovej trubici otvorenej na oboch koncoch.

Teda pre zvukovú vlnu vo valcovej trubici otvorenej na oboch koncoch vzniká v trubici stojaté vlnenie, ak má frekvencia hodnotu uvedenú v rovnici 31. Nejde ale o jediné riešenie, existujú aj iné, ale všetky sú len kombináciami riešení rovnice 28.

Prečo je to tak? Ak sa pozrieme na x v rovnici 28, vidíme, že má tvar sínusoidy. Všetky funkcie môžeme vyjadriť ako súčet vhodnej množiny sínusových vĺn. Tieto konkrétne sínusové vlny sú jediné, ktoré spĺňajú okrajové podmienky $p = 0$ na koncoch trubice. Inak povedané, akékoľvek rozloženie tlaku pozdĺž trubice, ktoré spĺňa okrajové podmienky, môže byť reprezentované ako kombinácia riešenia rovnice 28. Nie je potrebné hľadať iné riešenia, keďže uvedené riešenia a ich kombinácie nám dávajú všetky riešenia, ktoré spĺňajú okrajové podmienky.

Vďaka tejto rovnici vieme potvrdiť, že je generované sínusové kolísanie tlaku s frek-

venciami, ktoré sú celočíselnými násobkami základnej frekvencie, čiže nám skutočne v nástroji vznikajú harmonické tóny. A tiež, že priestorový tvar vibrácií pozdĺž potrubia je sínusová vlna.

Na ilustráciu daného tvrdenia, sme rovnicu naprogramovali. Vieme, že rýchlosť zvuku vo vzduchu pri izbovej teplote je $c = 343\ m/s$. Zvolili sme si trubicu rozmeru $L = 3.88\ m$. Vďaka týmto parametrom sme vedeli vypočítať čas, ktorý bude trvať vlne, kým sa dostane na koniec trubice ($t = \frac{L}{c}$). Pre túto hodnotu t sme fixne stanovili čas, a ďalej sme sledovali graf ako funkciu polohy. Vytvorili sme grafy pre prvé štyri rezonančné frekvencie takejto trubice, teda pre $n = 1, 2, 3, 4$, obr. 17. Modré krivky na obrázkoch predstavujú spomínané sínusové vlny a červené prerušované krivky predstavujú odrazené vlny od otvoreného konca nástroja.

Môžeme vidieť ako sa stojatá vlna správa pri zvyšovaní frekvencie, teda hodnoty n. Vo všetkých prípadoch je splnená podmienka nulových okrajových bodov. Teda ide o riešenia zvukovej vlny pre valcovú trubicu otvorenej na oboch koncoch.

Teraz sa pozrieme na stojaté vlny v *trubici uzavretej na jednom konci*. Pre takýto typ trubice vzniká na otvorenom konci tlakový uzol. Na uzavretom konci sa vzduch nemôže vôbec pohybovať, pretože prítomnosť koncovej steny trubice spôsobuje to, že rýchlosť je nulová. Uzavretý koniec trubice je rýchlostný uzol.

Opäť budeme predpokladať trubicu s dĺžkou L, uzavretou pri $x = 0$ a otvorenou pri $x = L$. Potom riešenie stojatej vlny bude ekvivalent rovnice 28

$$p(x,t) = A \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(2\pi f_n t\right) \quad n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{32}$$

Jediný rozdiel je v hodnotách n, ktoré sú len nepárne celé čísla. Rovnako ako v prípade otvorenej trubice vieme potvrdiť, že rovnica 32 je riešením vlnovej rovnice, ak ju dosadíme do vlnovej rovnice 27. Po dosadení dostaneme výraz, ktorý sa musí rovnať 0:

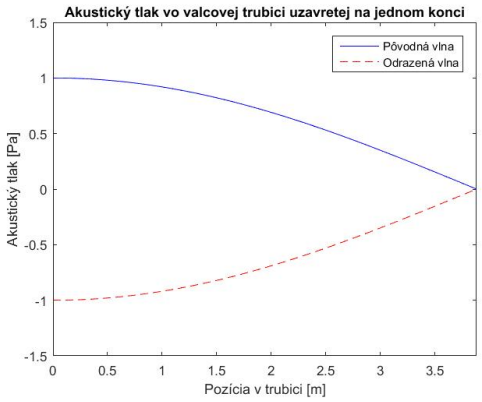
$$\left(\frac{2\pi f_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{2L}\right)^2 = 0 \tag{33}$$

Po úprave dostaneme

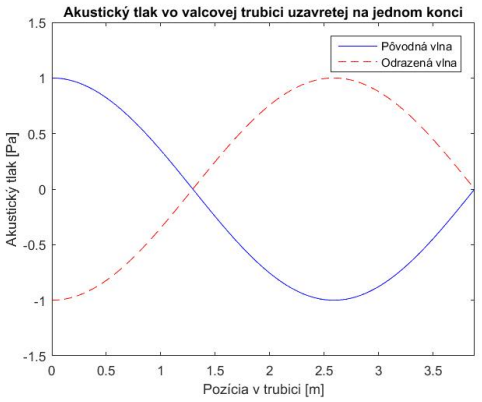
$$f_n = n\frac{c}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{34}$$

Opäť sme pre modelovali tento typ trubice s rovnakými parametrami ako v prípade valcovej trubice otvorenej na oboch koncoch. Hodnoty tlaku sú rovnaké ako pri predchádzajúcej

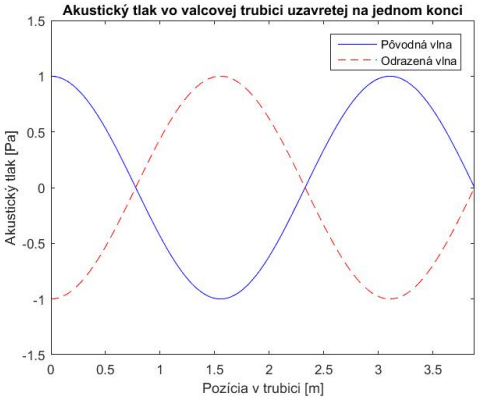
trubici. Splnená je podmienka pre $x = L$. Ale v bode $x = 0$ už nie je nulový tlak, keďže ide o rýchlostný uzol.



(a) Rezonančná frekvencia pre $n = 1$



(b) Rezonančná frekvencia pre $n = 3$



(c) Rezonančná frekvencia pre $n = 5$

Obr. 18: Modelovanie rezonančných frekvencií $n = 1, 3, 5$ vo valcovej trubici s jedným zatvoreným koncom.

Doposiaľ sme sa venovali trubiciam valcového tvaru. Na opis kónických trubíc potrebujeme upravenú verziu vlnovej rovnice 27, tiež nazývanú *rovnica zvukovodu*

$$\frac{1}{S_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_t\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{35}$$

Môžeme ňou vypočítať režimy vibrácií v trubici tvaru kužeľa. V takýchto trubiciach sa polomer r lineárne zväčšuje od jedného konca k druhému $r = ax$, kde a je konštanta a teda plocha prierezu trubice sa rovná $S_t(x) = \pi r^2 = \pi a^2 x^2$. Po dosadení do rovnice 35 a následnej úprave, dostaneme

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{36}$$

Hľadáme riešenie rovnice v prípade, že na otvorenom konci kónickej trubice pri $x = L$ je tlakový uzol a na uzavretom konci pri $x = 0$ je rýchlostný uzol. Rovnako ako v prípade valcovej trubice, máme celú množinu takýchto riešení, ktoré majú tvar

$$p(x,t) = \frac{C}{x} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(2\pi f_n t\right) \tag{37}$$

kde f_n je frekvencia a C je konštanta, ktorá ovplyvňuje amplitúdu. Riešenia rovnice 37 sú podobná riešeniam rovnice 28 pre valcovú trubicu, ale rozhodujúcu úlohu tu zohráva faktora $\frac{1}{x}$ v prvom zlomku.

Pokiaľ je n celé číslo, rovnica 37 má požadovaný tlakový uzol $p = 0$ na otvorenom konci trubice pri $x = L$. Či je to skutočne riešenie rovnice zvukovodu, môžeme overiť dosadením rovnice 37 do rovnice 36. Postup je podobný ako v prípade valcovej trubice. Dostávame podmienku

$$\left(\frac{2\pi f_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 = 0 \tag{38}$$

A po úprave

$$f_n = n\frac{c}{2L} \tag{39}$$

Práve sme dokázali, že frekvencie v prípade kónickej trubice uzavretej na užšom konci sú rovnaké ako frekvencie pri valcovej trubice otvorenej na obidvoch koncoch. Základná frekvencia je $\frac{c}{2L}$ a nasledujúce režimy, sú celočíselné násobky, teda opäť dostávame harmonické tóny.

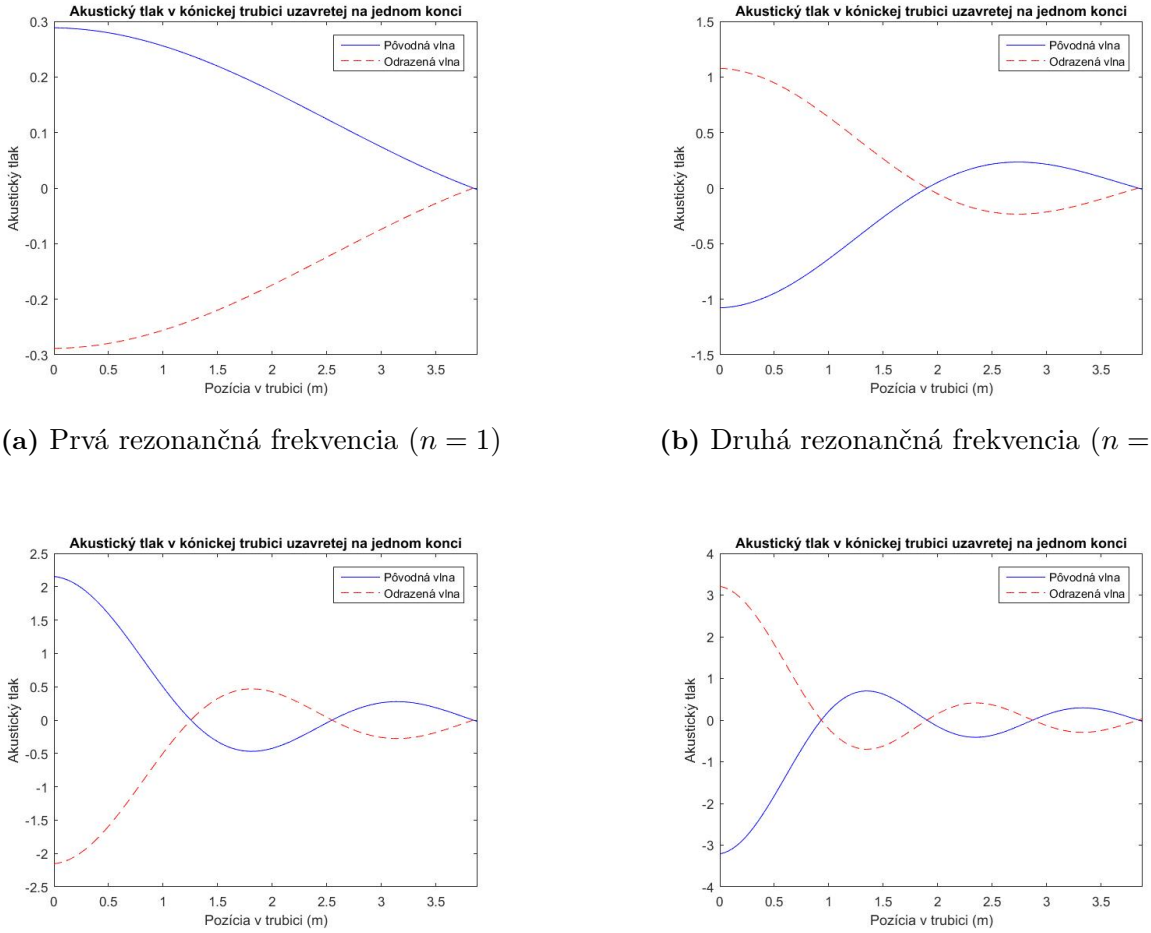
Ešte je ale potrebné dokázať, že naše riešenie má rýchlostný uzol na uzatvorenom konci kónickej trubice pri $x = 0$. Tlak pri $x = 0$ neklesne na nulovú hodnotu v rovnici 37. Mohli by sme predpokladať, že klesne kvôli výrazu $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$, ktorý sa rovná nule, ale netreba zabudnúť na výraz $\frac{1}{x}$. Ak x je malé, tak potom $\sin x \simeq x$, dostaneme

$$\frac{\sin\frac{\pi n x}{L}}{x} \simeq \frac{\frac{\pi n x}{L}}{x} = \frac{\pi n}{L} \tag{40}$$

teda na uzavretom konci potrubia je nenulový. A teda môžeme tvrdiť, že uzavretý koniec nie je tlakový uzol.

Tieto dôkazy sme ilustrovali aj modelovaním. Opäť máme štyri obrázky stojatého vlnenia v kónickej trubici s jedným zatvoreným koncom. Parametre pri programovaní boli rovnaké ako v prípade predchádzajúcich trubíc. Vidíme, že v mieste $x = L$ je tlakový uzol

a teda pre všetky rezonančné frekvencia je $p = 0$. V mieste, v ktorom je trubica uzavretá ($x = 0$) je rýchlostný uzol, teda nenulový tlak. Špecifickou vlastnosťou pre kónické trubice je klesajúci tlak pri zvyšovaní prierezu trubice. Narozdiel od konštantných hodnôt tlaku a amplitúdy pri valcovej trubici, v kónickej trubici hodnoty tlaku klesajú a amplitúda sa zmenšuje.



(a) Prvá rezonančná frekvencia ($n = 1$)

(b) Druhá rezonančná frekvencia ($n = 2$)

(c) Druhá rezonančná frekvencia ($n = 3$)

(d) Druhá rezonančná frekvencia ($n = 4$)

Obr. 19: Modelovanie prvých štyroch rezonančných frekvencií v kónickej trubici s jedným zatvoreným koncom.

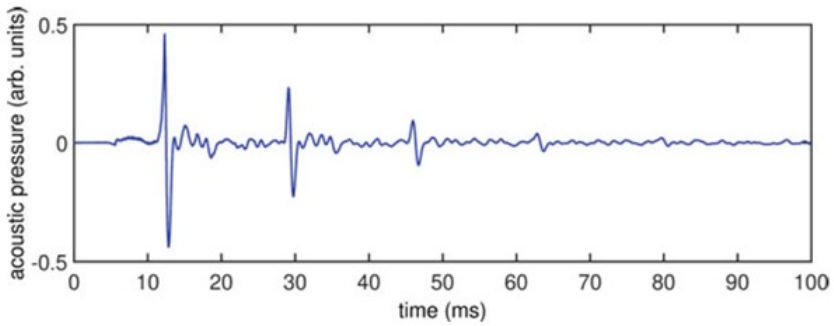
4.2.3 Časový prístup a frekvenčný prístup

Pri skúmaní akustického správania trubíc nátrubkových nástrojov môžeme použiť dva rôzne ale komplementárne prístupy: časový prístup a frekvenčný prístup. *Časový prístup* sa sústreďuje najmä na časový vývoj tlakových zmien vo vzduchovom stĺpci. Tento prístup je dôležitý pri skúmaní prechodných javov, ako napríklad pri začiatku hry nejakého tónu

alebo pri prechode medzi rôznymi tónmi. Na druhej strane, *frekvenčný prístup* skúma správanie nástroja pri rôznych frekvenciách a najčastejšie je využívaný pri skúmaní a popise neprerušovaných tónov.

Príkladom frekvenčného prístupu je zobrazenie uzlov a kmitní stojatého vlnenia. Toto zobrazenie ukazuje ako trubica odpovedá na excitáciu v nej obsiahnutého vzduchového stĺpca sínusovými impulzmi so špecifickou frekvenciou.

Príkladom časového prístupu je sledovanie priebehu tlaku vo zvukovej vlne generovanej nástrojom po údere dlane na nátrubok. Na obr. 20 je záznam z mikrofónu umiestneného pred ozvučnicou trombónu po ľahkom údere dlaňou na nátrubok.



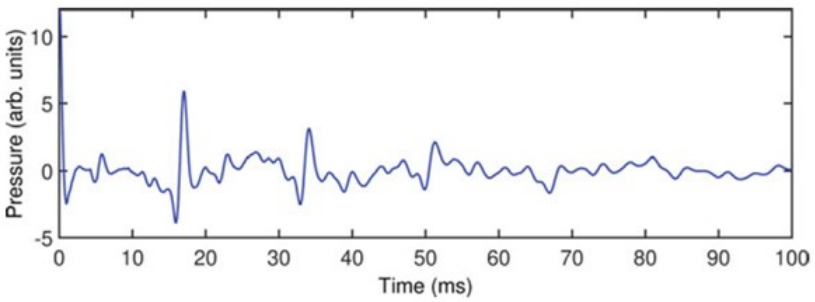
Obr. 20: Zvuk generovaný z trombónu po údere dlaňou na nátrubok [6]

Záznam bol spustený približne 4 ms pred úderom dlaňou. Prvý vrchol na zázname v čase $t = 12,3\ ms$ zodpovedá príchodu pulzu vyvolaného nárazom na nátrubok po tom, čo tento pulz prešiel celou trubicou trombónu. Do mikrofónu sa však dostala len malá časť zvukovej energie z uvedeného pulzu, pretože väčšina z nej sa odrazila od rozhrania trombónu s voľným okolitým vzduchom a postupovala späť smerom k nátrubku. Tu sa opäť odrazila od dlane, ktorá ho ešte stále zakrývala, a smerovala opäť k ozvučnici a po jej dosiahnutí vyvolala druhý vrchol na zázname. Celý proces sa zopakoval znovu a spôsobil vznik tretieho vrcholu na zázname.

4.2.4 Odpoveď na vstupný impulz a reflexná funkcia

Pri skúmaní ako pery hráča interagujú s akustickými rezonanciami nástroja je užitočné sledovať tlakové zmeny v nátrubku po tom čo tlakový pulz prejde nátrubkom do nástroja. Pretože pery hráča prakticky uzatvárajú vstup do nátrubku, môžeme vstup do nástroja považovať za uzavretý počas odrazu, ktorý nasleduje po iniciačnom tlakovom impulze.

Priebeh tlakových zmien, ktoré v nátrubku nastávajú v dôsledku tlakového impulzu, sa označuje ako *odpoveď nástroja na vstupný impulz*. Na obr. 21 je zobrazený príklad takejto odpovede pre trombón označovanej ako $g(t)$.



Obr. 21: Príklad odpovede na vstupný impulz $g(t)$ u trombónu [6]

Skutočnosť, že v tomto prípade, na rozdiel od predchádzajúceho, zaznamenávame zmeny tlaku v nátrubku a nie pred nástrojom, sa prejaví na čiastočne inom priebehu tlakových zmien.

V prípade, že vlna s rovinným čelom prechádza valcovou trubicou s konštantným polomerom, nedochádza k žiadnym odrazom pokiaľ vlna nepríde na koniec trubice. Akékoľvek zmeny polomeru, ktoré sa v nástrojoch bežne vyskytujú, však vyvolávajú odrazy časti zvukovej energie, ktoré smerujú naspäť k vstupu a prejavia sa v odpovedi nástroja na vstupný impulz $g(t)$. Funkcia $g(t)$ teda obsahuje všetky informácie o lineárnom akustickom správaní trubice nástroja, ktoré sú potrebné pre jeho modelovanie z časového hľadiska.

Vzhľadom na opakované odrazy na uzavretom vstupe nástroja môže odpoveď na vstupný impulz vykazovať pozorovateľné zmeny tlaku trvajúce významný zlomok sekundy. Výrazne kratší signál obsahujúci rovnaké informácie o akustickej odpovedi nástroja vieme získať, ak vstup do trubice utesníme materiálom, ktorý úplne absorbuje všetku prichádzajúcu zvukovú energiu. V takomto prípade na strane vstupu nedochádza k odrazom, pričom však viaceré odrazy môžu nastať v trubici vzhľadom na zmeny jej polomeru pri prvom prechode zvukovej vlny. Priebeh $r(t)$ tlaku v nátrubku získaný takýmto spôsobom sa nazýva *reflexnou funkciou*. V porovnaní s $g(t)$ poskytuje $r(t)$ výpočtovo efektívnejšie prístupy pri modelovaní lineárneho akustického správania daného nástroja.

V praxi sa nedá realizovať uzáver trubice, ktorý by úplne absorboval zvukovú energiu na vstupe do nátrubku nástroja. Reflexná funkcia sa však dá vypočítať na základe

vnútorného profilu trubice nástroja.

4.2.5 Vstupná impedancia

Zatiaľ čo reflexná funkcia je užitočným vyjadrením akustického správania nástroja pre výpočty pri časovom prístupe, vstupná impedancia $Z(\omega)$, ktorá sa používa pri frekvenčnom prístupe, poskytuje v podstate rovnaké informácie avšak spôsobom, ktorý je intuitívne omnoho viac spojený s hudobnými vlastnosťami nástroja.

Vstupnú impedanciu možno priamo definovať pomocou experimentu, pri ktorom excitačný signál v nátrubku nebude tlakový impulz, ale neprerušovaný sínusovo sa meniaci tlak

$$p(\omega) = p_a(\omega)e^{j\omega t} \tag{41}$$

generovaný prúdom vzduchu so sínusovo sa meniacim objemovým prietokom

$$u(\omega) = u_a(\omega)e^{j\omega t-\theta} \tag{42}$$

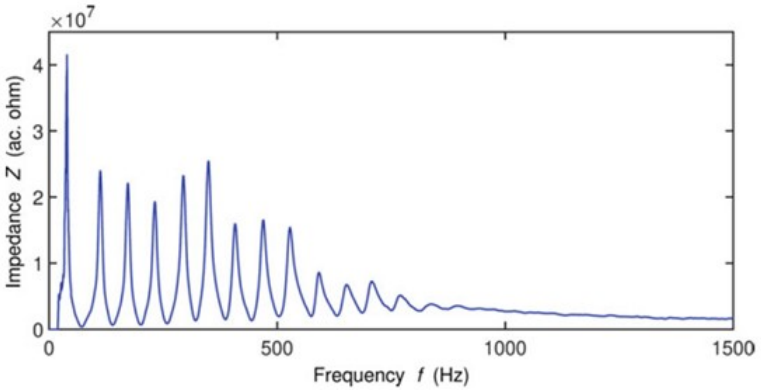
V predchádzajúcich dvoch vyjadreniach sme použili komplexnú reprezentáciu, ktorá sa v oblasti spracovania signálov kvôli zjednodušeniu matematických operácií často využíva. Použijeme ju aj v niektorých ďalších vzťahoch.

Amplitúda tlakového signálu je $p_a(\omega)$ Pa a amplitúda objemového prietoku je $u_a(\omega)$ m^3s^{-1}. Fázový posun medzi objemovým prietokom a výsledným tlakom je $-\theta$ radiánov.

Fázový posun je v tomto prípade potrebné chápať tak, že prúd vzduchu spôsobuje nárast tlaku, pričom ten nárast nastáva s istým oneskorením. Toto oneskorenie je pritom závislé od frekvencie ω. Konkrétne vyjadrenie tohto oneskorenia je uvedený fázový posun. Povedané inak, ak si zoberieme vzťahy 41 a 42, tak reálne zložky týchto komplexných čísel vyjadrujú fyzikálnu realitu, ktorá nás zaujíma. Konkrétne tlak p sa mení podľa vzťahu $p(\omega) = p_a(\omega)\cos(\omega t)$ a objemový prietok u sa mení podľa vzťahu $u(\omega) = u_a(\omega)\cos(\omega t - \theta)$. Toto znamená, že prúd vzduchu u prebieha tlak p o θ.

Vstupná impedancia je následne definovaná ako podiel tlaku a objemovej rýchlosti, pričom obe veličiny sa vyhodnocujú na úrovni vstupnej roviny do trubice

$$Z(\omega) = \frac{p(\omega)}{u(\omega)} = \left|\frac{p_a(\omega)}{u_a(\omega)}\right|e^{j\theta} \tag{43}$$



Obr. 22: Príklad priebehu vstupnej impedancie pre trombón [6]

Veľkosť $Z(\omega)$ je podiel tlaku v nátrubku a objemovej rýchlosti, a preto je jednotkou impedancie $Pasm^{-3}$. Táto jednotka sa často označuje ako akustický *ohm*.

Na obr. 22 je znázornená krivka vstupnej impedancie trombónu, ktorého odpoveď na vstupný impulz je na obr. 21. Tieto dva obrázky obsahujú v podstate rovnaké informácie o lineárnych akustických vlastnostiach vzduchového stĺpca nástroja, pričom na obr. 22 je ich vyjadrenie frekvenčným prístupom a na obr. 21 časovým prístupom.

Z rovnice 43 vyplýva, že frekvenčné spektrum $p(\omega)$ tlaku v nátrubku sa dá odvodiť z frekvenčného spektra $u(\omega)$ objemového prietoku cez nátrubok jednoduchým vynásobením vstupnou impedanciou

$$p(\omega) = Z(\omega)u(\omega) \tag{44}$$

Ekvivalentný výpočet cez časový prístup by sa robil s využitím odpovede na vstupný impulz $g(t)$:

$$p(t) = g(t) * u(t) \tag{45}$$

V tomto výraze $*$ označuje konvolúciu.

Reflexný koeficient $R(\omega)$ nástroja je komplexný pomer doprednej a spätnej (odrazenej) zvukovej vlny v nástroji. Tento koeficient súvisí so vstupnou impedanciou podľa vzťahu [8]

$$R(\omega) = \frac{Z(\omega) - Z_c}{Z(\omega) + Z_c} \tag{46}$$

kde Z_c je tzv. *charakteristická impedancia* vyjadrujúca impedanciu valcovej trubice pre doprednú zvukovú vlnu, ktorej veľkosť závisí od plochy jej prierezu, ale nie od frekvencie.

Reflexná funkcia v časovom prístupe je inverznou Fourierovou transformáciou reflexného koeficientu a odpoveď na vstupný impulz je inverznou Fourierovou transformáciou vstupnej impedancie

$$IFT[R(\omega)] = r(t) \tag{47}$$

$$IFT[Z(\omega)] = g(t) \tag{48}$$

Krivka vstupnej impedancie zobrazujúca závislosť veľkosti vstupnej impedancie od frekvencie sa stala štandardným nástrojom na zobrazenie a štúdium lineárnych akustických vlastností dychových nástrojov.

Osobitný význam má v prípade nátrubkových nástrojov, pretože explicitne zobrazuje frekvencie a amplitúdy ich prirodzených tónov.

5 Formulácia elementárneho modelu hry na nátrubkových nástrojoch

V tejto záverečnej kapitole spojíme skúmanie vibrujúcich pier z časti 4.1 a štúdium vlastností trubíc nátrubkových nástrojov z časti 4.2 do *elementárneho modelu fungovania nátrubkových nástrojov* zahŕňajúceho nástroj aj hráča.

Model sa nazýva elementárny kvôli použitiu značných zjednodušení pri jeho konštrukcii. Napriek zjednodušeniam, ktoré sme podrobnejšie popísali v časti 3.2.1, je model dobrým východiskom pre popis viacerých dôležitých aspektov hry na nátrubkových nástrojoch. Model je založený na troch rovniciach, ktoré treba vyriešiť súčasne na predikciu zvukového signálu vyžarovaného nástrojom.

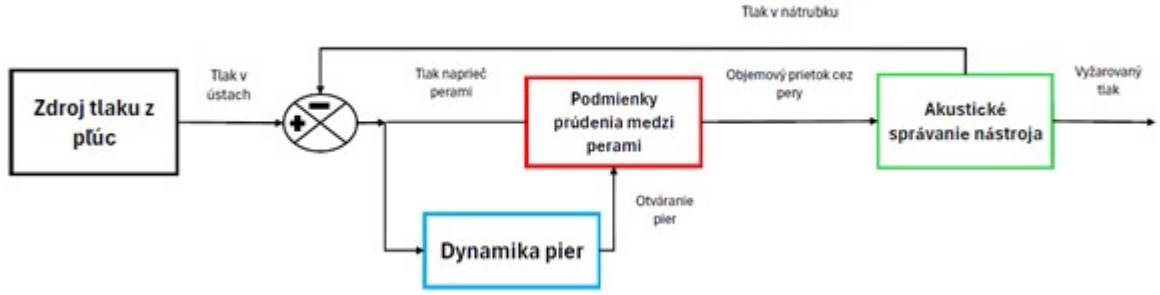
Predtým ako ukážeme, ako sa dajú naše rovnice skombinovať tak, aby popísali, čo sa deje pri hre na nátrubkovom nástroji, zosumarizujeme si základné prvky v procese tejto hry, ktoré sa musia odraziť v našom modeli.

Základná charakteristika fungovania nátrubkového nástroja pri hre sa dá sformulovať nasledovne: Zvuk nástroja vzniká v dôsledku vibrácií pier hráča pritlačených na nátrubok nástroja. Vibrácie pier pri ich vhodnom nastavení určenom v prvom rade ich napätím príslušnými svalmi tváre kontrolovanom hráčom vyvoláva a následne udržuje prúd vzduchu vychádzajúci z pľúc hráča a prechádzajúci ústnou dutinou a pokračujúci kanálom medzi perami hráča po prekročení prahovej hodnoty tlaku vzduchu v ústach, ktorým sa destabilizuje ich dovtedy rovnovážna poloha v pokojnom stave. Výsledkom je oscilujúci tlak vo vnútri nástroja, ktorý v prípade vhodnej frekvencie, ktorá je daná kombináciou uvedeného pretlaku, nastavenia pier a akustických vlastností nástroja, generuje zvuk nástroja.

Hráč na nátrubkový nástroj je schopný kontrolovať a modifikovať prirodzenú rezonančnú frekvenciu pier, ktorá vystupuje ako jeden parametrov v prvej rovnici modelu, a tak ju dostať na hodnoty zodpovedajúce výške tónov, ktoré majú byť hrané. Z toho dôvodu je dynamika pier podstatnou zložkou modelu hry na nátrubkový nástroj.

Prúd vzduchu prechádzajúci pomedzi pery vstupuje do nátrubku nástroja. Ventil tvorený perami a nástroj sa následne spoja pomocou akustickej spätnej väzby ako je znázornená na obr. 23. Oscilácie vzduchového stĺpca v nástroji sú zosilňované a riadené touto väzbou nelineárneho prvku generujúceho zvuk (ide o zdroj, ktorý je dôsledkom interakcie

s prúdom vzduchu z ventilu tvoreného perami) s trubicou, v ktorej prichádza k akumulácii akustickej energie v rezonančných módoch (stojaté vlnenie). Malá časť tejto akustickej energie nezostáva zachytená vo vnútri trubice, ale je vyžarovaná cez ozvučnicu.



Obr. 23: Spätná väzba ako bloková schéma interakcie medzi hudobníkom a nástrojom.

Keď je tento mechanický systém destabilizovaný, výsledkom môžu byť rôzne stabilné režimy oscilácií. Hra tónu s konštantnou výškou zodpovedá niektorému periodickému režimu so stálou fundamentálnou frekvenciou. Táto frekvencia sa často nazýva jednoducho *hranou frekvenciou*, hoci frekvenčné spektrum hraného tónu obsahuje štandardne mnoho harmonických komponentov. Hraná frekvencia je obvykle blízko niektorej z rezonančných frekvencií vzduchového stĺpca v trubici.

Generovanie oscilujúcich výstupov zo stáleho vstupu je charakteristickou vlastnosťou nelineárnych dynamických systémov akým je aj systém na obr. 23. V skutočnosti všetky tri komponenty reprezentované farebnými blokmi tohto systému vykazujú nelineárne správanie, pretože ani mechanická odozva pier (reprezentovaná modrým blokom), ani akustická odpoveď vzduchového stĺpca (reprezentovaná zeleným blokom) nie sú striktne nezávislé od amplitúdy. Avšak lineárny popis dynamiky pier v časti 5.1 poskytuje dobrú aproximáciu pre mierne úrovne hry. Rovnako tomu je pri popise akustickej odozvy nástroja pomocou jej lineárnej vstupnej impedancie obsiahnutej v časti 5.3. Silno nelineárne správanie celého dynamického systému je spôsobené povahou vzťahu medzi tlakom a prúdom vzduchu, ktorý je reprezentovaný červeným blokom na obr. 23 a bližšie uvedený v časti 5.2.

5.1 Prvá rovnica modelu: dynamika pier

Na popis vibrácie pier bola v časti 4.1.5 odvodená rovnica 19. V tejto rovnici popisujúcej pery ako mechanický oscilátor s jedným stupňom voľnosti reprezentujú symboly ω_l uhlovú

rezonančnú frekvenciu, q_l kvalitatívny faktor rezonancie pier, h_{eq} rovnovážnu hodnotu otvoru medzi perami a μ efektívnu hmotnosť prislúchajúcu jednotkovej ploche pier. Tieto hodnoty tvoria parametre modelu, ktoré sú konštantami pri hre stabilného tónu alebo sa predpísaným spôsobom menia pri hudobnom vystúpení. Táto rovnica zároveň obsahuje tri premenné a to čas t, výšku otvoru medzi perami $h(t)$ a tlak v nátrubku nástroja $p(t)$ s tým, že závisia od času a musia spĺňať uvedenú rovnicu.

Rovnica 19 môže popisovať správanie plátku reagujúceho dnu aj reagujúceho von v závislosti od použitého znamienka na pravej strane. Ukazuje sa, že u nátrubkových nástrojov prichádzajú do úvahy oba typu správania, prevažujúca tendencia je však použiť model pre prípad plátku reagujúceho von, preto má prvá rovnica modelu tvar so znamienkom mínus na pravej strane, teda

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{\omega_l}{q_l}\frac{dh(t)}{dt} + \omega_l^2(h(t) - h_{eq}) = -\frac{p(t)}{\mu} \tag{49}$$

5.2 Druhá rovnica modelu: podmienky prúdenia

Druhá rovnica modelu popisuje vzťah medzi tlakom a prúdom vzduchu v kanáli medzi perami. V tejto rovnici sú tlak v ústach p_m a hustota vzduchu ρ parametre, zatiaľ čo objemová rýchlosť $u(t)$, plocha prierezu kanála medzi perami S_{lc} a tlak v nátrubku $p(t)$ sú závislé premenné.

Ak je rozdiel tlakov pod odmocninou záporný, použijeme odmocninu absolútnej hodnoty a pred ňu dáme znamienko mínus. Keď príde k spojeniu pier, teda $S_{lc} = 0$, prúd vzduchu sa stane nulovým bez ohľadu na tlakový rozdiel.

V časti 4.1.1 sme uviedli rovnicu 5, ktorá uviedla vzťah medzi S_{lc} a h. Na účely elementárneho modelu predpokladáme, že $q = 1$, čo je ekvivalentné s predpokladom, že prierez kanála medzi perami je obdĺžnik s konštantnou šírkou w. Tento predpoklad sa dá dobre odôvodniť pre plátkové nástroje s jednoduchým plátkom, keď však modelujeme vibrujúce pery, ide o značné zjednodušenie. Ak ho akceptujeme, dostávame

$$S_{lc}(t) = wh(t) \tag{50}$$

Rovnicu 50 dosadíme do rovnice 26, čím dostaneme upravenú verziu druhej rovnicu

elementárneho modelu s tromi závislými premennými $u(t)$, $h(t)$ a $p(t)$:

$$u(t) = wh(t)\sqrt{\frac{2(p_m - p(t))}{\rho}} \tag{51}$$

5.3 Tretia rovnica modelu: akustika nástroja

Tretia rovnica modelu popisuje vzťah medzi prúdom vzduchu a tlakom v nátrubku nástroja. Tento vzťah sme vyjadrili s použitím frekvenčného prístupu pomocou vstupnej impedancie $Z(\omega)$. A tiež aj z pohľadu časového popisu pomocou funkcie $g(t)$ vyjadrujúcej odpoveď nástroja na vstupný impulz. Na tomto mieste uvádzame frekvenčnú verziu

$$p(\omega) = Z(\omega)u(\omega) \tag{52}$$

Táto rovnica sa dá viacerými spôsobmi transformovať na lineárny vzťah v časovej oblasti medzi premennými $p(t)$ a $u(t)$.

5.4 Konečný tvar elementárneho modelu

Máme teda tri rovnice definujúce vzťahy medzi tromi časovými premennými $p(t)$, $u(t)$ a $h(t)$ použité pre popis elementárneho modelu fungovania hry na nátrubkové nástroje. Pretože počet premenných sa rovná počtu rovníc, je v princípe možné odvodiť riešenia, v ktorých je časová závislosť každej z premenných vyjadrená pomocou parametrov modelu, ktoré definujú fyzikálne vlastnosti pier a nástroja.

Konečný tvar elementárneho modelu teda je

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{\omega_l}{q_l}\frac{dh(t)}{dt} + \omega_l^2(h(t) - h_{eq}) = -\frac{p(t)}{\mu} \tag{49}$$

$$u(t) = wh(t)\sqrt{\frac{2(p_m - p(t))}{\rho}} \tag{51}$$

$$p(\omega) = Z(\omega)u(\omega) \tag{52}$$

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali matematickému modelovaniu fungovania nátrubkových nástrojov, ktoré sú súčasťou dychových hudobných nástrojov, ktoré tvoria veľkú podskupinu hudobných nástrojov. Všetky dychové hudobné nástroje generujú zvuku rozvibrovaním samotného vzduchu v ich trubici. Tento proces zahŕňa vytvorenie stojatého vlnenia a stacionárne vibrácie vo vnútri trubice. Následne časti vibrácií vychádza cez otvor trubice von vo forme zvuku.

Hlavným cieľom našej práce bolo charakterizovať matematické modely vybraných aspektov fungovania dychových hudobných nástrojov. Na tento účel sme si vybrali fungovanie nátrubkových nástrojov.

V prvej kapitole sme si zadefinovali pre našu prácu kľúčové pojmy z hudobnej akustiky ako napríklad *zvuk*, *amplitúda*, *perióda* či *frekvencia*. Na konkrétnych príkladoch sme si vysvetlili jednoduchý harmonický pohyb, ktorý úzko súvisí so správaním pier hudobníka počas hry na nátrubkovom nástroji a šírenie zvukových vĺn v dvojrozmernom priestore pre dva rôzne pohľady: sledovanie šírenia v čase pri pevnom bode v priestore alebo v priestore pri zafixovanom čase. Tieto pohľady boli kľúčové pre modelovanie stojatého vlnenia v trubici nástroja v časti 4.2.2.

V druhej kapitole predstavili hlavné časti dychových nástrojov a ich úlohu pri tvorbe zvuku. Pomocou Hornbostel-Sachsovej klasifikácie sme zadefinovali nátrubkové nástroje.

Na začiatku tretej kapitoly sme na výstupoch z konkrétnych meraní publikovaných v literatúre porovnali tlakové pomery vyžarovaného zvuk do okolitého prostredia (časť 3.1.1), v nátrubku (časť 3.1.2) a v ústach hráča (časť 3.1.3). Namerané hodnoty tlaku boli rádovo vyššie v nátrubku a v ústach hráča, merané na úrovni kPa, zatiaľ čo mimo nástroja len na úrovni Pa. Následne sme sa venovali perám hudobníka, ktoré predstavujú ventilový zdroj zvuku (časť 3.1.4), čo je spôsobené pravidelným otváraním a zatváraním pier, ktorým je regulované prúdenie vzduchu. V druhej časti tejto kapitoly sme vysvetlili základný vzťah medzi hudobníkom a nástrojom, ako spätná väzba (časť 3.2.2) ovplyvňuje pery hráča a jeho schopnosť hrať určité výšky tónov (časť 3.2.4) a akými spôsobmi je hudobník schopný doplniť chýbajúce výšky tónov (časť 3.2.5).

Štvrtá kapitola bola zameraná na modelovanie správania pier hudobníka. Vysvetlili sme prečo je dôležitá plocha otvoru medzi perami a nie samotný tvar otvoru (časť 4.1.1),

a že vibrujúce pery, ktoré pri hre na nátrubkový nástroj reagujú smerom von (časť 4.1.5), môžeme opísať pomocou modelu výkyvných dverí (časť 4.1.4). Pomocou Bernoulliho rovnice sme vysvetlili prúdenie vzduchu a následne zadefinovali rovnicu akustického objemového prietoku (časť 4.1.7). Prostredníctvom vlnovej rovnice sme modelovali stojaté vlnenie pre valcovu a kónicku trubicu (časť 4.2.2). A nakoniec sme zadefinovali pojem vstupnej impedancie (časť 4.2.5).

Štvrtá kapitola predstavovala základy pre odvodenie troch rovníc elementárneho modelu, ktorý aj napriek určitej miere zjednodušení vierohodne modeluje hru na nátrubkové nástroje, ako uvádzame v piatej kapitole.

Táto diplomová práca predstavuje pomerne detailne vysvetlenie fungovania nátrubkových nástrojov. Je jednou z prvých prác v slovenskom jazyku, ktorá dôkladne rozobrala túto problematiku. Zároveň predstavuje vhodný základ pre ďalšie modelovanie s využitím elementárneho modelu hry na nátrubkových nástrojoch.

Zoznam použitej literatúry

[1] *15.2: Simple Harmonic Motion*, LibreTexts, PHYSICS, dostupné na internete (24.2.2024): https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_(OpenStax)/Book%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/15%3A_Oscillations/15.02%3A_Simple_Harmonic_Motion

[2] Brass in school: *How valves are used to change the note played*, dostupné na internete (10.4.2024): https://ntbis.org.uk/brass-music/how-do-brass-instruments-work/how-valves-are-used-to-change-the-note-played/

[3] Benade, A. H.: *On the propagation of sound waves in a cylindrical conduit.*, J. Acoust. Soc., 1968

[4] Bouasse, H.: *Instruments à vent tomes I et II*, Paris, Delagrave; 1929

[5] Boutin, H. a kol.: *'Warming up' a wind instrument: The time-dependent effects of exhaled air on the resonances of a trombone*, Acoustical Society of America, 2020, dostupné na internete (10.3.2024): chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.phys.unsw.edu.au/jw/reprints/warming.pdf

[6] Campbell, M., Gilbert, J., Myers, A.: *The Science of Brass Instruments*, Springer, Switzerland, 2021

[7] CIMCIM, ICOM International Committee of Museums and Collections of Instruments and Music: *Classification of Musacal Instruments*, 2011, dostupné na internete (19.3.2024): https://cimcim.mini.icom.museum/wp-content/uploads/sites/7/2019/01/H-S_20classification_20final_20version_20_282013_29_20without_20editorial_20markings-2.pdf

[8] Fletcher, N.H., Rossing, T.D.: *The Physics of Musical Instruments*, Springer, Switzerland, 2005

[9] Hartmann, W. M.: *Principles of Musical Acoustics*, Springer Science+Business Media, New York, 2013

[10] Helmholtz, H. L.F.: *Die Lehre von den Tonempfingungen* (1877), 4th Ed. Braunschweig, Friedrich Vieweg. English translation with additional material: Ellis, A.J. *On the Sensations of Tone*, 2nd Ed.London, Longman, Green and Co., 1885; resp. New York, Dover, 1954

[11] Hornbostel, E.M.von, Sachs, C.: *Classification of Musical Instruments. Translated from the Original German by Anthony Baines and Klaus P.Waschmann*, Galpin Society Journal 14, 1961

[12] Hornbostel, E.M.von, Sachs, C.: *Systematik der Musikinstrumente Ein Versuch*, Zeitschrift für Ethnologie: Organ der Berliner Gesellschaft für Antropologie, Ethologie und Urgeschichte, 1914

[13] Lee, D.: *Chornbostel-Sachs Classification of Musical Instruments.*, Knowledge Organization, 2019, dostupné na internete (19.3.2024): `https://www.isko.org/cyclo/hornbostel`

[14] Mederly, P.: *Prednášky z Matematiky a hudby*, učebné texty, FMFI UK Bratislava, 2023

[15] Musical Instrument Museums Online: *Revision of the Hornbostel-Sachs Classification of Musical Instruments by the MIMO Consortium*, 2011, dostupné na internete (19.3.2024): `https://cimcim.mini.icom.museum/wp-content/uploads/sites/7/2019/01/H-S_20classification_20final_20version_20_282013_29_20without_20editorial_20markings-2.pdf`

[16] Nachtmann, G. a kol.:*BELL VIBRATIONS AND RADIATED SOUND OF BRASS WIND INSTRUMENTS - IS THERE AN AUDIBLE CORRELATION?*, Institute of Musical Acoustics, 2007, dostupné na internete (11.2.2024): `https://www.researchgate.net/publication/230845005_Bell_vibrations_and_radiated_sound_of_brass_wind_instruments_--_is_there_an_audible_correlation`

[17] Newman M.: *The Science of Music*, University of Michigan, 2023

[18] Poul, F., Čuvaj, M.: *Teória nahrávania hudobných nástrojov, učebnica pre študentov Ateliéru zvukovej skladby*, Vysoká škola múzických umení Bratislava, Bratislava, 2018

[19] Purves D. a kol.: *Neuroscience, sixth edition*, Oxford University Press, 2018

[20] Wolfe, J.:*Air speed in wind instruments:how important are they?*, THE UNIVERSITY NEW SOUTH WALES (UNSW), dostupné na internete (27.12.2023): `https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/air-speed.html`

[21] Wolfe, J. a kol.: *An Experimentally Measured Source-Filter Model: Glottal Flow, Vocal Tract Gain and Output Sound from a Physical Model*, Australian Acoustical Society, 2016, dostupné na internete (25.2.2024):`chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.phys.unsw.edu.au/jw/reprints/Source-Filter.pdf`

[22] Wolfe, J.: *Brass instrument (lip reed) acoustics: an introduction*, THE UNIVERSITY NEW SOUTH WALES (UNSW), dostupné na internete (30.11.2023): `https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/brassacoustics.html`

[23] Wolfe, J. a kol.: *The Interactions Between Wind Instruments and their Players*, The University of New South Wales, 2015, dostupné na internete (28.2.2024):`chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.phys.unsw.edu.au/jw/reprints/Wind-Instrument-Overview.pdf`

Príloha A

Odvodenie vlnovej pre valcovú trubicu rovnice podľa [17]

Predpokladajme, že zvuková vlna prechádza cez vzduch v trubici dychového nástroja, ako vidieť na obr. 24, v ktorom tieňovanie predstavuje zmenu akustického tlaku. Predpokladajme, že trubica má plochu prierezu S a polohu vlny pozdĺž trubice meriame podľa x.



Obr. 24: Zvuková vlna prechádzajúca cez trubicu. Vzdialenosť pozdĺž trubice sa meria pomocou x a tieňovanie predstavuje zmenu tlaku. Zoberieme do úvahy malý kúsok vzduchu, ako je znázornené, so šírkou dx a vypočítame silu tlaku vzduchu, ktorý naň pôsobí z oboch strán.[17]

Uvažujme úzky výsek vzduchu v trubici medzi polohami x a $x + dx$. Tlak vzduchu naľavo od výseku pôsobí na výsek silou rovnou $P(x,t)S$, kde $P(x,t)$ je celkový tlak na ľavej strane od výseku v danom čase t. Zároveň tlak na pravej strane od výseku $P(x + dx, t)$ pôsobí na výsek v opačnom smere silou rovnajúcou sa $P(x + dx, t)S$. Výsledná sila pôsobiace na výsek potom je

$$F = P(x,t)S - P(x + dx, t)S = \frac{P(x,t) - P(x + dx, t)}{dx} Sdx = -\frac{\partial P}{\partial x} V \qquad (53)$$

Na zvukovú vlnu sa môžeme pozrieť aj cez pohyb vzduchu. Molekuly vzduchu sa pohybujú neustále. Narážajú navzájom do seba, do stien trubice a pod. Tieto pohyby sú náhodné, takže ich vo všeobecnosti môžeme ignorovať: vzduch sa vo všeobecnosti vôbec nepohybuje. Túto skutočnosť ale prítomnosť zvukových vĺn zmení. Keď je prítomný akustický tlak, dochádza k zvyšovaniu alebo znižovaniu tlaku v porovnaní s jeho normálnym atmosferickým tlakom. Vzduch prúdi okolo aby vyrovnal daný tlak, čo vytvára výsledný celkový pohyb. Celkové posunutie vzduchu z jeho neutrálnej polohy označíme $\xi(x,t)$ a zrýchlenie bude druhou deriváciou tohto posunu.

Predpokladajme, že hustota vzduchu je ρ. To znamená, že hmotnosť uvedeného výseku vzduchu je $m = \rho V$, kde V predstavuje objem. Teraz máme výraz pre silu F výseku, jeho

hmotnosť m a jeho zrýchlenie a. Z druhého Newtonovho pohybového zákonu vieme, že tieto tri veličiny spolu súvisia podľa $F = ma$, a preto máme

$$-\frac{\partial P}{\partial x}V = \rho V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{54}$$

Následne môžeme vykrátiť objem V a za predpokladu, že atmosferický tlak je konštantný, dostaneme

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{55}$$

Teraz sa pozrieme na stlačiteľnosť vzduchu. Ak máme objem V vzduchu pri bežnom atmosferickom tlaku a stlačíme ho, dôjde k zmenšeniu tohto objemu o malé množstvo ΔV, ale zároveň dôjde k malému navýšeniu tlaku. Tento tlak je presne to, čo nazývame akustický tlak p. Dodatočný tlak je úmerný zmene objemu $\frac{\Delta V}{V}$, teda

$$p = -B\frac{\Delta V}{V} \tag{56}$$

Znamienko mínus je prítomné, pretože tlak narastá, keď objem klesá. Konštanta úmernosti B je tiež nazývaná objemový modul pružnosti a je prirodzenou vlastnosťou vzduchu.

Keď zvuková vlna prejde cez daný výsek vzduchu, vzduch na jeho ľavom konci v polohe x sa pohne o vzdialenosť $\xi(x,t)$, čím sa objem výseku zmenší o časť $\xi(x,t)S$. Zároveň sa vzduch na pravom konci výseku pohne o vzdialenosť $\xi(x+dx,t)$, čím sa objem výseku zvýši o časť $\xi(x+dx,t)S$. Takéto výsledné navýšenie objemu je

$$\Delta V = \xi(x+dx,t)S - \xi(x,t)S = \frac{\xi(x+dx,t)-\xi(x,t)}{dx}Sdx = \frac{\partial \xi}{\partial x}V \tag{57}$$

Ak výraz 57 dosadíme za ΔV v rovnici 56, dostaneme

$$p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{58}$$

Teraz dvakrát zderivujeme rovnicu 58 vzhľadom na čas t, čím dostaneme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -B\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{59}$$

V poslednej rovnosti sme využili rovnicu 55. Tento výsledný vzťah následne upravíme na tvar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{60}$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{61}$$

Rovnica 60 je *vlnová rovnica pre zvukové vlny*. Opisuje ako sa akustický tlak p mení v priestore a čase.

Vlnová rovnica má dve všeobecné riešenia:

$$p(x,t) = f(x - ct) \tag{62}$$

$$p(x,t) = f(x + ct) \tag{63}$$

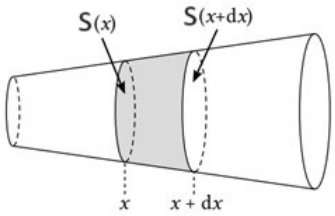
kde $f(x)$ je ľubovoľná funkcia závislá od x.

Príloha B

Odvodenie vlnovej rovnice pre kónickú trubicu podľa [17]

V prípade kónických trubíc potrebujem pôvodnú vlnovú rovnicu mierne modifikovať.

Posun vzduchu pozdĺž trubice je $\xi(x,t)$ v polohe x a čase t. Predpokladajme, že plocha prierezu trubice $S(x)$ sa mení podľa polohy x. Uvažujme výsek trubice od x do $x+dx$, ako môžeme vidieť na Obr.25



Obr. 25: Kónická trubica s výsekom od polohy x do $x+dx$ a narastajúcim prierezom od $S(x)$ do $S(x+dx)$ [17]

Keď sa vzduch v tejto časti vytlačí, jeho objemová zmena je daná rovnicou, ktorá zohľadňuje, že plocha na oboch koncových častiach je odlišná.

$$\Delta V = \xi(x+dx,t)S(x+dx) - \xi(x,t)S(x) = \frac{\partial(\xi S)}{\partial x}dx = \frac{\partial(\xi S)}{\partial x}\frac{V}{S(x)} \tag{64}$$

kde $V = S(x)dx$ je pôvodný objem vzduchu. Ak dosadíme rov.64 do rov.56 z Prílohy A, dostaneme akustický tlak

$$p = -\frac{B}{S}\frac{\partial(\xi S)}{\partial x} \tag{65}$$

kde B je objemový modul pružnosti vzduchu. Táto rovnica je zovšeobecnením rovnice58, teda ak plocha S je pozdĺž trubice konštantná, dostávame valcový typ trubice.

Zvyšok odvodzovania prebieha ako v Prílohe A. Druhým Newtonovým pohybovým zákonom dostaneme vzťah

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{66}$$

Dvakrát zderivujeme rovnicu 65 podľa času t, pričom je dôležité si všimnúť, že $S(x)$ je od času nezávislé a súčasne využijeme rovnicu 66, čím dostaneme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{B}{S}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial(\xi S)}{\partial x} = -\frac{B}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = \frac{B}{\rho S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{67}$$

Teraz využijeme fakt, že $\frac{B}{\rho} = c^2$ (rov.61). Dostaneme nasledovný tvar rovnice

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{68}$$

Táto upravená verzia vlnovej rovnice je tiež nazývaná *rovnica zvukovodu* „horn equation“ alebo Websterova rovnica. Popisuje vibrácie vzduchu vo vnútri potrubia s rôznou plochou prierezu.