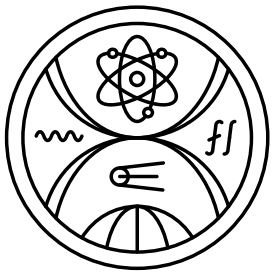
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OPTIMALIZÁCIA PREDAJNEJ STRATÉGIE VÝROBY ELEKTRICKEJ ENERGIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024 Bc. Viliam Artúr NANDRASKÝ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMALIZÁCIA PREDAJNEJ STRATÉGIE VÝROBY ELEKTRICKEJ ENERGIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Bratislava 2024 **Bc. Viliam Artúr NANDRASKÝ**



33722545

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Viliam Artúr Nandraský
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimalizácia predajnej stratégie výroby elektrickej energie
Optimization of electricity generation hedging strategy

Anotácia: V spoločnostiach vyrábajúcich elektrickú energiu sa za účelom zaistenia cenovej hladiny na forwardových komoditných trhoch a eliminácie rizika prameniaceho z prípadných poklesov cien predáva elektrina na niekoľko rokov dopredu. Využívajú sa na to dostupné odberové obchodné produkty, ktoré nedokonale korešpondujú s vyrobeným diagramom. Diskrepancie sú vyrovnávané neskôr pri vyššej likvidite príp. až na denných trhoch. Vzniká teda riziko posunu hodnoty vyrobeného diagramu a použitých produktov. Ďalšie riziko pramení z poklesu výroby oproti plánu a to v dôsledku sucha (vodné elektrárne) alebo predĺženia pravidelných odstávok (jadrové elektrárne.) Práca ponúka možnosť navrhnúť model na optimalizáciu predajnej stratégie. Z matematického hľadiska ide o úlohu stochastického optimálneho riadenia, ktorá sa v praxi rieši prevažne diskretizáciou a metódou dynamického programovania. Konzultantom práce je Mário Igaz zo spoločnosti Slovenské elektrárne, a.s., teamleader pre stratégiu predaja. Diplomant pracuje s reálnymi vstupmi zo spoločnosti. Prácu je možné a vhodné skombinovať s platenou stážou a vyžaduje si študenta so záujmom o riešenie praktických problémov.

Cieľ: Vychádzajúc z teórie stochastického optimálneho riadenia navrhnúť a vytvoriť algoritmus optimalizujúci predaný objem budúcej vyrobenej elektrickej energie s prihliadnutím na riziká z toho prameniace, v rámci obmedzení komoditného trhu. Možnosťou je aj porovnať viaceré metódy riešiace problém.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 10.01.2023

Dátum schválenia: 11.01.2023 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcel poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce Mgr. Jane Szolgayovej, PhD. za pomoc, ochotu, odborné rady a inšpiratívne pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa chcel poďakovať aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu. Taktiež by som sa chcel poďakovať svojim kolegom zo Slovenských elektrární a.s. za ich praktické rady a skúsenosti, ktoré mi boli ochotní poskytnúť. Nakoniec by som sa chcel poďakovať Nilsovi Löhndorfovi za sprístupnenie jeho optimalizačného softvéru na akademické účely.

Abstrakt v štátnom jazyku

NANDRASKÝ, Viliam Artúr: Optimalizácia predajnej stratégie výroby elektrickej energie [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2024, 64 s.

Práca sa zaoberá optimalizáciou predaja výroby elektrickej energie. Vyrobená elektrická energia je predávaná na dlhšie obdobie dopredu pomocou dlhodobých energetických kontraktov. Cieľom optimálnej stratégie bude maximalizovať zisk plynúci z predaja elektrickej energie a zároveň minimalizovať riziko spôsobené fluktuáciami na trhu s elektrinou. Formulujeme rôzne typy modelov na vytvorenie optimálnej stratégie predaja elektrickej energie. Prvým typom je model založený na princípe iteratívneho riešenia úloh lineárneho programovania. Druhým typom sú dva modely založené na princípoch stochastického optimálneho riadenia. Prvý stochastický model maximalizuje strednú hodnotu výnosov z predaja, kde ceny elektrickej energie vstupujú do modelu vo forme stochastického procesu. Tento model reprezentuje rizikovo neutrálneho investora. Druhým stochastickým modelom je rozšírenie o rizikovú mieru CVaR, ktorá predstavuje averziu k riziku. Modely následne testujeme na dátach z obdobia 2019 až 2021, čiže pred energetickou krízou. Tieto výsledky zovšeobecňujeme pomocou generovania simulovaných cenových scenárov, na ktorých testujeme a porovnávame modely.

Kľúčové slová: Stochastické optimálne riadenie, lineárne programovanie, trh s elektrinou, podmienená hodnota v riziku

Abstract

NANDRASKÝ, Viliam Artúr: Optimization of electricity generation hedging strategy [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2024, 64p.

The thesis focuses on optimizing the sale of electricity production. The produced electrical energy is sold for longer periods in advance through long-term energy contracts. The goal of the optimal strategy is to maximize the profit from the sale of electrical energy while minimizing the risk caused by fluctuations in the electricity market. We formulate various types of models to create an optimal strategy for selling electrical energy. The first type is a model based on the principle of iteratively solving linear programming problems. The second type consists of two models based on the principles of stochastic optimal control. The first stochastic model maximizes the expected revenue from sales, where electricity prices enter the model as a stochastic process. This model represents a risk-neutral investor. The second stochastic model extends to the risk measure CVaR, which represents risk aversion. We then test the models on data from the period 2019 to 2021, before the energy crisis. These results are generalized using simulated price scenarios, on which we test and compare the models.

Keywords: Stochastic optimal control, linear programming, electricity market, conditional value at risk

Obsah

Úvod **9**

1 Trh s elektrinou **11**

1.1 Elektrická energia a výkon 11

1.2 Bilaterálne obchodovanie 12

1.3 Spotové trhy 13

1.4 Termínované trhy 14

1.4.1 Produkty s fyzickou dodávkou 14

1.4.2 Produkty s finančným vysporiadaním 15

1.5 Vysporiadanie burzových trhov 16

1.5.1 Vysporiadanie na spotovom trhu 16

1.5.2 Vysporiadanie termínovaných obchodov 17

2 Sekvenčný deterministický model **18**

2.1 Motivácia za vytvorením modelu 19

2.2 Predikcia ceny energetických produktov z cien komodít 20

2.3 Formulácia modelu 22

2.4 Testovanie modelu na historických dátach 24

2.5 Testovanie modelu na simulovaných dátach 29

2.6 Výsledky sekvenčného deterministického modelu 36

3 Modely so stochastickým optimálnym riadením **37**

3.1 Optimálne riadenie 37

3.1.1 Stochastické optimálne riadenie 39

3.1.2 Stochastické duálne dynamické programovanie 40

3.2 Stochastický model so strednou hodnotou 41

3.2.1 Formulácia modelu so strednou hodnotou 41

3.2.2 Splnenie predpokladov pre metódu SDDP 42

3.2.3 Nastavenie vstupných parametrov a diskretizácia procesov 43

3.2.4 Výstupy modelu 45

3.2.5 Testovanie modelu so strednou hodnotou 46

3.3 Stochastický model s rizikovou mierou 50
3.3.1 Rizikové miery 51
3.3.2 Formulácia modelu s rizikovou mierou 52
3.3.3 Testovanie modelu s rizikovou mierou 53
3.3.4 Vplyv miery averzie k riziku 57
3.4 Výsledky stochastických modelov 58

Záver **60**

Zoznam použitej literatúry **62**

Úvod

Spoločnosti vyrábajúce elektrickú energiu predávajú elektrickú energiu na forwardových komoditných trhoch za účelom zaistenia cenovej hladiny a eliminácie rizika plynúceho z fluktuácií na trhu s elektrinou. Existuje viacero faktorov, ktoré vplývajú na cenu elektrickej energie - od plánovaných odstávok výroby až po nečakané geopolitické zmeny vplývajúce na ceny komodít a výrobných zdrojov, ktoré sa následne premietnu do výslednej ceny elektrickej energie. Výrobcovia elektrickej energie využívajú dostupné obchodné produkty, pri ktorých je cena zazmluvnená na dlhšie obdobie dopredu. Cieľom našej práce je vytvoriť model, ktorý určí optimálnu predajnú stratégiu očakávanej výroby v budúcnosti. Pod optimálnou stratégiou rozumieme takú, ktorá vedie k maximálnemu očakávanému výnosu z predaja. V neskorších častiach práce do účelovej funkcie zahrnieme aj rizikovú mieru podmienenú hodnotu v riziku.

V prvej kapitole uvedieme a vysvetlíme základné pojmy a princípy, ktoré sa na trhu s elektrinou využívajú. Na prvý pohľad sa trhy s elektrinou môžu javiť ako veľmi podobné klasickým finančným trhom. Majú ale aj svoje špecifiká a pri fyzických dodávkach produktov sa značne líšia od čisto finančných trhov. V nasledujúcich kapitolách sa síce budeme zaoberať len jedným typom produktu, avšak pre porozumenie širšieho kontextu predstavíme aj iné typy energetických produktov. Trhy s elektrinou sa neustále menia a postupne vznikajú nové exotickejšie produkty a deriváty, ktoré je možné obchodovať. Tieto produkty sa v našej práci vyskytovať nebudú, ale existuje viacero článkov, ktoré sa problematikou ich obchodovania zaoberajú.

V druhej kapitole uvedieme a vysvetlíme model založený na opakovanom riešení úlohy lineárneho programovania. Model sme testovali na reálnych dátach z rokov 2019 až 2021. Následne analyzujeme agregované výsledky získané z vygenerovaných cenových scenárov. Nedostatky navrhnutého modelu sa objavia pri rozhodovaní sa na dlhšie obdobie dopredu, keďže model využíva len lokálnu informáciu o cenách energetických produktov.

V tretej kapitole uvedieme a vysvetlíme model založený na princípe stochastického optimálneho riadenia, ktorého cieľom je vylepšiť nedostatky predchádzajúceho modelu. Tento prístup je ako teoreticky, tak aj výpočtovo zložitejší a na jeho riešenie použijeme komerčný solver QUASAR od N. Löhndorfa, ktorý bol pre nás dočasne dostupný na akademické účely. Kvalitatívne výsledky z modelu interpretujeme a porovnávame s pred-

chádzajúcim modelom. Pri navrhovaní modelu najskôr v účelovej funkcií optimalizujeme len strednú hodnotu výnosov, ktorá reprezentuje rizikovo neutrálneho investora, avšak neskôr zakomponujeme do optimalizácie aj averziu voči riziku v podobe rizikovej miery CVaR.

V závere zhrnieme všetky podstatné pozorovania, ktoré sa pri tvorení tejto práce vyskytli. Uvedieme výhody a nevýhody používania jednotlivých modelov spolu s ich celkovými výsledkami. Modely porovnávame na základe ich výsledných charakteristík.

1 Trh s elektrinou

Vzhľadom na to, že trh s elektrinou je pomerne komplikovaný a obsahuje veľké množstvo pojmov a skratiek, rozhodli sme sa v prvej kapitole zhrnúť všetky podstatné informácie o danom trhu podľa knihy [5]. Pre hlbšie pochopenie matematických modelov, uvedených v ďalších kapitolách je potrebné sa oboznámiť s operáciami, ktoré na trhu s elektrinou prebiehajú.

1.1 Elektrická energia a výkon

Energetické spoločnosti tvoria časť priemyslu, ktorá zodpovedá za výrobu, transformáciu alebo distribúciu rôznych foriem energie. Najčastejšie ide o výrobu elektrickej energie, avšak významnou časťou je aj výroba tepelnej energie. Existuje množstvo spôsobov, ako vyrábať elektrickú energiu vzhľadom na výrobné zdroje. Od uhlia, ropy, jadrového paliva, zemného plynu, až po obnoviteľné zdroje energie (OZE), medzi ktoré patrí voda, vietor a slnečné žiarenie. Až na rozdiely pri spôsobe výroby elektrickej energie, možnosti modulovania či jednoduchosti odstavenia sa dajú všetky elektrárne zhrnúť do jednej charakteristiky, ktorou je inštalovaná kapacita. Inštalovaná kapacita udáva maximálny možný výkon danej elektrárne. Výkon má fyzikálnu jednotku watt [W], avšak pre naše účely a vzhľadom na zaužívané praktiky na trhu s elektrinou budeme prevažne používať jednotku megawatt [MW], teda milión wattov. Ak by nás zaujímalo, koľko elektrickej energie vyrobí elektráreň za hodinu, dostaneme sa ku jednotke [MWh]. Je zrejmé, že budeme preferovať jednotku energie v tomto tvare, narozdiel od ekvivalentného počtu joulov [J]. Elektrárne pri svojej výrobe nemajú konštantný výkon, najviditeľnejšie je to práve pri fotovoltických elektrárňach, v ktorých sa výkon mení počas celého dňa. Je preto vhodné hovoriť o takzvanom priemernom výkone, často označovanom jednotkou [MWh/h].

Momentálne nie je skoro žiadny spôsob, ako dlhodobo skladovať elektrickú energiu. Existuje možnosť konverzie elektrickej energie na chemickú alebo mechanickú energiu, za účelom skladovania energie. Každá z týchto možností však spôsobuje určitú nezanedbateľnú stratu. Je preto potrebné, aby bola všetka vyrobená elektrická energia spotrebovaná. Nadmerný výkon by mohol spôsobiť poškodenie prenosovej sústavy, zatiaľ čo príliš nízky výkon by spôsobil výpadky dodávok elektrickej energie pre odberateľov. Dodávanie elek-

trickej energie si preto vyžaduje dôsledné plánovanie. V našej práci sa budeme zaoberať len predajom vyrobenej elektrickej energie pomocou trhových mechanizmov, ktoré sú na to určené. Podrobnejšie vysvetlenie jednotlivých trhov uvedieme v nasledujúcich podkapitolách.

1.2 Bilaterálne obchodovanie

Bilaterálne obchodovanie, častejšie nazývané skratkou OTC[1] je klasický a základný spôsob obchodovania. Dve protistrany sa dohodnú na uzavretí transakcie, podpíšu zmluvu, v ktorej definujú predmet dodávky, cenu a prípadné sankcie za nedodržanie kontraktu. Potom nasleduje realizácia danej transakcie. Z dôvodu nárastu počtu transakcií vznikla potreba na jasnú štandardizáciu kontraktov, produktov a rizík spojených s obchodovaním.

Vzhľadom na veľký počet transakcií v krátkom časovom období sa ukázalo byť nepraktické podpisovať každú transakciu zmluvou. Boli preto vytvorené vzorové zmluvy, ktoré rámcovo riešia všetky vzťahy medzi dvoma obchodnými subjektami a jednotlivé transakcie sú realizované formou dodatkov k týmto rámcovým zmluvám. V snahe zjednodušiť uzatváranie transakcií boli tieto dodatky nahradené takzvanými „konfirmáciami“ - potvrdeniami o telefonicky (alebo inak) dohodnutom obchode, ktoré obsahovali iba minimálne informácie nutné pre potvrdenie danej transakcie, ako je špecifikácia produktu, jeho cena a miesto dodávky. Vzniklo niekoľko štandardov rámcových zmlúv, ktoré boli postupne nahradené celoeurópskym štandardom - tzv. EFET zmluvou. V súčasnosti sa bilaterálne obchoduje s nasledujúcimi produktami, rozdelenými podľa diagramu dodávky:

- **dodávka v základnom zaťažení** (tzv. base load - dodávka s konštantným výkonom po celú dobu trvania dodávky kontraktu),
- **dodávka v špičke** (tzv. peak load - dodávka s konštantným výkonom od pondelka do piatku v časovom období od 8:00 do 20:00 hodín),
- **dodávka mimo špičku** (tzv. off-peak - dodávka s konštantným výkonom mimo hodín špičky),
- **dodávka vo vysokej tarife** (tzv. HT - high tariff - dodávka s konštantným výkonom od pondelka do piatku v časovom období od 6:00 do 22:00 hodín),

[1] Z anglického „Over The Counter“

- **dodávka v nízkej tarife** (tzv. LT - low tariff - dodávka s konštantným výkonom mimo hodín vysokej tarify).

Prvé tri produkty sú štandardné v celej Európe, zatiaľ čo HT a LT sú špecifické pre krajiny východnej Európy. Existujú ešte tzv. „spreadové“ produkty, pri ktorých sa obchoduje cenový rozdiel medzi dvomi geografickými lokalitami (napríklad rozdiel medzi slovenskou a nemeckou cenou).

1.3 Spotové trhy

Spotový trh je základným trhom s elektrickou energiou a mal by predstavovať základné cenotvorné miesto pre všetkých účastníkov trhu. Na tomto trhu sa prakticky obchoduje iba s fyzickými dodávkami elektrickej energie. Správne fungujúci spotový trh by mal zaistiť, že v elektrizačnej sústave bude optimalizované nasadenie jednotlivých výrobných blokov (od elektrární s najnižšími variabilnými nákladmi až po tie s najvyššími).

Základnými produktami na spotovom trhu sú hodinové produkty, denné pásmo a denná dodávka v špičke. Niektoré burzy umožňujú účastníkom definovať si vlastné produkty, ktoré sú zostavené ako kombinácia niekoľkých hodinových kontraktov. Jednotlivé spotové burzy majú rôzne prístupy ku spôsobu obchodovania. Štandardným spôsobom obchodovania na spotovom trhu sa stal aukčný mechanizmus pre hodinové produkty a kontinuálny pre denné produkty.

V aukčnom mechanizme obchodníci posielajú svoje obchodné príkazy do systému burzy, ktorý ich registruje, a po stanovenom termíne uzavrie ich príjem a prevedie aukčný výpočet. Zo všetkých prichádzajúcich objednávok sa zoberú hodinové produkty, blokové produkty (produkty, ktorých dodávka presahuje jednu hodinu) sa upravia na ich hodinový ekvivalent a prevedie sa výpočet ceny cez konštrukciu kriviek dopytu a ponuky pre každý hodinový produkt. Výpočet ceny prebieha iteratívne a jeho základným kritériom je maximalizácia objemu uspokojených objednávok. Akonáhle je známa cena, vykoná sa kontrola, či môžu byť požadované transakcie s blokovými kontraktmi uspokojené, resp. či je možné obchodovať všetky hodiny v danom blokovom kontrakte. Pokiaľ toto neplatí, daný kontrakt sa vyradí a výpočet ceny sa opakuje. V momente dosiahnutia cenového ekvilibria sa výpočet ukončí. V súčasnosti pribúdajú aj produkty na kratšie časové obdobie, ako napríklad polhodinové a štvrťhodinové kontrakty, avšak princíp stanovenia ceny

zostáva rovnaký.

Denné produkty sa obchodujú kontinuálne, čo znamená, že obchodníci môžu okamžite zrealizovať svoje pozície za aktuálnu trhovú cenu v dobe, keď je trh otvorený, podobným spôsobom, ako je to na akciových trhoch.

Likvidné spotové trhy sa v poslednej dobe začali používať aj na cezhraničné obchodovanie za účelom vyriešenia nedostatku cezhraničných prenosových kapacít. Tento spôsob obchodovania je založený na princípe, že elektrinu predáme na spotovom trhu, kde sa fyzicky nachádza a kúpime ju na trhu, kde ju potrebujeme.

1.4 Termínované trhy

Obchodovanie s termínovanými produktami je motivované snahou o zabezpečenie ceny pre budúce dodávky. Obchodovanie prebieha formou kontinuálneho obchodovania, aukčné mechanizmy sú využívané len zriedkavo. Na burzových trhoch sa obchoduje s kontraktami s dĺžkou dodávky jeden týždeň, jeden mesiac, jeden ročný kvartál a jeden rok. Podľa diagramu dodávky sa vyprofilovali dva základné produkty:

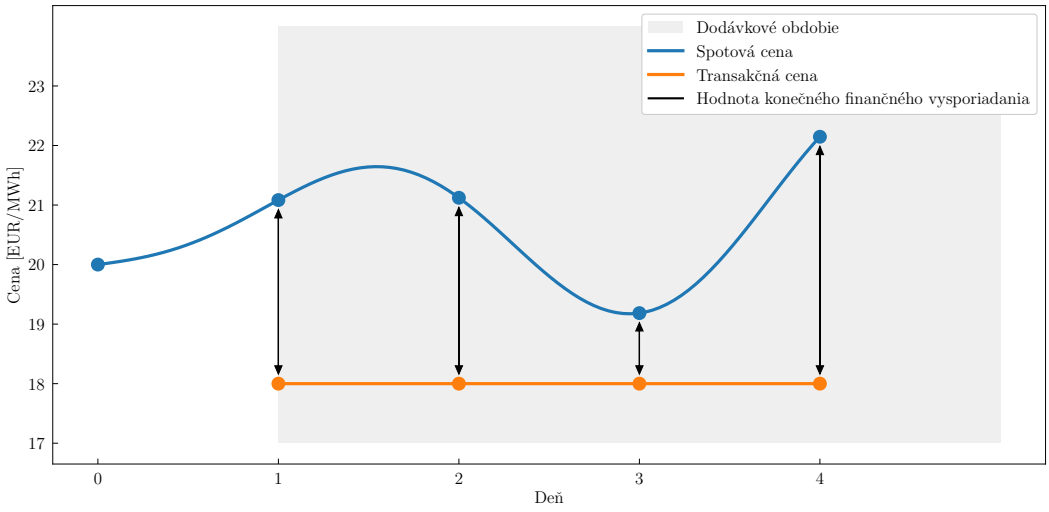
- **dodávka v základnom zaťažení** (tzv. base load - dodávka s konštantným výkonom po celú dobu trvania dodávky kontraktu),
- **dodávka v špičke** (tzv. peak load - dodávka s konštantným výkonom od pondelka do piatku v časovom období od 8:00 do 20:00 hodín).

1.4.1 Produkty s fyzickou dodávkou

Produkty s fyzickou dodávkou sú svojou podstatou identické k produktom obchodovaným na bilaterálnej báze. V dobe dodávky obchodníci buď dodávajú burze, alebo od burzy odoberajú fyzickú elektrinu, na rozdiel od bilaterálnych obchodov je za dodávku zaplatené hneď nasledujúci deň po dodaní. Produkty s fyzickou dodávkou sú preferované obchodníkmi na menej likvidných trhoch, kde nie je možné využiť produkty s finančným vysporiadaním.

1.4.2 Produkty s finančným vysporiadaním

Produkty s finančným vysporiadaním, alebo skrátene finančné futures, predstavujú jeden z najzložitejších produktov, ktoré sa dajú obchodovať vo vzťahu k dodávke elektriny. Pre existenciu finančných futures je potrebný dostatočne likvidný spotový trh, voči ktorému sú tieto produkty indexované. Cieľom obchodovania s finančnými futures nie je zabezpečenie fyzických dodávok elektrickej energie, ale predovšetkým zaistenie ceny elektrickej energie. Princíp produktu s finančným vysporiadaním spočíva v tom, že predávajúci a kupujúci sa prostredníctvom burzy dohodnú na transakcii, kde predávajúci bude mať možnosť predať elektrinu na spotovom trhu počas „dodávkového obdobia“ za cenu dohodnutú s kupujúcim v čase uzavretia zmluvy. Podobne kupujúci bude mať možnosť nakúpiť elektrinu na spotovom trhu počas „dodávkového obdobia“ za cenu dohodnutú s predávajúcim v čase uzavretia zmluvy. Predávajúci a kupujúci sa teda prostredníctvom burzy dohodnú, že predávajúci nahradí kupujúcemu cenové rozdiely medzi spotovou cenou elektrickej energie a dohodnutou cenou kontraktu v hodinách, keď bude cena spotu vyššia ako táto cena. Kupujúci sa naopak zaväzuje nahradiť predávajúcemu cenový rozdiel medzi spotovou cenou elektrickej energie a dohodnutou cenou kontraktu v hodinách, keď bude cena spotu nižšia ako dohodnutá cena. Počas obchodovacieho obdobia sa kontrakt denne preceňuje a v momente, keď začne dodávkové obdobie, t.j, konečné finančné vysporiadanie, sa začne porovnávanie záverečnej ceny celého kontraktu voči cene na spotovom trhu. Tento princíp je znázornený na Obr. 1.



Obr. 1: Diagram znázorňujúci konečné vysporiadanie finančných futures podľa knihy [5].

Pri uzavretí kontraktu s finančným vysporiadaním neprebieha žiadna fyzická dodávka elektrickej energie, obe strany transakcie majú možnosť, nie povinnosť, realizovať fyzickú dodávku prostredníctvom spotového trhu. Akonáhle je známy trhový index, ku ktorému sa daný finančný futures viaže, vykoná centrum burzy porovnanie cien a zrealizuje príslušné prevody medzi účtami oboch účastníkov transakcie. Produkty s finančným vysporiadaním ponúkajú účastníkom trhu značnú flexibilitu v obchodovaní. Podobným princípom sa dajú obchodovať aj iné komodity, ako sú napríklad vzácne kovy, poľnohospodárske produkty, alebo iné energetické produkty, kde je obvykle oddelená fyzická dodávka na spotovom trhu od zaistenia budúcej ceny prostredníctvom finančných futures. V praxi si môže obchodník vybrať až do doby finančného vysporiadania, či chce za danú cenu realizovať dodávku elektrickej energie, alebo si derivát nechá finančne vysporiadať, alebo si zvolí kombináciu týchto dvoch možností.

1.5 Vysporiadanie burzových trhov

1.5.1 Vysporiadanie na spotovom trhu

Vysporiadanie na spotovom trhu, narozdiel od bilaterálneho obchodovania, prebieha na dennej báze. Vzhľadom na to, že sa obchoduje len fyzická dodávka, ktorá bude dodaná nasledujúci deň po uzavretí transakcie, burzová platforma bezprostredne po ukončení obchodovania vypočíta objemy jednotlivých dodávok. Väčšina vysporiadacích mechanizmov umožňuje burzám priamo previesť platby z účtov kupujúcich obchodníkov na účty predávajúcich bez zásahu účastníkov obchodu. Vysporiadavací systém burzy musí zaistiť, aby na účtoch účastníkov obchodu bol vždy dostatok finančných prostriedkov na pokrytie všetkých záväzkov. Táto problematika sa rieši špeciálnymi ochrannými mechanizmami, ktoré kontrolujú stav finančných prostriedkov na účtoch obchodníkov. Podľa ich stavu burza umožňuje alebo limituje množstvo a typ objednávok, ktoré môže daný obchodník do systému burzy zadať. Často ide aj o kombináciu s bankovými zárukami, ktoré môže burzová platforma po obchodníkovi požadovať.

1.5.2 Vysporiadanie termínovaných obchodov

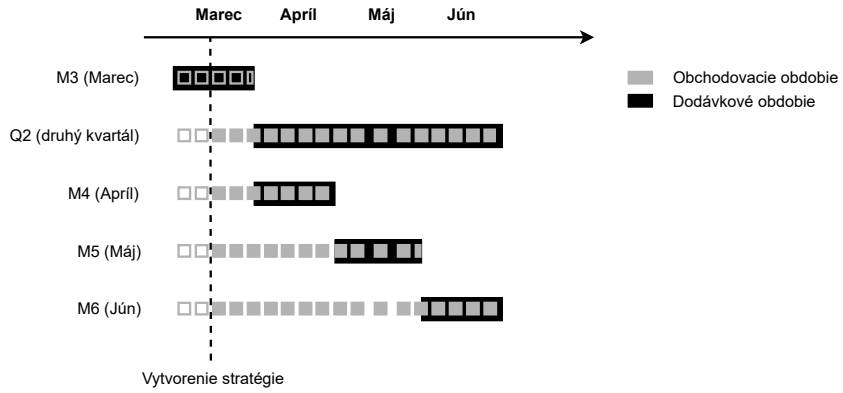
Vysporiadanie termínovaných obchodov spracováva zúčtovacie a vysporiadávacie centrum burzy, ktorým obvykle býva separátna spoločnosť zaoberajúca sa touto činnosťou (tzv. „clearing house“) a často to býva aj komerčne oddelená aktivita od burzy. Pre európske burzové platformy je najvýznamnejšie vysporiadávacie centrum spoločnosť European Commodity Clearing AG (ECC), ktorú používa aj nemecká komoditná burza European Energy Exchange AG (EEX). Vysporiadanie v ECC prebieha pomocou takzvaných clearingových členov. Vysporiadávacie centrum často slúži aj ako centrálna protistrana, voči ktorej sú uzatvárané všetky burzové transakcie. Alternatívne je táto funkcia centrálnej protistrany vyčlenená do separátnej spoločnosti. Clearingoví členovia sú obvykle veľké banky alebo veľkí účastníci trhu s veľmi exkluzívnym ratingom. Každý účastník obchodovania na burze sa buď musí stať clearingovým členom, alebo si musí vybrať a podpísať zmluvu s jedným zo súčasných clearingových členov, ktorý následne preberá za daného burzového účastníka obchodu plnú a neobmedzenú garanciu za všetky realizované transakcie. Princíp vysporiadania je navrhnutý tak, aby bolo so štatistickou istotou zaručené, že vo vysporiadávaciom systéme je vždy dostatočne veľa finančných prostriedkov na pokrytie záväzkov všetkých účastníkov obchodu a nemuseli ich záväzky plniť clearingoví členovia.

Tento princíp je ešte doplnený clearingovým fondom, do ktorého sa clearingoví účastníci skladajú pre prípadné zlyhanie jedného z clearingových členov. Vysporiadanie obchodov je založené na maximálnej možnej eliminácií rizika v reálnom čase pri snahe minimalizovať požiadavky na zaistenie obchodov zo strany účastníkov obchodu. Systém je založený na princípe preceňovania všetkých otvorených pozícií tak, aby všetky záväzky účastníkov obchodu boli precenené na aktuálnu trhovú úroveň a aby v prípade zlyhania niektorého účastníka mohla burza (na pokyn clearingového člena) vstúpiť na trh a inicializovať transakcie, ktoré budú opačné k otvoreným transakciám zlyhávajúceho účastníka trhu. Vďaka preceneniu na aktuálnu cenovú úroveň by táto operácia nemala mať na zlyhávajúceho obchodníka ani pozitívny ani negatívny vplyv.

2 Sekvenčný deterministický model

V tejto kapitole sa budeme venovať modelu založenom na princípe opakovaného riešenia úlohy lineárneho programovania. Úlohy lineárneho programovania sú podtriedou úloh konvexnej optimalizácie, ktoré sa dajú veľmi efektívne riešiť pomocou metód vnútorného bodu. Vďaka tomu je možné tieto optimalizačné úlohy riešiť aj pri vysokej dimenzionalite. Predtým, ako sa dostaneme k jeho matematickej formulácii, naznačíme konceptuálne, čo bude našim cieľom.

Cieľom modelu bude optimálne predávať vyrobenú elektrickú energiu v budúcnosti tak, aby navrhnutá stratégia predaja generovala čo najväčšie výnosy. Budeme predávať v jednotlivých časových krokoch istú časť našej výroby (výrobného diagramu), ktorej dodávka nastane v určitom čase v budúcnosti. Budeme na to používať termínované produkty, konkrétne jeden ročný produkt, štyri kvartálne a dvanásť mesačných produktov. Pomocou nich vieme odpredať celoročnú výrobu, teda aspoň jej mesačné priemery[2]. Platí, že každý produkt môžeme obchodovať až do momentu začiatku jeho dodávky. Pre jednoduchšie pochopenie, kedy môžeme dané produkty predávať a kedy už nie, sme vytvorili diagram na Obr. 2.



Obr. 2: Diagram znázorňujúci časový priebeh vytvárania aktuálnej stratégie. V riadkoch sú uvedené jednotlivé obchodované produkty. Štvorčeky v diagrame predstavujú jednotlivé týždne, počas ktorých sa rozhodujeme. Môžeme si všimnúť, že produkty, v ktorých už nastala dodávka elektrickej energie, už ďalej neobchodujeme.

[2]V realite by sme zvyšné fluktuácie v jednotlivých hodinách predávali na spotovom trhu, čo už nebude témou našej práce.

V našej práci sa budeme zaoberať len predajom výroby[3]. Chceme teda optimálne vybrať množstvá a typy produktov, ktoré budeme predávať v jednotlivých časových krokoch, aby sme maximalizovali výnosy a zároveň, aby sme odpredali celkovú výrobu na dané obdobie. Predávané množstvá v jednotlivých časových krokoch budú ohraničené maximálnou predajnou likviditou.

2.1 Motivácia za vytvorením modelu

Uvažujme nasledujúci ilustračný príklad. Predávame jediný, a to ročný produkt. Chceme pomocou neho odpredať celoročnú výrobu na konštantnej hladine (približne 2 TW) s čo najvyšším ziskom. Obchodovanie začíname rok pred dodávkou daného produktu a k dispozícii máme historické dáta vývoja jeho cien. V prípade jedného termínovaného produktu je situácia pomerne jednoduchá, keďže sa nemusíme rozhodovať, ktoré produkty predáme, ale len kedy daný produkt predáme.

Ak by sme teda poznali vývoj cien ročného produktu na nasledujúce obdobie, optimálnou stratégiou by bolo predať maximálne povolené množstvo výroby v tých časových krokoch, v ktorých sú ceny produktu najvyššie tak, aby celkový objem predaja nepresiahol výrobný diagram. Vývoj cien na nadchádzajúce obdobie v realite však nepoznáme. Môžeme však vytvoriť predikcie na vývoj cien, čo však pri časovom horizonte jeden rok môže byť pomerne náročné, až nereálne.

Ak by sme mali spôsob na predikovanie ceny produktu, zvyšné produkty by sme do modelu pridali pomerne jednoducho. V nasledujúcej podkapitole predstavíme spôsob predikcie cien produktov vychádzajúc zo skúseností Obchodného oddelenia Slovenských elektrární a vlastností trhu s elektrinou.

[3]Vo všeobecnosti by sme mohli požadovať aj dokupovanie výroby, a teda ísť do krátkej pozície vzhľadom na jednotlivé termínované produkty, tomu sa však v práci nevenujeme.

2.2 Predikcia ceny energetických produktov z cien komodít

V tejto sekcii vytvoríme model na predikciu cien energetických produktov v dlhodobom horizonte. V modeli bude figurovať 17 energetických produktov, ktorými sú: jeden ročný produkt, štyri kvartálne a dvanásť mesačných produktov. V prvom rade potrebujeme identifikovať vstupy do modelu na predikciu cien. Isto tam patria historické dáta o cenách produktov, ktoré sa predávajú na finančnom trhu v EUR/MWh. Okrem toho ale na začiatku určíme hlavné faktory ovplyvňujúce cenu elektriny a na ich základe vstupy do modelu doplníme. V druhej časti sekcie predstavíme, ako z daných vstupov na základe sformulovaných princípov vytvoríme predikcie cien jednotlivých produktov. Predikcie ceny energetických produktov chceme vytvárať v stredne dlhom horizonte, teda približne na jeden rok dopredu. Toto obdobie sa bude v modeli postupne skracovať s plynutím času.

Pri tvorbe predikcií cien vychádzame zo základných makroekonomických faktorov ovplyvňujúcich trh s elektrinou. Ide primárne o ceny komodít, ako sú ceny emisných povoleniek, plynu, alebo uhlia. Ak tieto komodity zdražejú, môžeme očakávať nárast cien elektrickej energie. Tento princíp vyplýva z takzvaného merit orderu[4]. V našom modeli sme použili len historické dáta pre ceny komodít EUA a TTF. Komodita EUA je európska emisná povolenka. Jedna kvóta tejto povolenky oprávňuje producenta vypustiť jednu tonu CO_2, prípadne ekvivalentného množstva N_2O alebo perfluórovaných uhľovodíkov (PFCs). Cena európskej emisnej povolenky je udávaná v jednotkách EUR/tCO_2. Druhou komoditou je TTF (Title Transfer Facility). Ide o čisto finančný trh s plynom sídliaci v Amsterdame, Holandsku. Vďaka jeho vysokej likvidite sa používa ako hlavná referencia pri určovaní ceny dodávok plynu. Táto komodita je podobne ako energetické produkty udávaná v EUR/MWh. Predpokladáme, že tieto komodity sú hlavnými ukazovateľmi určujúcimi cenu energetických produktov.

Na základe konzultácií s Obchodným oddelením Slovenských elektrární sme identifikovali aj ďalšie vlastnosti trhu s elektrinou, ktoré by tvorba predikcií mala zohľadňovať:

[4]Ide o usporiadanie výrobných zdrojov podľa ich variabilných výrobných nákladov. Ak potrebujeme vyrobiť viac elektrickej energie, sme nútení zapájať do výroby aj menej cenovo efektívne zdroje, ako sú napr. plynové elektrárne.

- **Lokálny trend:** Tým, že máme k dispozícii historické dáta, vieme určiť lokálny trend a teda s určitou presnosťou vieme, aký vývoj cien môžeme očakávať v nasledujúcom týždni.

- **Dlhodobé ustálenie cien:** V dlhodobom horizonte očakávame, že ceny energií sa ustália na cenovej hladine podľa cien komodít. Na finančných trhoch sa môžu vyskytnúť rôzne špekulácie a cena elektrickej energie sa môže krátkodobo odchýliť od normálu, avšak dlhodobo by sa mala približovať k cenám určeným pomocou cien komodít, keďže tie zodpovedajú za výrobné náklady fyzickej elektrickej energie.

Náš prístup ku vytváraniu predikcií cien energetických produktov bol inšpirovaný článkom [7], v ktorom sa autori snažili predikovať cenu elektrickej energie na niekoľko rokov dopredu pomocou dátami riadeného modelu, do ktorého vstupovali ceny komodít, konkrétne ropy a plynu.

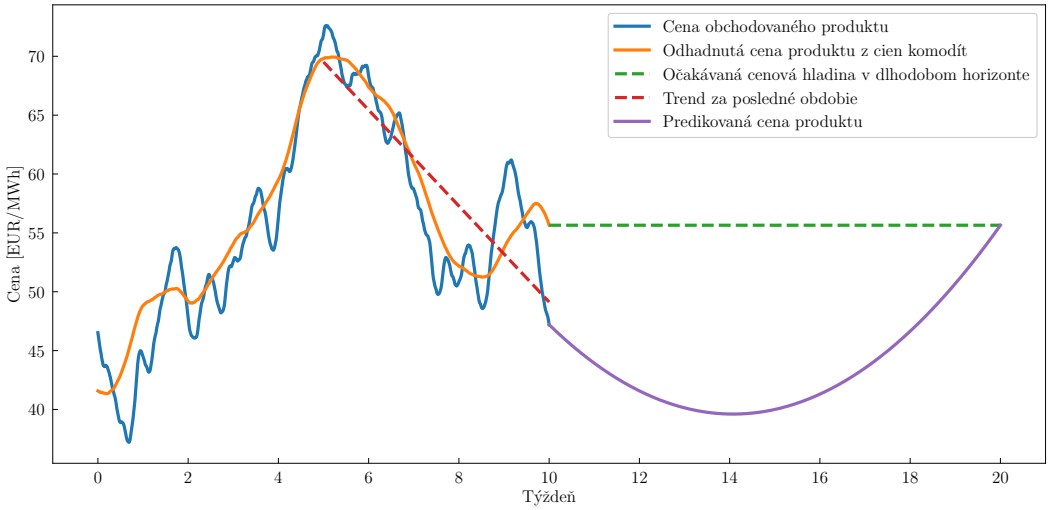
Na základe sformulovaných kritérií budeme cenu voliť ako konvexnú kombináciu krátkodobého a dlhodobého trendu. Krátkodobé správanie cien produktov model zachytí nasledovne: V modeli zvolíme počet obchodovaných dní N dozadu, z ktorých určíme trend ceny produktov označený $p_{t,i}^{short}$, kde t určuje časové obdobie v ktorom je produkt obchodovaný a i určuje o ktorý zo 17 produktov ide. Ceny komodít použijeme v lineárnej regresii, z ktorej získame rovnovážne ceny energetických produktov na príslušné obdobie. Dostaneme tak lineárny regresný model:

$$E_{t,i} = \alpha_i + \beta_i \mathrm{EUA}_t + \gamma_i \mathrm{TTF}_{t,i} + \varepsilon_{t,i} \qquad i = 1, \ldots, 17, \tag{1}$$

kde $E_{t,i}$ je pozorovaná cena i-teho energetického produktu v čase t z cien komodít. Dlhodobé správanie ceny produktu, označované p_i^{long}, bude vytvorené z regresného modelu, kde zoberieme najaktuálnejšiu odhadnutú cenu produktu $\hat{E}_{0,i}$ a budeme predpokladať, že bude konštantná do konca obchdovacieho obdobia. Tento krok je odôvodnený tým, že v dlhodobom horizonte očakávame, že sa aktuálna cena bude približovať ku cene určenej komoditami. Výslednú predikciu na cenu energetického produktu dostaneme, ako konvexnú kombináciu dlhodobej a krátkodobej zložky:

$$p_{t,i} = \left(1 - \frac{t}{T}\right) p_{t,i}^{short} + \frac{t}{T} p_i^{long} \qquad i = 1, \ldots, 17 \qquad t = 0, \ldots, T-1. \tag{2}$$

Na začiatku očakávame, že cena produktu bude kopírovať trend za posledných N dní a potom sa postupne napojí na cenu v dlhodobom horizonte, určenú z cien komodít. Tento postup je znázornený na Obr. 3.



Obr. 3: Diagram znázorňujúci princíp generovania predikovanej ceny produktu na základe historických dát a regresného modelu. Počet týždňov je len ilustračný.

Výstupom predikčného modelu cien je krivka od aktuálnej známej ceny daného produktu do konca obchodovacieho obdobia, kde očakávame, že cenu produktu bude určovať cena komodít.

2.3 Formulácia modelu

Na základe predikcie cien produktov predstavených v časti 2.2 môžeme teraz sformulovať problém optimalizácie predaja výroby. Optimalizácia bude za účelom maximalizácie zisku z predaja energetických produktov. K problému budeme pristupovať iteratívne. V každej iterácii nájdeme optimálnu stratégiu predaja počas obchodovacieho obdobia, ktorá z energetických produktov v danom období pokryje[5] výrobný diagram. Z optimálnej stratégie predáme len elektrickú energiu v prvom časovom indexe, čo zodpovedá aktuálnemu týždňu. Výrobný diagram znížime o predané produkty v tomto indexe. Následne zmenšíme časový horizont do konca obchodovacieho obdobia. V nasledujúcom kroku na základe no-

[5]V niektorých iteráciach môže nastať situácia, keď niektoré energetické produkty ešte nie sú dostupné na trhu. V takom prípade budú v danej iterácii z predaja vynechané.

vých dát pre ceny energetických produktov a komodít určíme nové predikcie pre ceny energetických produktov. Proces opakujeme, pokiaľ sa nám nevynuluje výrobný diagram.

Účelovou funkciu bude maximalizácia zisku z predaja daných energetických produktov. Premenná $\boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^{17}$ bude určovať, akú časť výroby [MW][6] sme predali v časovom indexe t z jednotlivých produktov. Prvé ohraničenie bude v každej iterácii maximálna predajná likvidita v danom časovom indexe. Druhé ohraničenie zaručí, že celkový objem z predajnej stratégie pokryje na konci obchodovacieho obdobia výrobný diagram. V jednotlivých iteráciách budeme riešiť nasledovnú úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{x}} \sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{p}_t^\top \boldsymbol{x}_t, \\ &\quad 0 \leq x_{t,i} \leq l, \qquad i = 1, \ldots, 17, \qquad t = 0, \ldots, T-1, \\ &\quad \sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t \leq \boldsymbol{b}, \end{aligned} \tag{3}$$

kde parametre l a b sú vstupmi do modelu. Parameter l predstavuje maximálnu predajnú likviditu a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{12}$ obsahuje priemernú očakávanú výrobu po mesiacoch. Pomocná konštantná matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^{12\times 17}$ obsahuje len nuly a jednotky a indikuje, ktoré produkty pokrývajú ktoré mesiace. V našom prípade bude mať matica $\boldsymbol{A}$ tvar:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | \\ \mathbf{1}_{\mathrm{Y1}} & \mathbf{1}_{\mathrm{Q1}} & \mathbf{1}_{\mathrm{Q2}} & \mathbf{1}_{\mathrm{Q3}} & \mathbf{1}_{\mathrm{Q4}} & \mathbf{1}_{\mathrm{M1}} & \cdots & \mathbf{1}_{\mathrm{M12}} \\ | & | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix}, \tag{4}$$

kde vektory $\mathbf{1}_{(\cdot)} \in \mathbb{R}^{12}$ obsahujú jednotku na j-tej pozícii, ak sa daný produkt viaže k j-tému mesiacu, inak obsahujú nuly. Pre ročný produkt je to plný vektor jednotiek. Pre mesačné produkty sa jednotka nachádza len na pozícii, ktorá patrí danému mesiacu.

V poslednom ohraničení sme použili len nerovnosť, pretože sa na začiatku obchodovania môže stať, že niektoré mesačné produkty ešte nie je možné obchodovať. V takom prípade nie je možné vyplniť výrobný diagram len z ročného a kvartálneho produktu. Keďže sa ale model počíta iteratívne, v ďalších časových obdobiach bude výrobný diagram odpredaný celý, akonáhle budú dané mesačné produkty obchodovateľné (pri kladných cenách produktov hodnota účelovej funkcie rastie z každého predaja). Výstupom z modelu

[6]Ceny energetických produktov sú prenásobené koeficientom počtu hodín v dodávkovom období daného produktu. Hodnoty účelovej funkcie budú v eurách.

budú optimálne predané množstvá výroby v jednotlivých časových krokoch pre každý energetický produkt. Predávané množstvá výroby sú uvedené v každej iterácií v prvom časovom indexe. Tieto hodnoty si pre každý energetický produkt zapisujeme do pomocných vektorov. Rozmery týchto vektorov sú dané počtom časových krokov v zvolenom obchodovaciom období. Pre každý obchodovaný produkt dostávame vektor, v ktorom jednotlivé zložky určujú výsledné predané množstvo výroby pre daný časový krok.

2.4 Testovanie modelu na historických dátach

Náš model sme následne testovali na reálnych dátach z ENTSO-E (European Network of Transmission System Operators for Electricity), Wattsight a interných dátach od Slovenské elektrárne, a.s.. Ako vstupné historické dáta sme používali ceny produktov a komodít na nemeckej burze European Energy Exchange AG (EEX). Ide o stabilnú a dostatočne likvidnú energetickú burzu, na ktorej obchoduje veľká časť štátov strednej Európy vrátane Slovenskej republiky. Používali sme dáta z obdobia od začiatku roku 2019 do konca 2021. Vybrali sme tento interval rokov z dôvodu relatívnej stability ceny elektrickej energie. Chceli sme náš model otestovať v štandardných podmienkach, a keďže v roku 2022 nastala globálna energetická kríza, ktorá spôsobila prudký nárast cien elektrickej energie, rozhodli sme sa, že najvhodnejšie obdobie na testovanie modelu bude tesne pred krízou. Tým, že ešte na konci roku 2021 začali ceny energií výrazne rásť, budú naše výsledky čiastočne ovplyvnené aj týmto faktorom, avšak tento nárast cien nie je až taký extrémny, ako v roku 2022.

Časové dáta sme rozdelili na tri časti. Prvou sú dáta o energetických produktoch a komoditách z roku 2019. Táto časť je určená len na inicializáciu predikcie cien, keďže náš model vyžaduje aspoň N historických dát na vytvorenie predikcií cien. Nie všetky energetické produkty sa už dajú obchodovať v tomto období, keďže mesačné produkty majú zväčša krátku dobu do maturity. Na inicializáciu sme preto použili len dáta o produktoch a komoditách, ktoré boli dostupné v roku 2019. Ostatné produkty sa budú do optimalizačného procesu predaja pridávať postupne, akonáhle bude daný produkt na burze obchodovaný. Druhou časťou dát je rok 2020, v ktorej sa začína obchodovacie obdobie. Koniec obchodovacieho obdobia nastáva pri maturite posledného energetického produktu, kedy už nie je možné predať žiadny objem vo zvolených produktoch. Treťou časťou dát je rok

2021, keď začína dodávkové obdobie, v ktorom sú už niektoré energetické produkty po čase maturity a nastáva dodávka elektrickej energie. V tejto časti dát chceme, aby celkové predané objemy pokryli očakávanú výrobu na rok 2021.

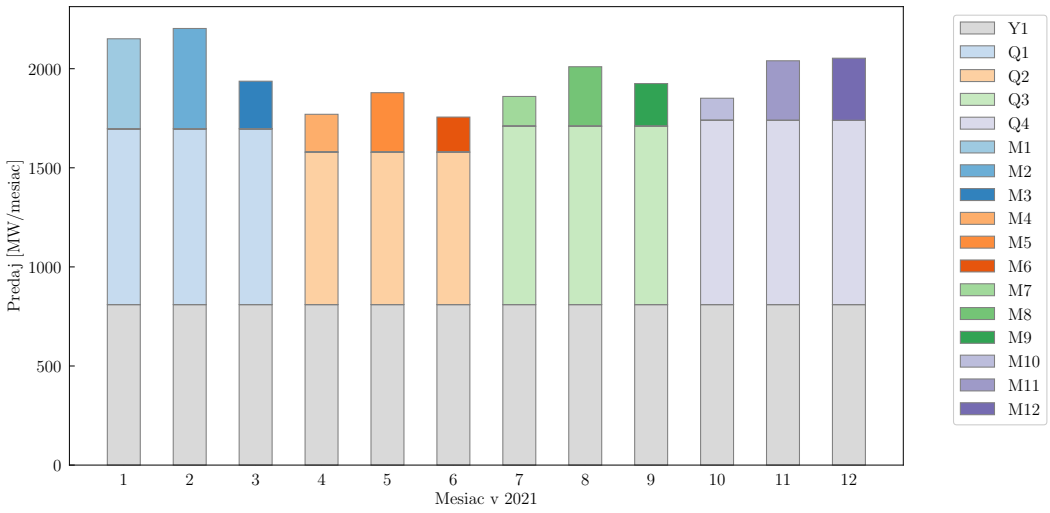
Za frekvenciu obchodovania sme si zvolili týždennú granularitu obchodovacieho obdobia. V porovnaní s inými modelmi ide o stredne vysokú frekvenciu obchodovania, keďže viaceré modely spomínané v literatúre majú obchodovaciu frekvenciu od jedenkrát za deň až po jedenkrát za mesiac, ako je to zhrnuté v Tabuľke 1.

Autori modelu	Granularita a časový horizont
Dimoski & al. (2018)	48 polmesiacov
Gauthier & al. (2016)	4 týždne
Kettunen & al. (2009)	6 týždňov
Mo & al. (2001)	52 týždňov
Secomandi & Bo (2021)	24 mesiacov
Löhndorf & al. (2021)	>730 dní

Tabuľka 1: Porovnanie existujúcich modelov vzhľadom na ich obchodovaciu frekvenciu a časový horizont podľa [13].

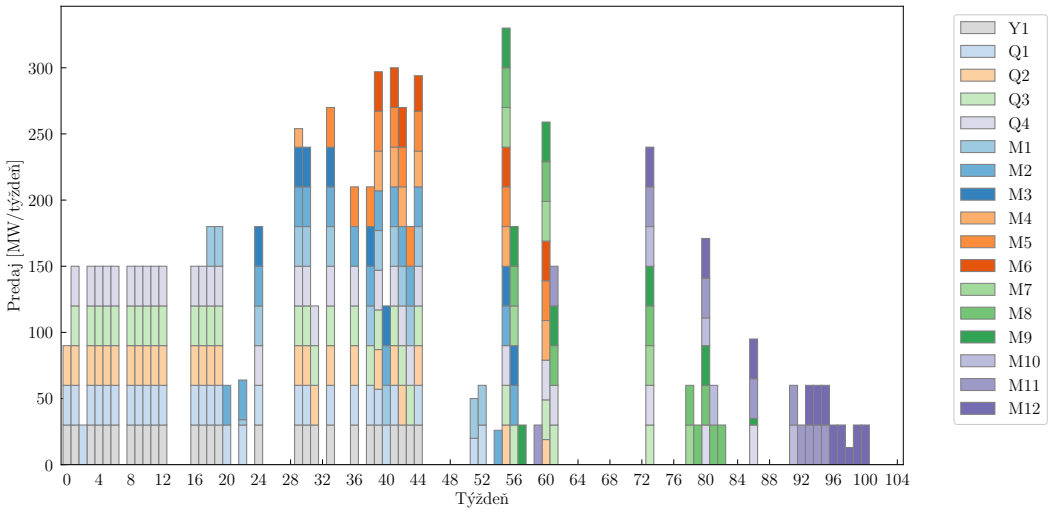
Pre naše účely je to dostatočne vysoká frekvencia, aby sme mohli našu stratégiu meniť podľa aktuálnej situácie na trhu a zároveň nie je príliš vysoká, čo nám zabezpečí nižšiu výpočtovú náročnosť. Nevýhodou obchodovacej frekvencie raz do týždňa je, že týždne zle korešpondujú s mesiacmi, kvartálmi alebo rokom, narozdiel od obchodovacej frekvencie raz za polmesiac alebo mesiac. Pre jednotlivé týždne sme v modeli zvolili horné ohraničenie na predávaný objem vo výške 30 MW. Ide o rozumný odhad na ohraničenie, vzhľadom na očakávanú ročnú výrobu a frekvenciu obchodovania. Toto ohraničenie budeme neskôr upravovať a pozrieme sa, aký to má vplyv na výsledky modelu. Parameter N, ktorý určuje počet dní použitých na výpočet trendu ceny elektriny sme nastavili na 20 pracovných dní respektíve 4 týždne, keďže cez víkendy sa termínované produkty neobchodujú. Celkový výpočet trval približne 5 sekúnd na šesť jadrovom Intel procesori so základnou frekvenciou 4 GHz.

Na Obr. 4 môžeme vidieť, ako predaj jednotlivých termínovaných produktov pokryje očakávanú výrobu na rok 2021. Vidíme, že najväčšiu časť predaného objemu tvoria štyri kvartálne a jeden ročný produkt. Mesačné produkty majú kratšiu dobu do maturity, a teda máme menej príležitostí tieto produkty predávať.



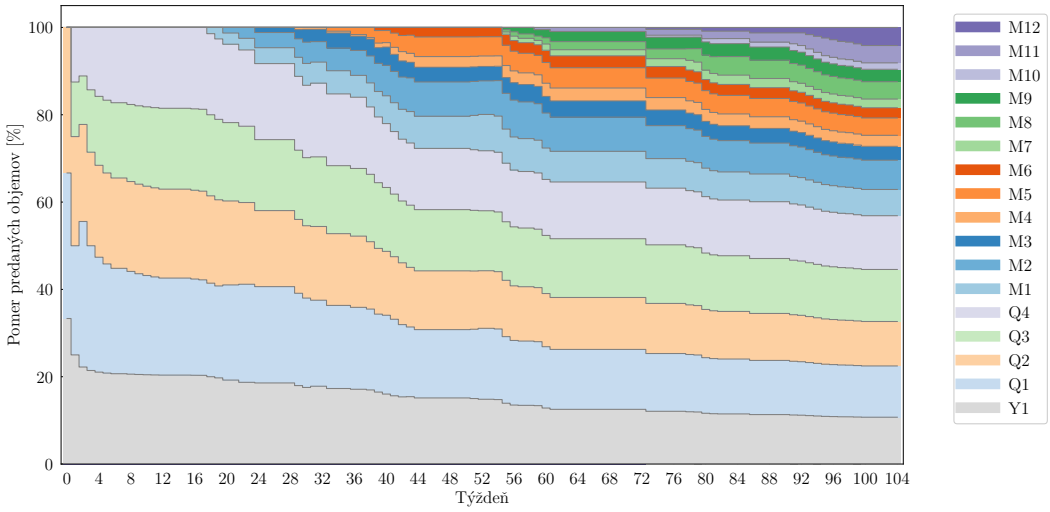
Obr. 4: Graf znázorňujúci predanú očakávanú výrobu na rok 2021 prostredníctvom termínovaných produktov.

Na Obr. 5 môžeme vidieť týždenné predaje jednotlivých termínovaných produktov. Na začiatku obchodovacieho obdobia sú predávané len kvartálne produkty a ročný produkt. Neskôr v druhej polovici roka 2020 začína predaj prvých mesačných produktov. Výrazný predaj môžeme vidieť na prelome roku 2020 a 2021, kedy sú predávané produkty na leto 2021. V roku 2021 už máme veľkú časť výroby predanú. Na konci roku 2021 môžeme vidieť, že posledné dva mesačné produkty sú predávané až tesne pred ich dodávkou.



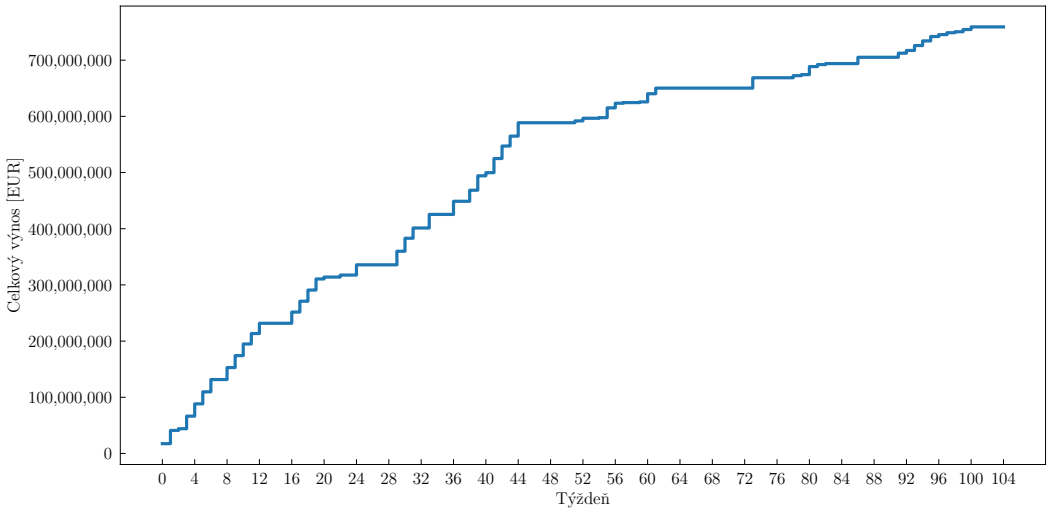
Obr. 5: Graf znázorňujúci týždenné predaje jednotlivých termínovaných produktov počas celého obchodovacieho obdobia.

Teraz sa pozrieme, ako sa menil pomer predaných objemov počas celého obchodovacieho obdobia. Na Obr. 6 vidíme, ako sa na začiatku roku 2021 výrazne zmení pomer objemov jednotlivých produktov. V tomto období dochádza k ukončeniu predaja pre ročný, prvý kvartálny a prvý mesačný produkt.



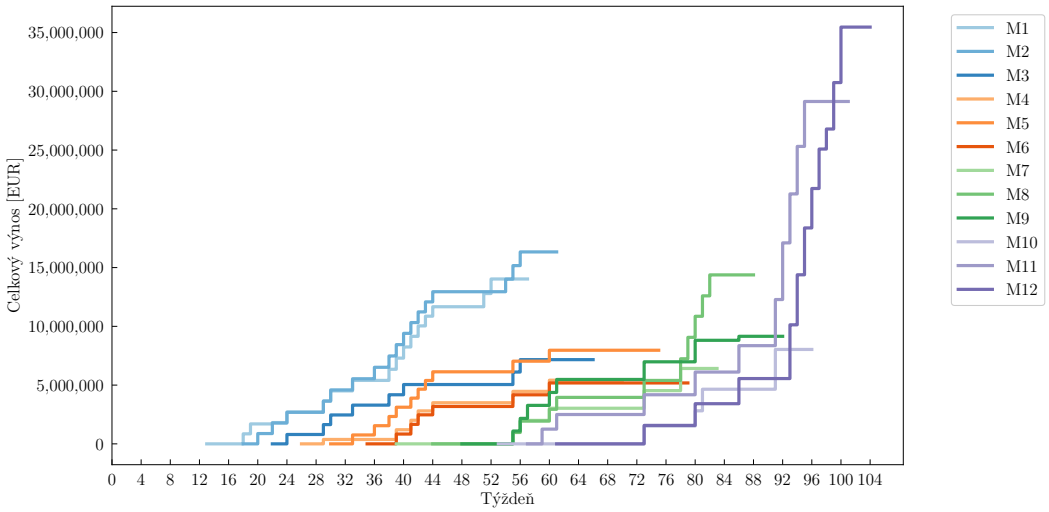
Obr. 6: Graf vývoja pomerov predaných objemov počas celého obchodovacieho obdobia.

Na Obr. 7 je znázornený priebeh celkových výnosov počas celého obchodovacieho obdobia. Je vidieť, že na začiatku obchodovacieho obdobia výnosy rýchlo narastajú pri predaji kvartálnych produktov a ročného produktu. Na konci roku roku 2020, pri začiatku dodávkového obdobia, začínajú výnosy spomaľovať. Môžeme si všimnúť, že na konci roku 2021 máme znovu nárast výnosov. Celkové výnosy z predaja pri danej predajnej stratégií dosiahli hodnotu 759 mil. EUR.



Obr. 7: Graf znázorňujúci priebeh celkových výnosov počas celého obchodovacieho obdobia.

Na Obr. 8 môžeme vidieť priebeh celkových výnosov len pre jednotlivé mesačné produkty. Najväčšie výnosy nám poskytli práve posledné dva mesačné produkty. Mesačný produkt viažuci sa k ôsmemu mesiacu dosiahol porovnateľný výnos s prvým mesačným produktom, aj keď mal výrazne menší predaný objem. Na konci roku 2021 začali narastať ceny elektrickej energie, čo následne viedlo ku energetickej kríze v roku 2022. Náš model teda správne predpokladal tento nárast cien a predal posledné dva mesačné produkty až tesne pred ich dodávkou. Kvartálne produkty tento nárast cien nezachytili a veľká časť ich objemu bola predaná ešte v roku 2020, čo bolo potrebné na zabezpečenie predaja celkovej výroby na rok 2021.



Obr. 8: Graf znázorňujúci priebeh celkových výnosov mesačných produktov počas celého obchodovacieho obdobia.

2.5 Testovanie modelu na simulovaných dátach

Po výsledkoch získaných z historických dát pre konkrétne časové obdobie nás zaujímali aj výsledky pre rôzne cenové scenáre. Rozhodli sme sa preto vygenerovať nové dáta, ktoré budú podobné historickým dátam, a zároveň budú mať dostatočnú variabilitu aby sme zistili, čo môžeme od modelu očakávať.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať generovaním dát na testovanie modelu. Tým, že našimi dátami sú ceny energetických produktov, respektíve komodít, ponúka sa nám možnosť použiť simulácie geometrického Brownovho pohybu. Energetické produkty vystupujúce v modeli sú však výrazne korelované, preto budeme chcieť generovať korelované geometrické Brownove pohyby podľa [1]. Na ich generovanie budeme potrebovať odhady parametrov, ako sú drift, volatilita a korelačná matica. Pri odhadovaní korelačnej matice narazíme na problém s nekonzistentnosťou dát, ktorému sa budeme ďalej podrobnejšie venovať.

Definícia 2.1 (Geometrický Brownov pohyb)**.** *Stochastický proces S_t sa riadi geometrickým Browovým pohybom, ak spĺňa nasledovnú stochastickú diferenciálnu rovnicu:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{5}$$

kde μ predstavuje drift a σ volatilitu procesu. Aplikovaním Itôvej lemy dostaneme riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice (5) v tvare:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}, \tag{6}$$

kde W_t je Brownov pohyb a $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.

Definícia 2.2 (Eulerova diskretizácia)**.** *Stochastický proces môžeme diskretizovať v čase pomocou Eulerovej diskretizácie na intervale $[t_i, t_{i+1}]$ nasledovne:*

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right\}, \qquad \Delta t = t_{i+1} - t_i. \tag{7}$$

Nech náhodná premenná Z sa riadi štandardizovaným normálnym rozdelením, potom vieme časovú diskretizáciu stochastického procesu v rovnici [7] zapísať v tvare:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t}\right\}. \tag{8}$$

Pre dva korelované geometrické Brownove pohyby dostaneme:

$$\begin{aligned} S_t^1 &= S_0^1 \exp\left\{\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\Delta t + \sigma_1 \tilde{Z}_1\sqrt{\Delta t}\right\}, \\ S_t^2 &= S_0^2 \exp\left\{\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\Delta t + \sigma_2 \tilde{Z}_2\sqrt{\Delta t}\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

kde Z_1 a Z_2 sú nezávislé náhodné premenné riadiace sa štandardizovaným normálnym rozdelením a $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ sú korelované náhodné premenné s korelačným koeficientom ρ dané vzťahom:

$$\tilde{Z}_1 = Z_1, \qquad \tilde{Z}_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2. \tag{10}$$

Podobným spôsobom vieme podľa [1] generovať viacrozmerné korelované geometrické Brownove pohyby. Využijeme pritom Choleského dekompozície korelačnej matice na vytvorenie korelovaného náhodného vektora $\tilde{\boldsymbol{Z}}$.

Definícia 2.3 (Choleského dekompozícia)**.** *Nech $\boldsymbol{C}$ je symetrická, kladne definitná matica, potom vieme danú maticu rozdeliť na súčin matíc:*

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T, \tag{11}$$

kde matica $\boldsymbol{L}$ je dolná trojuholníková.

Pri generovaní geometrických Brownových pohybov budeme používať transformované náhodné vektory $\tilde{\boldsymbol{Z}}$, dané nasledovnou transformáciou:

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{Z}, \tag{12}$$

kde matica $\boldsymbol{L}$ je dolná trojuholníková z Choleského dekompozície matice $\boldsymbol{C}$. Matica $\boldsymbol{C}$ je korelačná matica, ktorú sme dostali z historických dát cien jednotlivých produktov. Ako mieru korelácie medzi dvoma produktami sme používali Pearsonov korelačný koeficient.

Pre naše účely je dôležité, aby boli cenové scenáre jednotlivých produktov navzájom korelované, keďže jednotlivé produkty sa viažu na cenu elektriny v časových obdobiach, ktoré sú veľmi blízke alebo sa dokonca prekrývajú. Napríklad prvý kvartálny produkt a prvé tri mesačné produkty majú spravidla veľmi vysokú koreláciu, vzhľadom na to že ide o dodávku elektriny na rovnaké časové obdobie. Môže sa však stať, že nastane nečakaná odstávka výroby alebo iný makroekonomický faktor, ktorý by ovplyvnil cenu elektrickej energie práve v jednom mesiaci. Potom je otázne, ako sa zmení cena v príslušnom kvartáli alebo nadchádzajúcom mesiaci. Tým, že máme až 17 cien produktov, ktoré sú výrazne korelované, v priemere až okolo 90%, dostávame tak náhodné cenové scenáre, ktoré sú po produktoch veľmi podobné.

Tým, že v obchodovacom období niektoré produkty na trh len prichádzajú a niektoré sa už obchodovať nedajú, dostali sme v korelačnej matici chýbajúce hodnoty. Zvyčajne to nastáva pri posledných mesačných produktoch, ktoré majú krátku dobu do maturity, a teda nie sú obchodované na žiadnom spoločnom časovom intervale s niektorými produktami, ktoré majú skoršie dodávkové obdobie. Zložky tejto korelačnej matice vznikli ako korelácie medzi produktami, ktoré sú obchodované aspoň v nejakom spoločnom časovom období. Výsledná matica je teda len aproximácia korelačnej matice, keďže vznikla z nekonzistentných dát.

Doplnenie chýbajúcich hodnôt do korelačnej matice nie je jednoznačné. Jednou možnosťou je doplniť chýbajúce hodnoty nulovou koreláciou, keďže tieto produkty sa v danom čase nikdy neobchodujú súčasne. Tento postup však nezohľadňuje, že produkty sú časovo prepojené, a teda by nemali mať nulovú koreláciu. Druhou možnosťou je doplniť chýbajúce hodnoty priemernou koreláciou všetkých produktov, čo je v našom prípade 90,62%. Našu korelačnú maticu sme sa rozhodli doplniť priemernými hodnotami korelácií. Dostali sme korelačnú maticu, ktorá je síce symetrická, ale nie je kladne semidefinitná. Tento

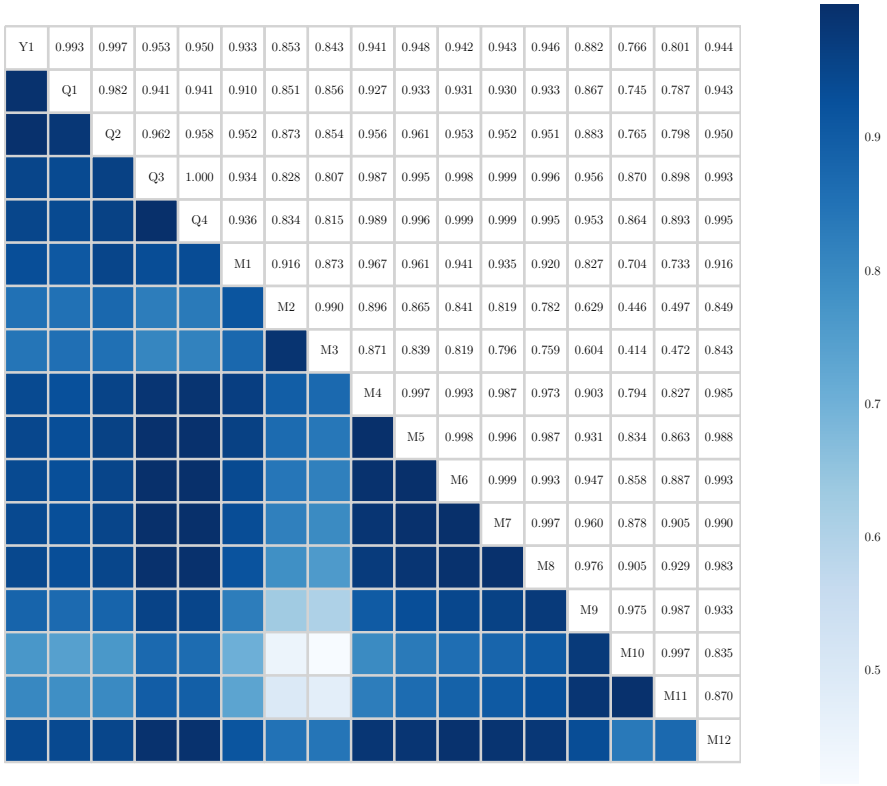
problém je pomerne bežný vo finančných aplikáciach [9], kde potrebujeme určiť koreláciu medzi dvoma podkladovými aktívami, ktoré sú obchodované v rôznych časových obdobiach, rôznych časových pásmach, alebo sa vôbec neobchodujú súčasne, ako je to aj v našich dátach.

Aj bez generovania špecifických dát vieme ukázať, že ľubovoľná symetrická matica s jednotkami na diagonále a hodnotami z intervalu $(-1, 1)$ mimo diagonály, nemusí byť kladne semidefinitná. Jednoduchý protipríklad je matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 & 0.2 \\ -0.9 & 1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{kde } \lambda(\boldsymbol{A}) = [-0.07, 1.92, 1.15]. \tag{13}$$

Existuje viacero spôsobov ako s danou maticou ďalej pracovať. Jedným z najpoužívanejších spôsobov je postupná kalibrácia odhadnutej korelačnej matice, ktorá vedie ku kladne semidefinitnej matici (napr. [9], [10]). V našich výpočtoch sme použili iteratívny algoritmus z verejne dostupnej Python knižnice statsmodels implemtujúci algoritmus predstavený v [3], ktorý postupne skracuje dĺžky záporných vlastných hodnôt matice. Algoritmus skončí v momente, keď aj najmenšia vlastná hodnota je kladná. Síce by nám postačila aj kladne semidefinitná matica, avšak pri numerických výpočtoch je vhodnejšie mať istú rezervu na chybu spôsobenú počítačovou aritmetikou. Preto chceme, aby najmenšia vlastná hodnota bola väčšia, ako dopredu zvolená, dostatočne malá, kladná konštanta δ. Algoritmus taktiež skončí, akonáhle je dosiahnutý maximálny počet iterácií, ktorý závisí od zvoleného parametra N a rozmeru matice $\boldsymbol{A}$. Predpokladáme, že vstupná matica je symetrická. V opačnom prípade totiž nemáme zaručené, že vieme urobiť spektrálnu dekompozíciu danej matice.

Po kalibrácií pôvodnej korelačnej matice sme už dostali maticu na Obr. 9, ktorá je kladne definitná a môžeme použiť Choleského dekompozíciu.



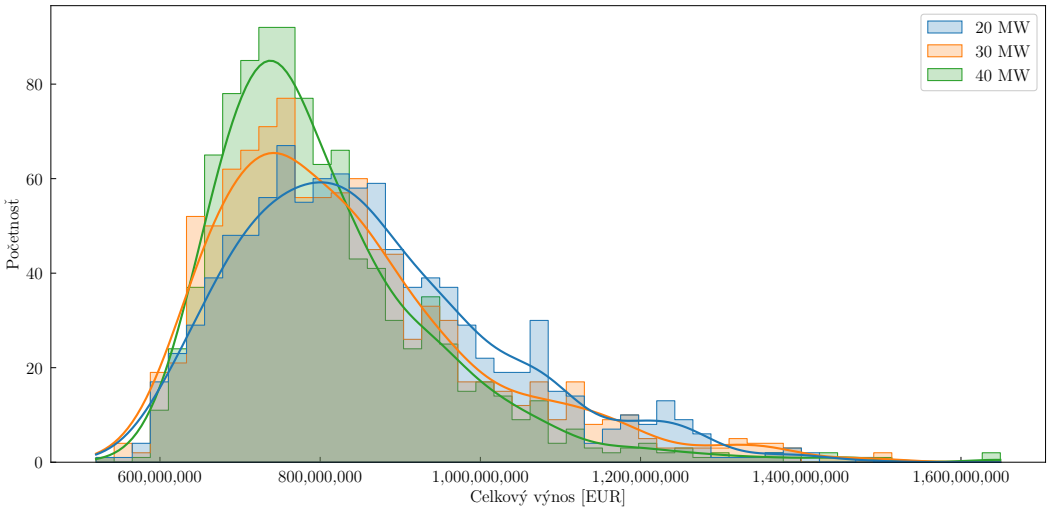
Obr. 9: Pearsonová korelačná matica pre obchodované produkty po kalibrácii.

Okrem korelačnej matice potrebujeme odhadnúť aj parametre zodpovedajúce za drift μ a volatilitu σ pre jednotlivé premenné vstupujúce do modelu. Vstupnými premennými v modeli sú termínované produkty, ktorých je 17. Ku každému produktu patrí cena dodávok plynu na príslušné obdobie. A poslednou premennou je cena európskej emisnej povolenky. Celkovo budeme generovať 35 náhodných premenných, ktoré sú korelované podľa výslednej kalibrovanej korelačnej matice. Parametre μ sme zvolili všetky nulové, keďže z dlhodobého hľadiska neočakávame nárast ani pokles ceny elektriny. Dostávame teda geometrický Brownov pohyb bez driftu. Parametre σ sme pre jednotlivé premenné určili tak, aby volatilita simulovaných cenových scenárov bola čo najbližšie volatilite z historických dát. Výsledné parametre σ sme pre 35 premenných, vstupujúcich do generovania simulovaných cien, zhrnuli v Tabuľke 2 pri dennej disktretizácii.

$\sigma_{\text{Y1}} = 0.169$	$\sigma_{\text{Q1}} = 0.198$	$\sigma_{\text{Q2}} = 0.185$	$\sigma_{\text{Q3}} = 0.179$	$\sigma_{\text{Q4}} = 0.201$
$\sigma_{\text{M1}} = 0.252$	$\sigma_{\text{M2}} = 0.259$	$\sigma_{\text{M3}} = 0.221$	$\sigma_{\text{M4}} = 0.201$	$\sigma_{\text{M5}} = 0.176$
$\sigma_{\text{M6}} = 0.176$	$\sigma_{\text{M7}} = 0.182$	$\sigma_{\text{M8}} = 0.189$	$\sigma_{\text{M9}} = 0.221$	$\sigma_{\text{M10}} = 0.317$
$\sigma_{\text{M11}} = 0.378$	$\sigma_{\text{M12}} = 0.429$	$\sigma_{\text{EUA}} = 0.297$	$\sigma_{\text{TTF Y1}} = 0.169$	$\sigma_{\text{TTF Q1}} = 0.199$
$\sigma_{\text{TTF Q2}} = 0.191$	$\sigma_{\text{TTF Q3}} = 0.207$	$\sigma_{\text{TTF Q4}} = 0.245$	$\sigma_{\text{TTF M1}} = 0.196$	$\sigma_{\text{TTF M2}} = 0.264$
$\sigma_{\text{TTF M3}} = 0.266$	$\sigma_{\text{TTF M4}} = 0.193$	$\sigma_{\text{TTF M5}} = 0.189$	$\sigma_{\text{TTF M6}} = 0.204$	$\sigma_{\text{TTF M7}} = 0.203$
$\sigma_{\text{TTF M8}} = 0.220$	$\sigma_{\text{TTF M9}} = 0.229$	$\sigma_{\text{TTF M10}} = 0.244$	$\sigma_{\text{TTF M11}} = 0.282$	$\sigma_{\text{TTF M12}} = 0.311$

Tabuľka 2: Porovnanie odhadnutých volatilít σ pre jednotlivé premenné vstupujúce do generovaných simulovaných cien.

Pre 1000 simulovaných cenových scenárov sme riešili optimalizačný problém v danom modeli. Hodnotu parametra pre kĺzavý priemer sme nechali pôvodnú, čiže pracovných 20 dní. Menili sme parameter modelu, ktorý určuje maximálnu likviditu pri predaji produktov. Testovali sme hodnoty ohraničenia 20 MW, 30 MW, 40 MW a porovnali sme ich výsledné celkové výnosy z predaja. Na Obr. 10 môžeme vidieť ich rozdelenia.



Obr. 10: Rozdelenie celkových výnosov pri maximálnom ohraničení likvidity 20 MW, 30 MW a 40 MW.

V Tabuľke 3 sme zhrnuli všetky podstatné štatistiky získané zo simulácií. Vidíme, že potvrdzujú pozorovania z Obr. 10, že pri nižšej maximálnej likvidite dostávame v strednej hodnote väčšie celkové výnosy. Na prvý pohľad by sme očakávali, že väčšie výnosy budeme

dosahovať pri voľnejšom ohraničení, ako je napríklad 40 MW. Navyše množina riešení pri nižšom ohraničení je podmnožinou množiny riešení pri vyššom ohraničení na maximálnu likviditu. Teda ak môžeme predať v jeden týždeň maximálne 40 MW, znamená to, že môžeme aj menej. Avšak pri ohraničení 20 MW nemôžeme predávať viac.

Tabuľka 3: Výsledné štatistiky zo simulovaných riešení deterministického modelu.

ohr. [MW]	priemer [M EUR]	s. odchýlka [M EUR]	min. [M EUR]	25% kvantil [M EUR]	75% kvantil [M EUR]	max. [M EUR]
20	858.7	163.4	520.2	739.1	950	1479.4
30	832.8	165.7	539.1	712.8	907.1	1503.2
40	806	143.2	542.3	710.9	865.6	1649.1

Tento výsledok je spôsobený predikciou ceny. Ako sme spomínali na začiatku kapitoly, náš model je veľmi naivný v zmysle cenotvorby a na svoje rozhodovanie využíva len lokálny trend ceny. Akonáhle už určité množstvo výroby predá, už sa ku nej ďalej nevracia a optimalizuje len nasledujúce týždne. Tým pádom pri vyššej maximálnej likvidite náš model často predá veľkú časť výroby už skôr, aj keď sa neskôr môžu na trhu objaviť výhodnejšie ceny. Ukazuje sa, že pre lepšie plánovanie odpredaja výroby by sme potrebovali optimalizačný model, ktorý by už prvé rozhodnutia robil za predpokladu značnej variability budúcich cien. Náš model využíva len lokálnu informáciu o vývoji ceny na trhu a nevie efektívne rozhodovať o predaji produktov v neskorších časových krokoch. Potrebovali by sme model, ktorý túto neistotu zohľadní pri rozhodovaní, a zároveň aby vedel plánovať rozhodnutia na dlhšie obdobie dopredu v závislosti od aktuálnych rozhodnutí.

Sformulované požiadavky by vedeli splniť napríklad modely stochastického dynamického programovania. Sformulovaniu a riešeniu optimalizačného problému predaja výroby ako modelu stochastického dynamického programovania sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole.

2.6 Výsledky sekvenčného deterministického modelu

V závere kapitoly zhrnieme naše výsledky a pozorovania získané z deterministického modelu. Na začiatku sme načrtli motivačný príklad, ktorý ilustruje základnú problematiku predaja energetických produktov na dlhšie obdobie dopredu. Následne sme ukázali dátovo riadený model na vytváranie predikcii pre ceny energetických produktov, do ktorého vstupujú ceny komodít. Pôvodný motivačný príklad, ktorý obsahoval len jeden ročný produkt sme rozšírili o štyri kvartálne a dvanásť mesačných produktov. Tým sme sa dostali k sekvenčnému deterministickému modelu, založenom na iteratívnom riešení úlohy lineárneho programovania. Model sme najprv testovali na reálnych dátach z rokov 2019 až 2021, kde sme sa snažili odpredať výrobu v roku 2021 pomocou energetických produktov. Výslednú stratégiu sme následne vizualizovali. Neskôr sme chceli otestovať náš model na simulovaných dátach, s cieľom dostať všeobecnejšie výsledky výnosov. Na vytvorenie simulovaných dát sme používali korelované geometrické Brownove pohyby. Pri ich generovaní sme narazili na problém s indefinitnou korelačnou maticou. Tento problém sa nám podarilo odstrániť pomocou iteratívneho algoritmu, z ktorého sme dostali korelačnú maticu, blízku tej pôvodnej, ktorá už bola kladne definitná. Model sme následne otestovali na simulovaných dátach. Testovali sme, ako vplývajú maximálne povolené množstvá predaja na výsledné výnosy. Model sme spustili 1000 krát pre hodnoty ohraničenia 20 MW, 30 MW a 40 MW. Z výsledkov modelu sme zistili, že najlepšie výnosy nám poskytlo najmenšie ohraničenie 20 MW. Predpokladáme, že tento výsledok je spôsobený predikciou ceny. Ako sme spomínali na začiatku kapitoly, náš model je pomerne naivný v zmysle cenotvorby a na svoje rozhodovanie využíva len lokálny trend ceny. Ak už nejaké množstvo výroby predá, už sa k nej ďalej nevracia. Zároveň daný model nevie plánovať rozhodnutia do budúcnosti vzhľadom na aktuálne rozhodnutia. Tieto nedostatky budeme ďalej adresovať pri vytváraní ďalšieho modelu, založenom na princípe stochastického dynamického programovania. Výhodami sekvenčného deterministického modelu sú jednoznačne jeho interpretovateľnosť a jednoduchá implementácia.

3 Modely so stochastickým optimálnym riadením

V tejto kapitole sa budeme zaoberať modelom, ktorý sformulujeme ako problém stochastického optimálneho riadenia. Úlohy stochastického optimálneho riadenia sa často vyskytujú v rôznych odvetviach inžinierstva a manažmentu, kde je potrebné vedieť, ako sa optimálne rozhodnúť a ako toto rozhodnutie ovplyvní naše možnosti v budúcnosti. Ponúkajú riešenia pri zostavovaní stratégií optimálnej výroby pri neistom dopyte, alebo ako optimálne rebalancovať portfólio na akciových trhoch.

3.1 Optimálne riadenie

Jednou z častí matematickej analýzy je optimalizácia funkcie reálnej premennej $f(x)$, kde premenná x je štandardne n-rozmerný vektor z $\mathbb{R}^n$. Pri viacerých dôležitých problémoch je však funkcia, ktorú chceme optimalizovať, definovaná na nekonečne rozmernej množine. Najstarším príkladom optimalizácie funkcie definovanej na abstraktnom priestore sa objavuje vo variačnom počte.

Historicky sa toto odvetvie matematiky začalo rozvíjať ešte v 18. storočí, keď sa Leonard Euler inšpiroval Johnom Bernoullim a publikoval v roku 1744 prvé metódy na hľadanie kriviek, ktoré majú vlastnosti maxima, respektíve minima [2]. Do problematiky optimálneho riadenia, vtedy nazývaného variačný počet, prispel aj J. L. Lagrange, ktorý prišiel s názvom variácie. Úlohy variačného počtu boli výrazne zjednodušené v porovnaní s úlohami optimálneho riadenia, ktoré sú ich zovšeobecnením. Do teórie optimálneho riadenia ďalej prispeli Jacobi a Hamilton v 19. storočí s Jacobi-Hamiltonovou rovnicou, na ktorú o vyše 100 rokov neskôr nadviazal Bellman pri vzniku dynamického programovania.

Nižšie uvedieme formuláciu úlohy optimálneho riadenia s pevným časom, pre deterministický prípad v štandardnom tvare podľa knihy [8]. Pre účely maximalizácie máme

úlohu optimálneho riadenia s pevným časom v štandardnom tvare:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovať} \quad & J(x,\mathcal{U}) \equiv \sum_{t=0}^{T-1} f_t^0(x_t,u_t), \\ \text{pri podmienkach} \quad & x_{t+1} = f_t(x_t,u_t), \quad t=0,\ldots,T-1, \\ & x_t \in X_t, \quad t=0,\ldots,T-1, \\ & u_t \in U_t, \quad t=0,\ldots,T-1, \\ & x_0 = x,\ x \text{ je pevne zvolené z } X_0, \\ & x_T \in C. \end{aligned} \tag{14}$$

Pod riadením rozumieme postupnosť $\mathcal{U} = \{u_0,\ldots,u_{T-1}\}$, kde $u_t \in U_t$, pre každé $t = 0,\ldots,T-1$. Odozvou $\mathcal{X} = \{x_0,\ldots,x_T\}$ na riadenie $\mathcal{U}$ nazývame riešenie stavovej rovnice $x_{t+1} = f_t(x_t,u_t)$ pre každé $t = 0,\ldots,T-1$, a pre volené $\mathcal{U}$ a daný začiatočný stav $x_0 = x$ v čase 0. V prípade, že odozva $\mathcal{X} = \{x_0,\ldots,x_T\}$ na riadenie $\mathcal{U}$ spĺňa všetky ohraničenia, t.j. $x_t \in X_t,\ t = 0,\ldots,T-1$ a $x_T \in C$, riadenie $\mathcal{U}$ nazývame prípustným.

Úlohu (14) v závislosti od počiatočného času $j = 0$ a počiatočného stavu $x_0 = x$ označíme $D_0(x)$ a nazveme ju úlohou optimálneho prechodu z bodu x do množiny C na intervale $[0,T]$. Vnoríme ju do systému úloh:

$$\mathcal{D} = \{D_j(x) :\ j \in [0,T-1],\ x \in X_j\}, \tag{15}$$

kde $D_j(x)$ je úloha:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovať} \quad & J_j(x,\mathcal{U}_j) \equiv \sum_{t=j}^{T-1} f_t^0(x_t,u_t), \\ \text{pri podmienkach} \quad & x_{t+1} = f_t(x_t,u_t), \quad t=j,\ldots,T-1, \\ & x_t \in X_t, \quad t=j,\ldots,T-1, \\ & u_t \in U_t, \quad t=j,\ldots,T-1, \\ & x_j = x,\ x \text{ je pevne zvolené z } X_j, \\ & x_T \in C. \end{aligned} \tag{16}$$

Túto úlohu nazveme úlohou optimálneho prechodu z bodu x do množiny C na intervale $[j,T]$. Prípustným riadením pre túto úlohu je riadenie $\mathcal{U}_j = \{u_j,\ldots,u_{T-1}\}$, $u_t \in U_t$, $(t = j,\ldots,T-1)$, ktorého odozva $\mathcal{X}_j = \{x_j,x_{j+1},\ldots,x_T\}$ so začiatočnou hodnotou

$x_j = x$ spĺňa ohraničenia $x_t \in X_t$ $(t = j, \ldots, T-1)$ a $x_T \in C$. Triedu prípustných riadení označíme $\mathcal{P}_j(x)$.

Pre každé $j \in [0, T-1]$ a $x \in X_j$ definujeme $\Gamma_j(x)$ ako množinu tých $u \in U_j$, pre ktoré existuje $\mathcal{U}_j = \{u_j, \ldots, u_{T-1}\} \in \mathcal{P}_j(x)$ také, že $u_j = u$. Pri splnených predpokladoch uvedených v [8], existuje nutná a postačujúca podmienka optimality v tvare rovnice rovnice dynamického programovania:

$$\begin{aligned} V_T(x) &= 0, \text{ pre } x \in C \\ V_j(x) &= \max_{u_j \in \Gamma_j(x)} \left[f_j^0(x, u_j) + V_{j+1}(f_j(x, u_j)) \right], \ j = 0, \ldots, T-1, \end{aligned} \tag{17}$$

kde funkcia V je hodnotová funkcia pre systém úloh $\mathcal{D}$. Ak funkcia $v_j(x)$ spĺňa vzťahy:

$$\begin{aligned} V_j(x) &= f_j^0(x, v_j(x)) + V_{j+1}(f_j(x, v_j(x))) \\ &= \max_{u \in \Gamma_j(x)} \left[f_j^0(x, u) + V_{j+1}(f_j(x, u)) \right], \ j = 0, \ldots, T-1, \end{aligned} \tag{18}$$

tak $v_j(x)$ je optimálna spätná väzba.

3.1.1 Stochastické optimálne riadenie

V realite často hľadáme optimálne rozhodnutia v problémoch, kde sa vyskytuje náhoda. Takýmto úlohám sa venuje práve stochastické optimálne riadenie. Na rozdiel od deterministického optimálneho riadenia, je stochastické optimálne riadenie zložitejšie na modelovanie a zároveň v mnohých prípadoch neriešiteľné z dôvodu výpočtovej náročnosti.

Pri niektorých jednoduchých úlohách stochastického optimálneho riadenia, v ktorých je náhodná premenná diskrétna, vieme optimálne riešenie z rovnice dynamického programovania získať analyticky. Pri spojitej náhodnej premennej je problém výrazne zložitejší, keďže pri výpočte strednej hodnoty v rovnici dynamického programovania nie je pri výpočte strednej hodnoty vždy zaručená konvergencia príslušného integrálu.

Ako bolo spomenuté vyššie, v práci budeme pracovať len s problémami stochastického optimálneho riadenia s diskrétnym časom. Takisto budeme pracovať s diskrétnymi verziami procesov, a to takými, aby náhodné premenné vystupujúce v úlohách nadobúdali len konečný počet hodnôt. Ide o štandardný postup pri riešení úloh stochastického optimálneho riadenia [4], keďže optimalizácia so spojitou náhodnou premennou je výrazne náročnejšia.

V tomto prípade by sme teoreticky vedeli náš problém riešiť štandardným postupom pomocou rovnice dynamického programovania, avšak prístup by bol veľmi neefektívny. Vzhľadom na desiatky časových krokov a viaceré náhodné premenné, stavové a riadiace premenné by výpočtová náročnosť rástla exponenciálne [6].

3.1.2 Stochastické duálne dynamické programovanie

Na čiastočné zlepšenie výpočtovej náročnosti sa využíva metóda stochastického duálneho dynamického programovania (SDDP). Optimalizačná metóda SDDP vznikla v roku 1991 a do doby písania tejto práce sa pokladá za jednu z najefektívnejších na riešenie veľkorozmerných úloh stochastického optimálneho riadenia s veľkým počtom časových krokov. Na to, aby sme metódu SDDP v jej základnom tvare mohli použiť pre naše účely potrebujeme, aby boli splnené predpoklady uvedené v článku [6]. Väčšina predpokladov je automaticky splnená tým, že pracujeme s úlohami s diskrétnym časom a diskrétnymi náhodnými premennými. Bližšie spomenieme len tie predpoklady, ktorých splnenie nie je pri našej úlohe automaticky zaručené.

Jedným z ťažiskových predpokladov SDDP je, že náhodná premenná je nezávislá od ich predchádzajúcich realizácií. Tento predpoklad je často v praktických aplikáciách, ako sú napríklad prietoky vodných elektrární, porušený [6], keďže náhodná premenná v mnohých prípadoch závisí od predchádzajúcich stavov. V prípade, že nie je tento predpoklad splnený, strácame jednoznačnosť hodnotovej funkcie a je potrebné určiť hodnotovú funkciu pre rôzne realizácie náhodnej premennej. Tým sa výpočtová náročnosť výrazne zvýši, avšak existujú techniky, ktoré tento problém čiastočne riešia [6]. V podkapitole 3.2.2 ukážeme, že v našom optimalizačnom probléme bude tento predpoklad splnený.

V jej najjednoduchšom tvare SDDP predpokladá lineárnu účelovú funkciu, ako i funkcie vystupujúce v stavovej rovnici i v ohraničeniach. Konkrétne požaduje linearitu v riadiacej a stavovej premennej. Tento predpoklad je dôležitý vzhľadom na to, že metóda využíva dualitu v lineárnom programovaní na aproximáciu hodnotovej funkcie.

V poslednom predpoklade, ktorý spomenieme, požadujeme v každom stave, okrem posledného, schopnosť realizovať presun do nasledujúceho stavu. Teda nie je možné, aby v nejakom stave bola množina nasledujúcich stavov prázdna.

Teraz uvedieme fungovanie metódy SDDP podľa článku [17]. Metóda je rozdelená do

dvoch algoritmických častí. Prvou je takzvaná spätná časť, v ktorej začíname od koncového stavu a v každom časovom kroku riešime rovnicu dynamického programovania. Za predpokladu linearity vieme s využitím duality v lineárnom programovaní, skonštruovať opornú nadrovinu ku hodnotovej funkcií. Ďalej sa posunieme o krok späť v čase a postup opakujeme. Tentokrát ale pridáme opornú nadrovinu získanú v predchádzajúcom kroku medzi ohraničenia. Hodnotová funkcia sa nám teda postupne lepšie aproximuje, ako po častiach lineárna funkcia.

Dopredná časť metódy SDDP generuje realizácie náhodnej premennej, respektíve len malú podmnožinu všetkých scenárov, s cieľom odhadnúť strednú hodnotu v rovnici dynamického programovania. Dopredná a spätná časť metódy SDDP sa postupne striedajú, až kým nedostaneme dostatočne dobrú aproximáciu hodnotovej funkcie.

3.2 Stochastický model so strednou hodnotou

Model založený na stochastickom optimálnom riadení bude sčasti podobný modelu definovanému v časti 2.3. V nasledujúcich podkapitolách uvedieme jeho matematickú formuláciu a pozrieme sa bližšie aj na to, či spĺňa predpoklady potrebné na využitie metódy SDDP, vysvetlenej v podkapitole 3.1.2. Uvedieme vstupy a výstupy modelu, ktorým sa budeme venovať v nasledujúcich kapitolách.

3.2.1 Formulácia modelu so strednou hodnotou

Účelovou funkciou bude stredná hodnota súčtu výnosov z predaja termínovaných produktov v jednotlivých časoch t, kde T určuje maximálny počet časových krokov. Vektor cien $\boldsymbol{p}_t$ bude teraz náhodný vektor. Celkovú optimalizačnú úlohu vieme zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{u}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{p}_t^\top \boldsymbol{u}_t\right], \\ &\boldsymbol{x}_0 = 0, \\ &\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{u}_t \qquad t = 0, \ldots, T-1, \\ &0 \leq \boldsymbol{u}_t \leq \boldsymbol{l} \qquad t = 0, \ldots, T-1, \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t \leq \boldsymbol{b} \qquad t = 1, \ldots, T. \end{aligned} \tag{19}$$

Pre pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektora $\boldsymbol{p}_t$ sme sa rozhodli používať viacrozmerný korelovaný geometrický Brownov pohyb, ktorý je často používaný na modelovanie

finančných aktív [14], definovaný v predchádzajúcej kapitole v rovniciach (5) a (6). Tento proces je však v tomto tvare spojitý v čase. Pre účely diskrétneho optimálneho riadenia, je potrebné proces diskretizovať. Jeho diskretizáciou sa budeme zaoberať v podkapitole 3.2.3.

Premenná $\boldsymbol{u}_t$ predstavuje riadenie v čase t a $\boldsymbol{x}_t$ je príslušný stav v čase t. Riadiaca premenná určuje množstvo predaného objemu v čase t, zatiaľ čo stavová premenná určuje celkový predaný objem do času t v MW. V našom prípade budeme predávať len päť termínovaných produktov, akými sú jeden ročný a štyri kvartálne produkty. Z čoho dostávame, že $\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^5$.

Pomocná matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^{4\times5}$ obsahuje len nuly a jednotky, jej štruktúra je podobná ako v predchádzajúcej kapitole v rovnici (4). Jediným rozdielom je znížený počet stĺpcov vzhľadom na počet obchodovaných produktov a znížený počet riadkov na štyri, keďže najkratšie obchodované produkty budú štyri kvartálne. Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ obsahuje po kvartáloch priemernú očakávanú výrobu v roku dodávky. Podobne, ako tomu bolo v modeli z časti 2.3, vidíme, že posledné ohraničenie je v tvare nerovnosti a teda nepožadujeme aby sme odpredali celkovú výrobu. Keďže sa však pri predaji zvyšuje hodnota účelovej funkcie, ktorú chceme maximalizovať, model je nepriamo nútený odpredať celkovú výrobu. Výhodou takto definovaného voľnejšieho ohraničenia je, že pri optimalizácií sme dostali stabilnejšiu konvergenciu k riešeniu.

3.2.2 Splnenie predpokladov pre metódu SDDP

Splnenie predpokladu nezávislosti náhodnej premennej vzhľadom na časové kroky, vieme v našom prípade zabezpečiť. Stačí za náhodnú premennú voliť nie samotnú hodnotu vektoru cien $\boldsymbol{p}_t$, ale len jeho prírastku a aktuálny stav ceny bude ďalšia stavová premenná. Pre geometrický Brownov pohyb vieme, že jeho prírastky sú navzájom nezávislé. Tým síce zabezpečíme splnenie predpokladu, ale priestor stavov sa nám značne skomplikuje. Optimálna spätná väzba bude teda závisieť od stavu celkovej predanej výroby $\boldsymbol{x}_t$ a ceny produktov $\boldsymbol{p}_t$. Z týchto dvoch premenných vieme pomocou riadiacej premennej $\boldsymbol{u}_t$ implicitne ovplyvniť len stavovú premennú; cenu produktov pochopiteľne ovplyvniť nevieme.

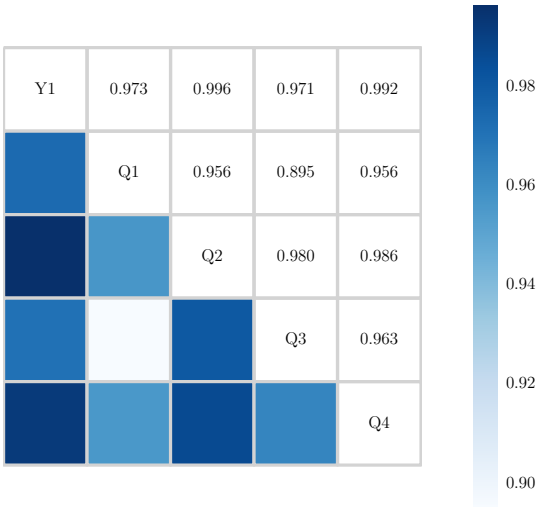
Pôvodná formulácia modelu bola v stavovej a riadiacej premennej lineárna. Po zahrnutí cien medzi stavové premenné je ale predpoklad narušený, vzhľadom na to, že v nej

vystupuje súčin medzi riadiacou a stavovou premennou. V takýchto prípadoch je však možné použiť rozšírenie metódy SDDP, takzvané MC-SDDP s využitím Markovových reťazcov [6].

Posledným predpokladom je, že sa vieme v každom prípustnom stave presunúť do nejakého ďalšieho prípustného stavu. Tým, že nepožadujeme odpredanie celkového výrobného diagramu, ale aspoň určitej časti (vďaka nerovnosti v ohraničení), bude tento predpoklad splnený v každom časovom kroku. Tu je podstatné podotknúť, že máme v modeli aj ohraničenie na koncový stav. Ohraničenia na koncový stav sa v stochastických úlohách optimálneho riadenia nevyskytujú, keďže nevieme zabezpečiť aby sme skončili v konkrétnom stave, ak do toho procesu vstupuje náhodnosť. V našom prípade ale vždy vieme dosiahnuť konkrétny koncový stav, keďže ide o predaj určitého množstva výroby. Náhodnosť v našom modeli je len v cene produktov, a teda vždy vieme predať potrebné množstvo tak, aby sme splnili koncovú podmienku, hoci aj za nevýhodné ceny, ktoré ovplyvniť nevieme.

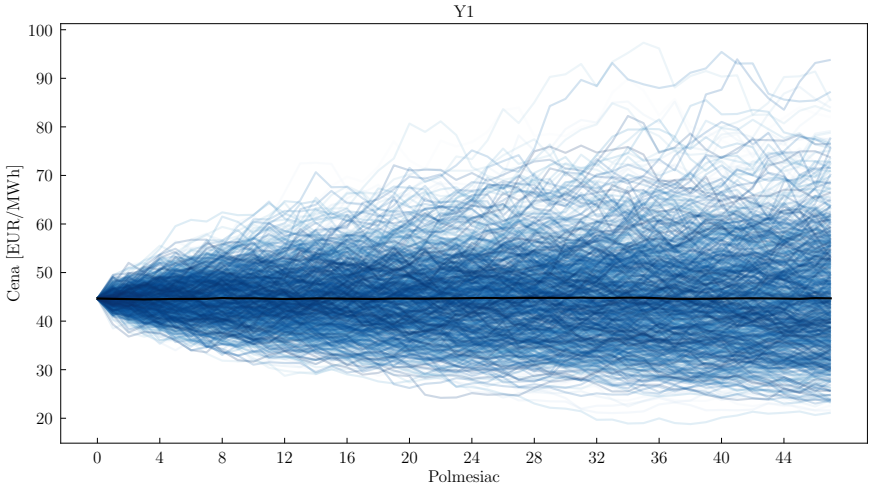
3.2.3 Nastavenie vstupných parametrov a diskretizácia procesov

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať vstupmi do modelu. Keďže chceme modelovať ceny energetických produktov ako geometrický Brownov pohyb, budeme potrebovať parametre, ktoré ho popisujú. Na vytvorenie stochastického procesu sme použili historické dáta z roku 2019 o cenách ročného a štyroch kvartálnych produktov s dodávkou v roku 2021. Na odhadovanie parametrov do geometrického Brownovho pohybu sme použili údaje získané v predchádzajúcej kapitole v Tabuľke 2. Z historických dát sme vypočítali aj Pearsonovu korelačnú maticu, ktorú môžeme vidieť na Obr. 11.



Obr. 11: Pearsonova korelačná matica pre obchodované produkty.

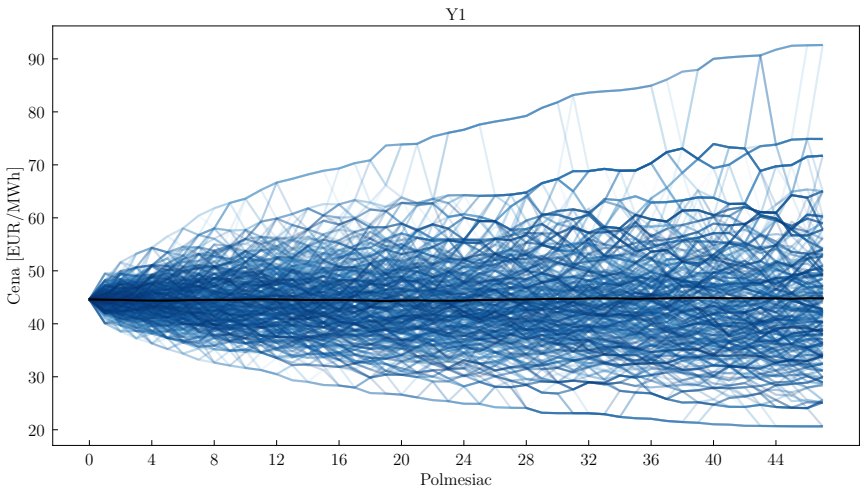
V tomto prípade už nenastal problém s kladnou semidefinitnosťou, keďže časové dáta boli konzistentné. Pomocou spomínaných štatistík sme vytvorili korelované geometrické Brownove pohyby pre všetkých päť obchodovaných produktov. Pre náhodné procesy sme vygenerovali 10 000 simulácií, ktoré sú znázornené na Obr. 12.



Obr. 12: Graf znázorňujúci 10 000 cenových scenárov, pre ročný termínovaný produkt, počas 48 časových krokov. Čierna horizontálna čiara znázorňuje priemernú hodnotu v jednotlivých časových krokoch.

Keďže nechceme riešiť úlohu spojitého optimálneho riadenia, je potrebné dané procesy diskretizovať v čase. Vygenerované trajektórie sme následne diskretizovali pomocou

solveru QUASAR [12]. Dostali sme tak mriežku, zobrazenú na Obr. 13, v ktorej náhodná premenná nadobúda len fixný a konečný počet hodnôt. V našom prípade sme používali 100 diskretizačných uzlov, pre každý časový krok. Z našich skúseností nie je optimálne zvoliť príliš veľký počet uzlov, vzhľadom na výpočtovú náročnosť. V dokumentácií solveru uvádzajú, že počet uzlov by mal byť rádovo blízky počtu časových krokov. Algoritmus solveru vytvorí optimálne diskretizovanú mriežku z vygenerovaných trajektórií pomocou Wassersteinovej metriky. Podrobnejší postup je vysvetlený v článku [11]. Zjednodušene teda algoritmus vytvorí optimálne rozmiestnené uzly a priradí im pravdepodobnosť vzhľadom na hustotu jednotlivých trajektórií. Dostaneme tak mriežku reprezentujúcu náhodnú premennú, ktorá nadobúda v každom časovom kroku len konečný počet hodnôt a ku každému uzlu máme priradenú pravdepodobnosť, že sa do neho dostaneme.



Obr. 13: Graf znázorňujúci mriežku vytvorenú diskretizáciou do 100 uzlov v každom časovom kroku pre ročný termínovaný produkt. Čierna horizontálna čiara znázorňuje priemernú hodnotu v jednotlivých časových krokoch.

Počet časových krokov T sme nastavili na 48, keďže naše obchodovacie obdobie bude trvať dva roky s polmesačnou granularitou.

3.2.4 Výstupy modelu

Výstupom modelu budú optimálne spätné väzby, teda aké množstvo očakávanej výroby je optimálne predať pri danej cenovej hladine a aktuálnom celkovom predanom množstve. Tieto výsledky sú ťažko interpretovateľné v tomto tvare, preto sa pozrieme na simulované

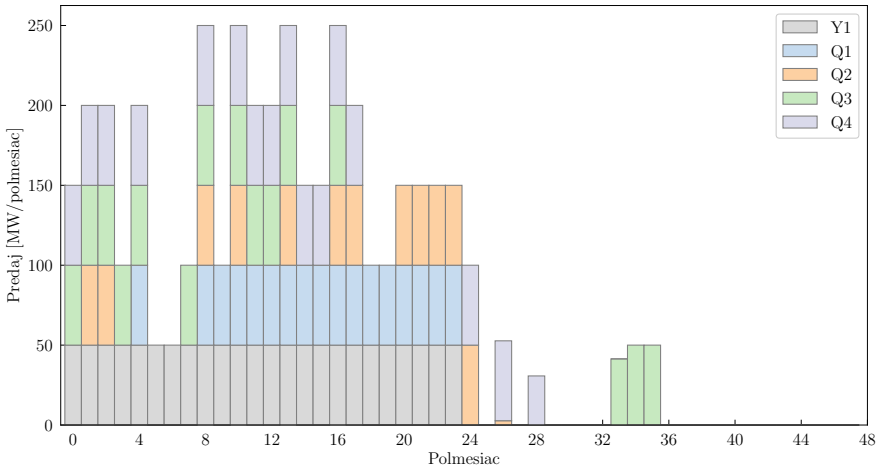
cenové scenáre a pomocou spätných väzieb pre ne určíme optimálne riadenie a z toho vyplývajúcu odozvu.

Zaujímavé pre nás budú optimálne riadenia a ich odozvy získané zo simulácií. Pozrieme sa na rozdelenia týchto premenných a ich priemerné hodnoty v čase. Takto vizualizované výsledky nám ponúknu lepší náhľad do rozhodovacieho procesu.

V nasledujúcej podkapitole sa pozrieme na výsledky získané zo stochastického modelu. Na riešenie stochastického optimálneho riadenia sme používali optimalizačný softvér QUASAR [12], ktorý využíva pokročilé metódy SDDP a MC-SDDP, ktorých teoretické vlastnosti sme uviedli v časti 3.1.2.

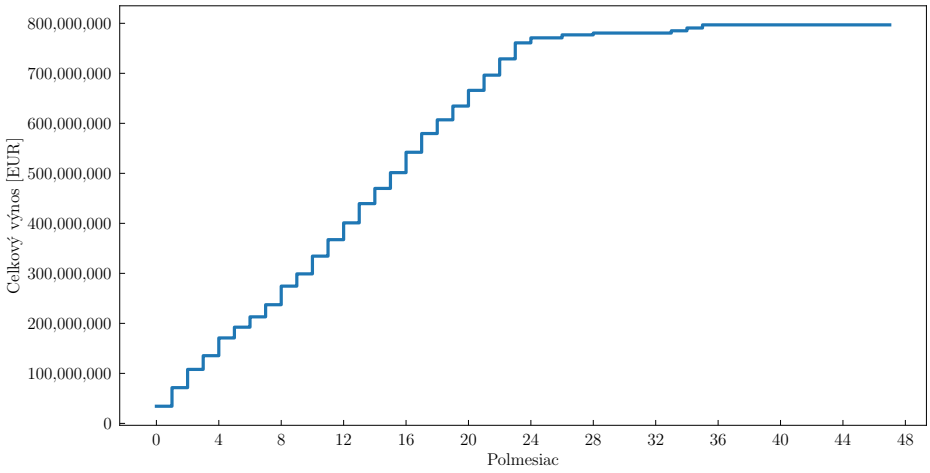
3.2.5 Testovanie modelu so strednou hodnotou

V prvom kroku sme testovali model (19) na historických dátach z rokov 2019, 2020, a 2021, pre jeden ročný produkt a štyri kvartálne. Podobne ako v predchádzajúcej kapitole chceme odpredať výrobu v roku 2021 pomocou daných termínovaných produktov. Maximálnu likviditu pri predaji sme nastavili na 50 MW. Pre porovnanie ide o maximálny predaj približne 23 MW v prepočte na týždeň. Nižšie na Obr. 14 môžeme vidieť výslednú stratégiu po polmesiacoch. Ďalej sa pozrieme na výsledok jedného cenového scenára, a to toho reálneho.



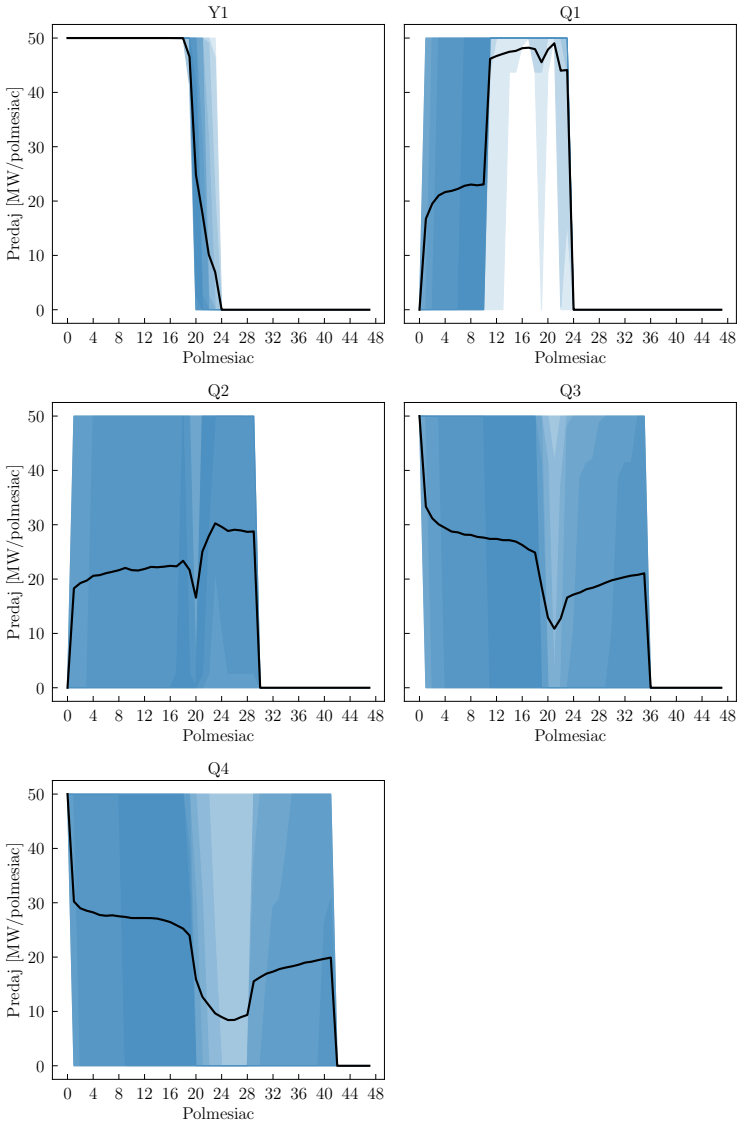
Obr. 14: Graf znázorňujúci polmesačné predaje termínovaných produktov počas obchodovacieho obdobia pre model so strednou hodnotou.

Môžeme si všimnúť, že ročný produkt predávame v každom časovom kroku. Ostatné kvartálne produkty predávame tak, aby sme pokryli zvyšok výroby. Taktiež si môžeme všimnúť, že celková výroba na rok 2021, je už skoro celá predaná ešte v roku 2020. Vypočítali sme celkové výnosy z predaja pomocou stochastického modelu a zobrazili sme ich do grafu na Obr. 15.



Obr. 15: Graf znázorňujúci priebeh celkových výnosov počas celého obchodovacieho obdobia pre model so strednou hodnotou.

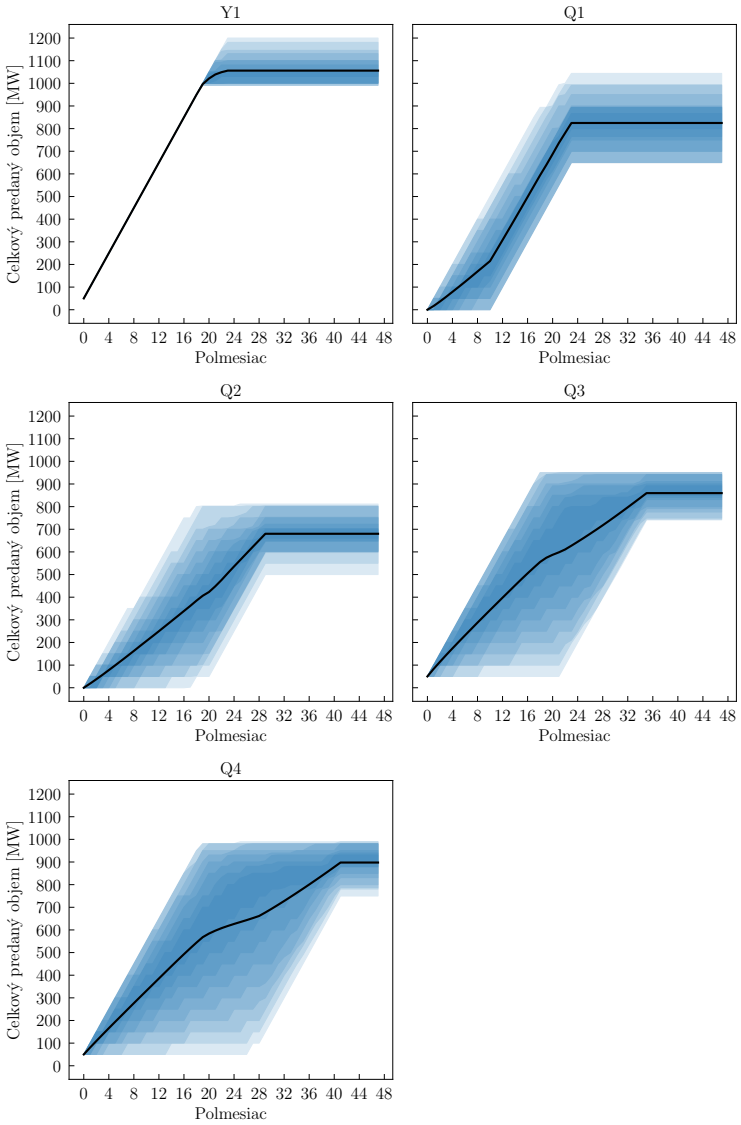
Teraz sa pozrieme na výsledky modelu, získané zo simulovaných dát. Na otestovanie modelu sme vygenerovali 10 000 cenových scenárov a následne sme použili riešenie zo stochastického modelu na vytvorenie stratégie predaja. Jednotlivé rozdelenia realizovaných optimálnych riadení a ich odoziev sme zobrazili pomocou ich priemernej hodnoty a kvantilov. Na Obr. 16 a 17 sú zobrazené priemerné hodnoty riadení a odozvy spolu s pásmi spoľahlivosti. Tieto pásy určujú koľko percent riadení respektíve odoziev malo v danom časovom kroku hodnotu v danom páse. Pásy sú rozdelené na kvantily od 5% do 95% s krokom 5% podľa odtieňa modrej farby, kde najtmavšie pásy sa nachádzajú najbližšie k mediánu (50% kvantilu).



Obr. 16: Grafy znázorňujúce predané množstvo výroby v danom polmesiaci. Čiernou farbou je znázornená priemerná hodnota v jednotlivých časových krokoch. Pásy s odtieňmi modrej znázorňujú kvantily, pre jednotlivé riadenia získané zo simulácií.

Na výsledkoch zo simulácií si môžeme všimnúť zaujímavú dynamiku. Ročný produkt je predávaný od začiatku obchodovacieho obdobia každý polmesiac. Ako bolo spomenuté v predchádzajúcich kapitolách, tento produkt môžeme predávať len do začiatku jeho fyzickej dodávky, a teda jeho riadiaca premenná je od 24. polmesiaca nulová. Vidíme, že máme variabilitu pri ukončovaní predaja medzi 20. a 24. polmesiacom, čiže 10. a 12. mesiacom. Táto variabilita závisí od toho, či sa oplatí predávať ročný produkt, alebo je výhodnejšie predávať kvartálne produkty. Tým, že ročný produkt obsahuje v sebe najviac hodín oproti ostatným produktom, je nutné pomocou neho predať aspoň určité množstvo, aby bola splnená koncová podmienka. Prvý kvartálny produkt je predávaný skoro s istotou medzi 10. a 24. polmesiacom, čiže 5. a 12. mesiacom. Prvý polrok je jeho predaj rôzny podľa toho, ako sa vyvíja jeho cena. Model teda čaká, ako sa budú vyvíjať ceny prvého kvartálneho produktu a skoro s istotou dokúpi posledné požadované množstvo, aby bola splnená koncová podmienka pre prvý kvartál. Ostatné kvartálne produkty majú riadenie rôzne podľa vývoja ceny, avšak môžeme si všimnúť pokles pri 20. a 24. polmesiaci, čiže 10. a 12. mesiaci, keď tieto kvartálne produkty predávajú relatívne menšie množstvá výroby. Je to pravdepodobne spôsobené variabilitou pri ročnom produkte v tomto období, teda ak predávame väčšie množstvo ročného produktu, môžeme predať menšie množstvo tretieho a štvrtého kvartálu. Na Obr. 17 nižšie sú znázornené odozvy na optimálne riadenie, teda agregované množstvo predaja výroby počas obchodovacieho obdobia.

Stochastický model so strednou hodnotou (19) reprezentuje rizikovo neutrálneho investora, keďže maximalizuje stredné výnosy z predaja. Investor však nemusí byť rizikovo neutrálny. V ďalšej časti predstavíme rozšírenie modelu (19) pre rizikovo averzného investora.



Obr. 17: Grafy znázorňujúce agregované predané množstvo výroby v danom polmesiaci. Čiernou farbou je znázornená priemerná hodnota v jednotlivých časových krokoch. Pásy s odtieňmi modrej znázorňujú kvantily pre jednotlivé odozvy získané zo simulácií.

3.3 Stochastický model s rizikovou mierou

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať rozšírením stochastického modelu so strednou hodnotou (19) o rizikovú mieru. Pôvodný model reprezentuje rizikovo neutrálneho investora. Chceli by sme, aby rozhodovací proces pri vytváraní optimálnej stratégie predaja energetických produktov, bol ovplyvnený aj neistotou o cenách daných produktov. Takto rozšírený model (23) bude reprezentovať investora, ktorý je rizikovo averzný. V nasledujú-

cich podkapitolách uvedieme definície dvoch rizikových mier, ktoré sú často používané vo finančných aplikáciách. Vzhľadom na ich vlastnosti budeme v rozšírenom modeli používať len jednu z nich. Neskôr uvedieme matematickú formuláciu modelu (23) rozšíreného o danú rizikovú mieru. V závere podkapitoly otestujeme model s rizikovou mierou (23) a porovnáme ho s modelom so strednou hodnotou (19).

3.3.1 Rizikové miery

V tejto podkapitole predstavíme modifikáciu modelu pre rizikovo averzného investora. Rizikovú averznosť docielime zakomponovaním miery rizika do účelovej funkcie. Pracovať budeme s rizikovou mierou CVaR[7]. Najprv uvedieme matematickú definíciu miery CVaR podľa článku [16], modifikovanú pre naše účely na dolný chvost rozdelenia. Následne sformulujeme modifikáciu modelu z časti 3.2.1 s rizikovou mierou CVaR. Riziková miera CVaR sa často vyskytuje v rôznych finančných aplikáciách. Na jej odvodenie je potrebné spomenúť rizikovú mieru VaR[8]. Ďalej uvedieme ich matematické definície podľa článku [16], modifikované pre naše účely na dolný chvost rozdelenia.

Definícia 3.1 (Hodnota v riziku)**.** *Nech X je náhodná premenná, $\alpha \in (0,1)$ je hladina spoľahlivosti, potom jej hodnota v riziku je definovaná ako:*

$$\mathrm{VaR}_\alpha[X] \equiv \min\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}. \tag{20}$$

Definícia 3.2 (Podmienená hodnota v riziku)**.** *Nech X je náhodná premenná, $\alpha \in (0,1)$ je hladina spoľahlivosti. Potom jej podmienená hodnota v riziku je definovaná ako:*

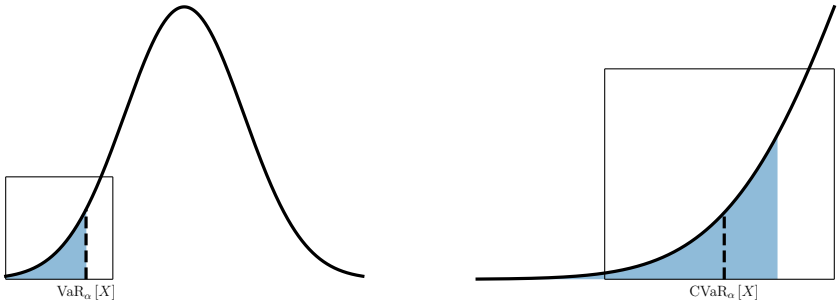
$$\mathrm{CVaR}_\alpha[X] \equiv \mathbb{E}[X \mid X \leq \mathrm{VaR}_\alpha[X]]. \tag{21}$$

Rizikové miery $\mathrm{VaR}_\alpha[X]$ a $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ sme vizualizovali pomocou štandardizovaného normálneho rozdelenia na hladine spoľahlivosti $\alpha = 5\%$ na Obr. 18.

Hodnota VaR náhodnej premennej X na hladine α predstavuje jej α kvantil. Zatiaľ čo hodnotu $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ dostaneme, ako strednú hodnotu rozdelenia na dolnom chvoste podmieneného hodnotou $\mathrm{VaR}_\alpha[X]$.

[7] Z anglického „Conditional Value at Risk“

[8] Z anglického „Value at Risk“



Obr. 18: Porovnanie rizikových mier $\mathrm{VaR}_\alpha[X]$ a $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$, pre $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ a $\alpha = 5\%$.

Zahrnutie ľubovoľnej z uvedených rizikových mier do účelovej funkcie pri maximalizácii má z následok, že dolný chvost rozdelenia celkových výnosov bude ľahší. Tým pádom zmenšíme riziko veľkých strát. Na rozdiel od VaR je CVaR jednoduchšia na optimalizáciu a je spojitá vzhľadom na hladinu spoľahlivosti α a konkávna vzhľadom na náhodnú premennú. Je preto častejšie používaná vo finančných aplikáciách [15].

3.3.2 Formulácia modelu s rizikovou mierou

V tejto podkapitole rozšírime stochastický model so strednou hodnotou (19) o rizikovú mieru CVaR. Model bude reprezentovať rizikovo averzného investora. Účelovú funkciu v tomto prípade vytvoríme ako sumu konvexnej kombinácie strednej hodnoty a podmienenej hodnoty v riziku príjmov v každej perióde (22).

$$\mathcal{Q}_{\alpha,\lambda}[X] = (1-\lambda)\,\mathbb{E}[X] + \lambda \mathrm{CVaR}_\alpha[X], \tag{22}$$

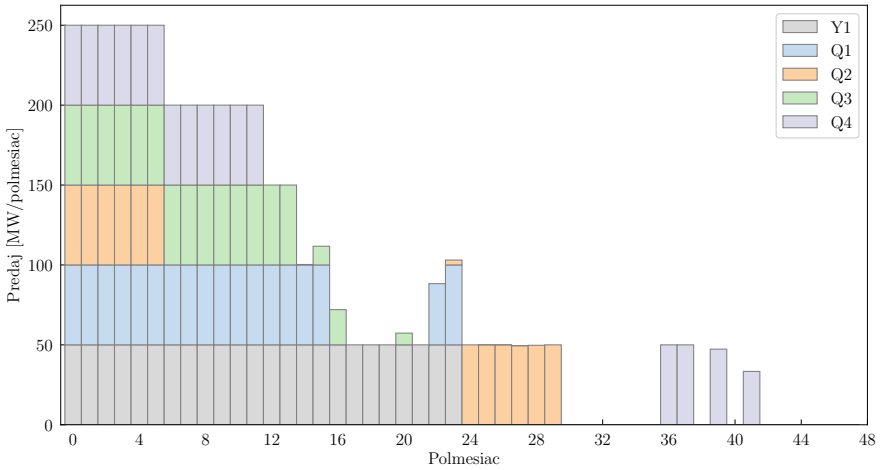
kde $\lambda \in [0,1]$ je váha na podmienenú hodnotu v riziku. Celková optimalizačná úloha pri rozšírení o rizikovú mieru má tvar:

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{u}} \ \mathcal{Q}_{\alpha,\lambda}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \boldsymbol{p}_t^\mathsf{T} \boldsymbol{u}_t\right], \\ &\boldsymbol{x}_0 = 0, \\ &\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{u}_t \qquad t = 0,\dots,T-1, \\ &0 \le \boldsymbol{u}_t \le \boldsymbol{l} \qquad t = 0,\dots,T-1, \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t \le \boldsymbol{b}. \qquad t = 1,\dots,T. \end{aligned} \tag{23}$$

V špeciálnom prípade pre hodnotu parametra $\lambda = 0$, dostávame model so strednou hodnotou (19).

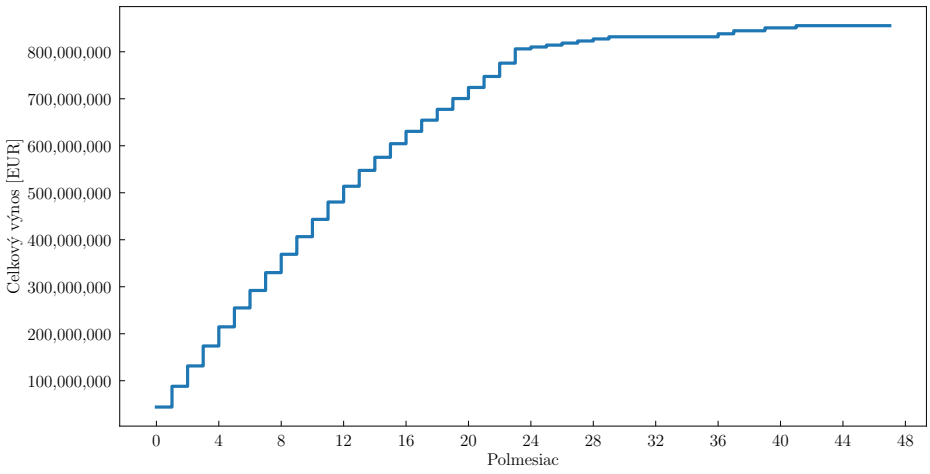
3.3.3 Testovanie modelu s rizikovou mierou

V tejto časti predstavíme výsledky riešenia modelu 23 pre $\lambda = 0.5$, teda v prípade, keď rovnakú váhu kladieme na očakávaný príjem i jeho riziko. Parameter určujúci hladinu spoľahlivosti α v $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ sme nastavili na štandardne zvolených 5% a ďalej sme ho nemenili. Rovnako, ako v časti 3.2.5 sa pozrieme najprv na výsledky pre konkrétny scenár cien z reálnych dát a neskôr predstavíme výsledky pre simulované scenáre. Znovu sme použili historické dáta z rokov 2019, 2020 a 2021.



Obr. 19: Graf znázorňujúci polmesačné predaje termínovaných produktov počas obchodovacieho obdobia pre stochastický model s rizikovou mierou $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ na hladine spoľahlivosti $\alpha = 5\%$ s váhou $\lambda = 0.5$.

Na Obr. 19 si môžeme všimnúť, že stratégia predaja je teraz viac orientovaná na predaj veľkej časti výroby ešte v prvom roku. Tým sa teoreticky znižuje riziko, keďže cena s rastúcim časom je menej predvídateľná. Avšak vidíme aj predaj druhého a štvrtého kvartálu v druhom roku obchodovacieho obdobia. Na Obr. 20 nižšie môžeme vidieť priebeh celkových výnosov pri použití rizikovej miery $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ s váhou $\lambda = 0.5$ na hladine spoľahlivosti $\alpha = 5\%$.

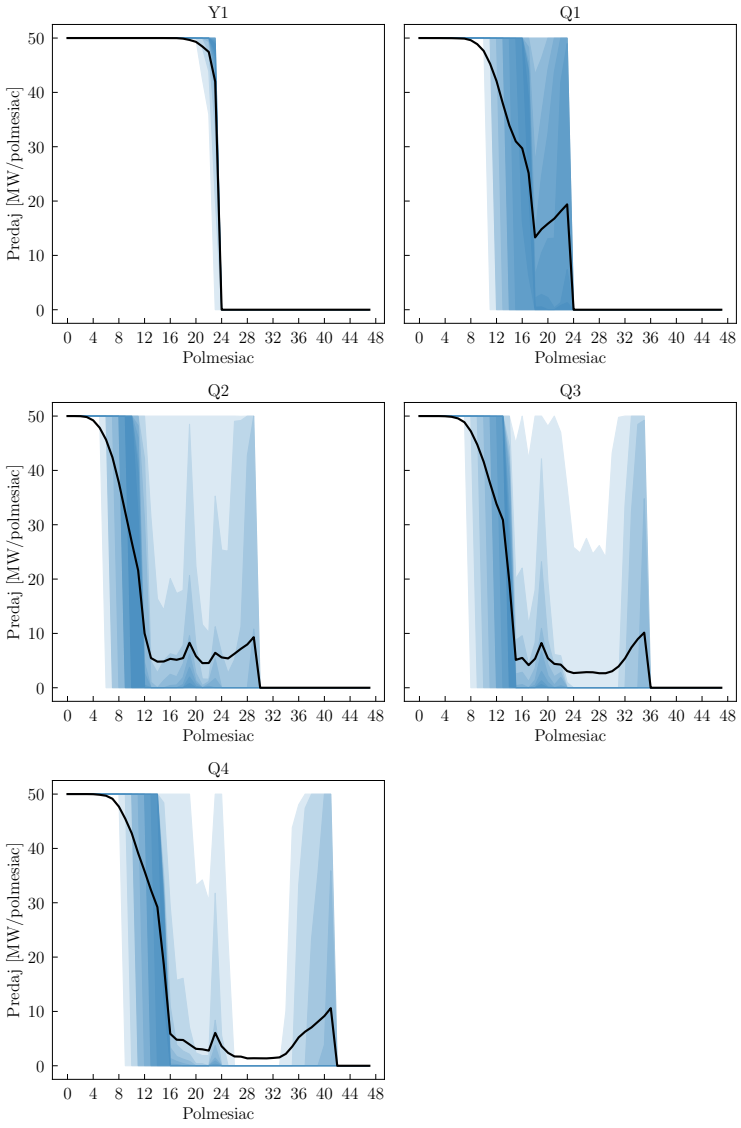


Obr. 20: Graf znázorňujúci priebeh celkových výnosov počas celého obchodovacieho obdobia, pre stochastický model s rizikovou mierou $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ na hladine spoľahlivosti $\alpha = 5\%$ s váhou $\lambda = 0.5$.

Celkové výnosy z predaja boli v tomto prípade vyššie ako pri použití len strednej hodnoty v účelovej funkcií. Toto vo všeobecnosti neplatí a je to spôsobené náhodou.

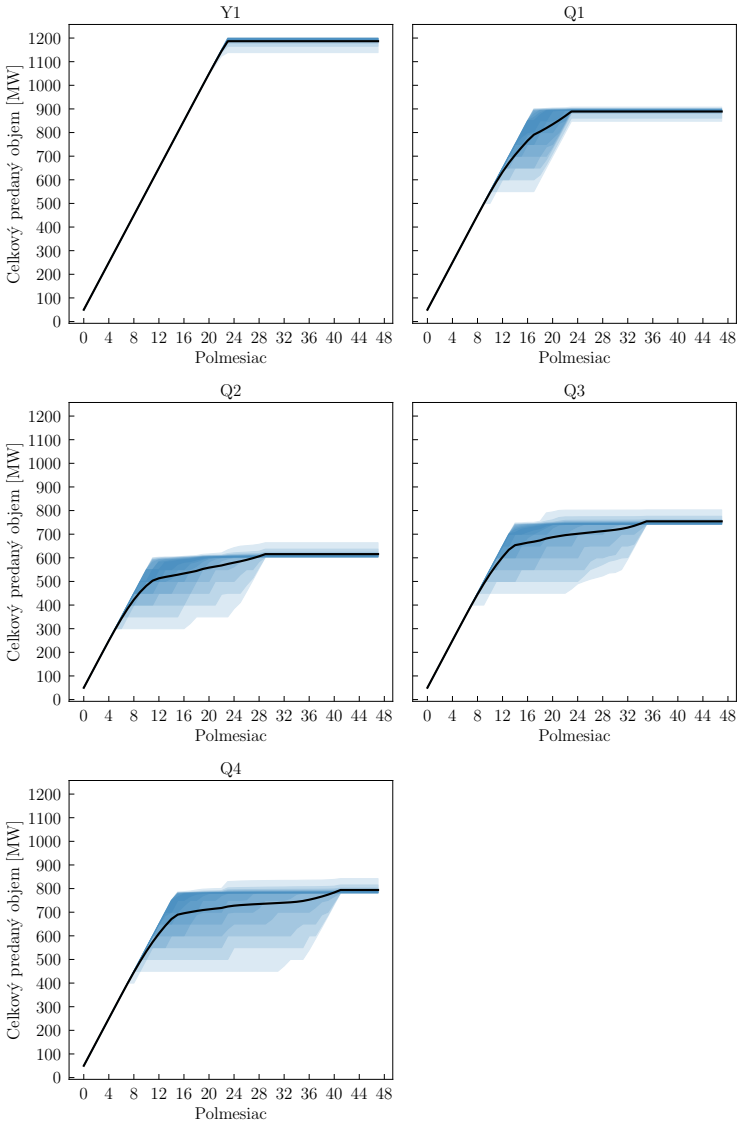
Podobne ako v podkapitole 3.2.5 sme sa pozreli na výsledné optimálne riadenia a ich odozvy pre 10 000 simulovaných cenových scenárov. Na Obr. 21 môžeme vidieť optimálne riadenia získané zo stochastického modelu s rizikovou mierou $\mathrm{CVaR}_\alpha[X]$ na hladine spoľahlivosti $\alpha = 5\%$ s váhou $\lambda = 0.5$.

Môžeme si všimnúť, že ročný produkt bol predávaný skoro každý polmesiac a bol predávaný v maximálnej možnej miere. Mierna variabilita nastala na konci prvého roku, avšak v porovnaní s výsledkami modelu so strednou hodnotou (viď Obr. 16) bola menšia.



Obr. 21: Grafy znázorňujúce predané množstvo výroby v danom polmesiaci. Čiernou farbou je znázornená priemerná hodnota v jednotlivých časových krokoch. Pásma s odtieňmi modrej znázorňujú kvantily, pre jednotlivé riadenia získané zo simulácií.

Prvý kvartálny produkt sa predával na začiatku skoro s istotou do 12. polmesiaca, čiže 6. mesiaca. Ostatné kvartálne produkty boli predávané na začiatku skoro s istotou a po polroku sa predaj výroby znížil. Zaujímavý je nárast predaja kvartálnych produktov tesne pred ich fyzickou dodávkou. Aj v tomto prípade pozorujeme, že model si udržiava istú časť výroby podľa vývoja ceny a ku koncu predá zvyšnú výrobu, aby splnil koncovú podmienku. Na Obr. 22 nižšie sú znázornené odozvy na optimálne riadenie, teda agregované množstvo predaja výroby počas obchodovacieho obdobia.



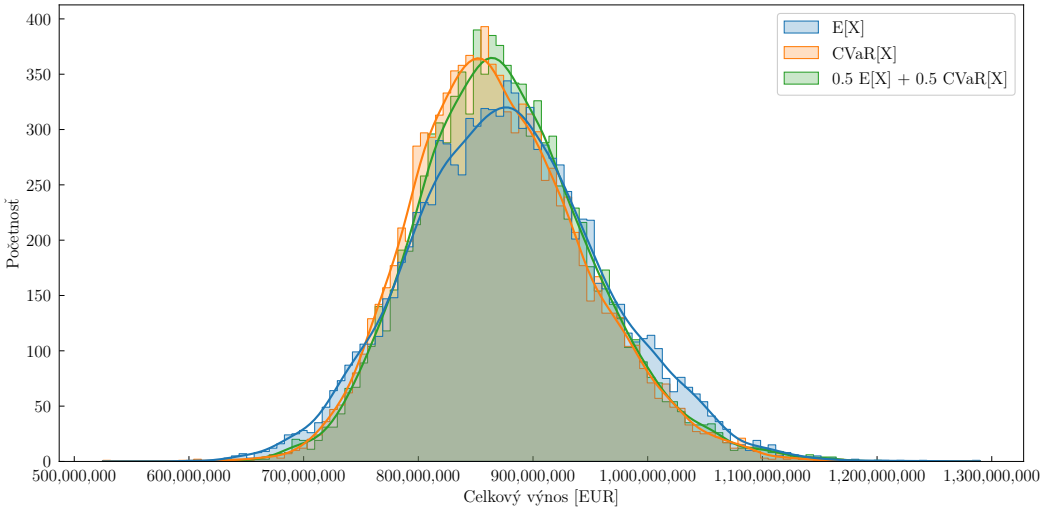
Obr. 22: Grafy znázorňujúce agregované predané množstvo výroby v danom polmesiaci. Čiernou farbou je znázornená priemerná hodnota v jednotlivých časových krokoch. Pásma s odtieňmi modrej znázorňujú kvantily, pre jednotlivé odozvy získané zo simulácií.

Ako vidíme, odozvy vyjadrujúce množstvá obchodovaných produktov majú v prvých časových krokoch rovnakú hodnotu a v posledných časových krokoch sa skoro s istotou ustália na konštantnej hladine. Teda celková výroba je skoro s istotou rozdelená v istom pomere ročného a kvartálnych produktov. V strede obchodovacieho obdobia je väčšina variability, keď sa predáva rôzne množstvo jednotlivých produktov podľa vývoja ceny. Zaujímavé je však, že v konečnom stave sa skoro vždy celkové množstvo predanej výroby ustáli na určitej úrovni.

3.3.4 Vplyv miery averzie k riziku

V tejto časti sa bližšie pozrieme na vplyv parametra λ, teda váhy podmienenej hodnoty v riziku, na výsledky modelu. Budeme porovnávať modely pre $\lambda \in \{0, 0.5, 1\}$. Prípad $\lambda = 0$ zodpovedá modelu so strednou hodnotou (19). V situácii, kde investor kladie rovnakú váhu na výnos ako na podmienenú hodnotu v riziku, zodpovedá prípad $\lambda = 0.5$. Prípad $\lambda = 1$ zas predstavuje investora, ktorého účelová funkcia je tvorená len zložkou podmienenej hodnoty v riziku.

Rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcej podkapitole sme simulovali 10 000 cenových scenárov, z ktorých sme dostali riešenia pomocou optimálnej spätnej väzby z SDDP algoritmu. Hladinu spoľahlivosti α sme ponechali na hodnote 5%. Na Obr. 23 môžeme vidieť rozdelenie celkových výnosov pre rôzne hodnoty parametra λ.



Obr. 23: Rozdelenie celkových výnosov pri rôznych hodnotách λ.

V Tabuľke 4 sme zhrnuli výsledné štatistiky získané zo simulácií. Môžeme si všimnúť, že zvyšovanie váhy CVaR v účelovej funkcii je spojené s nižšou smerodajnou odchýlkou ako aj nižšími priemernými výnosmi.

Tabuľka 4: Výsledné štatistiky zo simulovaných riešení stochastického modelu s rizikovou mierou CVaR, pri rôznych váhach λ.

váha λ	priemer [M EUR]	s. odchýlka [M EUR]	min. [M EUR]	25% kvantil [M EUR]	75% kvantil [M EUR]	max. [M EUR]
0	878.3	83.9	599.5	820.6	931.4	1259.5
0.5	875.9	75.3	625.1	823.8	922.3	1198.4
1	870.1	74.7	525.1	817.5	917.5	1170.1

3.4 Výsledky stochastických modelov

V tejto kapitole sme predstavili stochastický model so strednou hodnotou (19), ktorý reprezentoval rizikovo neutrálneho investora. V optimalizačnom procese sme maximalizovali strednú hodnotu výnosov z predaja energetických produktov. Tento model sme neskôr rozšírili o rizikovú mieru CVaR (23).

Takto rozšírený model reprezentuje rizikovo averzného investora, kde v účelovej funkcii máme konvexnú kombináciu strednej hodnoty a rizikovej miery CVaR. Keďže oba modely používajú ako vstupy spojité náhodné procesy, reprezentujúce ceny energetických produktov, ich priame riešenie pomocou metód spojitého optimálneho riadenia by bolo výpočtovo príliš náročné. Preto sme tieto spojité procesy diskretizovali v čase do mriežky pravdepodobností (viď Obr. 13) a ďalej používali ako aproximáciu pôvodných procesov.

Uviedli sme dôvody, prečo prístupy optimálneho riadenia nie sú efektívne na riešenie úloh s viacerými riadiacimi a stavovými premennými. Ukázali sme alternatívny prístup metódy SDDP, ktorá je vhodnejšia na veľkorozmerné úlohy.

Oba modely sme testovali najprv na jednom cenovom scenári z reálnych dát, a následne sme modely testovali na 10 000 vygenerovaných cenových scenároch. Neskôr sme testovali vplyv miery averzie k riziku na celkové výnosy. Výsledné štatistiky pre celkové výnosy sme zhrnuli v Tabuľke 4.

Model so strednou hodnotou založený na stochastickom optimálnom riadení nám ponúkol približne rovnaké priemerné výnosy v porovnaní s deterministickým modelom, avšak smerodajná odchýlka bola pri stochastickom modeli výrazne nižšia. Pri zakomponovaní rizikovej miery do modelu sa nám podarilo smerodajnú odchýlku výnosov ešte znížiť za cenu nižších priemerných výnosov.

Zahrnutím podmienenej miery rizika do účelovej funkcie sa nám podarilo reprezentovať aj rizikovo averzného investora. Výsledky ukázali, že variabilita miery nákupu ročného produktu je pri rizikovo averznom investorovi výrazne nižšia ako pri rizikovo neutrálnom. Toto má priamo za následok i nižšiu variabilitu v objeme nákupu kvartálnych produktov. Ročný termínovaný produkt je väčšinou stabilnejší, keďže v celom roku majú nečakané odstávky len malý vplyv. Tým pádom je optimálnejšie vyplniť veľkú časť výrobného diagramu predajom ročného produktu a zvyšok odpredať pomocou kvartálnych produktov, ktoré sú zvyčajne volatilnejšie.

Stochastický model so strednou hodnotou, ako aj s rizikovou mierou CVaR, je po teoretickej a implementačnej stránke zložitejší v porovnaní s deterministickým modelom. Na druhej strane nám tieto modely ponúkli výrazne lepšie výsledky v zmysle vyšších priemerných celkových výnosov a nižšej smerodajnej odchýlky.

Záver

V práci sme sa zaoberali hľadaním optimálnej predajnej stratégie výroby elektrickej energie na dlhšie obdobie dopredu.

V prvej kapitole sme vysvetlili základné princípy fungovania trhov s elektrinou podľa knihy [5]. Princípy fungovania energetických produktov sme následne používali v ďalších kapitolách, ktorých cieľom bolo vytvoriť model na optimalizáciu predaja vyrobenej elektrickej energie.

V druhej kapitole sme uviedli deterministický model, založený na princípe sekvenčného riešenia úlohy lineárneho programovania. Hlavným vstupom do modelu boli predikcie cien energetických produktov, ktoré sme odhadovali z cien komodít a lokálneho trendu cien produktov. Model sme najskôr testovali na historických dátach z rokov 2019 až 2021, teda pred začiatkom celosvetovej energetickej krízy. Zistili sme, že v danom modeli sa osvedčilo používať mesačné produkty. Vďaka ich krátkej doby do maturity a trvania dodávky sme boli schopní zareagovať na prudký nárast cien elektrickej energie ku koncu roka 2021.

Na ďalšie testovanie modelu sme pomocou korelovaných geometrických Brownových pohybov vygenerovali fiktívne cenové scenáre. Pri odhade korelačnej matice sme sa však dostali k indefinitnej matici, čo bolo spôsobené faktom, že niektoré produkty nie sú obchodované v rovnakom časovom období. Iteratívnym algoritmom založenom na postupnom skracovaní záporných vlastných hodnôt odhadnutej korelačnej matice sme sa dostali ku kladne definitnej matici, ktorú sme využili pri tvorbe cenových scenárov.

Medzi výhody sekvenčného modelu patrí interpretovateľnosť a jednoduchá implementácia. Tento model mal však značné nevýhody pri vytváraní rozhodnutí na dlhšie obdobie dopredu. Tento nedostatok bol spôsobený predikciami cien energetických produktov, ktoré obsahujú len lokálnu informáciu o cenách energetických produktov. Tieto nedostatky videli ku vytvoreniu modelov založených na princípoch stochastického optimálneho riadenia.

V tretej kapitole sme uviedli a vysvetlili dva modely založené na princípoch stochastického optimálneho riadenia. Vstupmi do oboch modelov sú parametre stochastických procesov pre vývoj cien energetických produktov. Na modelovanie cien energetických produktov sme používali viacrozmerný korelovaný geometrický Brownov pohyb, s rovnakými parametrami ako v druhej kapitole. Diskretizácia procesov nám umožnila na riešenie vy-

užiť metódu stochastického duálneho dynamického programovania, ktorá znižuje výpočtovú zložitosť problému.

Modely sa líšili iba v účelovej funkcii. Prvý z nich zodpovedal rizikovo neutrálnemu investorovi, ktorý sa rozhoduje iba na základe očakávanej strednej hodnoty výnosov.

V druhom stochastickom modeli sme účelovú funkciu rozšírili o rizikovú mieru CVaR, vďaka ktorej sme do modelu zakomponovali averziu voči riziku. Výstupy z modelu sme vykreslili do grafov, ako časové priebehy optimálneho riadenia a jeho odozvy. Následne sme testovali vplyv miery averzie k riziku na výsledky modelu. Z výsledného histogramu celkových výnosov sme pozorovali, že zahrnutie rizikovej miery do účelovej funkcie je spojené s nižšou smerodajnou odchýlkou i strednou hodnotou výnosov. Všimli sme si, že v situácii keď sme rizikovo averzní, predávame väčšiu časť výroby pomocou ročného produktu. Zatiaľ čo pri rizikovej neutralite preferujeme skôr predaj kvartálnych produktov.

Pri porovnávaní deterministického a stochastického modelu nám stochastický model ponúkol stratégiu vedúcu k vyššej priemernej hodnote celkových výnosov a výrazne nižšej smerodajnej odchýlke v porovnaní s deterministickým modelom. Na druhej strane, modely založené na stochastické optimálnom riadenie sú výpočtovo výrazne zložitejšie a vzhľadom na malé množstvo dostupných solverov, ktoré sú schopné tieto optimalizačné problémy efektívne riešiť, sú v praxi stále menej praktické.

Energetické produkty, ktoré sme v našej práci modelovali sú výrazne kladne korelované a preto je pomerne náročné zaistiť stabilné peňažné toky vyplývajúce z ich predaja. Napriek tomu sme navrhli a otestovali dva rôzne prístupy na optimalizáciu predaja očakávanej výroby elektrickej energie. Dosiahli sme pri tom spoľahlivé výsledky v strednej hodnote výnosov a pomocou zavedenia rizikovej miery CVaR sme boli schopní dosiahnuť i nižšiu smerodajnú odchýlku celkových výnosov.

Zoznam použitej literatúry

[1] Burgess N.: *Correlated Monte Carlo Simulation using Cholesky Decomposition*, dostupné na internete (10.12.2023): https://ssrn.com/abstract=4066115

[2] Bryson A. E. Jr.: *Optimal Control - 1950 to 1985*, IEEE Control Systems Magazine, 1996, dostupné na internete (5.9.2023): https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=506395

[3] Cheng S. H., Higham N. J.: *A Modified Cholesky Algorithm Based on a Symmetric Indefinite Factorization*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Volume 19, 1998, dostupné na internete (10.12.2023): https://eprints.maths.manchester.ac.uk/342/1/30289.pdf

[4] Dimoski J., Nersten S.: *Dynamic Hedging for a Norwegian Hydropower Producer*, Norwegian University of Science and Technology, Department of Industrial Economics and Technology Management, 2018, dostupné na internete (15.8.2023): https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2576681/19789_FULLTEXT.pdf?sequence=1

[5] Flášar P., Fousek J., Jícha T., Kabele R., Kanta J., Košťál V., Kučera D., Kužela M., Maule P., Michalik J., Michek M., Mojžiš M., Němeček B., Pirner D., Šolc P., Teklý L., Vrba M., Walas P.: *Úvod do liberalizované energetiky: Trh s elektřinou*, Asociace energetických manažerů, 2016, druhé vydanie, dostupné na internete (5.9.2023): https://www.mpo-efekt.cz/upload/7799f3fd595eeee1fa66875530f33e8a/kniha-trh-s-elektrinou.pdf

[6] Fullner C., Rebennack S.: *Stochastic Dual Dynamic Programming - a review*, 2021, dostupné na internete (1.3.2024): https://optimization-online.org/wp-content/uploads/2021/01/SDDP-Review-Updated.pdf

[7] Gabrielli P., Wüthrich M., Blume S., Sansavini G.: *Data-driven Modeling for Long-term Electricity Price Forecasting*, Energy, Volume 244, Part B, April 2022, dostupné na internete (12.10.2023): https://www.researchgate.net/publication/357584338_Data-driven_modeling_for_long-term_electricity_price_forecasting

[8] Halická M., Brunovský P., Jurča P.: *Optimálne riadenie - Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, 2009, Bratislava

[9] Higham N. J.: *Computing the Nearest Correlation Matrix — A Problem from Finance*, IMA Journal of Numerical Analysis, Volume 22, Issue 3, July 2002, dostupné na internete (10.12.2023): https://eprints.maths.manchester.ac.uk/232/1/paper3.pdf

[10] Huang C., Farewell D., Pan J.: *A Calibration Method for Non-positive Definite Covariance Matrix in Multivariate Data Analysis*, Journal of Multivariate Analysis, Volume 157, 2017, dostupné na internete (10.12.2023): https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0047259X17301343?via%3Dihub

[11] Löhndorf N., Shapiro A.: *Modeling Time-dependent Randomness in Stochastic Dual Dynamic Programming*, dostupné na internete (20.3.2024): https://optimization-online.org/wp-content/uploads/2017/09/6201.pdf

[12] Löhndorf N.: *QUASAR Optimization Software*, verzia 3.3.2, 2023, http://quantego.com

[13] Löhndorf N.: *Dynamic Hedging of Futures Term Structure Risk for Renewable Power Producers*, prezentácia, dostupné na internete (10.12.2023): https://www.sintef.no/contentassets/106baff79dc44ca5897fea4c51b1cfa7/pl3_2-lohndorf_uni_luxemburg.pdf

[14] Mota P. P.: *Normality Assumption for the Log-return of the Stock Prices*, Department of Mathematics CMA of FCT/UNL, Discussiones Mathematicae Probability and Statistics 32, 2012, dostupné na internete (13.2.2024): https://api.semanticscholar.org/CorpusID:9578465

[15] Rockafellar R. T.: *Coherent Approaches to Risk in Optimization under Uncertainty*, Tutorials in Operations Research, dostupné na internete (26.9.2023): https://pubsonline.informs.org/doi/epdf/10.1287/educ.1073.0032

[16] Sarykalin S., Serraino G., Uryasev S.: *Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*, Tutorials in Operations Research, do-

stupné na internete (26.9.2023): https://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/VaR_vs_CVaR_INFORMS.pdf

[17] Shapiro A.: *Analysis of Stochastic Dual Dynamic Programming Method*, European Journal of Operational Research, dostupné na internete (25.3.2024): https://bpb-us-w2.wpmucdn.com/sites.gatech.edu/dist/4/1470/files/2021/03/EJOR-2011.pdf