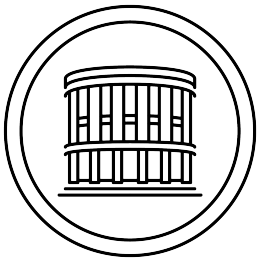
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



# METÓDA MONTE CARLO A JEJ APLIKÁCIE VO FINANCIÁCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024 Bc. Martina ŠÁLYOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# METÓDA MONTE CARLO A JEJ APLIKÁCIE VO FINANCIÁCH

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie |
| Študijný odbor: | Matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| Vedúci práce: | doc.RNDr. Ján Pekár, PhD. |

Bratislava 2024 **Bc. Martina ŠÁLYOVÁ**






Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Martina Šályová
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
**Študijný odbor:** matematika
**Typ záverečnej práce:** diplomová
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Metóda Monte Carlo a jej aplikácie vo financiách
*The Monte Carlo method and its applications to finance*

**Anotácia:** Simulačné metódy typu Monte Carlo sa vyznačujú jednoduchosťou, avšak nízkou presnosťou pokusov. Mimoriadne atraktívne boli najmä v druhej polovici 20. storočia, kedy s búrlivým rozvojom počítačov a zrýchľovaním ich výpočtov bolo umožnené eliminovať problém nepresnosti rádovými zvýšeniami počtu pokusov v simulačnom experimente. V poslednom desaťročí dochádza k renesancii tejto metódy najmä v oblasti rizikového manažmentu. Práca má poskytnúť prehľad o vývoji metódy, jej aplikačných oblastí a zamerať sa na jej použitie vo financiách. Práca má obsahovať viacero ilustračných príkladov - model a jeho počítačová realizácia vrátane vizuálneho zobrazenia.

**Vedúci:** doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
**Vedúci katedry:** doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

**Dátum zadania:** 10.01.2023

**Dátum schválenia:** 11.01.2023

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

## Poďakovanie

Touto cestou by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce doc.RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za odborné vedenie a cenné pripomienky. Osobitné poďakovanie patrí aj celej mojej rodine za podporu a porozumenie.

# Abstrakt

ŠÁLYOVÁ, Martina : Metóda Monte Carlo a jej aplikácie v ekonómii a financiách [Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.- Vedúci doc.RNDr. Ján Pekár, PhD. Bratislava:UK, 2024, 88 s.

Cieľom našej práce bolo predstaviť metódu Monte Carlo, identifikovať a ilustrovať jej aplikácie v oblasti financií. S využitím vlastných grafických výstupov a algoritmov simulovania v programovacom jazyku R sme ilustrovali konkrétne príklady aplikácií v jednotlivých kapitolách, ako napríklad simulácie a výpočet očakávaných hodnôt úrokových sadzieb, simulácie cien a výpočet očakávaných hodnôt akcií a oceňovanie opcií. Práca obsahuje úvodnú kapitolu o metóde Monte Carlo, nasledovanú ďalšími kapitolami, ktoré sú venované konkrétnym aplikáciám tejto metódy v oblasti financií.

**Kľúčové slová:** Monte Carlo metóda, simulácia, úrokové sadzby, výnosy, cena, VaR

# Abstract

ŠÁLYOVÁ, Martina: Monte Carlo Method and Its Applications in Economics and Finance [Master's Thesis] - Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. - Supervisor: Assoc. Prof. RNDr. Ján Pekár, PhD. Bratislava: UK, 2024, 88 pages.

The aim of our work was to present the Monte Carlo method, identify, and illustrate its applications in the field of finance. Using our own graphical outputs and simulation algorithms in the R programming language, we illustrated specific examples of applications in individual chapters, such as simulations and calculation of expected interest rate values, price simulations, calculation of expected stock values, and options pricing. The thesis includes an introductory chapter on the Monte Carlo method, followed by subsequent chapters dedicated to specific applications of this method in finance.

**Keywords:** Monte Carlo method, simulation, interest rates, yields, price, VaR

# Obsah

**Zoznam tabuliek** **4**

**Zoznam obrázkov** **5**

**Úvod** **7**

**1 O metóde Monte Carlo** **8**

1.1 Základná metóda Monte Carlo . . . . . 9

1.1.1 Ilustračný príklad využitia základnej Metódy Monte Carlo . . . . . 10

**2 Definície a vzorce** **11**

**3 Krátkodobé úrokové sadzby** **15**

3.1 Vašíčkov model . . . . . 15

3.1.1 Ilustračný príklad . . . . . 17

3.2 Cox–Ingersoll–Ross model . . . . . 26

3.2.1 Ilustračný príklad . . . . . 27

**4 Cena akcie** **36**

4.1 Ilustračný príklad odhadu ceny akcie . . . . . 37

**5 Optimalizácia portfólia** **47**

5.1 Ilustračný príklad . . . . . 48

**6 Value at Risk** **50**

6.1 Ilustračný príklad . . . . . 52

**7 Oceňovanie opcií** **54**

7.1 Geometrický Brownov pohyb . . . . . 54

7.2 Hestonov model . . . . . 54

7.3 Európska opcia . . . . . 56

7.3.1 Ilustračný príklad 1. . . . . 60

7.3.2 Ilustračný príklad 2. . . . . 64

7.4 Ázijská opcia . . . . . 67

7.4.1 Ilustračný príklad . . . . . 70
7.5 Bariérová opcia . . . . . 72
7.5.1 Ilustračný príklad . . . . . 78

**Záver** **83**

**Zoznam použitej literatúry** **84**

**Prilohy** **89**

# Zoznam tabuliek

Tabuľka 1 Odhady integrálu

Tabuľka 2 Hodnoty kalibrovaných parametrov

Tabuľka 3 Priemerná kvadratická chyba pri rôznych počtoch simulácií

Tabuľka 4 Hodnoty kalibrovaných parametrov

Tabuľka 5 Priemerná kvadratická chyba pri rôznych počtoch simulácií

Tabuľka 6 Odhad parametrov

Tabuľka 7 Priemerná kvadratická chyba pri rôznych počtoch simulácií

Tabuľka 8 Váhy v optimálnom portfóliu

Tabuľka 9 Parametre optimálneho portfólia

Tabuľka 10 Váhy v optimálnom portfóliu

Tabuľka 11 VaR nášho portfólia

Tabuľka 12 Odhad parametra $\sigma$

Tabuľka 13 Cena európskej call opcie

Tabuľka 14 Cena európskej put opcie

Tabuľka 40 Ukážka 10 000 simulovaných cien podkladového aktíva na 1 rok, modelovaných Hestonovým modelom

Tabuľka 16 Cena európskej call opcie

Tabuľka 17 Odhad parametra $\sigma$

Tabuľka 18 Cena ázijskej call opcie typu aritmetickej priemernej ceny podkladového aktíva

Tabuľka 19 Cena ázijskej call opcie typu priemerná realizačná cena

Tabuľka 20 Hodnota bariéry

Tabuľka 21 Odhad parametra $\sigma$

Tabuľka 22 Cena call Down-in bariérovej opcie

Tabuľka 23 Cena call up-out bariérovej opcie

Tabuľka 24 Cena call Up-out bariérovej opcie

Tabuľka 25 Cena call up-in bariérovej opcie

# Zoznam Obrázkov

Obr. 1 Historické dáta jednotýždňového Euriboru. Graf zo zdroja [12]

Obr. 2 Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb jednotýždňového Euribora metódou Monte Carlo podľa Vašíčkovho modelu pre $n = 10000$

Obr. 3 Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb jednotýždňového Euribora metódou Monte Carlo podľa Vašíčkovho modelu pre $n = 20000$

Obr. 4 Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb jednotýždňového Euribora metódou Monte Carlo podľa Vašíčkovho modelu pre $n = 30000$

Obr. 5 Porovnanie odhadnutých stredných hodnôt s analytickou strednou hodnotou Vašíčkovho modelu

Obr. 6 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu

Obr. 7 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu

Obr. 8 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu

Obr. 9 Štandardná chyba priemeru

Obr. 10 Porovnanie odhadnutých štandardných odchýlok s analytickou štandardnou odchýlkou Vašíčkovho modelu

Obr. 11 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky pre $n = 30000$

Obr. 12 Historické dáta trojmesačného Priboru. Graf zo zdroja [15]

Obr. 13 Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb trojmesačného Pribora metódou Monte Carlo podľa CIR modelu pre $n = 10000$

Obr. 14 Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb trojmesačného Pribora metódou Monte Carlo podľa CIR modelu pre $n = 20000$

Obr. 15 Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb trojmesačného Pribora metódou Monte Carlo podľa CIR modelu pre $n = 30000$

Obr. 16 Porovnanie odhadnutých stredných hodnôt s analytickou strednou hodnotou CIR modelu

Obr. 18 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu pre $n = 20000$

Obr. 19 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu pre $n = 30000$

Obr. 20 Štandardná chyba priemeru

Obr. 21 Porovnanie odhadnutých štandardných odchýlok s analytickou štandardnou odchýlkou CIR modelu

Obr. 22 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky pre $n = 30000$
Obr. 23 Historické ceny akcie Nestlé od 2.1.2019 do 29.12.2023
Obr. 24 Logaritmické výnosy akcie Nestlé
Obr. 25 Simulované cesty ceny Nestlé metódou Monte Carlo podľa GBM pre $n = 10000$
Obr. 26 Simulované cesty ceny Nestlé metódou Monte Carlo podľa GBM pre $n = 20000$
Obr. 27 Simulované cesty ceny Nestlé metódou Monte Carlo podľa GBM pre $n = 30000$
Obr. 28 Porovnanie odhadnutých očakávaných cien s analytickou očakávanou cenou
Obr. 29 95% intervaly spoľahlivosti pre očakávanú hodnotu pre n=10000
Obr. 30 95% intervaly spoľahlivosti pre očakávanú hodnotu pre n=20000
Obr. 31 95% intervaly spoľahlivosti pre očakávanú hodnotu pre n=30000
Obr. 32 Štandardná chyba priemeru
Obr. 33 Porovnanie odhadnutých štandardných odchýlok s analytickou štandardnou odchýlkou CIR modelu
Obr. 34 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky pre $n = 30000$
Obr. 35 Optimálne portfólio
Obr. 36 Historické výnosy portfólia
Obr. 37 Historické ceny akcie spoločnosti Apple od 4.1.2021 do 29.12.2023
Obr. 38 Logaritmické výnosy akcie Apple
Obr. 39 Ukážka 10 000 simulovaných cien podkladového aktíva na 1 rok
Obr. 40 Ukážka 10 000 simulovaných cien podkladového aktíva na 1 rok, modelovaných Hestonovým modelom
Obr. 41 Ukážka 10 000 simulovaných variancií podkladového aktíva na 1 rok modelovaných Hestonovým modelom

# Úvod

Existuje extrémne množstvo matematických problémov, pre ktoré nájsť analytické riešenie je príliš zložité, alebo neexistuje. Existujú však rôzne numerické metódy, pomocou ktorých dokážeme nájsť približné riešenia týchto problémov. Takouto metódou je aj metóda Monte Carlo.

Podľa [1], metódy Monte Carlo sú súbory výpočtových techník na získavanie približných riešení matematických problémov pomocou náhodných vzoriek. Metóda Monte Carlo sa na riešenie problémov používa napríklad aj vo fyzike, strojárstve, biológii, ekonómii, financiách a v mnohých iných oblastiach. V tejto práci sa budeme zaoberať metódou Monte Carlo a jej aplikáciami vo financiách.

Vo financiách sa metóda Monte Carlo môže použiť na simuláciu a odhad strednej hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby, simuláciu a odhad očakávanej ceny akcie a portfólia, pri oceňovaní opcií a pri mnohých iných finančných úlohách. Z týchto oblastí sme v tejto práci vybrali ilustračné príklady.

Cieľom tejto práce je predstaviť metódu Monte Carlo a jej aplikácie vo financiách a vytvoriť ilustračné príklady v R-ku.

# 1 O metóde Monte Carlo

V tejto kapitole si predstavíme metódu Monte Carlo, jej stručnú históriu, vývoj a aplikácie rôznych oblastiach. Ukážeme jej výhody a nevýhody, predstavíme jeden z najznámejších algoritmov tejto metódy a uvedieme názorný príklad. V tejto kapitole sme čerpali informácie z [34, 35, 36]

Meno metóda Monte Carlo dostala po mestskej časti v Monaku, v ktorej sa nachádza kasíno. Toto meno dostala preto, lebo ruleta je jeden z najjednoduchších mechanizmov na generovanie náhodných čísel.

Podľa [34] Základný princíp metódy Monte Carlo bol vyslovený už v roku 1777. V tomto roku francúzsky prírodovedec Georges de Buffon formuloval svoj známy problém s ihlou tzv. Buffonova úloha. Ide o náhodné hádzanie ihly na papier s nakreslenými rovnako vzdialenými rovnobežkami, pričom dĺžka ihly sa rovná šírke riadkov a sleduje sa, koľkokrát ihla pretne či sa dotkne týchto rovnobežiek. Neskôr Laplace určil pomocou tohto experimentu hodnotu čísla $\pi$. V roku 1860 francúzsky astronóm a matematik Joseph Émille Barbier našiel veľmi jednoduchý dôkaz prečo to tak je. Podľa [36] v roku 1901 Lazzerini uskutočnil 34080 hodov ihly a pre číslo $\pi$ dostal hodnotu 3,1415929

Jednu z mnohých formálnych definícií metódy Monte Carlo vyslovil Halton v roku 1970 nasledovne: *Monte Carlo metóda je reprezentovanie riešeného problému ako parameter hypotetickej populácie a používanie náhodnej postupnosti čísel na vytvorenie vzorky tejto populácie, z ktorej možno získať štatistické odhady parametra hypotetickej populácie.* Zjednodušene povedané metóda Monte Carlo je spôsob riešenia problémov, kde namiesto priameho analytického riešenia modelujeme náhodný proces, alebo postupnosť čísel. Tento náhodný model potom použijeme na generovanie vzorky v rámci hypotetickej populácie, na základe ktorej môžeme odhadnúť štatistické vlastnosti alebo hodnoty parametra tejto populácie. Jednoducho povedané, namiesto hľadania presného riešenia úlohy používame náhodnú simuláciu na získanie približného riešenia.

Podľa [1] metóda Monte Carlo je numerická metóda vyvinutá vedcami Johnom Neumannom a Stanislawom Ulamom v Los Alamos v roku 1940. Neumann s Ulamom použili metódu Monte Carlo pri vynáleze vodíkovej bomby v rámci projektu Manhattan. Podľa [37] pri výskume chovania neutrónu a možnosťami jeho prenikania rôznymi látkami sa objavil problém, ako určiť percento neutrónov v určitej dávke, ktorá prenikne napríklad

nádržou vody určitých rozmerov. Simulovali históriu života neutrónov napodobnením kolesa rulety. Vykonali veľký počet takých simulácii a získali viac menej presnú informáciu o percente neutrónov, ktorým sa podarilo uniknúť z nádrže. Presnosť tejto metódy je určená matematicko-štatistickými metódami teórie odhadu. Metóda sa začala potom používať na riešenie fyzikálnych problémov dovtedy neriešiteľných.

Dnes máme k dispozícii vysokorýchlostné počítače a programovacie jazyky umožňujú vygenerovať ľubovoľné pseudonáhodné čísla a v ľubovoľnom množstve. Podľa [2] využite metódy Monte Carlo je veľmi rozsiahle: od biológie, zdravotníctva, fyziky, strojárstva, po financie a ekonómiu, ale napr. aj v oblasti činnosti telefónnych centrál, riadenia dopravy, alebo v poisťovníctve. Z oblasti matematiky je známe využívanie metódy Monte Carlo na výpočet plôch, objemov, integrálov, aj viacrozmerných, aj na riešenie diferenciálnych rovníc.

Výhody metódy Monte Carlo, podľa [1, 2, 5] sú:

1. Efektívnosť a jednoduchosť algoritmov
2. Komplexné zložité problémy rieši jednoducho

Nevýhody metódy Monte Carlo, podľa [1, 2, 5] sú:

1. Výpočtová náročnosť - kvôli presnosti vyžaduje veľký súbor náhodných čísiel
2. Citlivosť na výber rozdelenia pravdepodobnosti - je dôležité zvoliť správne rozdelenie pravdepodobnosti pre daný problém, inak výsledok nemusí mať zmysel

## 1.1 Základná metóda Monte Carlo

Jeden najznámejších algoritmov metódy Monte Carlo je základná metóda Monte Carlo.

Algoritmus základnej metódy Monte Carlo podľa [4]:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $x_1$,$x_2$,...,$x_n$ zo zvoleného rozdelenia pravdepodobnosti, kde n počet náhodných čísiel
2. Pre každú náhodnú premennú sa vypočíta hodnota funkcie/výrazu riešeného problému

3. Urobíme aritmetický priemer vypočítaných hodnôt z kroku 2. a tento aritmetický priemer je numerický odhad nášho problému.

Zvyšovaním počtu n, môžeme zlepšiť presnosť výsledku.

### 1.1.1 Ilustračný príklad využitia základnej Metódy Monte Carlo

Máme nasledujúci určitý integrál:

$$\int_1^0 x^3\,dx \tag{1}$$

Tento integrál vieme vypočítať analyticky a rovná sa: 0.25. Pri riešení pomocou metódy Monte Carlo budeme postupovať nasledovne:

1. Podľa [4] generujeme rad nezávislých náhodných čísiel $x_1$,$x_2$,...,$x_n$ z rovnomerného rozdelenia $R(0,1)$, kde n je zvolený počet náhodných čísiel.

2. Pre každú náhodnú premennú si vypočítame $x^3$

3. Urobíme aritmetický priemer vypočítaných hodnôt z kroku 2. a tento aritmetický priemer je numerické riešenie nášho integrálu.

Tento algoritmus sme naprogramovali v R-ku a dostali sme nasledujúce výsledky pre rôzne hodnoty n. Zopakovali sme to trikrát pre každé n. Dostali sme nasledujúce výsledky: Z tabuľky 1 vidíme, že pri n: 10 000 a 1000 sme blízko analytického riešenia 0.25. Čím

| pokus | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1627 | 0.2202 | 0.2489 | 0.2518 |
| 2 | 0.4347 | 0.2295 | 0.2496 | 0.2528 |
| 3 | 0.1919 | 0.2312 | 0.2608 | 0.2501 |

**Tabuľka 1:** Odhady integrálu

nižšie je n, tým viac sa riešenie metódou Monte Carlo líši od analytického riešenia. Teda čím je n vyššie, tým je presnejší výsledok, získaný metódou Monte Carlo, ale zvyšuje sa výpočtová náročnosť.

# 2 Definície a vzorce

V tejto kapitole si uvedieme definície a vzorce, ktoré budeme používať v ďalších kapitolách.

**Definícia 2.1. (Výberový priemer)**

*Výberový priemer $\overline{x}$ je definovaný ako:*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

*kde $x_i$ pre $i \in 1, \ldots, n$ sú pozorovania z populácie $X$ a $n$ je počet pozorovaní.*

Definícia podľa [10]

Pomocou výberového priemeru budeme v ďalších kapitolách odhadovať strednú hodnotu v ilustračných príkladoch pri použití metódy Monte Carlo.

**Definícia 2.2 (Výberový rozptyl)**

*Výberový rozptyl $s^2$ je definovaný ako:*

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{(n-1)} \tag{3}$$

*kde $n$ je počet pozorovaní a $x_i$ pre $i \in 1, \ldots, n$ sú pozorovania z populácie $X$. Výberový rozptyl v takomto tvare je nevychýleným odhadom skutočného rozptylu $Var(x)$.*

Definícia podľa [10]

**Definícia 2.3 (Výberová štandardná odchýlka)**

*Štandardná odchýlka je druhá odmocnina z rozptylu, preto výberová štandardná odchýlka $s$ je definovaná ako:*

$$s = \sqrt{s^2} \tag{4}$$

Definícia podľa [10]

**Definícia 2.4. (Interval spoľahlivosti strednej hodnoty)**

*Majme $x_i$ pre $i \in 1, \ldots, n$ pozorovaní z populácie $X$, kde $X \in N(\mu, \sigma^2)$.*

***Pre známu štandardnú odchýlku**:*

$$\left(\overline{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{5}$$

*kde $\sigma$ je skutočná štandardná odchýlka, $n$ je počet simulácií a $z_{1-\alpha}$ je kritická hodnota normálneho rozdelenia.*

***Pre neznámu štandardnú odchýlku**:*

$$\left(\overline{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \tag{6}$$

*kde $s$ je výberová štandardná odchýlka, ktorá je odhadom skutočnej štandardnej odchýlky, $n$ je počet simulácií, $t_{n-1}(\alpha)$ je kritická hodnota Studentovho rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti.*

Definícia podľa [10]

**Definícia 2.5. (Interval spoľahlivosti rozptylu a štandardnej odchýlky)**
*Majme $x_i$ pre $i \in 1, \ldots, n$ pozorovaní z populácie $X$, kde $X \in N(\mu, \sigma^2)$. Interval spoľahlivosti pre rozptyl je:*

$$\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,,n-1}}, \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,,n-1}}\right) \tag{7}$$

*a interval spoľahlivosti pre štandardnú odchýlku je druhá odmocnina intervalu spoľahlivosti rozptylu:*

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,,n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,,n-1}}}\right) \tag{8}$$

*kde $s^2$ je výberový rozptyl, $n$ je počet pozorovaní a $\chi^2_{1-\alpha/2,,n-1}$ a $\chi^2_{\alpha/2,,n-1}$ sú kritické hodnoty $\chi^2$ rozdelenia s $n-1$ stupňov voľnosti.*

Definícia podľa [10]

**Definícia 2.6. (Centrálna limitná veta)**
*Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú náhodné pozorovania z populácie $X$ s ľubovolným rozdelením s konečnou strednou hodnotou $\mu$ a konečnou varianciou $\sigma$. Ak je počet pozorovaní $n$ z populácie dostatočne veľký ($n > 30$) tak:*

1. *Štatistické rozdelenie výberového priemeru $\overline{x}$ sa blíži k normálnemu rozdeleniu bez ohľadu na štatistické rozdelenie pozorovaní.*

2. *So strednou hodnotou $E(\overline{x}) = \mu$ a varianciou $Var(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$.*

Definícia podľa [33]

**Definícia 2.7. (Priemerná kvadratická chyba)**
*Priemerná kvadratická chyba (MSE) meria množstvo chýb v štatistických modeloch. Hod-*

*notí priemernú druhú mocninu rozdielu medzi pozorovanými a predpokladanými hodnotami:*

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{9}$$

*kde n je počet pozorovaní, y sú skutočné hodnoty a ŷ sú odhady skutočných hodnôt y.* Definícia podľa [14] Všeobecne platí, že čím menšie je MSE, tým presnejší je štatistický model.

**Definícia 2.8. (Štandardná chyba priemeru)**

*Štandardná chyba priemeru je smerodajná odchýlka výberového priemeru pozorovaní získaných zo vzorky náhodným výberom. Štandardnú chybu priemeru pri známej štandardnej odchýlke vzorky vypočítame ako:*

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{10}$$

*kde σ je skutočná štandardná odchýlka vzorky a n je počet pozorovaní.*

*Štandardná chyba priemeru sa pri neznámej skutočnej štandardnej odchýlke vzorky vypočíta ako:*

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

*kde s je výberová smerodajná odchýlka, ktorá je rovná druhej odmocnine výberového rozptylu, a n je počet pozorovaní.*

Definícia podľa [10]

**Definícia 2.9** *(Logaritmické výnosy)*

$$r_t = log\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$$

*kde $S_t$ je cena akcie v čase t a $S_{t-\Delta t}$ je cena akcie v čase $t - \Delta t$*

Definícia zo zdroja [16].

**Definícia 2.10.** (*Percentuálna chyba*)

Percentuálna chyba je rozdiel medzi odhadovanou hodnotou a skutočnou hodnotou. V porovnaní so skutočnou hodnotou sa vyjadruje v percentách.

$$error = \left|\frac{X - \hat{X}}{X}\right| 100\%$$

*Kde $X$ je skutočná hodnota a $\hat{x}$ je odhad skutočnej hodnoty*

Definícia podľa [27]

# 3 Krátkodobé úrokové sadzby

V tejto kapitole si ukážeme využitie metódy Monte Carlo pri odhadovaní stredných hodnôt a štandardných odchýlok krátkodobej úrokovej sadzby v určitom časovom horizonte. Informácie v tejto kapitole sme čerpali najmä z [6, 7].

Krátkodobé úrokové sadzby sú podľa [19] *sadzby, za ktoré sa uskutočňujú krátkodobé pôžičky medzi finančnými inštitúciami, alebo sadzby, za ktoré sa vydávajú krátkodobé vládne cenné papiere, alebo sa s nimi obchoduje na trhu.*

Na modelovanie krátkodobej úrokovej sadzby existuje niekoľko stochastických modelov. My sme si zvolili Vašíčkov model a Cox-Ingersoll-Ross model. Zdrojom náhodnosti v týchto modeloch je Wienerov proces. Wienerov proces je podľa [16] *stochastický proces* $\{W_t, t \in [0, \infty)\}$*, ktorý spĺňa nasledujúce vlastnosti:*

1. $W_0 = 0$
2. *s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie* $W_t(\omega)$ *spojité*
3. *prírastky* $W_{t+s} - W_s$ *majú normálne rozdelenie* $\mathcal{N}(0, t)$
4. *prírastky* $W_t$ *sú nezávislé t.j pre* $0 < t_1 < t_2 .... < t_n$ *platí, že* $W_0 - W_{t_1}$, $W_{t_2} - W_{t_1} \dots W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sú nezávislé.*

## 3.1 Vašíčkov model

V tejto podkapitole si ukážeme odhad strednej hodnoty a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby pomocou metódy Monte Carlo, v danom čase $t$, v časovom horizonte $T$, kde krátkodobá úroková sadzba je modelovaná podľa Vašíčkovho modelu.

Vašíčkov model je jednofaktorový stochastický model na modelovanie krátkodobej úrokovej sadzby. Tento model bol vytvorený v roku 1977 Oldřichom Vašíčkom.

Vašičkov model má podľa [6] v spojitom čase nasledujúcu dynamiku:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW \tag{12}$$

kde $r$ je krátkodobá úroková sadzba, $\kappa$ je rýchlosť návratu k dlhodobej strednej hodnote krátkodobej úrokovej sadzby, $\theta$ je dlhodobá stredná hodnota krátkodobej úrokovej sadzby, $\sigma$ je volatilita krátkodobej úrokovej sadby a $dW$ je prírastok Wienerovho procesu.

Diskretizácia dynamiky Vašíčkovho modelu pomocou Eulerovej diskretizácie podľa [6]:

$$r_t = r_{t-\Delta t} + \kappa(\theta - r_{t-\Delta t})\Delta t + \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon \tag{13}$$

kde $\Delta t$ je časový krok, $r_t$ je krátkodobá úroková sadzba v čase $t$ a $\varepsilon$ je náhodná premenná z $N(0,1)$

Algoritmus na odhad strednej hodnoty a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby v čase t pomocou metódy Monte Carlo, kde $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $\varepsilon_i$ z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ pre $i = 1, \ldots n$, kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo

2. Nezávislé náhodné čísla $\varepsilon_i$ sa dosadia do výrazu (13) Vašíčkovho modelu, takto sa simuluje úroková sadzba v danom časovom kroku $t$:

   $$r_{t_i} = r_{(t-\Delta t)_i} + \kappa(\theta - r_{(t-\Delta t)_i})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_i \quad \text{pre } i = 1, \ldots, n$$

   kde $r_{(t-\Delta t)_i}$ je krátkodobá úroková sadzba v predošlom časovom kroku a $\Delta t$ je dĺžka časového kroku.

3. Kroky 1 a 2 sa opakujú pre všetky $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$, kde $T$ je čas do exspirácie v rokoch. Opakovaním krokov 1 a 2 dosiahneme simuláciu úrokovej sadzby modelovanej Vašíčkovým modelom na časovom intervale $T$ s počtom simulácií $n$

4. výpočet odhadu strednej (očakávanej) hodnoty úrokovej sadzby v časových bodoch $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$

   $$\overline{r_t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{t_i}, \quad \text{pre } t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$$

   kde $\overline{r_t}$ je výberovým priemerom simulovaných úrokových sadzieb v čase $t$ a je odhadom $\mathbb{E}[r_t]$

5. Odhad štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby v časových bodoch $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$:

   $$s_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{t_i} - \overline{r_t})^2}{(n-1)}} \quad \text{pre } t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T \tag{14}$$

   kde $s_t$ je výberová štandardná odchýlka, ktorá je podľa [10] nevychýleným odhadom štandardnej odchýlky úrokovej sadzby v čase $t$.

Analytické riešenie na výpočet strednej hodnoty a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby v čase $t$ Vašíčkovho modelu podľa [11]:

$$\mathbb{E}[r_t] = e^{-\kappa t}[r_0 + \theta(e^{\kappa t} - 1)]$$

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right)$$

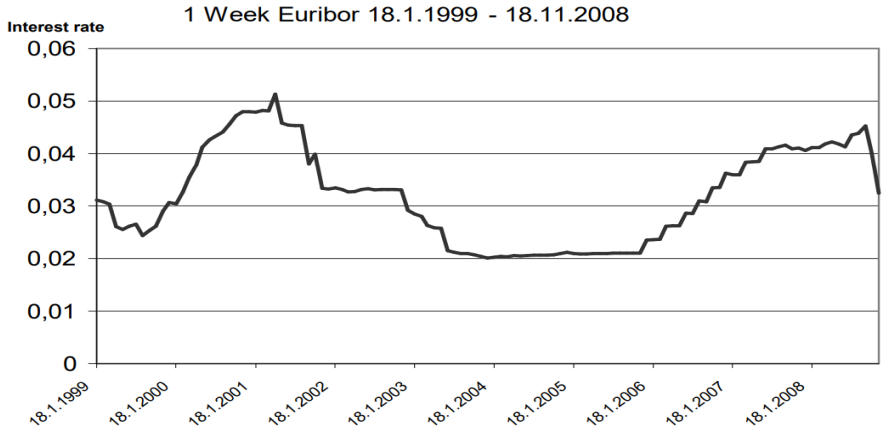
$$\sigma_{r_t} = \sqrt{Var(r_t)}$$

kde $\sigma_{r_t}$ je štandardná odchýlka krátkodobej úrokovej sadzby v čase $t$

### 3.1.1 Ilustračný príklad

V tomto príklade si ukážeme odhady stredných hodnôt a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby pomocou metódy Monte Carlo pri rôznych počtoch simulácií $n$. Krátkodobá úroková sadzba bude modelovaná Vašíčkovým modelom kalibrovaným na jednotýždňový Euribor od 18.1.1999 do 18.11.2008. Časový horizont v tomto ilustračnom príklade sme zvolili 50 dní a v rokoch bude $T = 50/250$ za predpokladu, že rok má 250 pracovných dní. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň teda $\Delta t = 1/250$. Počiatočná hodnota krátkodobej úrokovej sadzby bude hodnota jednotýždňového Euribora z 18.11.2008 a teda $r_0 = 0.03244$. Počet simulácií v metóde Monte Carlo $n$ sme si zvolili 10000, 20000 a 30000 a pozrime sa ako počet simulácií ovplyvňuje presnosť odhadu strednej hodnoty.

Kalibráciu Vašíčkovho modelu sme v tejto práci nevykonali, kalibrované parametre Vašíčkovho modelu sme získali z [12].




**Obr. 1:** Historické dáta jednotýždňového Euriboru. Graf zo zdroja [12]

Euribor, alebo Euro Interbank Offer Rate, je podľa [13] *referenčná sadzba, ktorá je vytvorená z priemernej úrokovej sadzby, za ktorú banky eurozóny ponúkajú nezabezpečené krátkodobé pôžičky na medzibankovom trhu.*

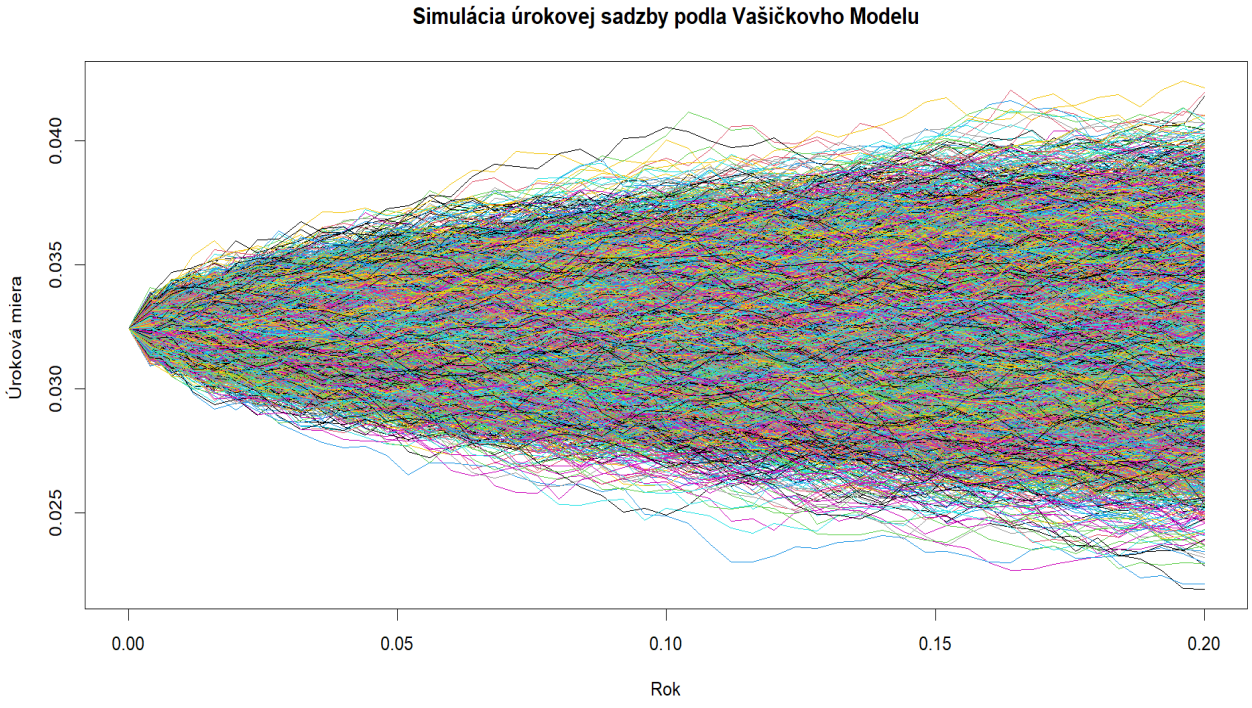
Parametre Vašíčkovho modelu kalibrovaného na jednotýždňový Euribor od 18.1.1999 do 18.11.2008 získané z [12] sú rovné :

| $\hat{\kappa}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\sigma}$ |
|---|---|---|
| 0.2475 | 0.0325 | 0.0064 |

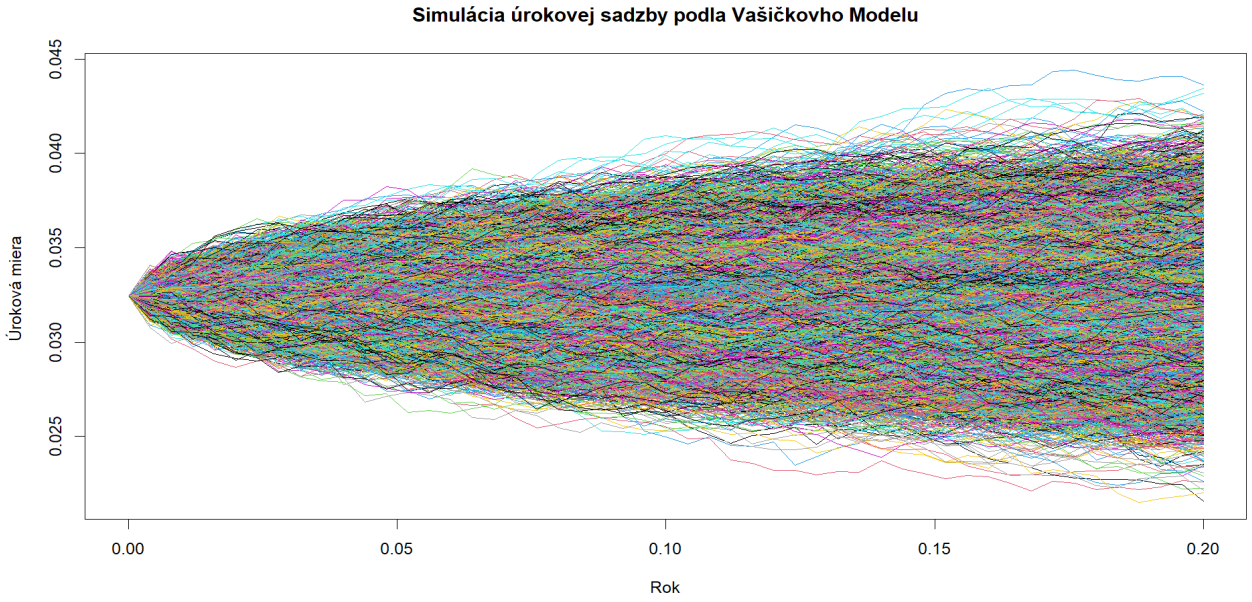
**Tabuľka 2:** Hodnoty kalibrovaných parametrov

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce. Tento kód však neobsahuje grafické výstupy z dôvodu obšírnosti kódu týchto grafických výstupov.

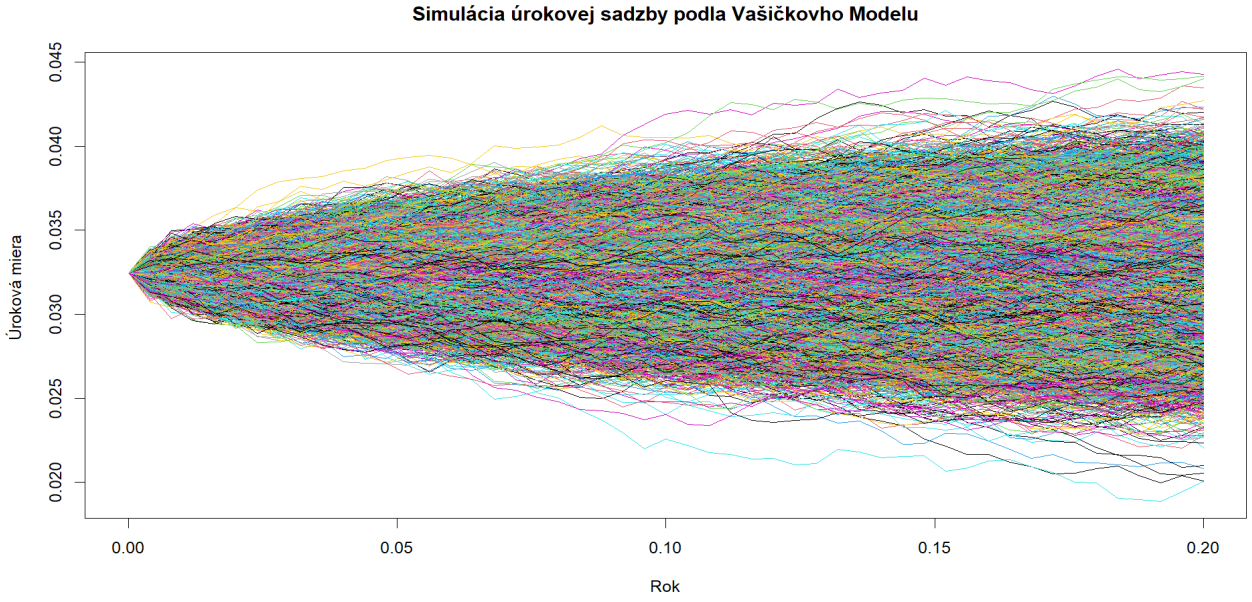
Grafické výstupy ukazujúce simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb pre $n = 10000$, $n = 20000$ a $n = 30000$:




**Obr. 2:** Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb jednotýždňového Euribora metódou Monte Carlo podľa Vašíčkovho modelu pre $n = 10000$



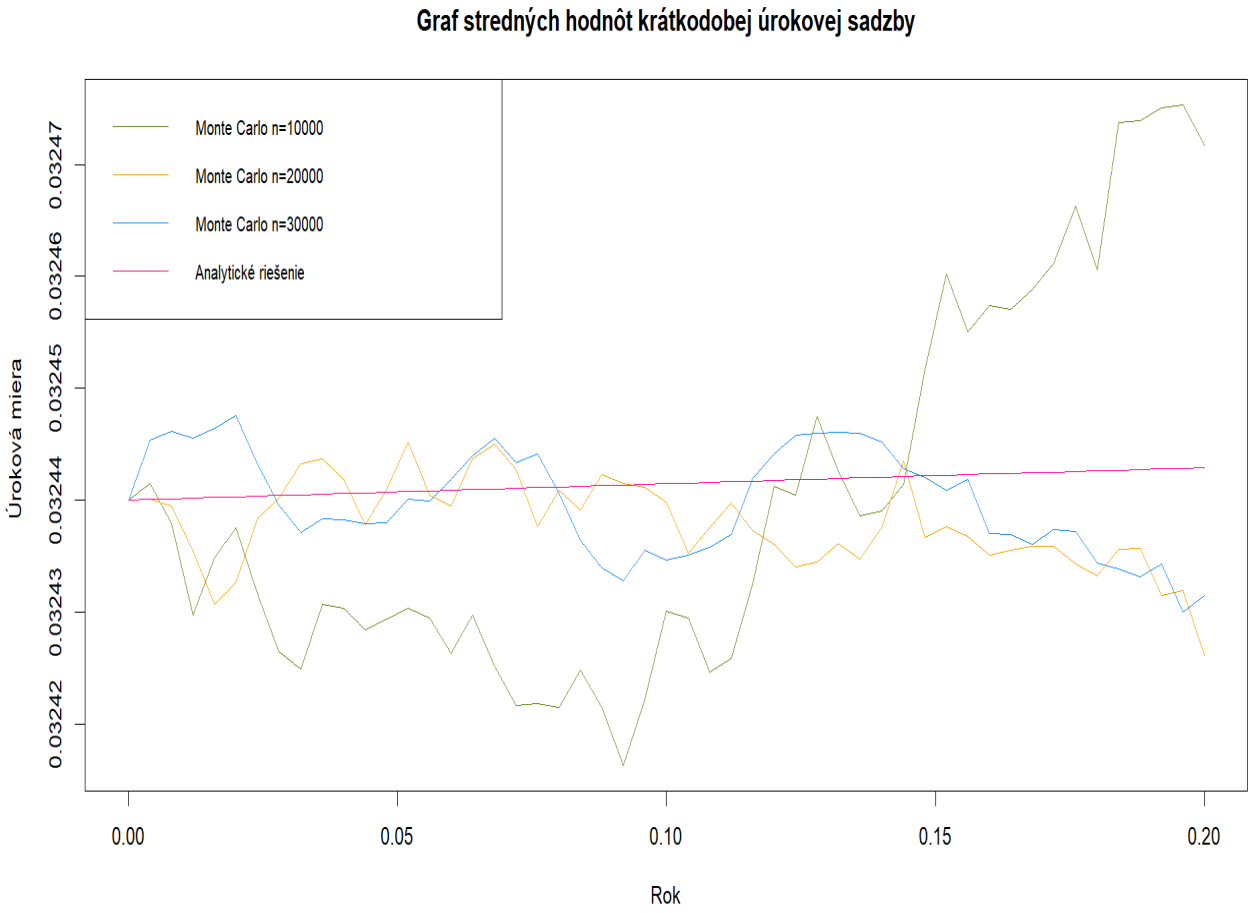

**Obr. 3:** Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb jednotýždňového Euribora metódou Monte Carlo podľa Vašíčkovho modelu pre $n = 20000$




**Obr. 4:** Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb jednotýždňového Euribora metódou Monte Carlo podľa Vašíčkovho modelu pre $n = 30000$

Obrázky 2, 3 a 4 predstavujú simulované predikcie vývoja jednotýždňového Euriboru od 18.11.2008 po dobu 50 dní podľa Vašíčkovho modelu pre rôzny počet simulácií.

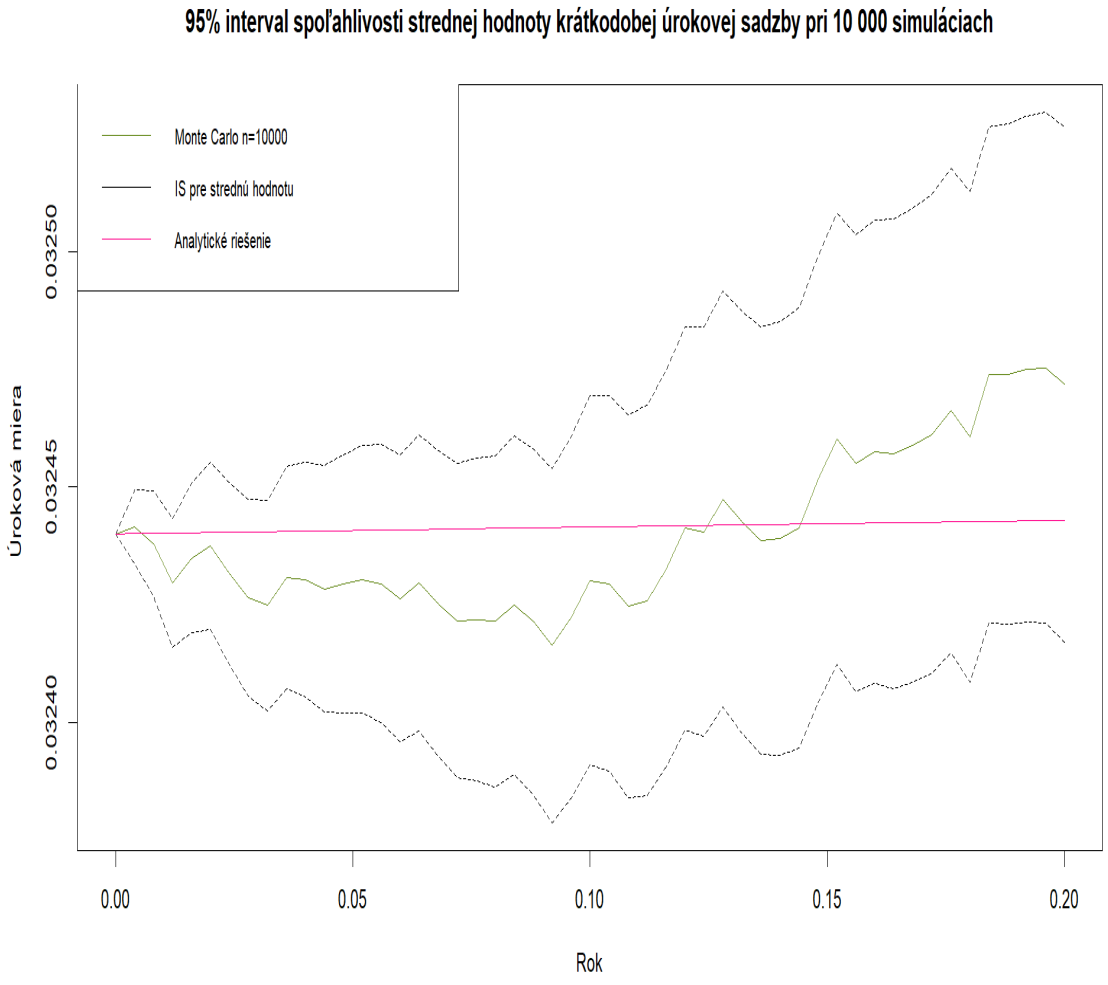
Grafický výstup zobrazuje odhadnuté stredné hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby pre rôzne počty simulovaných ciest $n$ a analytické riešenie strednej hodnoty Vašíčkovho modelu:



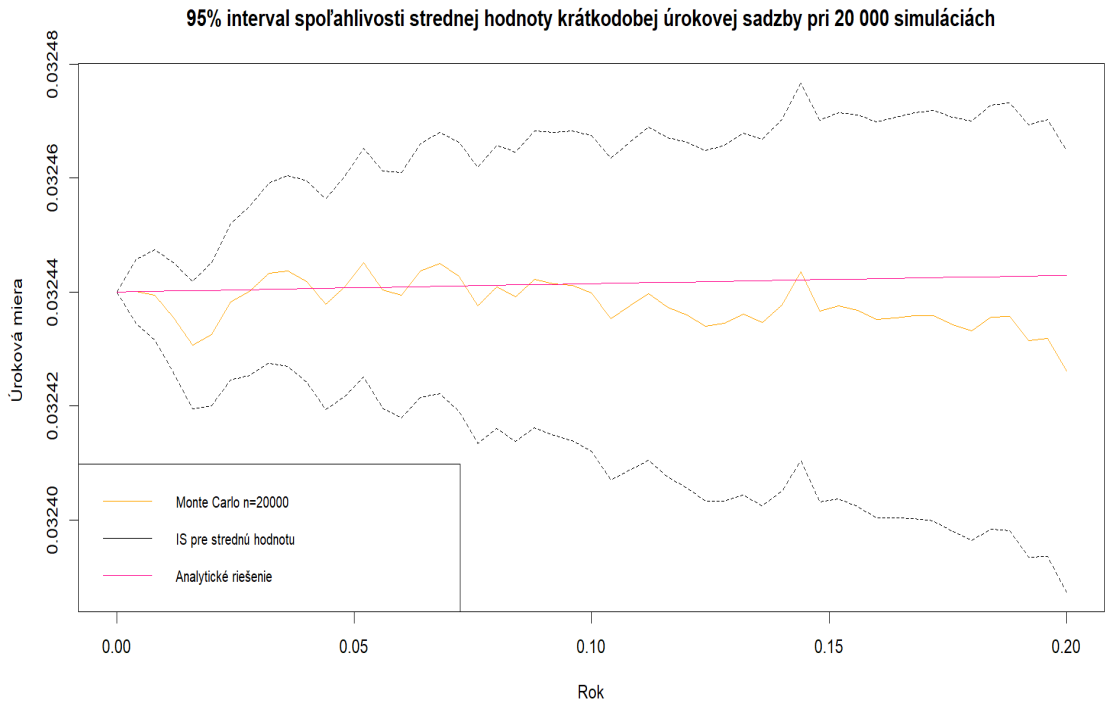

**Obr. 5:** Porovnanie odhadnutých stredných hodnôt s analytickou strednou hodnotou Vašíčkovho modelu

Na obrázku 5 ružová krivka je analyticky riešená stredná hodnota Vašíčkovho modelu. Modrá krivka reprezentuje odhadnutú strednú hodnotu pomocou metódy Monte Carlo pre $n = 30000$, oranžová krivka je odhadnutá stredná hodnota pre $n = 20000$ a zelená krivka je odhadnutá stredná hodnota pre $n = 10000$. Stredná hodnota Vašíčkovho modelu predstavuje očakávanú hodnotu krátkodobej úrokovej sadzby jednotýždňového Euribora.

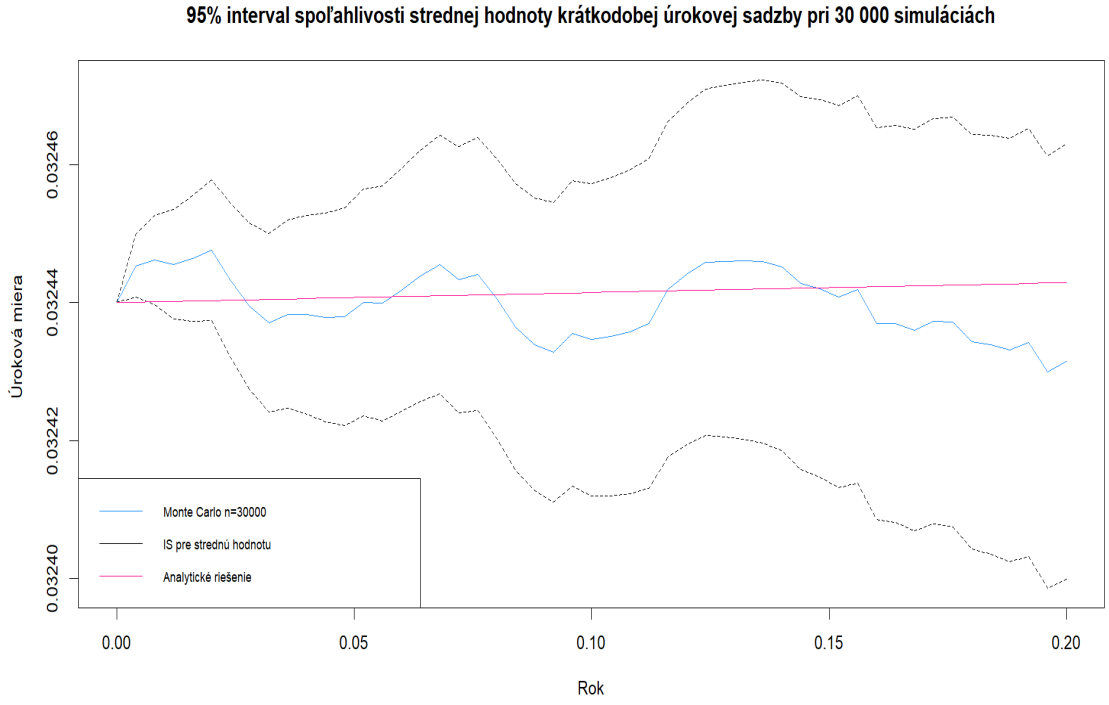
Podľa centrálnej limitnej vety (CLV), definovanej v kapitole 2, definícia 2.6, ak máme dostatočne veľký počet nezávislých a identicky distribuovaných pozorovaní, potom bude výberový priemer aproximovať normálne rozdelenie bez ohľadu na rozdelenie populácie. V našom ilustračnom príklade sme použili metódu Monte Carlo na odhad strednej hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby s dostatočne veľkým počtom simulácií, čo nám umožnilo predpokladať, že stredné hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby budú aproximovať normálne rozdelenie. Preto sme sa rozhodli vypočítať 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu so známym $\sigma$, podľa kapitoly 2, definícia 2.4. 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu hovorí, že s 95% istotou sa skutočná stredná hodnota nachádza v danom intervale. Naše intervaly spoľahlivosti vyšli nasledovne:




**Obr. 6:** 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu




**Obr. 7:** 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu



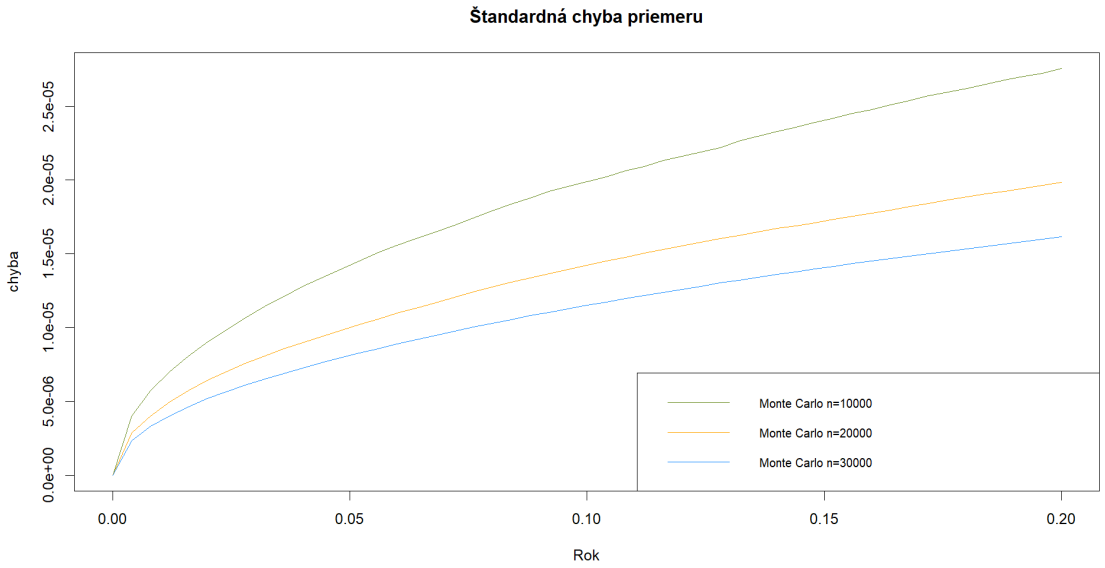

**Obr. 8:** 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu

Na obr. 6, 7 a 8 ružová krivka je analyticky riešená stredná hodnota. Farebné krivky

sú odhadnuté stredné hodnoty pomocou metódy Monte Carlo a čierne krivky sú intervaly spoľahlivosti strednej hodnoty. Z obr. 6, 7 a 8 vidno, že sa analyticky riešené intervaly pre stredné hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby sa nachádzajú v intervaloch spoľahlivosti pre strednú hodnotu získanú pomocou metódy Monte Carlo. Toto pozorovanie naznačuje, že odhady stredných hodnôt získané analytickým výpočtom sú porovnateľné s odhadom stredných hodnôt získaných pomocou metódy Monte Carlo.

Na výpočet toho, ako veľmi sa líšia odhadnuté stredné hodnoty od skutočných, použijeme štandardnú chybu priemeru uvedenú v kapitole 2, definícia 2.8. Keďže poznáme $\sigma_{r_t}$ štandardnú chybu, budeme postupovať podľa kapitoly 2,definícia 2.8., nasledovne:

$$SE = \frac{\sigma_{r_t}}{\sqrt{n}} \tag{15}$$




**Obr. 9:** Štandardná chyba priemeru

Na obr. 9 zelená krivka je štandardná chyba priemeru pri $n = 10000$ simuláciách, žltá je štandardná chyba priemeru pri $n = 20000$ simuláciách a modrá je pri $n = 30000$. Na obr. 9 si môžeme všimnúť, že s rastúcim počtom simulácií štandardná chyba priemeru klesá a teda čím viacej simulácií, tým viacej sú si skutočná stredná hodnota a odhadnutá stredná hodnota metódou Monte Carlo podobné.

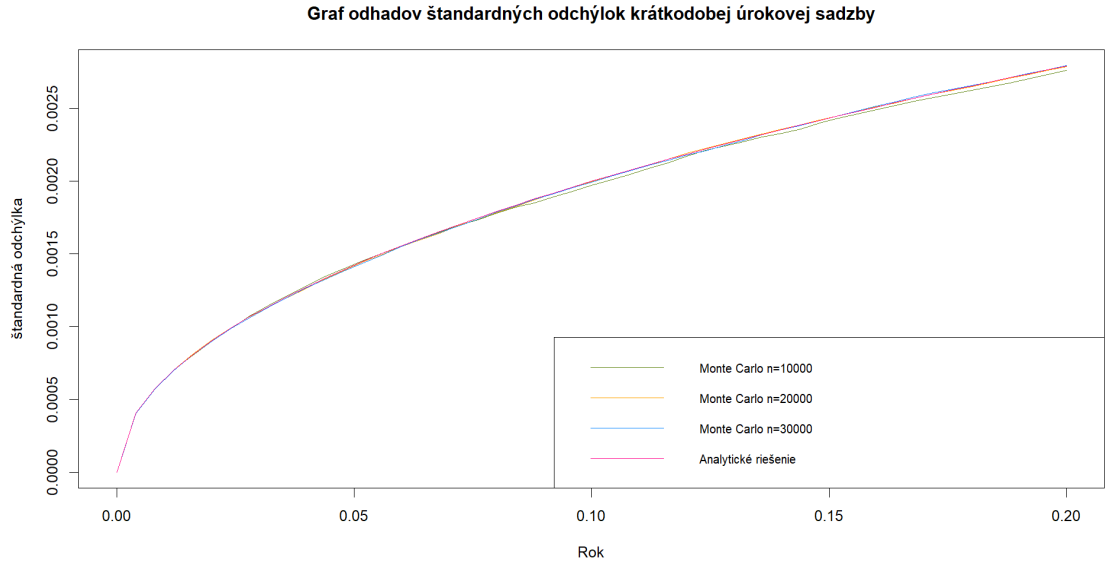
Taktiež sme si vypočítali priemernú kvadratickú chybu podľa kapitoly 2, definícia 2.7., ktorá meria množstvo chýb medzi odhadom strednej hodnoty pomocou metódy Monte Carlo a analytickým riešením. Výsledky výpočtov priemernej kvadratickej chyby:

| $n$ | MSE |
|---|---|
| 10000 | 6.8981e-10 |
| 20000 | 3.9392e-11 |
| 30000 | 3.4830e-11 |

**Tabuľka 3:** Priemerná kvadratická chyba pri rôznych počtoch simulácií

Tabuľka 3 ukazuje priemernú kvadratickú chybu (MSE) pri rôznych počtoch simulácií. V našom ilustračnom príklade pozorujeme, že s rastúcim počtom simulácií klesá priemerná kvadratická chyba. Tento trend naznačuje, že s väčším počtom simulácií je odhad strednej hodnoty presnejší a približuje sa k analytickému riešeniu. Tento jav je očakávaný, pretože väčší počet simulácií zvyšuje presnosť odhadu. Tabuľka potvrdzuje, že s dostatočným počtom simulácií je metóda Monte Carlo schopná poskytnúť spoľahlivé odhady strednej hodnoty.

Grafický výstup zobrazujúci odhadnuté štandardné odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby pre rôzne počty simulovaných ciest $n$ a analytické riešenie štandardnej odchýlky Vašíčkovho modelu:



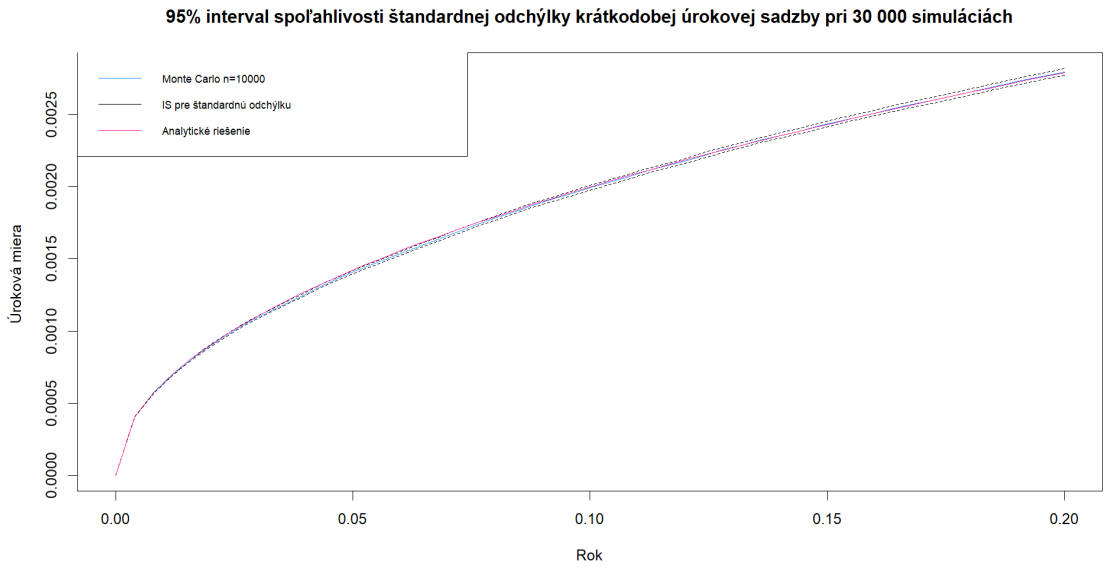

**Obr. 10:** Porovnanie odhadnutých štandardných odchýlok s analytickou štandardnou odchýlkou Vašíčkovho modelu

Na obr.10 je zobrazené analytické riešenie pre štandardnú odchýlku a odhady štan-

dardnej odchýlky pomocou metódy Monte Carlo pre rôzne počty simulácií. Modrá krivka reprezentuje odhad štandardnej odchýlky pomocou metódy Monte Carlo pre $n = 30000$ , zelená pre $n = 20000$ a žltá pre $n = 10000$.

Podľa [21] *Štandardná odchýlka je štatistická miera variability (rozptylu) ľubovoľného súboru číselných hodnôt okolo ich aritmetického priemeru.* Vyššia štandardná odchýlka naznačuje väčšiu fluktuáciu krátkodobých úrokových sadzieb okolo jej strednej hodnoty. Naopak, nižšia štandardná odchýlka indikuje menšiu variabilitu a menšiu fluktuácií krátkodobých úrokových sadzieb okolo jej strednej hodnoty.

Na základe centrálnej limitnej vety z kapitoly 2 definícia 2.6 sme použili na výpočet 95% intervalu spoľahlivosti štandardnej odchýlky intervalu spoľahlivosti vzorec z kapitoly 2 definícia 2.5. 95% interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky, hovorí, že na 95% sa v danom intervale budú nachádzať skutočné štandardné odchýlky.




**Obr. 11:** 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky pre $n = 30000$

Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky sme uviedli len pre $n = 30000$ z toho dôvodu, že pre ostatné $n$ intervaly spoľahlivosti štandardnej odchýlky dávajú podobné výsledky.

## 3.2 Cox–Ingersoll–Ross model

Cox–Ingersoll–Ross model, alebo v skratke CIR model je jednofaktorový stochastický model na modelovanie krátkodobej úrokovej sadzby. Tento model bol vynájdený v roku 1985 John C. Coxom, Jonathan E. Ingersollom a Stephen A. Rossom.

CIR model má podľa [7] v spojitom čase nasledujúcu dynamiku:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW \tag{16}$$

kde $\kappa$, $\theta$ a $\sigma$ sú pozitívne parametre. Môžeme si všimnúť, že CIR model má rovnaký drift ako Vašíčkov model. Rovnako ako pri Vašíčkovom modeli, aj pri CIR modeli je $\kappa$ rýchlosť návratu k dlhodobej strednej hodnote krátkodobej úrokovej sadzby, $\theta$ je dlhodobá stredná hodnota krátkodobej úrokovej sadzby, $\sigma$ je volatilita krátkodobej úrokovej sadzby a $dW$ je prírastok Wienerovho procesu.

Diskretizácia dynamiky CIR modelu pomocou Eulerovej diskretizácie je podľa [6] nasledovná:

$$r_t = r_{t-\Delta t} + \kappa(\theta - r_{t-\Delta t})\Delta t + \sigma\sqrt{r_{t-\Delta t}}\sqrt{\Delta t}\cdot\varepsilon$$

kde $\Delta t$ je časový krok, $r_t$ je krátkodobá úroková sadzba v čase $t$ a $\varepsilon$ je náhodná premenná z $N(0,1)$.

Algoritmus na odhad strednej hodnoty a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby v čase $t$ pomocou metódy Monte Carlo, kde $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots T$, je skoro rovnaký, ako pri Vašíčkovom modely. Jediná zmena v postupe nastane v 2. kroku, kde sa v tomto prípade nezávislé náhodné $\epsilon$ dosadí do

$$r_{t_i} = r_{(t-\Delta t)_i} + \kappa(\theta - r_{(t-\Delta t)_i})\Delta t + \sigma\sqrt{r_{(t-\Delta t)_i}}\sqrt{\Delta t}\cdot\varepsilon_i$$

Analytické riešenie na výpočet strednej hodnoty a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby v čase $t$ CIR modelu podľa [22]:

$$\mathbb{E}[r_t] = e^{-\kappa t}r_0 + \theta(1 - e^{-\kappa t})]$$

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{\kappa}r_0\left(e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}\right) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2$$

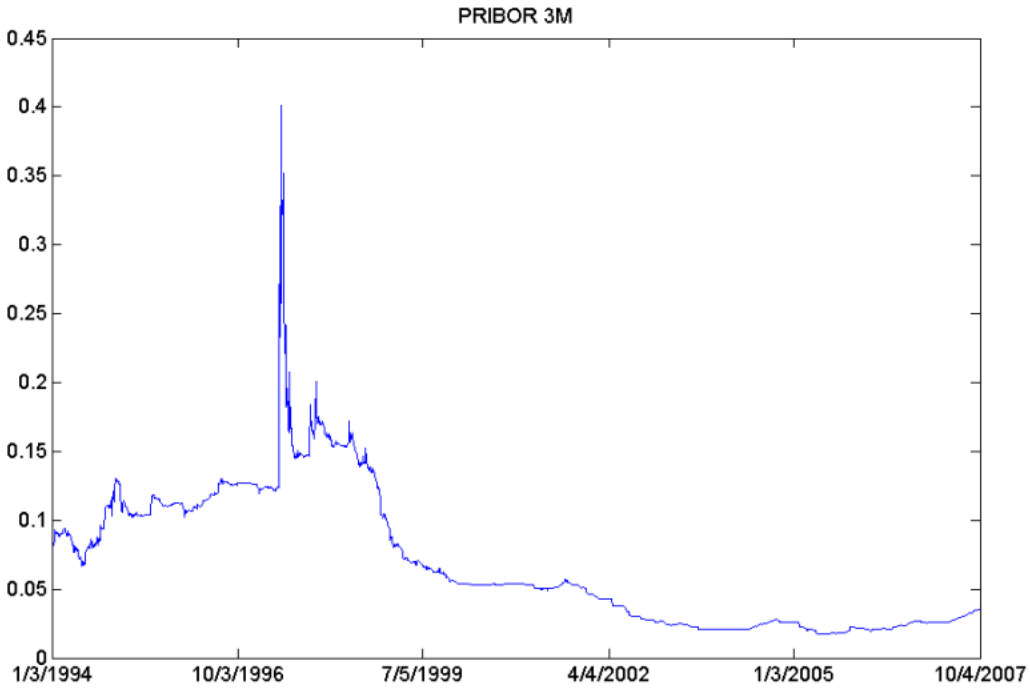
$$\sigma_{r_t} = \sqrt{Var(r_t)}$$

kde $\sigma_{r_t}$ je štandardná odchýlka krátkodobej úrokovej sadzby v čase $t$

### 3.2.1 Ilustračný príklad

V tomto príklade si ukážeme odhady stredných hodnôt a štandardnej odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby pomocou metódy Monte Carlo pri rôznych počtoch simulácií $n$. Krátkodobá úroková sadzba bude modelovaná CIR modelom kalibrovaným na trojmesačný Pribor od 1.3.1994 do 4.10.2007. Časový horizont v tomto ilustračnom príklade sme zvolili 50 dní a v rokoch bude $T = 50/250$ za predpokladu, že rok má 250 pracovných dní. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň, teda $\Delta t = 1/250$. Počiatočná hodnota krátkodobej úrokovej sadzby bude hodnota trojmesačného Pribora z 4.10.2007 a teda $r_0 = 0.0258$. Počet simulácií v metóde Monte Carlo $n$ sme si zvolili 10000, 20000 a 30000 a aj v tomto ilustračnom príklade sa pozrieme ako počet simulácií v metóde Monte Carlo ovplyvňuje presnosť odhadov.

Kalibráciu CIR modelu sme v tejto práci nevykonali, kalibrované parametre CIR modelu sme získali z [15]




**Obr. 12:** Historické dáta trojmesačného Priboru. Graf zo zdroja [15]

Pribor, alebo Pražský Interbank Offer Rate, je podľa [41] *je priemerná úroková sadzba,*

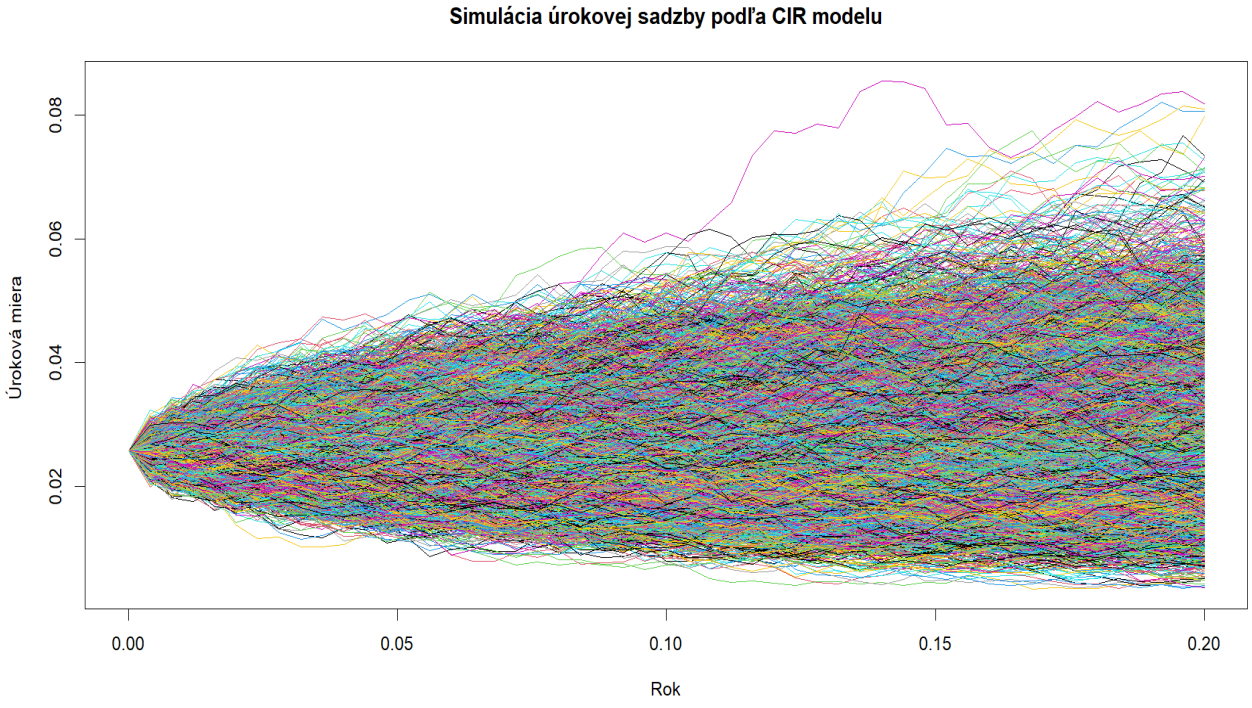
*za ktorú sa poskytuje úver na medzibankovom peňažnom trhu Českej republiky.*
Odhadnuté hodnoty parametrov CIR modelu kalibrovaného na trojmesačný Pribor od 3.1.1994 do 4.10.2007 získané z [15] sú rovné:

| $\hat{\kappa}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\sigma}$ |
|---|---|---|
| 0.4363 | 0.0613 | 0.1491 |

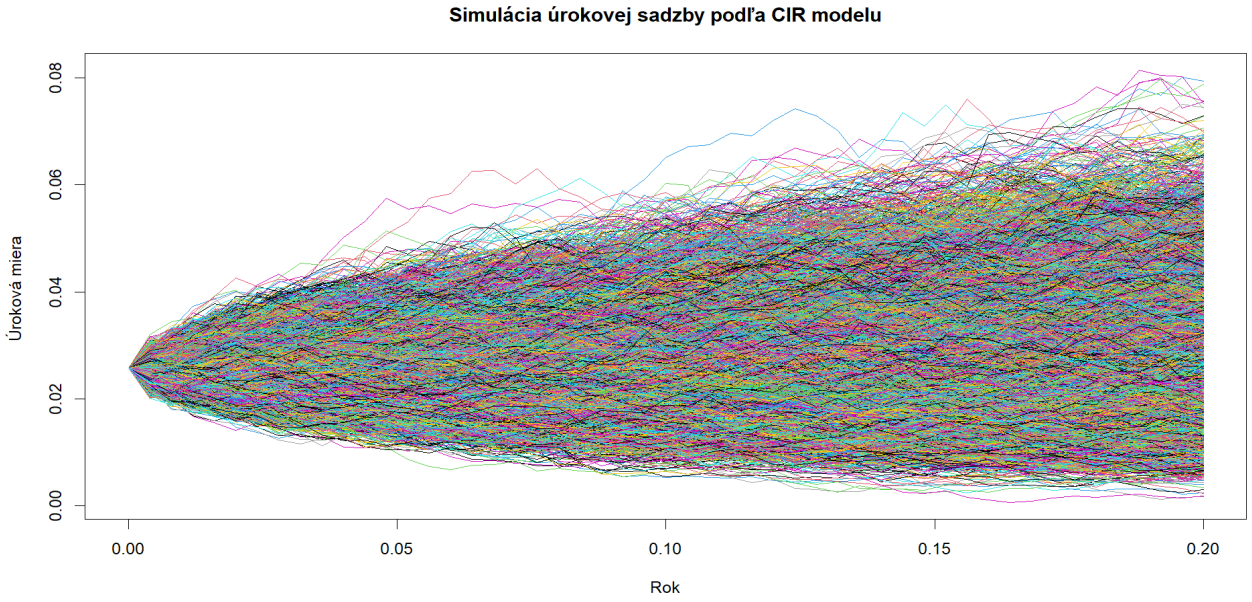
**Tabuľka 4:** Hodnoty kalibrovaných parametrov

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce. Tento kód však neobsahuje grafické výstupy z dôvodu obšírnosti kódu týchto grafických výstupov.

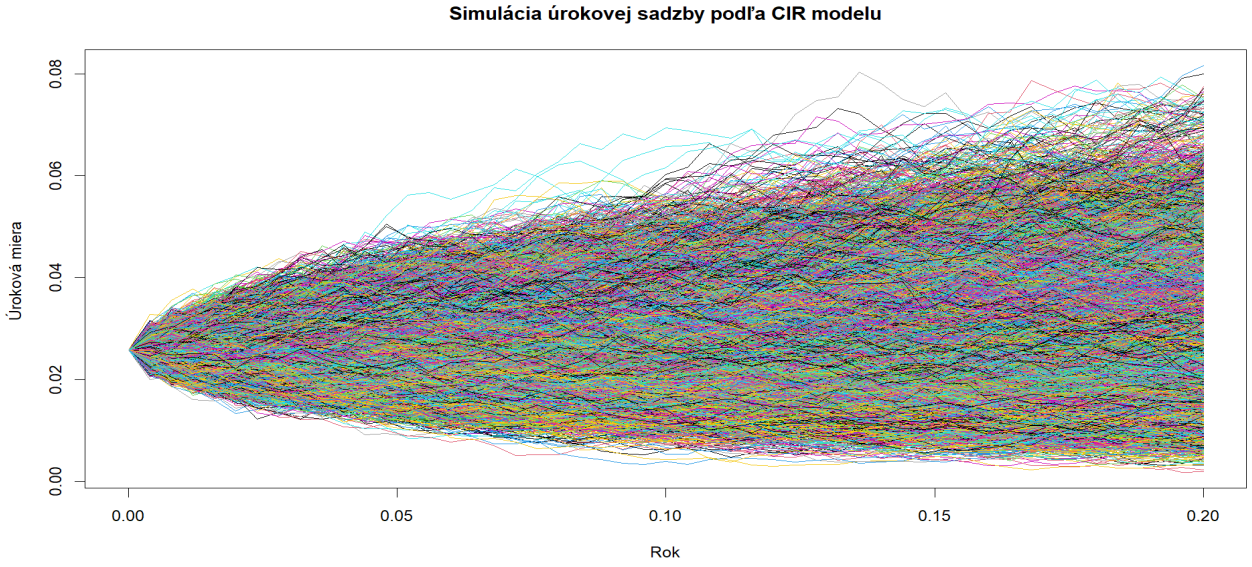
Grafické výstupy ukazujúce simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb pre $n = 10000$, $n = 20000$ a $n = 30000$:




**Obr. 13:** Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb trojmesačného Pribora metódou Monte Carlo podľa CIR modelu pre $n = 10000$




**Obr. 14:** Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb trojmesačného Pribora metódou Monte Carlo podľa CIR modelu pre $n = 20000$

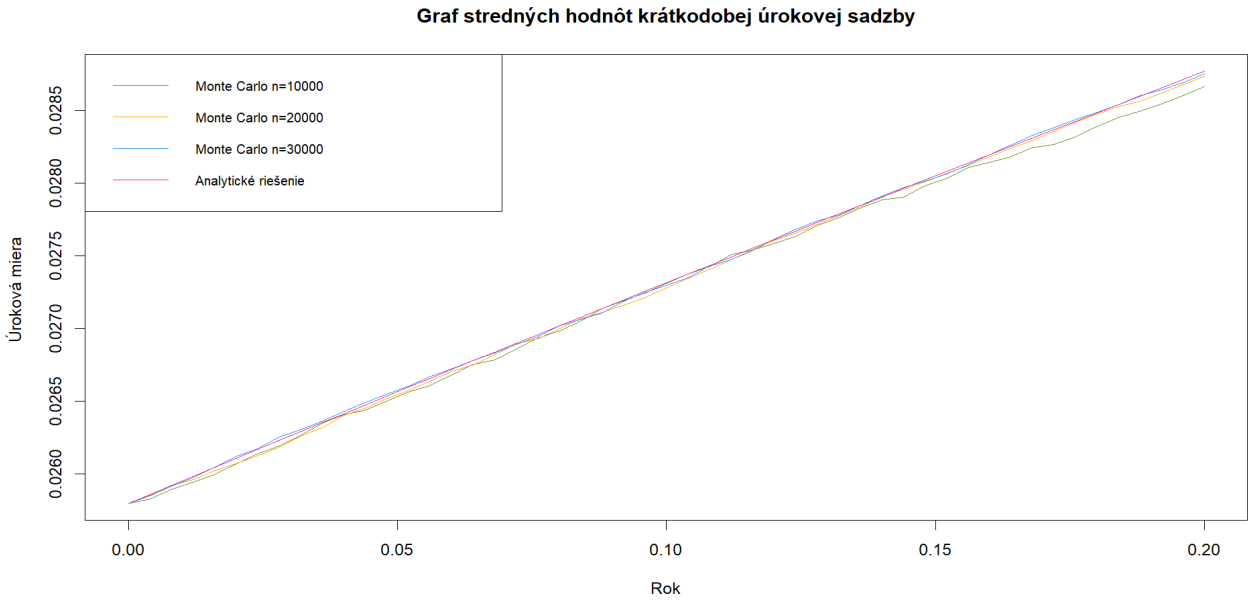



**Obr. 15:** Simulované cesty krátkodobých úrokových sadzieb trojmesačného Pribora metódou Monte Carlo podľa CIR modelu pre $n = 30000$

Obrázky 13, 14 a 15 predstavujú simulované predikcie vývoja trojmesačného Príboru, od 18.11.2008 po dobu 50 dní, podľa CIR modelu pre rôzny počet simulácií.

Grafický výstup zobrazuje odhadnuté stredné hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby

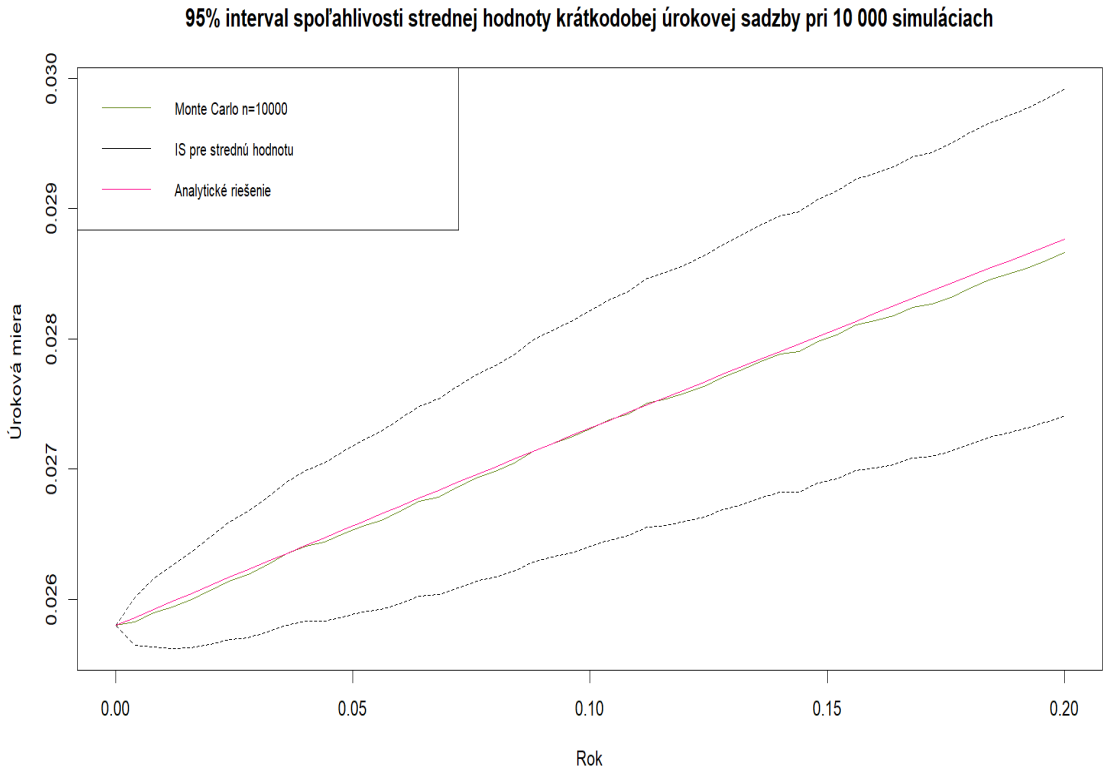
pre rôzne počty simulovaných ciest $n$ a analytické riešenie strednej hodnoty CIR modelu:



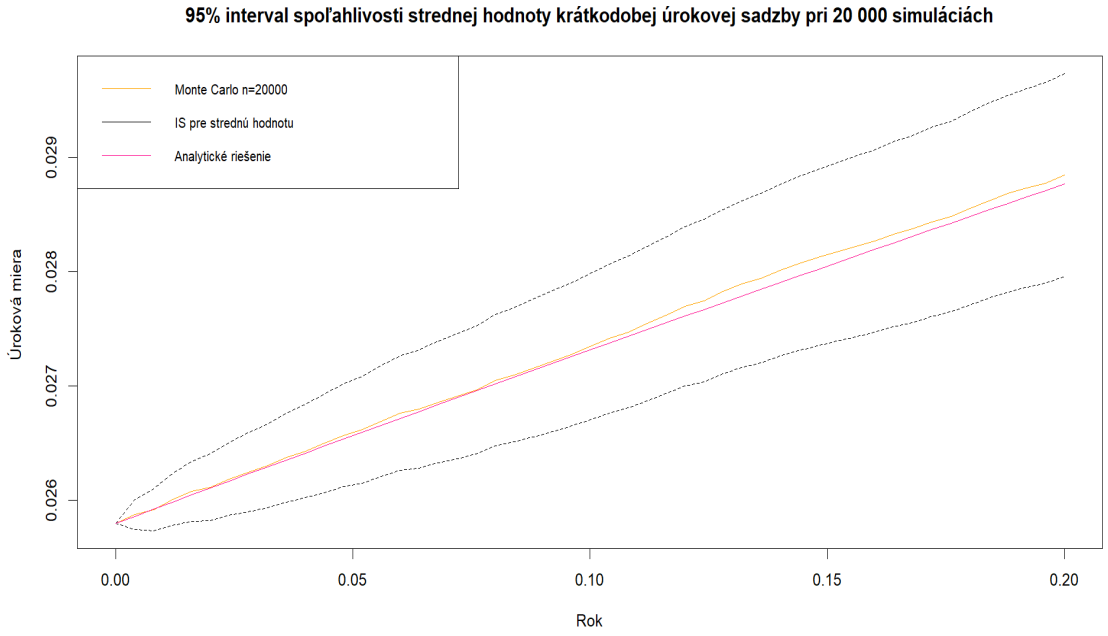

**Obr. 16:** Porovnanie odhadnutých stredných hodnôt s analytickou strednou hodnotou CIR modelu

Na obrázku 16 ružová krivka je analyticky riešená stredná hodnota CIR modelu. Modrá krivka reprezentuje odhadnutú strednú hodnotu pomocou metódy Monte Carlo pre $n = 30000$, oranžová krivka je odhadnutá stredná hodnota pre $n = 20000$ a zelená krivka je odhadnutá stredná hodnota pre $n = 10000$. Stredná hodnota CIR modelu predstavuje očakávanú hodnotu krátkodobej úrokovej sadzby trojmesačného Pribora.

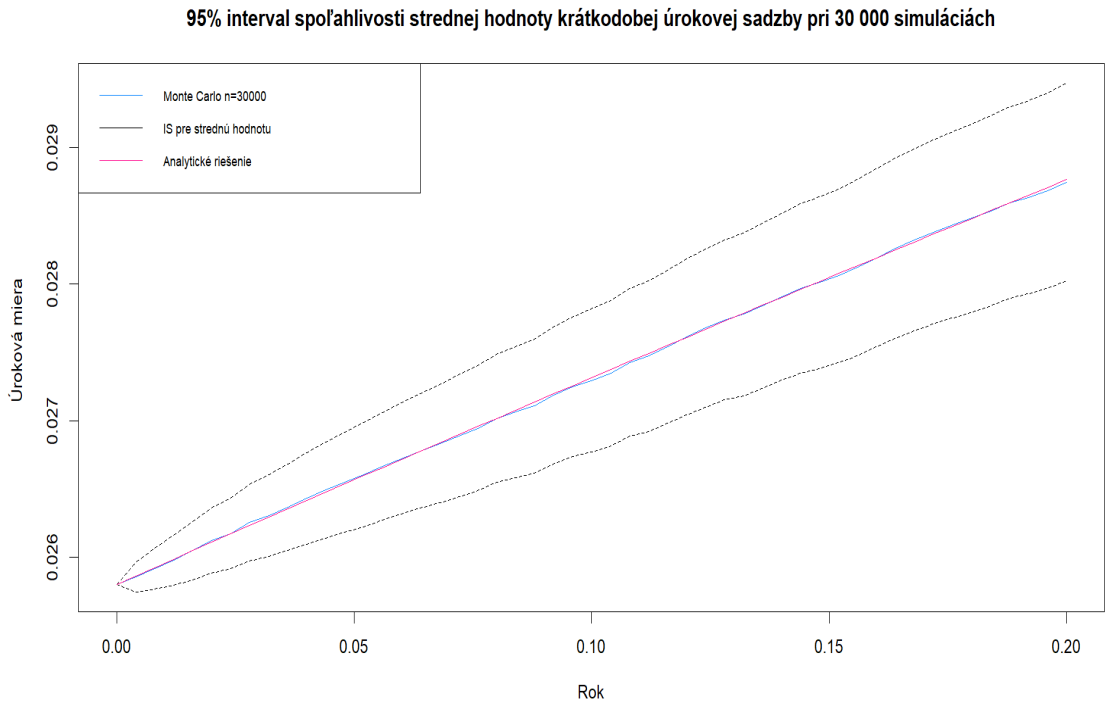
Na základe centrálnej limitnej vety (CLV), definovanej v kapitole 2 definícia 2.6, sme rovnako ako pri Vašíčkovom modeli počítali 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu so známym $\sigma$ podľa kapitoly 2 definícia 2.4. Naše intervaly spoľahlivosti vyšli nasledovne:




**Obr. 17:** 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu pre $n = 10000$



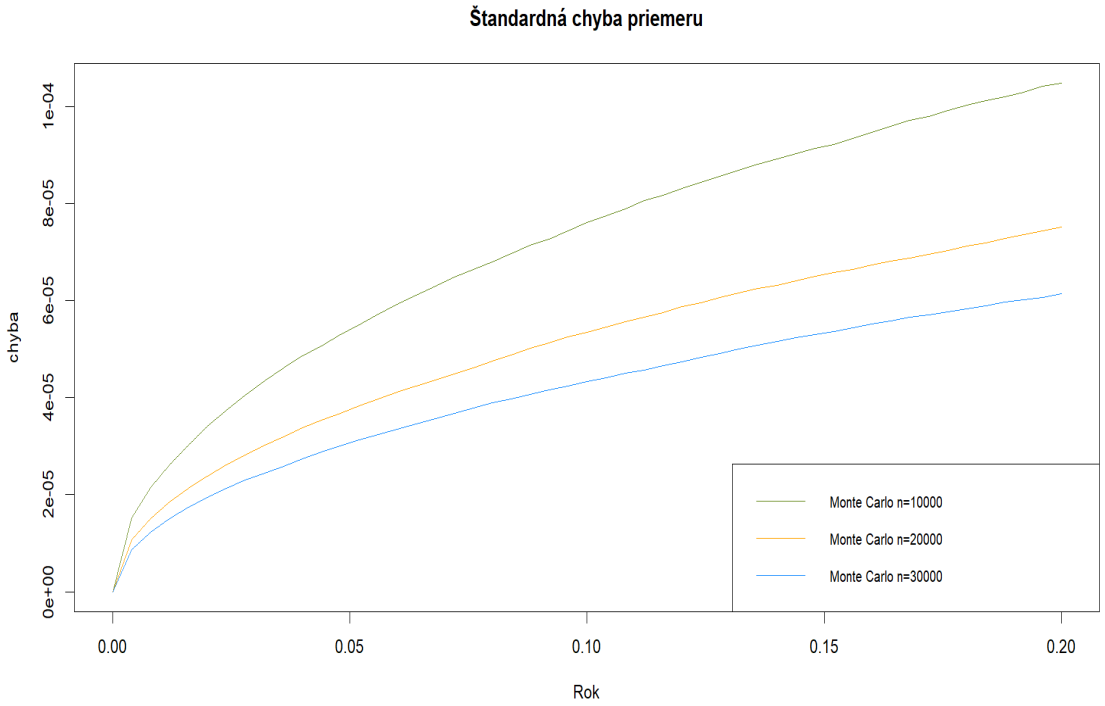

**Obr. 18:** 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu pre $n = 20000$




**Obr. 19:** 95% intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu pre $n = 30000$

Na obr. 17, 18 a 19 ružová krivka je analyticky riešená stredná hodnota. Farebné krivky sú odhadnuté stredné hodnoty pomocou metódy Monte Carlo a čierne krivky sú intervaly spoľahlivosti strednej hodnoty. Z obr. 17, 18 a 19 vidieť, že analyticky riešené intervaly pre stredné hodnoty krátkodobej úrokovej sadzby sa nachádzajú v intervaloch spoľahlivosti pre strednú hodnotu získanú pomocou metódy Monte Carlo. Toto pozorovanie naznačuje, že odhady stredných hodnôt získané analytickým výpočtom sú porovnateľné odhadom stredných hodnôt získaných pomocou metódy Monte Carlo.

Na výpočet toho, ako veľmi sa líšia odhadnuté stredné hodnoty od skutočných, rovnako ako pri Vašíčkovom modeli, použijeme štandardnú chybu priemeru uvedenú v kapitole 2 definícia 2.8.




**Obr. 20:** Štandardná chyba priemeru

Na obr. 20 zelená krivka je štandardná chyba priemeru pri $n = 10000$ simuláciách, žltá je štandardná chyba priemeru pri $n = 20000$ simuláciách a modrá je pri $n = 30000$. Na obr. 20 si môžeme všimnúť, že s rastúcim počtom simulácií štandardná chyba priemeru klesá a teda čím viacej simulácií, tým viacej sú podobné skutočná stredná hodnota a odhadnutá stredná hodnota metódou Monte Carlo.

Taktiež sme si vypočítali priemernú kvadratickú chybu podľa kapitoly 2, definícia 2.7. Výsledky výpočtov priemernej kvadratickej chyby:

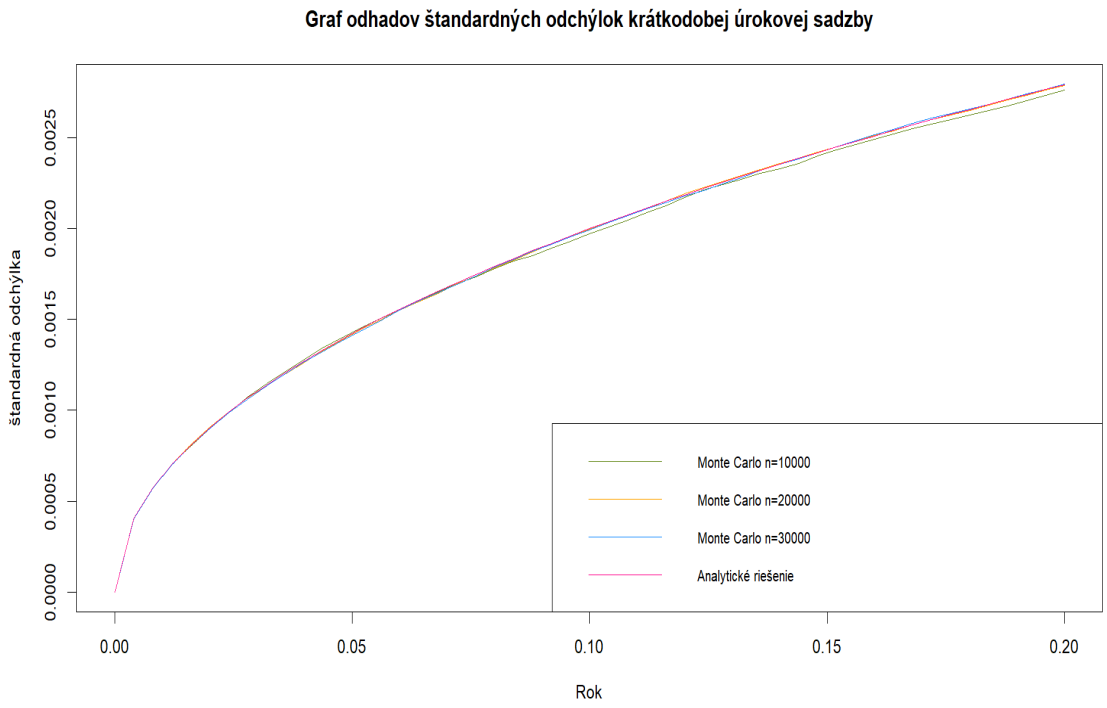
| $n$ | MSE |
|---|---|
| 10000 | 2.656912e-09 |
| 20000 | 5.594634e-10 |
| 30000 | 1.58119e-10 |

**Tabuľka 5:** Priemerná kvadratická chyba pri rôznych počtoch simulácií

Tabuľka 5 ukazuje priemernú kvadratickú chybu (MSE) pri rôznych počtoch simulácií, v ktorej si môžeme všimnúť, že s rastúcim počtom simulácií klesá priemerná kvadratická

chyba. Tento trend by mohol naznačovať, že s väčším počtom simulácií je odhad strednej hodnoty presnejší. Tabuľka naznačuje, že s dostatočným počtom simulácií je metóda Monte Carlo schopná poskytnúť spoľahlivé odhady strednej hodnoty.

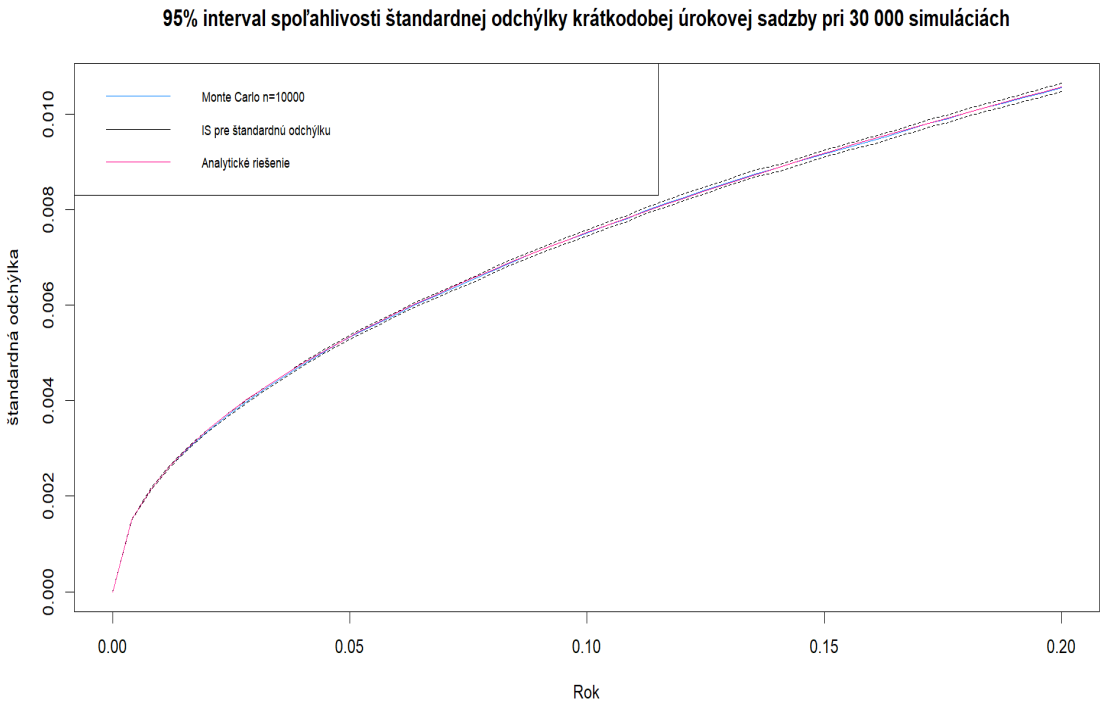
Grafický výstup zobrazujúci odhadnuté štandardné odchýlky krátkodobej úrokovej sadzby pre rôzne počty simulovaných ciest $n$ a analytické riešenie štandardnej odchýlky CIR modelu:




**Obr. 21:** Porovnanie odhadnutých štandardných odchýlok s analytickou štandardnou odchýlkou CIR modelu

Na obr.21 je zobrazené analytické riešenie pre štandardnú odchýlku a odhady štandardnej odchýlky pomocou metódy Monte Carlo pre rôzne počty simulácií. Modrá krivka reprezentuje odhad štandardnej odchýlky pomocou metódy Monte Carlo pre $n = 30000$, zelená pre $n = 20000$ a žltá pre $n = 10000$.

Na základe centrálnej limitnej vety z kapitoly 2 definícia 2.6, sme použili na výpočet 95% intervalu spoľahlivosti štandardnej odchýlky intervalu spoľahlivosti vzorec z kapitoly 2 definícia 2.5. 95% interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky hovorí, že na 95% sa v danom intervale bude nachádzať skutočná štandardná odchýlky.




**Obr. 22:** 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky pre $n = 30000$

Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky sme uviedli len pre $n = 30000$

# 4 Cena akcie

V tejto kapitole sa pozrieme na to, ako pomocou metódy Monte Carlo môžeme simulovať a odhadovať očakávanú cenu akcie na určitom časovom horizonte. Cenu akcie $S_t$ v čase $t$ budeme modelovať geometrickým Brownovým pohybom (GBP) v riskreálnom prostredí.

Podľa [5] $S_t$ je geometrický Brownov pohyb vtedy, keď spĺňa nasledujúcu stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

s driftom $\mu$, volatilitou $\sigma$ a $W_t$ je Wienerov proces.
Riešením tejto stochastickej diferenciálnej rovnice je podľa [5]:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

kde $S_0$ je počiatočná hodnota.
Všeobecnejšie, ak $u < t$, je podľa [5]:

$$S_t = S_u e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-u) + \sigma(W_t - W_u)}$$

Pretože prírastky Wienerovho procesu sú nezávislé a majú normálne rozdelenie, to podľa [5] poskytuje jednoduchý rekurzívny postup na modelovanie ceny akcie $S_t$ v časových bodoch $t = 0, 1\Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$ kde $0 < 1\Delta t < 2\Delta t \cdots < T$:

$$S_t = S_{(t-\Delta t)} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t}$$

kde $\varepsilon$ je náhodná premenná s normálnym rozdelením $N(0,1)$, ktorá modeluje náhodné fluktuácie ceny akcie, $S_{t-\Delta t}$ je cena akcie v čase $t - \Delta t$, $\mu$ je očakávaná výnosnosti akcie, $\sigma$ je štandardná odchýlka výnosnosti aktíva $\Delta t$ je dĺžka časového kroku.

Algoritmus na odhad očakávanej ceny akcie v čase $t$ pomocou metódy Monte Carlo, kde $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $\varepsilon_i$ z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ pre $i = 1, \ldots n$, kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo

2. Simulácia cien akcie v čase $t$, kde sa nezávislé náhodné čísla $\varepsilon$ dosadia do výrazu:

$$S_{t_i} = S_{(t-\Delta t)_i} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}}, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, n$$

   kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo

3. Kroky 1 a 2 sa opakujú pre všetky $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$, kde $T$ je čas do exspirácie v rokoch. Opakovaním krokov 1 a 2 dosiahneme $n$ simulovaných ciest ceny akcie na časovom intervale $T$

4. výpočet odhadu očakávanej ceny akcie v časových bodoch $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$

$$\overline{S_t} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_{t_i}, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, n$$

kde $\overline{S_t}$ je odhadom $\mathbb{E}[S_t]$

Analytické riešenie očakávanej ceny akcie v čase $t$ $\mathbb{E}[S_t]$ je podľa [6] nasledovné:

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu)t} \tag{17}$$

$$Var(S_t) = S_0^2 e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right) \tag{18}$$

$$\sigma_{s_t} = \sqrt{Var(S_t)} \tag{19}$$

kde $S_0$ je počiatočná cena akcie a $\sigma_{s_t}$ je štandardná odchýlky $S$ v čase $t$.

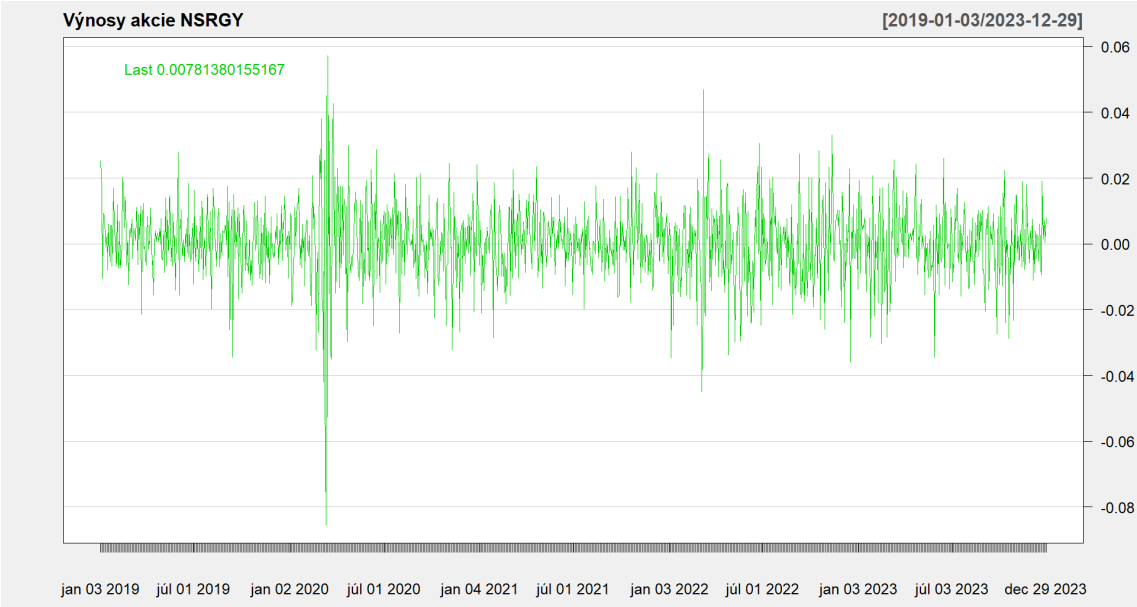
## 4.1 Ilustračný príklad odhadu ceny akcie

V tomto príklade si ukážeme odhady strednej hodnoty (očakávanej ceny) a štandardnej odchýlky ceny akcie Nestlé pomocou metódy Monte Carlo pri rôznych počtoch simulácií $n$. Cena aktíva bude modelovaná geometrickým Brownovým pohybom. Časový horizont v tomto ilustračnom príklade sme zvolili 50 dní a v rokoch bude $T = 50/250$ za predpokladu, že rok má 250 pracovných dní. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň teda $\Delta t = 1/250$. Počiatočná hodnota ceny akcie bude hodnota cena akcie Nestlé z 29.12.2023 a teda $S_0 = 115.63$. Počet simulácií v metóde Monte Carlo $n$ sme si zvolili 10000, 20000 a 30000 a pozrieme sa ako počet simulácií ovplyvňuje presnosť odhadu strednej hodnoty.

Ale ešte predtým, ako sa pustíme do modelovania ceny a odhadu strednej hodnoty ceny, potrebujeme si odhadnúť parametre geometrického Brownovho pohybu v riskreálnom prostredí $\mu$ a $\sigma$. Na ich odhad potrebujeme historické výnosy akcie spoločnosti Nestlé. Historické výnosy akcie si vypočítame ako logaritmické výnosy podľa definície 2.9. z historických cien akcie Nestlé od 1.2.2019 do 29.12.2023 získané z [8]




**Obr. 23:** Historické ceny akcie Nestlé od 2.1.2019 do 29.12.2023




**Obr. 24:** Logaritmické výnosy akcie Nestlé

Parametre $\sigma$ a $\mu$ odhadneme podľa [9, 16] ako:

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{výnosy}_i}{dt} \tag{20}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\text{výnosy}_i - \overline{\text{výnosy}})^2}{(N-1)}}}{\sqrt{dt}} \tag{21}$$

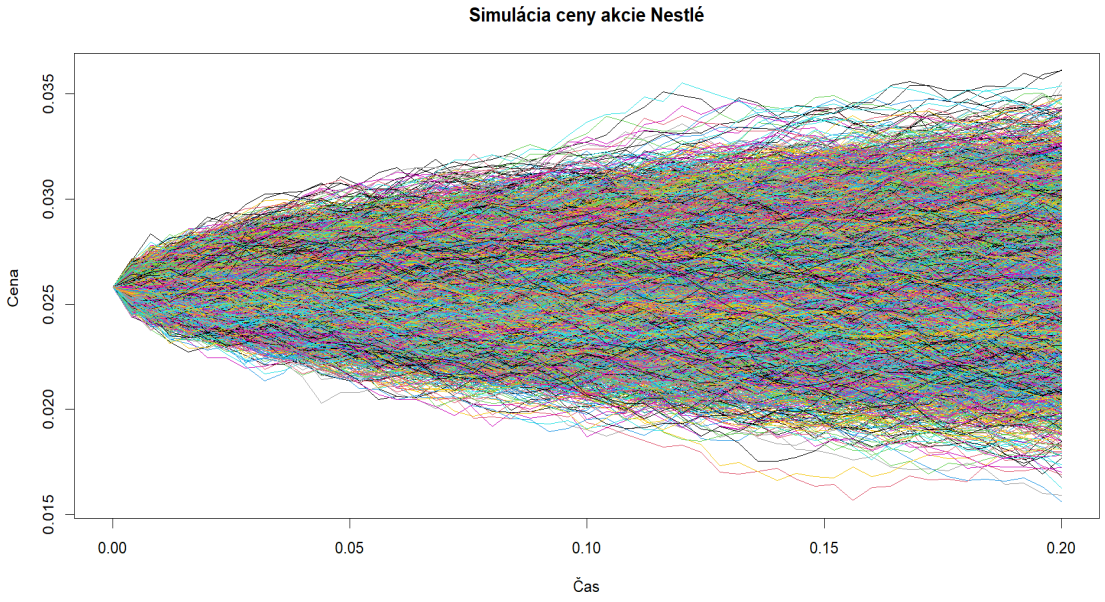
kde $N$ je počet denných výnosov, výnosy$_i$ je i-ty historický logaritmický výnos akcie Nestlé a $\overline{\text{výnosy}}$ je priemer z historických výnosov. Naše odhadnuté parametre geometrického Brownového pohybu vyšli:

| Parameter | hodnota |
|---|---|
| $\hat{\mu}$ | 0.0927 |
| $\hat{\sigma}$ | 0.1829 |

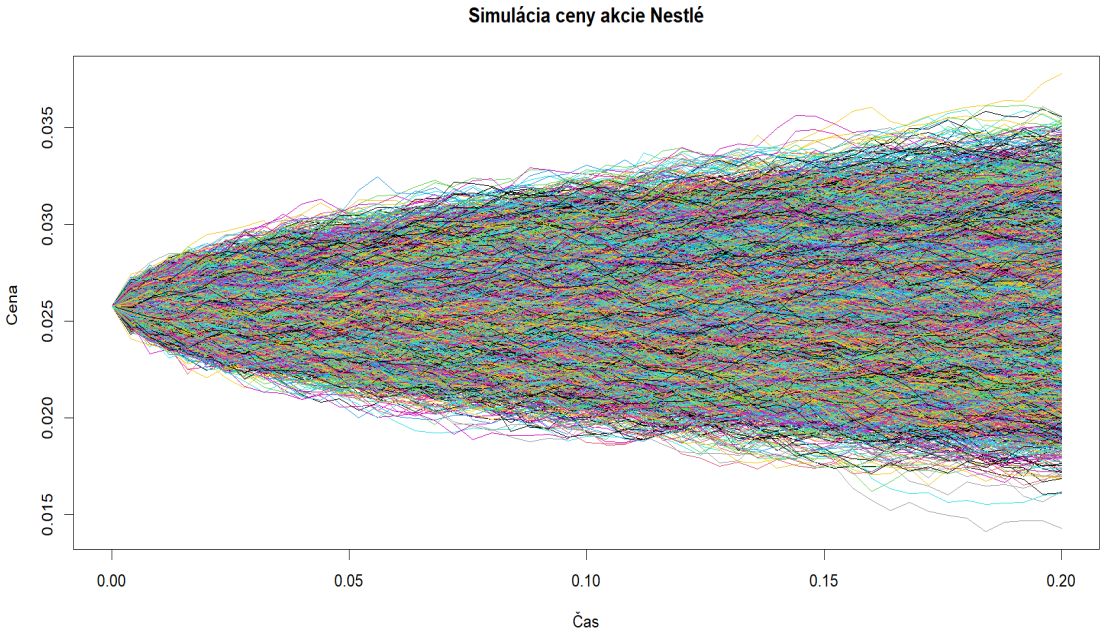
**Tabuľka 6:** Odhad parametrov

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce.

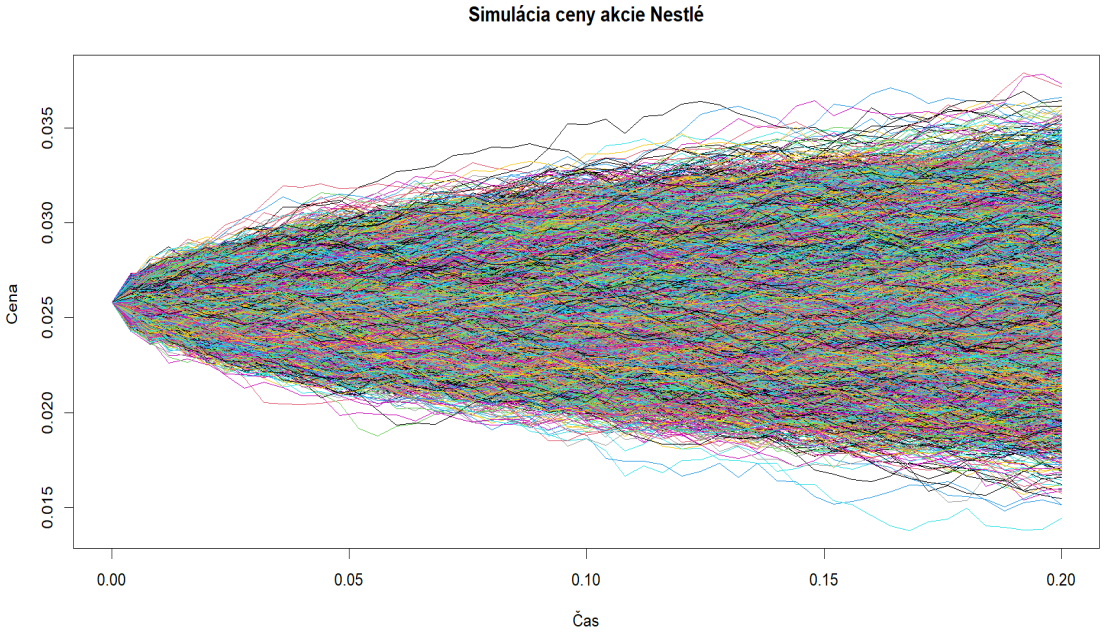
Grafické výstupy ukazujúce simulované cesty sadzieb pre $n = 10000$, $n = 20000$ a $n = 30000$:




**Obr. 25:** Simulované cesty ceny Nestlé metódou Monte Carlo podľa GBM pre $n = 10000$

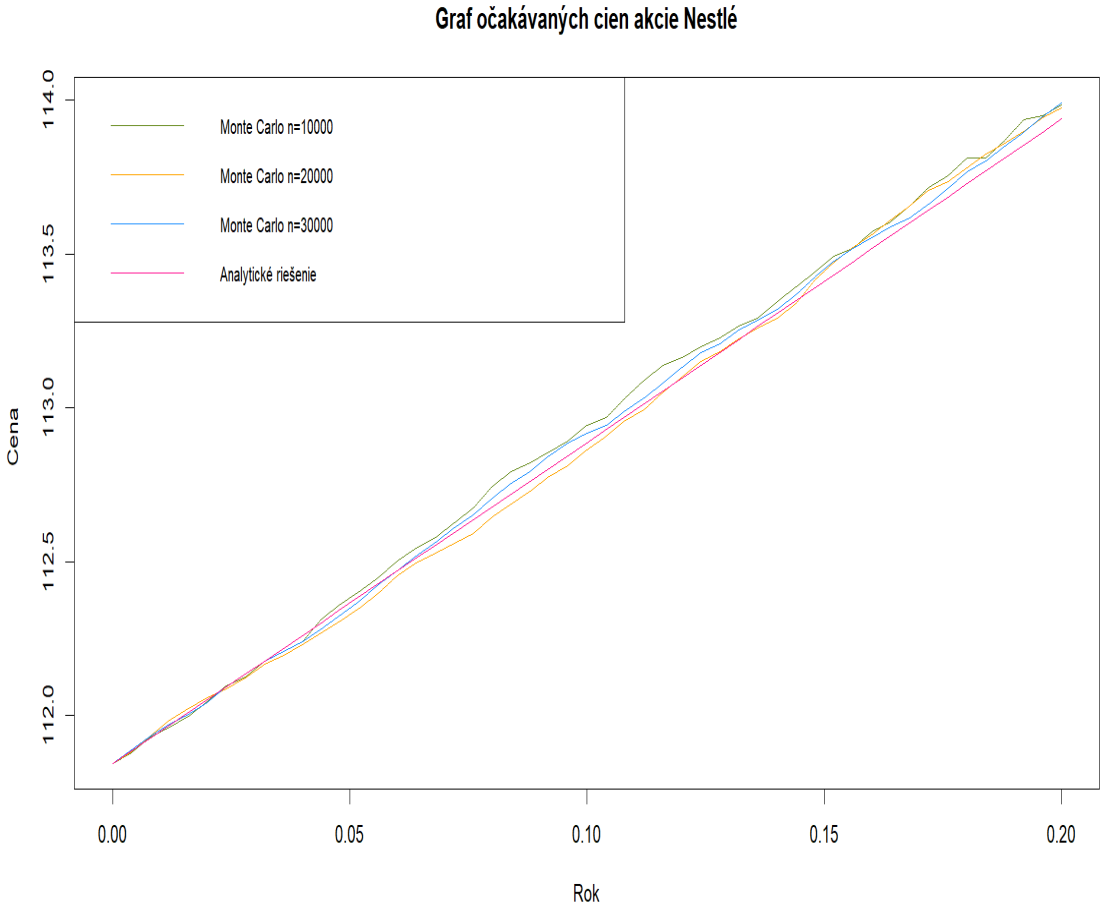



**Obr. 26:** Simulované cesty ceny Nestlé metódou Monte Carlo podľa GBM pre $n = 20000$




**Obr. 27:** Simulované cesty ceny Nestlé metódou Monte Carlo podľa GBM pre $n = 30000$

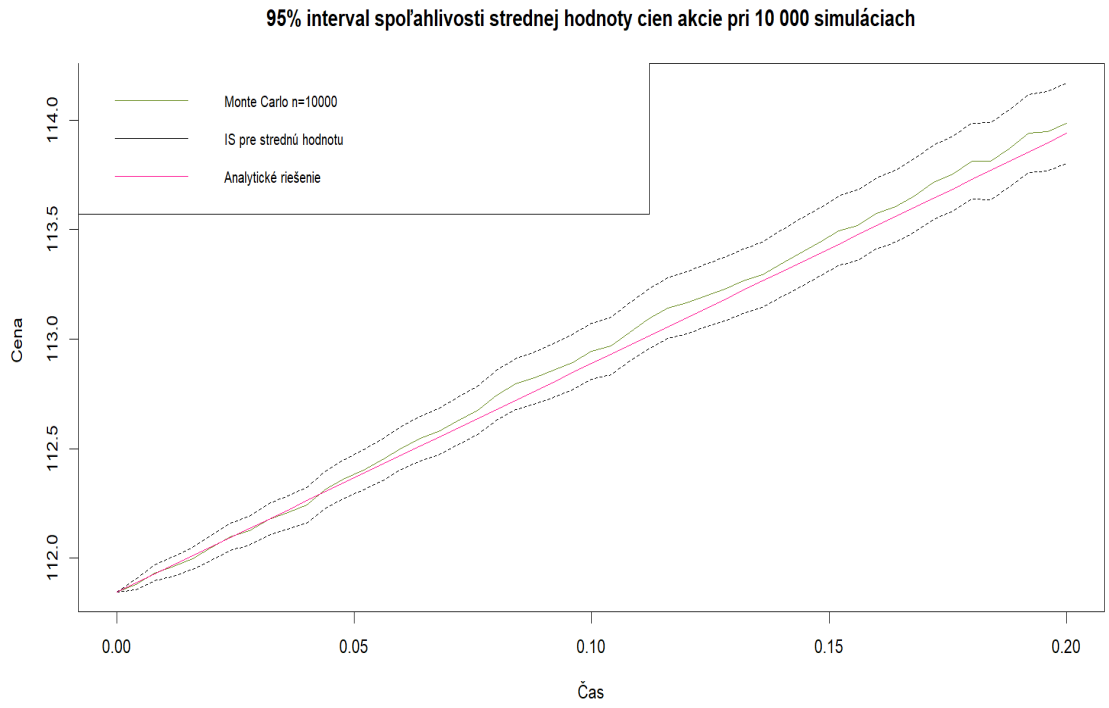
Grafický výstup zobrazuje odhadnuté očakávané ceny akcie pre rôzne počty simulovaných ciest $n$ a analytické riešenie :



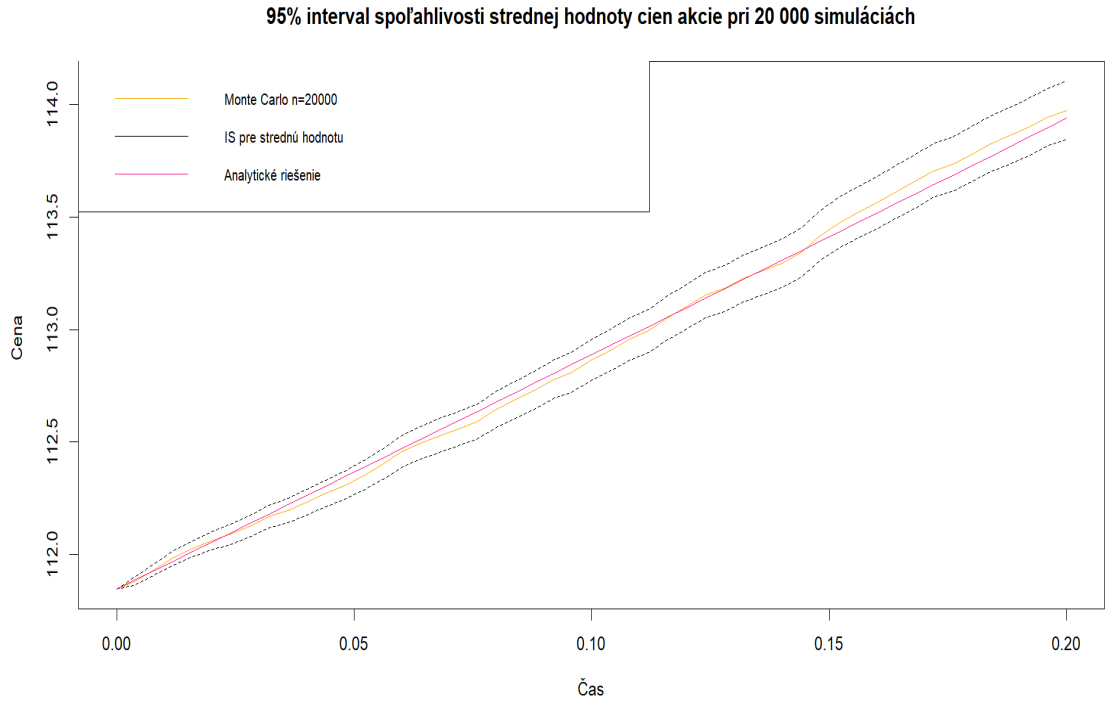

**Obr. 28:** Porovnanie odhadnutých očakávaných cien s analytickou očakávanou cenou

Na obrázkoch 26, 27 a 25, ružová krivka je analyticky riešená očakávaná cena akcie. Modrá krivka reprezentuje odhadnutú očakávanú hodnotu ceny akcie pomocou metódy Monte Carlo pre $n = 30000$, oranžová krivka je odhadnutá očakávaná hodnota pre $n = 20000$ a zelená krivka je odhadnutá očakávaná hodnota pre $n = 10000$.

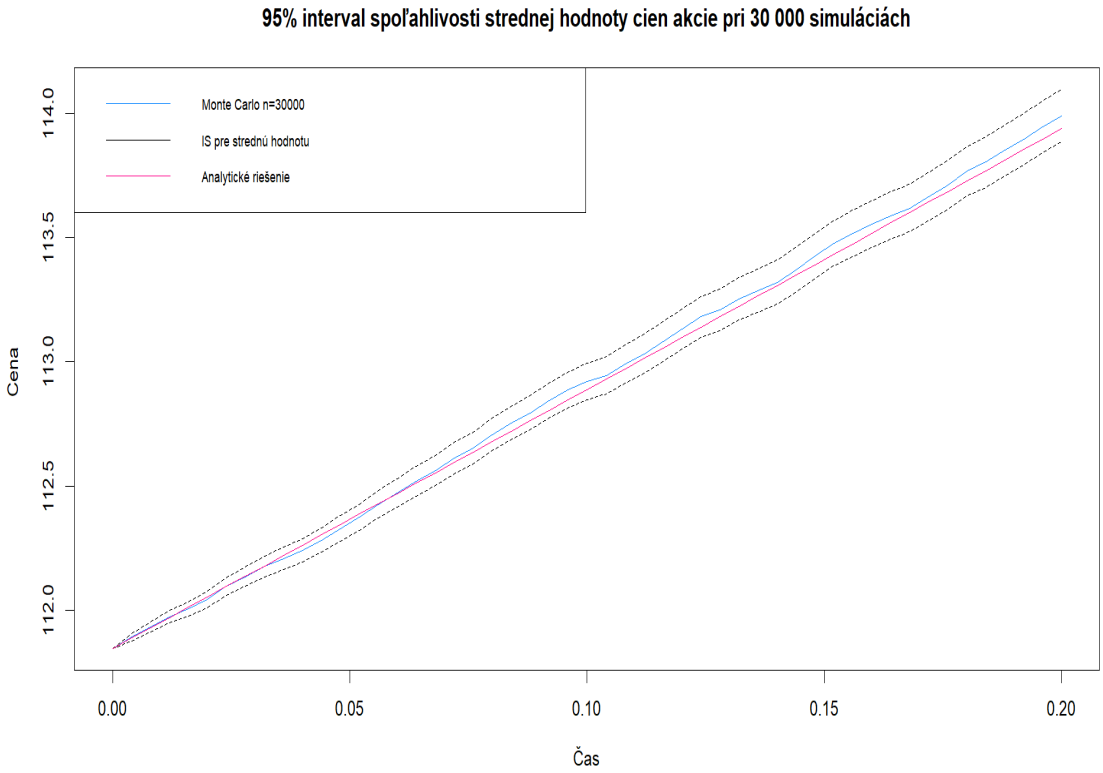
Na základe centrálnej limitnej vety (CLV), definovanej v kapitole 2 definícia 2.6, sme rovnako ako v kapitole 3 počítali 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu so známym $\sigma$ podľa kapitoly 2 definícia 2.4. Naše intervaly spoľahlivosti vyšli nasledovne:




**Obr. 29:** 95% intervaly spoľahlivosti pre očakávanú hodnotu pre n=10000



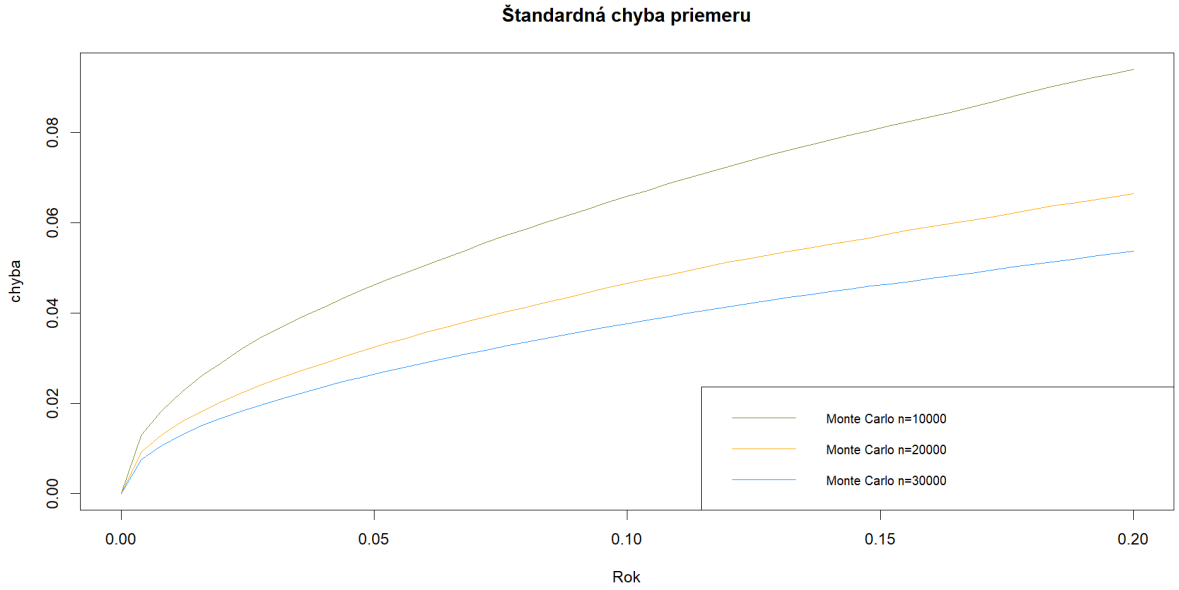

**Obr. 30:** 95% intervaly spoľahlivosti pre očakávanú hodnotu pre n=20000




**Obr. 31:** 95% intervaly spoľahlivosti pre očakávanú hodnotu pre n=30000

Na obr. 29, 30 a 31 ružová krivka je analyticky riešená stredná hodnota. Farebné krivky sú odhadnuté stredné hodnoty pomocou metódy Monte Carlo a čierne krivky sú intervaly spoľahlivosti strednej hodnoty. Z obrázkov 29, 30 a 31 vidieť, že analyticky riešené intervaly pre očakávanú cenu akcie sa nachádzajú v intervaloch spoľahlivosti pre očakávanú cenu získanú pomocou metódy Monte Carlo. Toto pozorovanie naznačuje, že odhady stredných hodnôt získané analytickým výpočtom sú porovnateľné odhadom stredných hodnôt získaných pomocou metódy Monte Carlo a teda metóda Monte Carlo poskytuje spoľahlivé odhady očakávanej ceny.

Na výpočet toho, ako veľmi sa líšia odhadnuté odhadnuté očakávané ceny líšia od skutočných, rovnako ako v kapitole 3, použijeme štandardnú chybu priemeru uvedenú v kapitole 2 definícia 2.8.




**Obr. 32:** Štandardná chyba priemeru

Na obr. 32 zelená krivka je štandardná chyba priemeru pri $n = 10000$ simuláciách, žltá je štandardná chyba priemeru pri $n = 20000$ simuláciách a modrá je pri $n = 30000$. Na obr. 32 si rovnako ako v ilustračných príkladoch kapitoly 3 taktiež môžeme všimnúť, že s rastúcim počtom simulácií štandardná chyba priemeru klesá a teda čím viacej simulácií, tým viacej sú podobné skutočná očakávaná cena a odhadnutá očakávaná cena metódou Monte Carlo.

Taktiež sme si vypočítali priemernú kvadratickú chybu podľa kapitoly 2, definícia 2.7., ktorá meria množstvo chýb medzi odhadom strednej hodnoty pomocou metódy Monte Carlo a analytickým riešením. Výsledky výpočtov priemernej kvadratickej chyby:

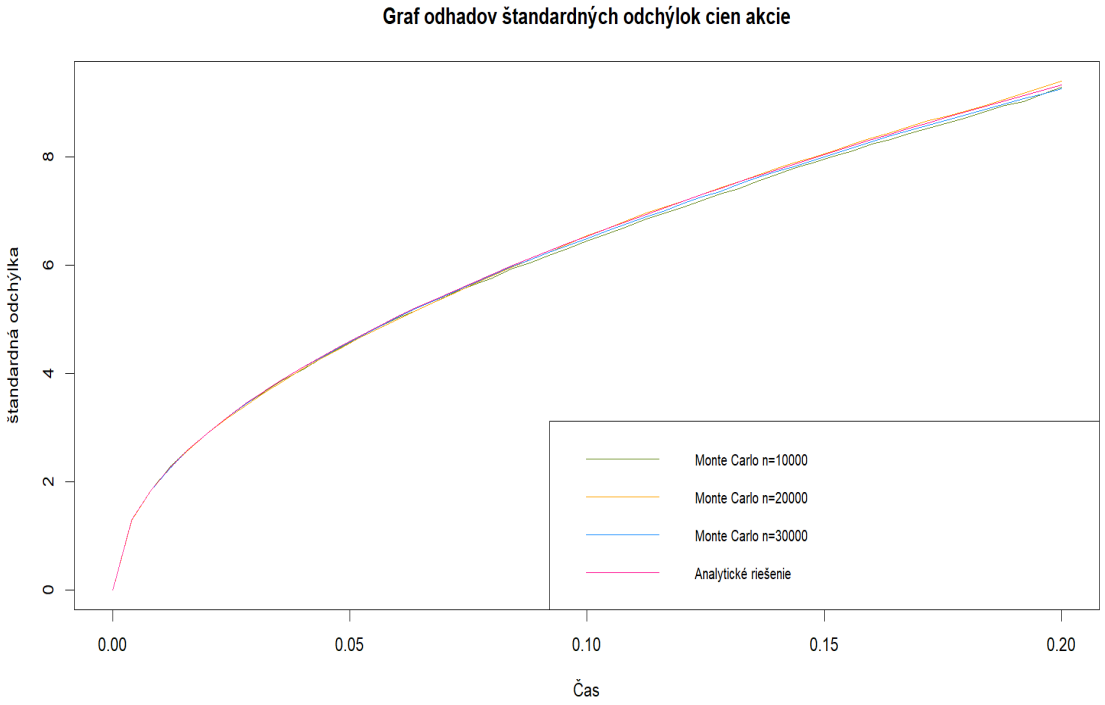
| $n$ | MSE |
|---|---|
| 10000 | 0.0023 |
| 20000 | 0.0010 |
| 30000 | 0.0007 |

**Tabuľka 7:** Priemerná kvadratická chyba pri rôznych počtoch simulácií

Tabuľka 7 ukazuje priemernú kvadratickú chybu (MSE) pri rôznych počtoch simulácií, v ktorej si môžeme všimnúť, že s rastúcim počtom simulácií klesá priemerná kvadratická

chyba. Tento trend by mohol naznačovať, že s väčším počtom simulácií je odhad očakávanej ceny metódou Monte Carlo presnejší.

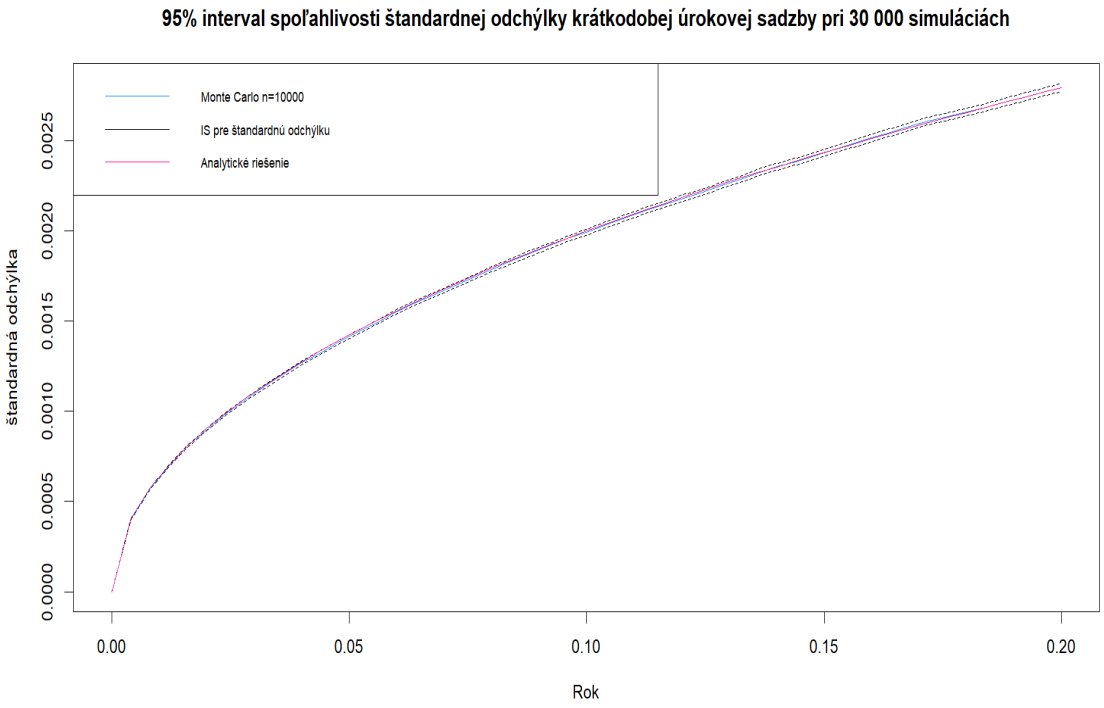
Grafický výstup zobrazujúci odhadnuté štandardné odchýlky ceny akcie pre rôzne počty simulovaných ciest $n$ a analytické riešenie štandardnej odchýlky:




**Obr. 33:** Porovnanie odhadnutých štandardných odchýlok s analytickou štandardnou odchýlkou CIR modelu

Na obr.33 je zobrazené analytické riešenie pre štandardnú odchýlku a odhady štandardnej odchýlky pomocou metódy Monte Carlo pre rôzne počty simulácií. Modrá krivka reprezentuje odhad štandardnej odchýlky pomocou metódy Monte Carlo pre $n = 30000$, zelená pre $n = 20000$ a žltá pre $n = 10000$.

Na základe centrálnej limitnej vety z kapitoly 2 definícia 2.6, sme použili na výpočet 95% intervalu spoľahlivosti štandardnej odchýlky intervalu spoľahlivosti vzorec z kapitoly 2 definícia 2.5. 95%




**Obr. 34:** 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky pre $n = 30000$

Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky sme uviedli len pre $n = 30000$

# 5 Optimalizácia portfólia

V tejto podkapitole sa budeme venovať optimalizácii portfólia pomocou metódy Monte Carlo. V tejto kapitole sme čerpali informácie z [38, 39]

Vo všeobecnosti optimalizácia portfólia je hľadanie optimálnej kombinácie aktív a ich váh s cieľom maximalizovať výnosy portfólia pri minimalizácii rizika. Existuje viacero metód ako optimalizovať portfólio. My si predstavíme optimalizáciu pomocou metódy Monte Carlo. Portfólio budeme optimalizovať náhodným generovaním portfólií s rôznymi váhami aktív.

Algoritmus na optimalizáciu portfólia pomocou metódy Monte Carlo:

1. Výpočet denných výnosov a kovariančnej matice zvolených $N$ aktív z historických dát aktív

2. Výpočet historických výnosov a kovariančnej matice $C$ zvolených aktív

3. Generovanie náhodných a nezávislých váh aktív $V_j$ pre $j = 1, \dots N$ zo zvoleného štatistického rozdelenia, kde $N$ je počet aktív v portfóliu.

4. Vygenerované váhy upravíme na tvar

$$w_j = \frac{V_j}{\sum_{i=1}^{N} V_i}$$

   Touto úpravou sa zabezpečí, že suma váh bude rovná jednej

5. Výpočet ročných očakávaných výnosov portfólia

$$r_p = 250 \sum_{i=1}^{N} (w_i \cdot \overline{vynosy_i})$$

   kde $\overline{vynosy}_i$ sú priemerné denné výnosy a $w_i$ je váha i-tého aktíva

6. Výpočet ročnej očakávanej štandardnej odchýlky portfólia

$$\sigma_p = \sqrt{250}\sqrt{w^\intercal \cdot C \cdot w}$$

   kde $w$ je vektor váh v portfóliu a $C$ je kovariančná matica

7. Výpočet zvoleného finančného ukazovateľa pre portfólio, na základe ktorého si potom budeme vyberať optimálne portfólio. Finančný ukazovateľ môže byť napríklad Sharpe Ratio, Sortino Ratio a mnohé iné

8. Kroky 1 až 6 sa opakujú $n$ krát, kde $n$ je počet náhodných portfólií v metóde Monte Carlo

9. Na základe najoptimálnejšej hodnoty finančného ukazovateľa nájdeme optimálne portfólio

## 5.1 Ilustračný príklad

V tomto ilustračnom príklade budeme optimalizovať portfólio pomocou metódy Monte Carlo. Portfólio bude pozostávať z troch akcií, ktoré sú Apple (AAPL), Microsoft (MSFT) a Amazon (AMZN). Historické ceny akcií pre obdobie od 2.1.2019 do 29.12.2023 sme získali z [8]. Za bezrizikovú úrokovú sadzbu $r$ sme si zvolili hodnotu amerického 3 mesačného T-Bill z 29.12.2023, pretože naše akcie sú v dolároch a sú pôvodom z USA. Trojmesačný USA T-Bill bol [44] 29.12.2023 rovný 5.20% a teda $r = 0.052$. Náhodné váhy portfólia sme generovali z rovnomerného rozdelenia $R(0, 1)$. Rovnomerné rozdelenie sme zvolili hlavne z dôvodu, že je symetrické okolo svojej strednej hodnoty. To znamená, že všetky akcie v portfóliu majú rovnakú pravdepodobnosť, že budú mať určitú váhu v portfóliu. Počet náhodných portfólií $n$ sme zvolili 50000. Historické výnosy akcií sme vypočítali ako logaritmické výnosy podľa definície 2.9. v kapitole 2..

Ako finančný ukazovateľ sme si zvolili Sharpe ratio. Podľa [40] *Sharpe ratio počíta, ako dobre je investor kompenzovaný za riziko,.*Výpočet Sharpe ratio podľa [40]:

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{r_p - r}{\sigma_p}$$

kde $r_p$ sú očakávané výnosy portfólia, $r$ je bezriziková úroková sadzba a $\sigma_p$ je štandardná odchýlka portfólia. Vo všeobecnosti platí, že čím väčšie je Sharpe ratio, tým väčšia je kompenzácia za risk, preto budeme za naše optimálne portfólio považovať také, ktoré má najväčšie Sharpe ratio.

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce.

Nájdené optimálne portfólio malo nasledujúce váhy:

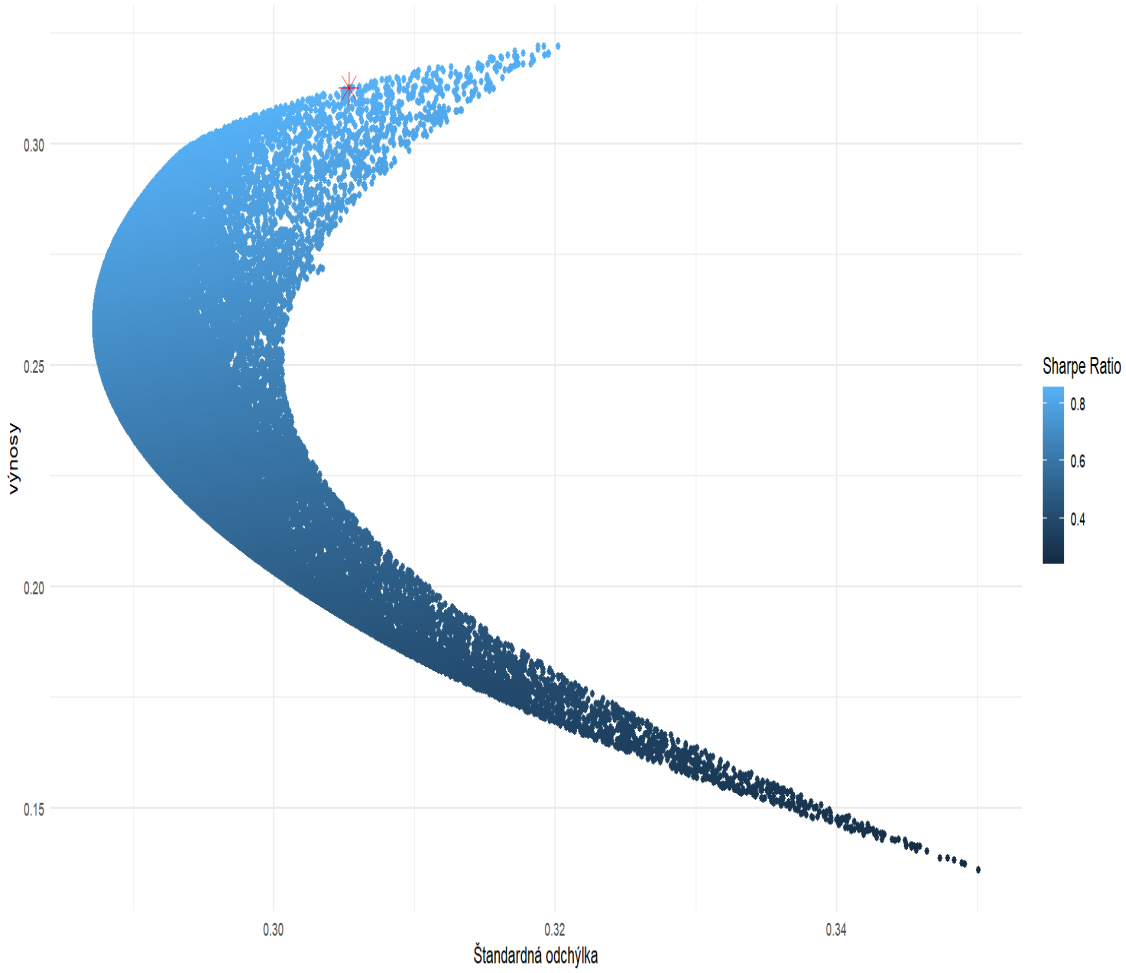
| | AAPLE | MSFT | AMZN |
|---|---|---|---|
| Váhy | 0.7934 | 0.2061 | 0.0005 |

**Tabuľka 8:** Váhy v optimálnom portfóliu

| | |
|---|---|
| $r_p$ | 0.3125 |
| $\sigma_p$ | 0.3053 |
| Sharpe Ratio | 0.8532 |

**Tabuľka 9:** Parametre optimálneho portfólia

Graf všetkých náhodných portfólií:




**Obr. 35:** Optimálne portfólio

Na obr. 35 Červená hviezdička znázorňuje naše optimálne portfólio.

# 6 Value at Risk

V tejto kapitole sa budeme venovať výpočtu Value at Risk (VaR) pomocou metódy Monte Carlo v rámci modelu CCC-GARCH(1,1). V tejto kapitole sme čerpali informácie primárne z [42, 43]

Value at Risk je podľa [43]*najvyššia strata, ktorá by nemala byť prekročená počas stanoveného časového obdobia s danou mierou pravdepodobnosti*. Podľa [42] Value at Risk je pravdepodobne najpoužívanejším ukazovateľom rizika vo finančných inštitúciách.

**Definícia 6.1.** (Value at Risk)
*Nech $\alpha$ je určitá úroveň istoty $\alpha \in (0,1)$ . Value at Risk nášho portfólia pri úrovni istoty $\alpha$ je daná najmenším číslom $l$ takým, že pravdepodobnosť, že strata $L$ presahuje $l$, nie je väčšia ako (1 - $\alpha$ ). Formálne,*

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

Definícia podľa [42]

Model CCC-GARCH(1,1) je podľa [42] definovaný nasledovne:

$$r_t = c + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \in N(0, \Sigma_t)$$
$$\Sigma_t = \text{diag}(\sigma_t) \cdot R \cdot \text{diag}(\sigma_t)$$
$$(\sigma_t^i)^2 = \omega + \beta(\sigma_{t-1}^i)^2 + \alpha(\epsilon_{t-1}^i)^2, \quad \text{pre} i = 1, 2$$

, kde $r_t$ je výnos aktíva v portfóliu v čase $t$, $c$ je konštanta, $\varepsilon_i$ sú rezídua, $\sigma_t^2$ je rozptyl aktíva $i$, $\omega_i$, $\beta_i$ a $\alpha$ sú parametre modelu, $\Sigma_t$ je kovariančná matica v čase $t$ a R korelačná matica. Tento model predpokladá, že volatility zmien oboch rizikových faktorov sú modelované pomocou nezávislých jednorozmerných GARCH modelov.

Algoritmus na výpočet VaR portfóliá pomocou metódy Monte Carlo v rámci modelu CCC-GARCH(1,1):

1. Výpočet denných historických výnosov jednotlivých aktív a portfólia
2. modelovanie výnosov GARCH(1,1) model pre výnosy jednotlivých aktív v portfóliu
3. Výpočet rezíduí $\varepsilon_t$

$$E(r_t) = E(c + \varepsilon) = c + 0 = c$$
$$\varepsilon_t = r_t - c = r_t - E(r_t)$$

4. štandardizácia rezíduí

$$\text{štandardizované } \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_{modelu_t}}$$

Týmto krokom sa normalizujú rezídua a tám sa zlepšuje

5. výpočet $\sigma$ pre jednotlivé akcie v portfóliu

$$(\sigma_t^i) = \sqrt{\omega_i + \beta_i(\sigma_{t-1}^i)^2 + \alpha_i(\varepsilon_{t-1}^i)^2}$$

, kde $\alpha_i$, $\beta_i$ a $\gamma_i$ sú parametre z GARCH(1,1) modelov

6. Výpočet korelačnej matice $R$ medzi štandardizovanými rezíduami jednotlivých GARCH(1,1) modelmi

7. výpočet kovariančnej matice:

$$\Sigma_t = diag(\sigma_t)\, R\, diag(\sigma_t).$$

8. Generovanie $n$ náhodných výnosov akcií z portfólia pomocou viacrozmerného normálneho rozdelenia $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, kde $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ je vektor náhodných premenných výnosov akcií, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ je vektor priemerov, kde $\mu_i$ je priemerný denný výnos $i$-tej akcie, $\Sigma$ je kovariančná matica, ktorá popisuje vzájomné korelácie medzi výnosmi jednotlivých akcií.

9. Výpočet výnosov portfólia:

$$r_{p_{t_j}} = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot X_i \quad \text{pre} j = 1, \ldots, n$$

, kde $N$ je počet akcií v portfóliu a

10. Výpočet VaR pre danú mieru pravdepodobnosti:

    (a) Z vygenerovaných náhodných výnosov portfólia získame distribúciu výnosov.

    (b) Z distribúcie výnosov vypočítame kvantil pre danú mieru pravdepodobnosti, ktorý predstavuje VaR portfólia.

## 6.1 Ilustračný príklad

V tomto ilustračnom si vypočítame 95% a 99% VaR pre optimálne portfólio z ilustračného príkladu v kapitole 5.. Toto portfólio pozostávalo zo štyroch akcií, ktoré boli Apple, Alphabet, Microsoft a McDonald's. Optimálne portfólio z kapitoly 5. malo nasledujúce váhy:

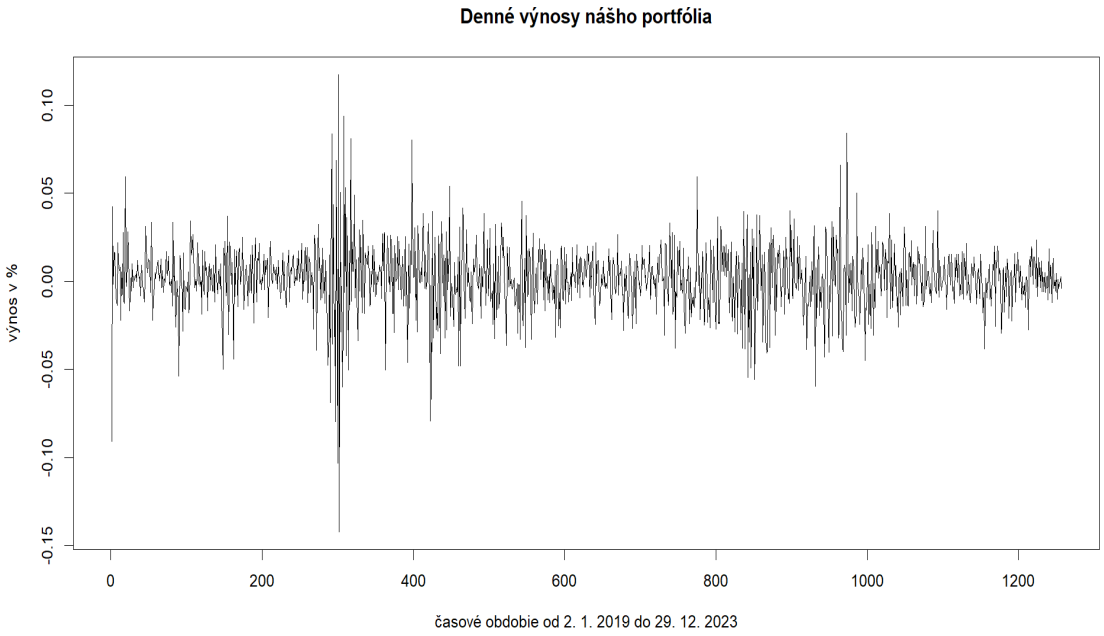
| | AAPLE | MSFT | AMZN |
|---|---|---|---|
| Váhy | 0.7934 | 0.2061 | 0.0005 |

**Tabuľka 10:** Váhy v optimálnom portfóliu

Historické dáta akcií sme zobrali od 3.1.2019 do 29.12.2023, ktoré sme získali z [8]. Počet simulovaných výnosov $n$ sme zvolili 50000. Historické výnosy akcií sme vypočítali ako logaritmické výnosy podľa definície 2.9. v kapitole 2..

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce.

Historické výnosy portfólia:




**Obr. 36:** Historické výnosy portfólia

VaR pre naše portfólio vyšlo nasledovne:

| Miera pravdepodobnosti | VaR |
|---|---|
| 99% | -0.0198 |
| 95% | -0.0136 |

**Tabuľka 11:** VaR nášho portfólia

Hodnota VaR pri 99% z tabuľky 11 znamená, že s 99% istotou očakávame, že denná strata nášho portfólia nepresiahne -0.0198. Inými slovami, s pravdepodobnosťou 99% očakávame, že denná strata portfólia bude menšia alebo rovná -0.0198. Hodnota VaR pri 95% z tabuľky 11 znamená, že s 95% istotou očakávame, že denná strata nášho portfólia nepresiahne -0.0136.

# 7 Oceňovanie opcií

V tejto časti sa budeme venovať oceňovaniu rôznych typov opcií, ktorých podkladové aktíva nevyplácajú dividendy. Na oceňovanie týchto opcií použijeme metódu Monte Carlo. V tejto kapitole sme čerpali informácie najme z [3, 7].

Pri oceňovaní opcií je kľúčové mať k dispozícii rizikoneutrálne prostredie, kde sa ignoruje vplyv rizika na vývoj cien aktív. Aby sme dosiahli toto rizikoneutrálne prostredie, potrebujeme modelovať cenu podkladového aktíva v takomto prostredí. Na tento účel môžeme použiť rôzne prístupy, napríklad geometrický Brownov pohyb, alebo Hestonov model.

## 7.1 Geometrický Brownov pohyb

Geometrický Brownov pohyb sa často používa na modelovanie ceny podkladového aktíva v rizikoneutrálnom prostredí. Jeho dynamiku môžeme popísať nasledovne:

$$S_t = S_{t-\Delta t} e^{\left((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z\right)} \tag{22}$$

kde $r$ je bezrizikový úrok, $\sigma$ je volatilita podkladového aktíva, $\Delta t$ je veľkosť časového kroku, $S_t$ je cena podkladového aktíva v časovom kroku $t$ a $Z$ je náhodná premenná s normálnym rozdelením.

## 7.2 Hestonov model

Heston model je dvojfaktorový stochastický model na opisovanie pohybov ceny a volatility podkladového aktíva. Na rozdiel od geometrického Brownovho pohybu, Hestonov model nepredpokladá konštantnú volatilitu, ale ju modeluje CIR procesom. Hestonov model bol vynájdený v roku 1977 Stanom Hestonom.

Hestonov model má podľa [17] v spojitom čase a v risk neutrálnom prostredí nasledujúcu dynamiku:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^V \\ dW_t^S dW_t^V &= rho \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami:

$$S_0 = S_0 \geq 0 \tag{23}$$

$$V_0 = V_0 \geq 0 \tag{24}$$

kde parametre v Hestonovom modeli sú:

- $S_t$ je cena podkladového aktíva v čase $t$
- $r$ je bezriziková úroková miera
- $\sqrt{V_t}$ je volatilita podkladového aktíva v čase $t$
- $\sigma$ je volatilita volatility podkladového aktíva
- $\theta$ je dlhotrvajúca variancia podkladového aktíva
- $\kappa$ je rýchlosť návratu k dlhotrvajúcej variancii
- $dt$ je veľkosť časového kroku
- $W_t^S$ je Wienerov proces pre cenu podkladového aktíva
- $W_t^V$ je Wienerov proces pre varianciu podkladového aktíva
- $\rho$ je korelácia medzi $W_t^S$ a $W_t^V$

Diskretizácia dynamiky Hestonovho modelu pomocou Eulerovej diskretizácie je podľa [17, 18] nasledovná:

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-\Delta t} + rS_{t-\Delta t}\Delta t + \sqrt{V_{t-\Delta t}} S_{t-\Delta t}\sqrt{\Delta t} Z_t^S \\ V_t &= V_{t-\Delta t} + \kappa(\theta - V_{t-\Delta t})\Delta t + \sigma\sqrt{V_{t-\Delta t}}\sqrt{\Delta t} Z_t^V \\ Z_t^S &= G_t^S \\ Z_t^V &= \rho G_t^S + \sqrt{1-\rho^2} G_t^V \end{aligned}$$

kde $G_t^S \sim N(0,1)$ a $G_t^V \sim N(0,1)$, $\Delta t$ je veľkosť časového kroku, $S_{t-\Delta t}$ je cena podkladového aktíva v čase $t - \Delta t$ v risk neutrálnom prostredí a $V_{t-\Delta t}$ je variancia podkladového aktíva v čase $t - \Delta t$ v risk neutrálnom prostredí.

## 7.3 Európska opcia

V tejto podkapitole sa budeme venovať oceňovaniu európskej opcie. Ukážeme si ako odhadnúť cenu call/put európskej opcii pomocou metódy Monte Carlo. Cenu podkladového aktíva budeme modelovať pomocou geometrického Brownovho modelu, alebo pomocou Hestonovho modelu.

Európske opcie sa podľa [17] delia na call a put opcie

**Definícia 7.1.** (*európska call opcia*)

*Európska call opcia dáva majiteľovi právo kúpiť podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu v čase exspirácie.*

Definícia podľa [20].

**Definícia 7.2.** (*európska put opcia*)

*Európska put opcia dáva majiteľovi právo predať podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu v čase exspirácie.*

Definícia podľa [20].

Vopred stanovenú cenu podkladového aktíva budeme v tejto práci nazývať realizačná cena.

**Definícia 7.3.** (*Výplata európskej call opcie*)

$$\Phi^{Call} = \begin{cases} S_T - K, & ak\ S_T \geq K \\ 0, & ak\ S_T < K \end{cases}$$

*kde $S_T$ je cena aktíva v čase exspirácie a $K$ je cena realizačná.*

Definícia podľa [23]

**Definícia 7.4.** (*Výplata európskej put opcie*)

$$\Phi^{Put} = \begin{cases} K - S_T, & ak\ S_T \leq K \\ 0, & ak\ S_T < K \end{cases}$$

*kde $S_T$ je cena aktíva v čase exspirácie a $K$ je cena realizačná.*

Definícia podľa [23]

Algoritmus na odhad súčasnej ceny európskej call opcie pomocou metódy Monte Carlo, kde sa cena podkladového aktíva modeluje ako geometrický Brownov pohyb:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $\varepsilon_i$ z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ pre $i = 1, \ldots$ n, kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo.

2. Nezávislé náhodné číslo $\varepsilon_i$ sa dosadíme do výrazu:

$$S_{t_i} = S_{(t-\Delta t)_i} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}}, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, n$$

   kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo, $r$ je bezriziková úroková sadzba, $q$ je dividendový výnos podkladového aktíva, $\sigma$ je volatilita podkladového aktíva a $\Delta t$ je veľkosť časového kroku.

3. Kroky 1 a 2 sa opakujú pre všetky $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$ kde $\Delta t$ je veľkosť časového kroku a $T$ je čas do exspirácie v rokoch.

4. Výpočet súčasnej ceny európskej call opcie $C_0$ podľa [23]:

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(S_{T_i} - K, 0)$$

   kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(S_{T_i} - K, 0)$ je výplata európskej call opcie v čase $t = T$ a v i-tej simulácií , $S_{T_i}$ je modelovaná cena aktíva v čase $T$ v i-tej simulácií a $K$ je realizačná cena.

Algoritmus na odhad ceny európskej put opcie pomocou metódy Monte Carlo je skoro totožný ako pri európskej call opcii. Jediná zmena nastáva v poslednom kroku, kde súčasnú cenu európskej put opcie $P_0$ vypočítame ako:

$$\hat{P}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(K - S_{T_i}, 0)$$

kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(K - S_{T_i}, 0)$ je výplata európskej put opcie v čase $t = T$ a v i-tej simulácií , $S_{T_i}$ je modelovaná cena aktíva v čase $T$ v i-tej simulácií a $K$ je realizačná cena. $\hat{P}_0$ je výberový priemer z výplat európskej put opcie v čase $T$.

Ak je cena podkladového aktíva modelovaná geometrickým Brownovým pohybom, potom existuje exaktné riešenie súčasnej ceny európskej call opcie riešené pomocou Black-Sholesovho vzorca.

**Definícia 7.5.** (*Black-Sholesov vzorec pre súčasnú cenu európskej call opcie* )

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

*kde $N$ je distribučná funkcia $N(0,1)$, $S_0$ je cena aktíva v čase $t = 0$, $K$ je realizačná cena, $\sigma$ je volatilita aktíva a $T$ je doba do exspirácie opcie v rokoch.*

Definícia podľa [24]

**Definícia 7.6.** (*Black-Sholesov vzorec pre súčasnú cenu európskej put opcie* )

$$P_0 = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

*kde $N$ je distribučná funkcia $N(0,1)$, $S_0$ je cena aktíva v čase $t = 0$, $K$ je realizačná cena, $\sigma$ je volatilita aktíva a $T$ je doba do exspirácie opcie v rokoch*

Definícia podľa [23]

Algoritmus na odhad súčasnej ceny európskej call opcie pomocou metódy Monte Carlo, kde sa cena podkladového aktíva modeluje pomocou Hestonovho modelu:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $G_{t_i}^S$ a $G_{t_i}^V$ z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ pre $i = 1, \ldots$ n, kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo

2. generované nezávislé náhodné čísla $G_{t_i}^S$ a $G_{t_i}^V$ pre $i = 1, \ldots, n$ dosadíme do:

$$Z_{t_i}^S = G_{t_i}^S$$
$$Z_{t_i}^V = \rho G_{t_i}^S + \sqrt{1 - \rho^2}$$

3. $Z_{t_i}^S$ a $Z_{t_i}^V$ pre $i = 1, \ldots, n$ dosadíme do

$$S_{t_i} = S_{(t-\Delta t)_i} + r S_{(t-\Delta t)_i} \Delta t + \sqrt{V_{(t-\Delta t)_i}} S_{(t-\Delta t)_i} \sqrt{\Delta t} Z_{t_i}^S$$
$$V_{t_i} = V_{(t-\Delta t)_i} + \kappa(\theta - V_{(t-\Delta t)_i})\Delta t + \sigma\sqrt{V_{(t-\Delta t)_i}}\sqrt{\Delta t} Z_{t_i}^V$$

v metóde Monte Carlo.

4. Kroky 1, 2 a 3 sa opakujú pre všetky $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$ kde $\Delta t$ je veľkosť časového kroku a $T$ je časový horizont simulácie.

5. Výpočet súčasnej ceny európskej call opcie $C_0$ podľa [23]:

$$\hat{C}_0 = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \max(S_{T_i} - K, 0)$$

kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(S_{T_i} - K, 0)$ je výplata európskej call opcie v čase $t = T$ a v i-tej simulácií , $S_{T_i}$ je modelovaná cena aktíva v čase $T$ v i-tej simulácií a $K$ je realizačná cena.

Algoritmus na odhad ceny európskej put opcie je opäť skoro totožný ako pri európskej call opcii. Jediná zmena nastáva v poslednom kroku, kde súčasnú cenu európskej put opcie $P_0$ vypočítame ako:

$$\hat{P}_0 = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \max(K - S_{T_i}, 0)$$

Kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $S_{T_i}$ je modelovaná cena aktíva v čase $T$ v i-tej simulácií a $K$ je realizačná cena.

Analytické riešenie súčasnej ceny európskej call opcie, kde cena podkladového aktíva je modelovaná Hestonovým modelom. Za predpokladu že $t = 0$ a čas do exspirácie je $T$ potom, cena európskej call opcie, kde cena aktíva je modelovaná Hestonovým modelom sa podľa [25]:

$$C_0 = S_0 P_1 - K e^{-rT} P_2$$

Potom pre $j = 1, 2$ :

$$
\begin{aligned}
P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi ln(K)} \varphi_j}{i\phi} \right] d\phi \\
\varphi_j &= e^{C_T + D_T V_0 + i\phi ln(S_0)} \\
C_T &= r\phi i T + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)T - 2ln\left( \frac{1 - ge^{dT}}{1 - g} \right) \right] \\
D_T &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma} \left[ \frac{1 - e^{dT}}{1 - ge^{dT}} \right] \\
g &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \\
d &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(u_j\phi i - \phi^2)} \\
u_1 &= 0.5 \\
u_2 &= -0.5 \\
b_1 &= \kappa - \rho\sigma \\
b_2 &= \kappa \\
\kappa &= \kappa^* + \lambda
\end{aligned}
$$

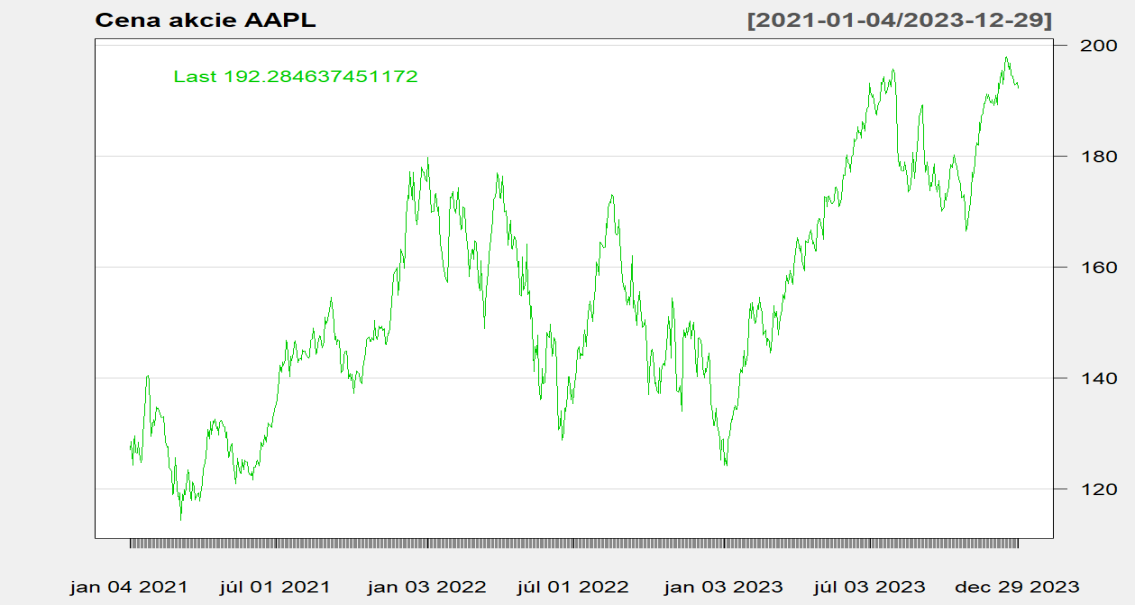
Kde $\varphi_1$ a $\varphi_2$ sú charakteristické funkcie a $\lambda$ je variančná riziková prémia, $\kappa$ je rýchlosť návratu k dlhodobej variancii v riskneutrálnom prostredí a $\kappa^*$ jej rýchlosť návratu k dlhodobej variancii v riskreálnom prostredí .

### 7.3.1 Ilustračný príklad 1.

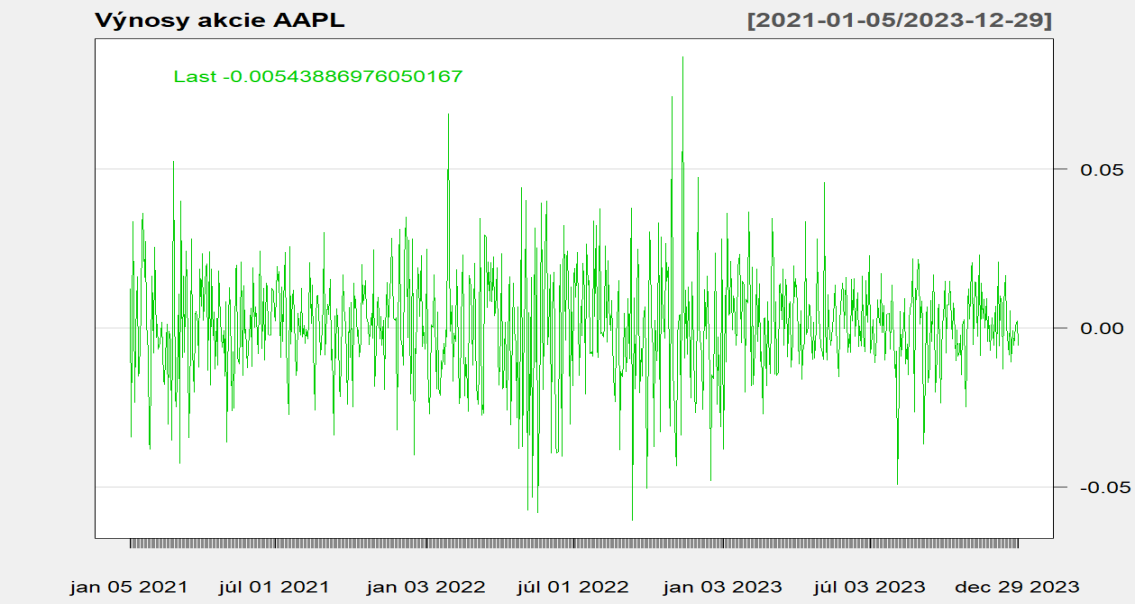
V tomto ilustračnom príklade si odhadneme súčasnú hodnotu európskej call a put opcie pomocou metódy Monte Carlo, kde podkladové aktívum budeme modelovať geometrickým Brownovým pohybom. Podkladové aktívum v tomto ilustračnom príklade bude akcia spoločnosti Apple. Čas do exspirácie $T$ bude jeden rok teda $T = 1$. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň teda $\Delta t = \frac{1}{250}$. Počiatočná cena podkladového aktíva bude $S_0$ bude z 29.12.2023 a teda $S_0 = 192.2846$. Za bezrizikovú úrokovú sadzbu $r$ si zvolíme hodnotu Amerického 3 mesačného T-Bill z 29.12.2023, pretože naše podkladové aktívum je akcia Americkej spoločnosti a je v dolároch. Trojmesačnú dobu sme zvolili preto, lebo doba do exspirácie opcie je do jedného roka. Trojmesačný USA T-Bill bol [44] 29.12.2023 rovný

5.20% a teda $r = 0.052$. Počet simulácií $n$ v metóde Monte Carlo sme zvolili $n = 10000$, $n = 20000$ a $n = 30000$ simulácií. Realizačné ceny $K$ sme si zvolili od 160, 180 a 200 .

Jediný neznámy parameter geometrického Brownovho modelu, ktorým je volatilita podkladového aktíva $\sigma$, si odhadneme pomocou logaritmických historických výnosov akcie spoločnosti Apple. Logaritmické výnosy vypočítame z cien akcie Apple od 4.1.2021 po 29.12.2023 podľa definície 2.9 v kapitole 2..




**Obr. 37:** Historické ceny akcie spoločnosti Apple od 4.1.2021 do 29.12.2023




**Obr. 38:** Logaritmické výnosy akcie Apple

Parameter $\sigma$ odhadneme pomocou logaritmických výnosov podľa [16] nasledovne:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\text{výnosy}_i - \overline{\text{výnosy}})^2}{(N-1)}}}{\sqrt{\Delta t}} \tag{25}$$

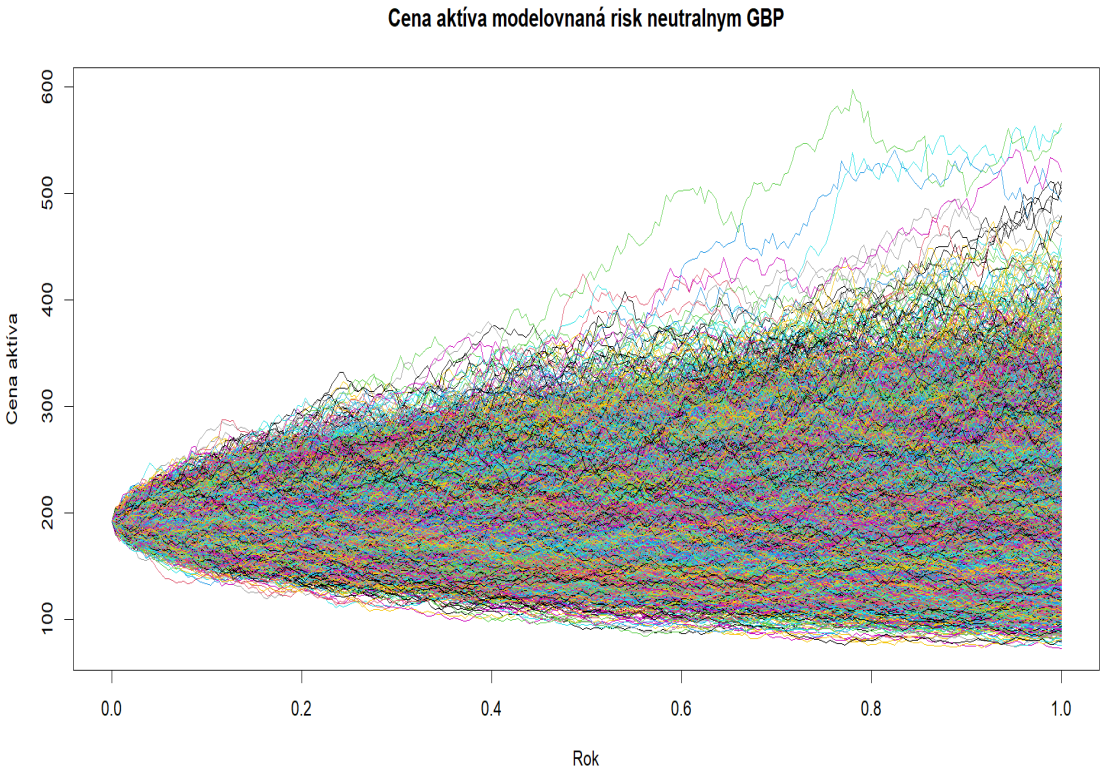
kde $N$ je počet denných výnosov, $\text{výnosy}_i$ je i-ty historický logaritmický výnos akcie Apple a $\overline{\text{výnosy}}$ je priemer z historických výnosov.

Odhadnutý parameter $\sigma$ vyšiel nasledovne:

| Parameter | hodnota |
|---|---|
| $\hat{\sigma}$ | 0.2766 |

**Tabuľka 12:** Odhad parametra $\sigma$

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce.




**Obr. 39:** Ukážka 10 000 simulovaných cien podkladového aktíva na 1 rok

Výsledky európskej call opcie:

| K | n | MC cena | SE | 95% IS | BS cena | % chyba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 10000 | 46.0589 | 0.4831 | (45.1119, 47.0060) | 45.5376 | 1.1448% |
| 160 | 20000 | 46.0353 | 0.3428 | (45.3634, 46.7072) | 45.5376 | 1.0928% |
| 160 | 30000 | 45.8794 | 0.2781 | (45.3343, 46.1875) | 45.5376 | 0.6165% |
| 180 | 10000 | 31.6634 | 0.4280 | (30.8245, 32.5023) | 32.4535 | 2.4346% |
| 180 | 20000 | 32.1075 | 0.3043 | (31.5110, 32.7041) | 32.4535 | 1.0661% |
| 180 | 30000 | 32.5853 | 0.2491 | (32.0971, 33.0736) | 32.4535 | 0.4061% |
| 200 | 10000 | 21.8067 | 0.3661 | (21.0891, 22.5244) | 22.2493 | 1.9891% |
| 200 | 20000 | 22.2907 | 0.2679 | (21.7657, 22.8158) | 22.2493 | 0.1863% |
| 200 | 30000 | 22.3567 | 0.2187 | (26.3643, 27.9772) | 22.2493 | 0.6563% |

**Tabuľka 13:** Cena európskej call opcie

Výsledky európskej put opcie:

| K | n | MC cena | SE | 95% IS | BS cena | % chyba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 10000 | 5.0420 | 0.1207 | (4.8055, 5.2785) | 5.1456 | 2.0130% |
| 160 | 20000 | 5.1143 | 0.0854 | (4.9468, 5.2817) | 5.1456 | 0.6085% |
| 160 | 30000 | 5.0836 | 0.0696 | (4.9470, 5.2201) | 5.1456 | 1.2046% |
| 180 | 10000 | 11.0682 | 0.1852 | (10.7052, 11.4313) | 11.0481 | 0.1825% |
| 180 | 20000 | 11.2327 | 0.1335 | (10.9711, 11.4944) | 11.0481 | 0.1825% |
| 180 | 30000 | 11.1637 | 0.1081 | (10.9519, 11.3754) | 11.0481 | 1.0461% |
| 200 | 10000 | 19.6035 | 0.2531 | (19.1074, 20.0996) | 19.8304 | 1.1442% |
| 200 | 20000 | 20.1532 | 0.1821 | (19.7963, 20.510) | 19.8304 | 1.7031% |
| 200 | 30000 | 19.7628 | 0.14744 | (19.4738, 20.0519) | 19.8304 | 0.3407% |

**Tabuľka 14:** Cena európskej put opcie

V tabuľkách 13 a 14 $SE$ je odhad štandardnej odchýlky odhadnutej ceny európskej call/put opcie a počítal sa ako štandardná chyba priemeru podľa kapitoly 2. defínície 2.8.. V tabuľkách 13 a 14 je vidno, že z rastúcim počtom simulácií klesá štandardná odchýlka odhadu ča naznačuje še sa zväčšuje presnosť odhadu.

Na základe centrálnej limitnej vety (CLV), definovanej v kapitole 2 definícia 2.6, sme

95% interval spoľahlivosti v tabuľkách 13 a 14 počítali podľa kapitoly 2 definícia 2.4. s neznámym $\sigma$. 95% Interval spoľahlivosti hovorí, že na 95% sa v danom intervale nachádza skutočná súčasná cena európskej opcie. Z výsledkov v tabuľkách 13 a 14 môžeme vidieť, že hodnoty vypočítané pomocou Black-Scholesovho vzorca sa nachádzajú v týchto 95% intervaloch spoľahlivosti.

Percentuálnu chybu sme v tabuľkách 13 a 14 počítali podľa kapitola 2 definícia 2.10.. Percentuálna chyba, označená ako % chyba, vyjadruje rozdiel medzi odhadnutou cenou európskej opcie a jej skutočnou hodnotou ako percento. Táto percentuálna chyba nám poskytuje informáciu o presnosti odhadu ceny európskej opcie pomocou danej metódy v porovnaní s referenčnou hodnotou získanou z Black-Scholesovho vzorca.

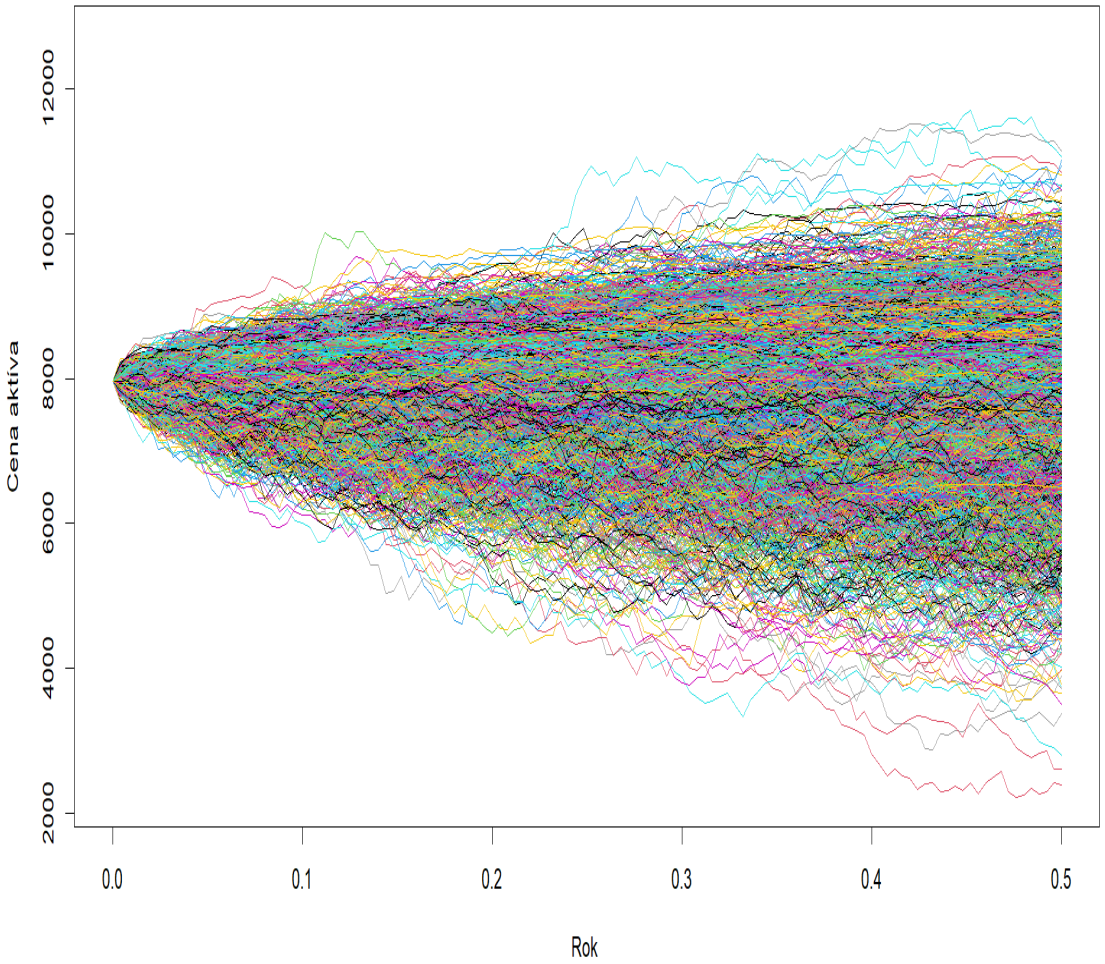
### 7.3.2 Ilustračný príklad 2.

V tomto ilustračnom príklade si odhadneme súčasnú hodnotu európskej call opcie pomocou metódy Monte Carlo, kde podkladové aktívum budeme modelovať Hestonovým modelom. Podkladové aktívum v tomto ilustračnom príklade bude ODAX. Čas do exspirácie opcie $T$ bude jeden rok, teda $T = 1$. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň teda $\Delta t = \frac{1}{250}$. Počiatočná cena podkladového aktíva bude $S_0$ bude z 19.3.2013 a teda $S_0 = 7962.31$. Za bez rizikovú úrokovú sadzbu $r$ si zvolíme hodnotu 3 mesačný EURIBOR z 19.3.2013, pretože naše podkladové aktívum je európsky index. Trojmesačnú dobu sme zvolili preto, lebo doba do exspirácie opcie je do jedného roka. Trojmesačný EURIBOR bol 29.12.2023 rovný 0.207% a teda $r = 0.00207$. Počet simulácií $n$ v metóde Monte Carlo sme zvolili $n = 10000$, $n = 20000$ a $n = 30000$ simulácií. Realizačné ceny $K$ sme si zvolili od 7400, 7600 a 8000.

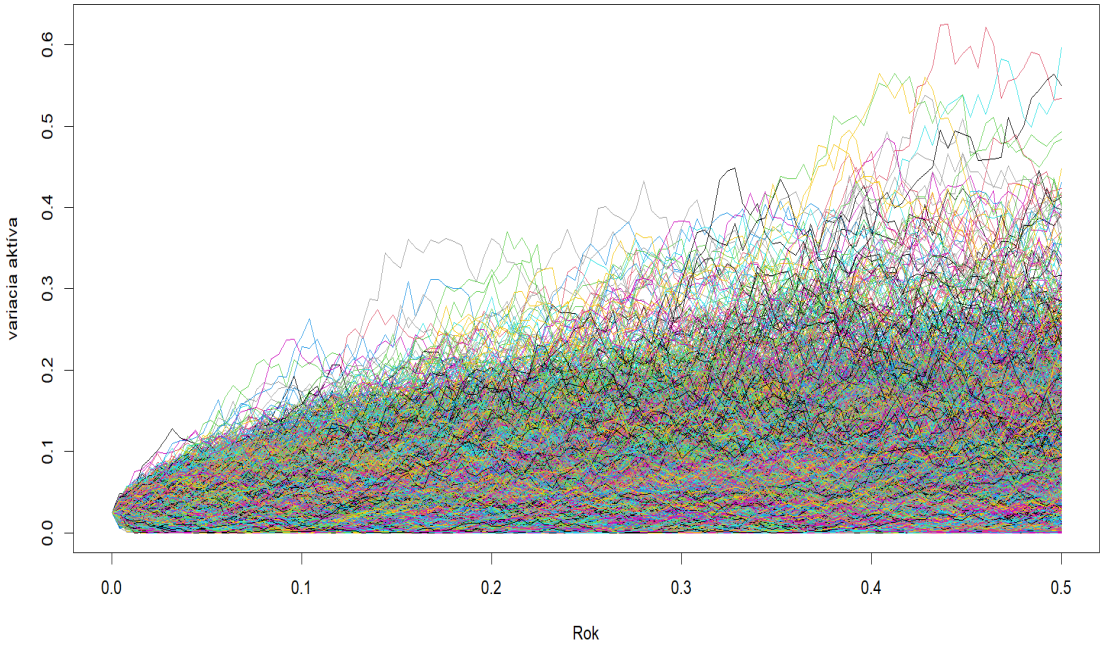
Kalibráciu Hestonovho modelu sme v tejto práci nevykonali. Kalibrované parametre sme získali z [26], kde Hestonov bol kalibrovaný na ODEX z 19.3.2013. Odhadnuté hodnoty parametrov Hestonovho modelu kalibrovaného ODEX z 19.3.2013 získané z [26] sú rovné:

| Parameter | Odhad |
|---|---|
| $\hat{v_0}$ | 0.02497 |
| $\hat{\kappa}$ | 1.22136 |
| $\hat{\theta}$ | 0.06442 |
| $\hat{\sigma}$ | 0.55993 |
| $\hat{\rho}$ | -0.66255 |

**Tabuľka 15:** Hodnoty kalibrovaných parametrov




**Obr. 40:** Ukážka 10 000 simulovaných cien podkladového aktíva na 1 rok, modelovaných Hestonovým modelom




**Obr. 41:** Ukážka 10 000 simulovaných variancií podkladového aktíva na 1 rok modelovaných Hestonovým modelom

Odhadnuté ceny európskej opcie:

| realizačná cena | n | MC cena | SE | 95% IS |
|---|---|---|---|---|
| 7400 | 10000 | 767.7795 | 6.5640 | (754.8729, 780.6861) |
| 7400 | 20000 | 760.4870 | 4.6333 | (751.4058, 769.5681) |
| 7400 | 30000 | 752.5587 | 3.7539 | (745.2011, 759.9162) |
| 7600 | 619.7100 | 10000 | 6.0564 | (607.8395, 631.5805) |
| 7600 | 611.3592 | 10000 | 4.2429 | ( 603.0432, 619.6752) |
| 7600 | 610.5449 | 10000 | 3.4551 | (603.7729, 617.3170) |
| 8000 | 10000 | 356.4456 | 4.7397 | (347.1558, 365.7354) |
| 8000 | 20000 | 353.5848 | 3.3174 | ( 347.0827,360.0869) |
| 80000 | 30000 | 355.3351 | 2.7407 | (349.9633, 360.7070) |

**Tabuľka 16:** Cena európskej call opcie

V tabuľke 16 sme odhad štandardnej odchýlky SE odhadu ceny európskej call opcie v

čase $t = 0$, aj interval spoľahlivosti, počítali rovnakým spôsobom ako v ilustračnom príklade 1. V tabuľke 16 je vidno, že z rastúcim počtom simulácií klesá štandardná odchýlka odhadu ča naznačuje še sa zväčšuje presnosť odhadu.

Pre softvérové obmedzenia sme neriešili analytické riešenie súčasnej ceny európskej call opcie kde cena a variancia podkladové aktíva modelovaná Hestonovým modelom.

## 7.4 Ázijská opcia

V tejto podkapitole sa budeme venovať oceňovaniu ázijskej opcie. Ukážeme si ako odhadnúť cenu ázijskej opcii s aritmetickým priemerom pomocou metódy Monte Carlo. Cenu podkladového aktíva budeme modelovať pomocou geometrického Brownovho modelu.

Podľa [7] *ázijské opcie sú typom opcií, ktorých výplata závisí od priemernej ceny podkladového aktíva za stanovené časové obdobie.*

Ázijská opcia sa delia podľa [7] na dva typy: priemerná cena a priemerná realizačná cena.

Ázijská call/put opcia typu priemernej ceny podkladového aktíva podľa [28] *dáva majiteľovi právo kúpiť/predať podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu, ktorá je závislá na priemerných cenách podkladového aktíva v čase exspirácie.*

**Definícia 7.7.**( *Výplata ázijskej call opcie typu priemernej ceny podkladového aktíva* )

$$\Phi^{Call} = \begin{cases} S_{Avg} - K, & ak\ S_{Avg} \geq K \\ 0, & ak\ S_{Avg} < K \end{cases}$$

*kde $S_{Avg}$ je priemerná cena podkladového aktíva do času exspirácie a $K$ je realizačná cena.* Definícia podľa [7]

**Definícia 7.8.**( *Výplata ázijskej put opcie typu priemernej ceny podkladového aktíva* )

$$\Phi^{put} = \begin{cases} K - S_{Avg}, & ak\ S_{Avg} \leq K \\ 0, & ak\ S_{Avg} < K \end{cases}$$

*kde $S_{Avg}$ je priemerná cena podkladového aktíva do času exspirácie a $K$ je cena realizačná.* Definícia podľa [7]

Ázijská call/put opcia typu priemerná realizačná cena podľa [28] *dáva majiteľovi právo kúpiť/predať podkladové aktívum za priemernú cenu v čase exspirácie.*

**Definícia 7.9.** (*Výplata ázijskej call opcie, typu priemerná realizačná cena*)

$$\Phi^{Call} = \begin{cases} S_T - S_{Avg}, & ak\ S_T \geq S_{Avg} \\ 0, & ak\ S_T < S_{Avg} \end{cases}$$

*kde $S_{Avg}$ je priemerná cena podkladového aktíva do času exspirácie a $K$ je realizačná cena.* Definícia podľa [7]

**Definícia 7.10.** (*Výplata ázijskej put opcie typu priemerná realizačná cena*)

$$\Phi^{Put} = \begin{cases} S_{Avg} - S_T, & ak\ S_T \leq S_{Avg} \\ 0, & ak\ S_T < S_{Avg} \end{cases}$$

*kde $S_{Avg}$ je priemerná cena podkladového aktíva do času exspirácie a $K$ je realizačná cena.* Definícia podľa [7]

Podľa [30] sa $S_{Avg}$ ako geometrický priemer v diskrétnom čase $t = t_1, t_2, \ldots t_N$ počíta nasledovne:

$$S_{Avg} = \left[ \prod_{j=1}^{N} S_{t_j} \right]^{\frac{1}{N}}$$

kde N je počet časový krokov

Podľa [30] sa $S_{Avg}$ ako aritmetický priemer v diskrétnom čase $t = t_1, t_2, \ldots t_N$ počíta nasledovne:

$$S_{Avg} = \sum_{j=1}^{N} S_{t_j}$$

kde N je počet časových krokov

Ďalej sa budeme venovať len ázijským opciám, kde sa $S_{Avg}$ bude počítať ako aritmetický priemer.

Algoritmus na odhad súčasnej ceny ázijskej call opcie typu aritmetickej priemernej ceny podkladového aktíva pomocou metódy Monte Carlo, kde sa cena podkladového aktíva modeluje ako geometrický Brownov pohyb:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $\varepsilon_i$ z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ pre $i = 1, \ldots$ n, kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo

2. Nezávislé náhodné číslo $\varepsilon_i$ sa dosadí do výrazu:

$$S_{t_i} = S_{(t-\Delta t)_i} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}}, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, n$$

   kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo, $r$ je bezriziková úroková sadzba, $q$ je dividendový výnos podkladového aktíva, $\sigma$ je volatilita podkladového aktíva a $\Delta t$ je veľkosť časového kroku.

3. Kroky 1 a 2 sa opakujú pre všetky $t = \Delta t, 2\Delta t, \ldots T$, kde $\Delta t$ je veľkosť časového kroku a $T$ je čas do exspirácie v rokoch.

4. Výpočet priemernej ceny podkladového aktíva v jednotlivých simuláciách:

$$\overline{S_i} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_{(j\cdot\Delta t)_i}, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, n$$

   kde $\overline{S_i}$ je priemerná cena podkladového aktíva v i-tej simulácii, $S_{j\cdot\Delta t_i}$ je cena podkladového aktíva v čase $t = j \cdot \Delta t$ v i-tej simulácií a $N$ je počet časových krokov v časovom intervale simulácie.

5. Výpočet odhadu súčasnej ceny ázijskej call opcie $C_0$ :

$$\hat{C_0} = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(\overline{S_i} - K, 0)$$

   kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(\overline{S_i} - K, 0)$ je výplata ázijskej call opcie typu priemernej ceny podkladového aktíva v i-tej simulácií a $K$ je realizačná cena.

Algoritmus na odhad súčasnej ceny ázijskej put opcie typu aritmetickej priemernej ceny podkladového aktíva je skoro totožný s algoritmom odhadu súčasnej ceny ázijskej call opcie typu aritmetickej priemernej ceny podkladového aktíva. Jediná zmena nastáva

v poslednom kroku, kde sa odhad súčasnej ceny ázijskej put opcie typu priemerná cena podkladového aktíva $P_0$ vypočíta ako:

$$\hat{P}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(K - \overline{S_i}, 0)$$

kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(K - \overline{S_i}, 0)$ je výplata ázijskej put opcie typu priemerná cena podkladového aktíva v i-tej simulácií a $K$ je realizačná cena.

Algoritmus na odhad súčasnej ceny ázijskej call opcie typu priemernej realizačnej ceny je skoro totožný s algoritmom odhadu súčasnej ceny ázijskej call opcie typu priemernej ceny podkladového aktíva. Jediná zmena nastáva v poslednom kroku, kde sa odhad súčasnej ceny ázijskej call opcie typu priemernej realizačnej ceny $C_0$ vypočíta ako:

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(S_T - \overline{S_i}, 0)$$

Kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(S_{T_i} - \overline{S_i}, 0)$ je výplata ázijskej call opcie typu priemerná realizačná cena v i-tej simulácií, $S_{T_i}$ je cena podkladového aktíva v čase v i-tej simulácie.

Algoritmus, na odhad súčasnej ceny ázijskej put opcie typu priemernej realizačnej ceny, je opäť skoro totožný algoritmu odhadu súčasnej ceny ázijskej call opcie typu priemernej ceny podkladového aktíva. Jediná zmena nastáva v poslednom kroku, kde sa odhad súčasnej ceny ázijskej put opcie typu priemernej realizačnej ceny $C_0$ vypočíta ako:

$$\hat{P}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(\overline{S_i} - S_T, 0)$$

kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor, $n$ je počet simulácií, $\max(\overline{S_i} - S_{T_i}, 0)$ je výplata ázijskej put opcie typu priemerná realizačná cena v i-tej simulácií, $S_{T_i}$ je cena podkladového aktíva v čase v i-tej simulácií.

Exaktné riešenie podľa [31] pre cenu oboch druhov ázijskej opcie s aritmetickým priemerom neexistuje a ich riešenie je možné získať len numerickými metódami ako napríklad metóda Monte Carlo.

### 7.4.1 Ilustračný príklad

V tomto ilustračnom príklade si odhadneme súčasnú hodnotu ázijskej call a put opcie oboch typov pomocou metódy Monte Carlo, kde podkladové aktívum budeme modelovať

geometrickým Brownovým pohybom. Podkladové aktívum v tomto ilustračnom príklade bude akcia spoločnosti Apple rovnako ako pri Ilustračnom príklade 1. v podkapitole európska opcia. Čas do exspirácie $T$ bude jeden rok teda $T = 1$. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň teda $\Delta t = \frac{1}{250}$. Počiatočná cena podkladového aktíva bude $S_0$ bude z 29.12.2023 a teda $S_0 = 192.2846$. Za bezrizikovú úrokovú sadzbu $r$ si zvolíme hodnotu amerického 3 mesačného T-Bill z 29.12.2023 , pretože naše podkladové aktívum je akcia americkej spoločnosti a je v dolároch. Trojmesačnú dobu sme zvolili preto, lebo doba do exspirácie opcie je do jedného roka. Trojmesačný USA T-Bill bol [44] podľa [44] 29.12.2023 rovný 5.20% a teda $r = 0.052$. Počet simulácií $n$ v metóde Monte Carlo sme zvolili $n = 10000$, $n = 20000$ a $n = 30000$ simulácií. Realizačné ceny $K$ sme si zvolili od 160, 180 a 200.

Odhadnutý parameter $\sigma$ geometrického Brownovho pohybu bude rovnaký, ako v ilustračnom príklade 1. v podkapitole európska opcia.

| Parameter | hodnota |
|---|---|
| $\hat{\sigma}$ | 0.2766 |

**Tabuľka 17:** Odhad parametra $\sigma$

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce.

Odhady ceny ázijskej call opcie s aritmetickou priemernou cenou podkladového aktíva:

Odhad ceny ázijskej call opcie s priemernou realizačnou cenou:

| MC cena | n | SE | 95% IS |
|---|---|---|---|
| 14.5637 | 10000 | 0.2328 | (14.1074, 15.0199) |
| 14.8991 | 20000 | 0.1647 | (14.5764, 15.2219) |
| 14.8123 | 30000 | 0.1353 | (14.5471, 15.0774) |

**Tabuľka 19:** Cena ázijskej call opcie typu priemerná realizačná cena

V tabuľkách 18 a 19 $SE$ je odhad štandardnej odchýlky odhadnutej ceny ázijskej call opcie a počítal sa ako štandardná chyba priemeru podľa kapitoly 2. definície 2.8.. V

| K | n | MC call cena | SE | 95% IS |
|---|---|---|---|---|
| 160 | 10000 | 36.3422 | 0.2860 | (35.7815, 36.9029) |
| 160 | 20000 | 36.6359 | 0.2036 | (36.2368, 37.0350) |
| 160 | 30000 | 36.6808 | 0.1655 | (36.3564, 37.0052) |
| 180 | 10000 | 21.2637 | 0.2482 | (20.7773, 21.7502) |
| 180 | 20000 | 21.4966 | 0.1765 | (21.1506, 21.8426) |
| 180 | 30000 | 21.6397 | 0.1433 | (21.3588, 21.9206) |
| 200 | 10000 | 10.6857 | 0.1836 | (10.3257, 11.0456) |
| 200 | 20000 | 10.5210 | 0.1299 | (10.2665, 10.7756) |
| 200 | 30000 | 10.8434 | 0.1088 | (10.6302, 11.0567) |

**Tabuľka 18:** Cena ázijskej call opcie typu aritmetickej priemernej ceny podkladového aktíva

tabuľkách 18 a 19 je vidno, že z rastúcim počtom simulácií klesá štandardná odchýlka odhadu ča naznačuje še sa zväčšuje presnosť odhadu.

Na základe centrálnej limitnej vety (CLV), definovanej v kapitole 2 definícia 2.6, sme 95% interval spoľahlivosti v tabuľkách 18 a 19 počítali podľa kapitoly 2 definícia 2.4. s neznámym $\sigma$. 95% interval spoľahlivosti hovorí, že na 95% sa v danom intervale nachádza skutočná súčasná cena európskej opcie.

## 7.5 Bariérová opcia

V tejto podkapitole sa budeme venovať oceňovaniu bariérových opcií. Ukážeme si ako odhadnúť cenu bariérovej opcie pomocou metódy Monte Carlo. Cenu podkladového aktíva budeme modelovať pomocou geometrického Brownovho modelu.

Podľa [32] *bariérové opcie sú opcie, ktorých výplaty závisia od prekročenia určitej predefinovanej úrovne bariéry cenou podkladového aktíva* $S_t$ *pre* $t \in [0, T]$ Bariérové opcie sa podľa [7] delia na „knock-in“ , alebo „knock-out“

- „knock-in“ je podľa [32] *typ bariérovej opcie, pri ktorej práva spojené s touto opciou vzniknú až vtedy, keď cena podkladového cenného papiera počas životnosti opcie dosiahne určitú bariéru*

- „knock-out“ je podľa [32] *typ bariérovej opcie, pri ktorej práva spojené s touto opciou*

*zanikajú, ak podkladové aktívum dosiahne bariéru počas životnosti opcie.*

Knock-in barierová opcia sa delí podľa [32] na:

- *„up-in“ je typ bariérovej opcie, ktorá sa aktivuje keď cena podkladového aktíva stúpne nad bariéru a táto bariéra je väčšia ako počiatočná cena podkladového aktíva*
- *„down-in“ je typ bariérovej opcie, ktorá sa aktivuje keď cena podkladového aktíva klesne pod bariéru a táto bariéra je menšia ako počiatočná cena podkladového aktíva*

Knock-out barierová opcia sa delí podľa [32] na:

- *„up-out“ je typ bariérovej opcie, ktorá sa deaktivuje keď cena podkladového aktíva stúpne nad bariéru a táto bariéra je väčšia ako počiatočná cena podkladového aktíva*
- *„down-out“ je typ bariérovej opcie, ktorá sa deaktivuje keď cena podkladového aktíva klesne pod bariéru a táto bariéra je menšia ako počiatočná cena podkladového aktíva*

**Definícia 7.11.** (*Výplata bariérovej call „up-knock-out “opcie*)

$$\Phi^{call_{up-out}} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0), & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B \\ 0, & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t \geq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.12.** (*Výplata bariérovej call „down-knock-out “opcie*)

$$\Phi^{Call_{down-out}} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0), & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B \\ 0, & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t \leq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.13.** (*Výplata bariérovej call „up-knock-in “opcie*)

$$\Phi^{call_{up-in}} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0), & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B \\ 0, & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t \leq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.12.** (*Výplata bariérovej call „down-knock-in “opcie*)

$$\Phi^{call_{down-in}} = \begin{cases} \min(S_T - K, 0), & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B \\ 0, & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t \geq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.14.** (*Výplata bariérovej put „up-knock-out “opcie*)

$$\Phi^{put_{up-out}} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0), & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B \\ 0, & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t \geq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.15.** (*Výplata bariérovej put „down-knock-out “opcie*)

$$\Phi^{put_{down-out}} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0), & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B \\ 0, & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t \leq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.16.** (*Výplata bariérovej put „up-knock-in “opcie*)

$$\Phi^{put_{up-in}} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0), & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B \\ 0, & ak \ \max\limits_{0\leq t\leq T} S_t \leq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

**Definícia 7.17.** (*Výplata bariérovej put „down-knock-in “opcie*)

$$\Phi^{put_{down-in}} = \begin{cases} \min(K - S_T, 0), & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B \\ 0, & ak \ \min\limits_{0\leq t\leq T} S_t \geq B \end{cases}$$

Definícia podľa [29]

kde vo všetkých výplatách $R$ je vopred dohodnutá suma, ktorá sa vypláca v prípade neaktivácie, alebo dis-aktivácie opcie.

Algoritmus na odhad súčasnej ceny bariérovej call „up-knock-out “opcie pomocou metódy Monte Carlo, kde sa cena podkladového aktíva modeluje geometrickým Brownovým pohybom:

1. Generovanie nezávislých náhodných čísiel $\varepsilon_i$ z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ pre $i = 1, \dots$ n kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo.

2. Nezávislé náhodné číslo $\varepsilon_i$ sa dosadí do výrazu:

$$S_{t_i} = S_{(t-\Delta t)_i} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n$$

   kde $n$ je počet simulácií v metóde Monte Carlo, $r$ je bezriziková úroková sadzba, $q$ je dividendový výnos podkladového aktíva, $\sigma$ je volatilita podkladového aktíva a $\Delta t$ je veľkosť časového kroku.

3. Kroky 1 a 2 sa opakujú pre všetky $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ kde $\Delta t$ je veľkosť časového kroku a $T$ je čas do exspirácie v rokoch.

4. Výpočet výplaty bariérovej call „up-knock-out “opcie v čase $t = T$ :

$$\Phi_i^{call_{up-out}} = \begin{cases} \max(S_{T_i} - K, 0), & \text{ak } \max\limits_{t\in\{\Delta t, 2\Delta t, \dots, T\}} S_{t_i} < B \\ 0, & \text{ak } \max\limits_{t\in\{\Delta t, 2\Delta t, \dots, T\}} S_{t_i} \geq B \end{cases}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n$$

   kde $B$ je bariéra a $K$ je realizačná cena.

5. Výpočet odhodu ceny bariérovej call „up-knock-out “opcie v čase $t = 0$

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^{Call_{up-out}}$$

   kde $e^{-rT}$ je diskontný faktor a $n$ je počet simulácií.

Algoritmus na odhad súčasnej ceny ostatných bariérových opcií, pomocou metódy Monte Carlo je skoro totožný ako pri odhade súčasnej ceny bariérovej call „up-knock-out“ opcie. Jediná zmena nastáva v 4. kroku, kde na miesto výplaty bariérovej call „down-knock-out“ opcie $\Phi_i^{call_{up-out}}$ budeme počítať výplatu $\Phi$ zvoleného typu bariérovej opcie v čase $T$. $\Phi$ sa potom v 5. kroku dosadí do odhadu súčasnej ceny $\hat{C}_0/\hat{P}_0$ a tým dostaneme súčasnú cenu zvolenej bariérovej opcie.

Podľa [29] pre všetkách osem typov bariérovej opcie, v ktorých je podkladové aktívum modelované geometrickým Brownovým pohybom, existuje exaktné riešenie na výpočet súčasnej ceny bariérových opcií a podľa [29] sa počíta nasledovne:
„Call Down-in“:

$$C_0^{Down-in} = \begin{cases} C + E, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = 1 \\ A - B + D + E, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = 1 \end{cases}$$

„Call Down-out“:

$$C_0^{Down-out} = \begin{cases} A - C + F, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = 1 \\ B - D + F, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = 1 \end{cases}$$

„Call up-in“:

$$C_0^{up-in} = \begin{cases} A + E, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = -1 \\ B - C + D + E, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = -1 \end{cases}$$

„Call up-out“:

$$C_0^{up-out} = \begin{cases} F, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = -1 \\ A - B + C - D + F, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = 1 \text{ a } \eta = -1 \end{cases}$$

„Put Down-in“:

$$P_0^{Down-in} = \begin{cases} B - C + D + E, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = 1 \\ A + E, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = 1 \end{cases}$$

„Put Down-out“:

$$P_0^{Down-out} = \begin{cases} A - B + C - D + F, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = 1 \\ F, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = 1 \end{cases}$$

„Put up-in“:

$$P_0^{up-in} = \begin{cases} A - B + D + E, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = -1 \\ C + E, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = -1 \end{cases}$$

„Put up-out“:

$$P_0^{up-out} = \begin{cases} B - D + F, & \text{ak } K > B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = -1 \\ A - C + F, & \text{ak } K < B \quad \text{potom } \phi = -1 \text{ a } \eta = -1 \end{cases}$$

Kde

$$A = \phi S_0 e^{(b-r)T} N(\phi x_1) - \phi K e^{-rT} N(\phi x_1 - \phi\sigma\sqrt{T})$$

$$B = \phi S_0 e^{(b-r)T} N(\phi x_2) - \phi K e^{-rT} N(\phi x_2 - \phi\sigma\sqrt{T})$$

$$C = \phi S_0 e^{(b-r)T} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_1) - \phi K e^{-rT} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\mu} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T})$$

$$D = \phi S_0 e^{(b-r)T} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_2) - \phi K e^{-rT} \left(\frac{B}{K}\right)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T})$$

$$E = R e^{-rT} \left[ N(\eta x_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}) \right]$$

$$F = R \left[ \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\mu+\lambda} N(\eta z) + \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\mu+\lambda} N(\eta z - 2\eta\sqrt{T})\lambda \right]$$

$$x_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$x_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{B}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{ln\left(\frac{B^2}{S_0 K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_2 = \frac{ln\left(\frac{B}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T}$$

$$z = \frac{ln\left(\frac{B}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

$$\mu = \frac{b - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

$$b = r$$

kde $S_0$ je cena podkladového aktíva v čase $t = 0$, $B$ je bariéra, $K$ je realizačná cena, $T$ je čas do exspirácie v rokoch, $r$ je bezriziková úroková sadzba, $q$ je dividendový výnos v našom prípade je rovný nule, $R$ je vopred dohodnutá suma, ktorá sa vypláca v prípade neaktivácie alebo disaktivácie opcie v našom prípade sa rovná nule a $N$ je distribučná funkcia $N(0, 1)$

### 7.5.1 Ilustračný príklad

V tomto ilustračnom príklade si vypočítame súčasnú cenu rôznych typov call bariérových opcií pre rôzne realizačné ceny $K$ a bariéry $B$, kde podkladové aktívum budeme modelovať

geometrickým Brownovým pohybom. Podkladové aktívum v tomto ilustračnom príklade bude akcia spoločnosti Apple rovnako ako pri predošlých ilustračných príkladoch. Čas do exspirácie $T$ bude jeden rok, teda $T = 1$. Veľkosť časového kroku $\Delta t$ bude jeden deň, teda $\Delta t = \frac{1}{250}$. Počiatočná cena podkladového aktíva bude $S_0$ z 29.12.2023 a teda $S_0 = 192.2846$. Za bez rizikovú úrokovú sadzbu $r$ si zvolíme hodnotu amerického 3 mesačného T-Bill z 29.12.2023, pretože naše podkladové aktívum je akcia americkej spoločnosti a je v dolároch. Trojmesačnú dobu sme zvolili preto, lebo doba do exspirácie opcie je do jedného roka. Trojmesačný USA T-Bill bol [44] 29.12.2023 rovný 5.20% a teda $r = 0.052$. Počet simulácií $n$ v metóde Monte Carlo sme zvolili $n = 10000$ a $n = 20000$ . Hodnoty rôznych bariér a realizačných hodnôt sme si určili pre každý typ bariérovej opcie samostatne.

Zvolené bariéry a realizačné ceny:

| Typ bariérovej opcie | bariéra |
|---|---|
| Call „down-out“ | 100 alebo 140 |
| Call „down-in“ | 100 alebo 140 |
| Call „up-in“ | 310 alebo 330 |
| Call „up-out“ | 310 alebo |

**Tabuľka 20:** Hodnota bariéry

Odhadnutý parameter $\sigma$ geometrického Brownovho pohybu bude rovnaký, ako v ilustračnom príklade 1. v podkapitole európska opcia.

| Parameter | hodnota |
|---|---|
| $\hat{\sigma}$ | 0.2766 |

**Tabuľka 21:** Odhad parametra $\sigma$

Takto zadaný ilustračný príklad sme implementovali v programovacom jazyku R a kód tohoto ilustračného príkladu môžete nájsť v prílohe práce.

Odhady ceny bariérovej call „down-in“ opcie:

| $K$ | $n$ | B | Cena opcie MC | SE | 95% IS | % chyba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 10000 | 100 | 0.0051 | 0.0036 | (-0.0020, 0.0121) | 55.26% |
| 120 | 20000 | 100 | 0.0097 | 0.0030 | (0.0039, 0.0155) | 14.44% |
| 120 | 10000 | 140 | 5.0883 | 0.1404 | (4.8131, 5.3635) | 10.36% |
| 120 | 20000 | 140 | 4.9675 | 0.0975 | (4.7764, 5.1586) | 12.49% |
| 150 | 10000 | 100 | 0.0002 | 0.0002 | (-0.0001, 0.0005) | 65.39% |
| 150 | 20000 | 100 | 0 | 0 | (0, 0) | 100.00% |
| 150 | 10000 | 140 | 1.4589 | 0.0725 | (1.3168, 1.6010) | 10.39% |
| 150 | 20000 | 140 | 1.3285 | 0.0494 | (1.2318, 1.4252) | 18.40% |

**Tabuľka 22:** Cena call Down-in bariérovej opcie

Odhady ceny bariérovej call „up-out“ opcie:

| $K$ | $n$ | B | Cena opcie MC | SE | 95% IS | % chyba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 10000 | 100 | 79.3231 | 0.5349 | (78.2745, 80.3717) | 0.65% |
| 120 | 20000 | 100 | 79.0997 | 0.3788 | (78.3572, 79.8422) | 0.37% |
| 120 | 10000 | 140 | 72.4914 | 0.5780 | (71.3583, 73.6245) | 0.90% |
| 120 | 20000 | 140 | 73.7224 | 0.4128 | (72.9133, 74.5314) | 0.79% |
| 150 | 10000 | 100 | 53.3055 | 0.5054 | (52.3148, 54.2962) | 0.40% |
| 150 | 20000 | 100 | 53.4048 | 0.3538 | (52.7113, 54.0982) | 0.58% |
| 150 | 10000 | 140 | 51.7540 | 0.5168 | (50.7410, 52.7669) | 0.56% |
| 150 | 20000 | 140 | 51.3780 | 0.3591 | (50.6741, 52.0818) | 0.17% |

**Tabuľka 23:** Cena call up-out bariérovej opcie

Odhady ceny bariérovej call „up-out“ opcie:

| $K$ | $B$ | Cena opcie MC | SE | 95% IS | Exaktná cena | % Chyba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 310 | 0.0205 | 0.0033 | (0.0140, 0.0270) | 0.0074 | 175.65% |
| 300 | 310 | 0.0135 | 0.0019 | (0.0098, 0.0173) | 0.0074 | 82.08% |
| 300 | 330 | 0.1859 | 0.0173 | (0.1521, 0.2197) | 0.1396 | 33.13% |
| 300 | 330 | 0.1901 | 0.0121 | (0.1665, 0.2138) | 0.1396 | 36.15% |
| 320 | 310 | 0 | 0 | (0, 0) | 0 | NaN |
| 320 | 310 | 0 | 0 | (0, 0) | 0 | NaN |
| 320 | 330 | 0.0097 | 0.0024 | (0.0050, 0.0143) | 0.0049 | 95.84% |
| 320 | 330 | 0.0092 | 0.0015 | (0.0062, 0.0122) | 0.0049 | 86.32% |

**Tabuľka 24:** Cena call Up-out bariérovej opcie

Odhady ceny bariérovej call „up-in“ opcie:

| $K$ | $B$ | Cena opcie MC | SE | 95% IS | Exaktná cena | % Chyba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 310 | 2.0297 | 0.1143 | (1.8056, 2.2539) | 2.2476 | 9.69% |
| 300 | 310 | 2.2473 | 0.0907 | (2.0696, 2.4250) | 2.2476 | 0.01% |
| 300 | 330 | 2.0526 | 0.1271 | (1.8036, 2.3017) | 2.1154 | 2.96% |
| 300 | 330 | 1.9161 | 0.0848 | (1.7499, 2.0822) | 2.1154 | 9.42% |
| 320 | 310 | 1.4902 | 0.1064 | (1.2817, 1.6988) | 1.3586 | 9.68% |
| 320 | 310 | 1.2661 | 0.0655 | (1.1378, 1.3945) | 1.3586 | 6.81% |
| 320 | 330 | 1.4929 | 0.1096 | (1.2780, 1.7077) | 1.3537 | 10.28% |
| 320 | 330 | 1.3794 | 0.0721 | (1.2382, 1.5206) | 1.3537 | 1.90% |

**Tabuľka 25:** Cena call up-in bariérovej opcie

V tabuľkách 22, 23, 24 a 25 $SE$ je odhad štandardnej odchýlky odhadnutej ceny Barierovej call opcie a počítal sa ako štandardná chyba priemeru podľa kapitoly 2. definície 2.8..V tabuľkách 22, 23, 24 a 25 je vidno, že z rastúcim počtom simulácií klesá štandardná odchýlka odhadu ča naznačuje še sa zväčšuje presnosť odhadu.

Na základe centrálnej limitnej vety (CLV), definovanej v kapitole 2 definícia 2.6, sme 95% interval spoľahlivosti V tabuľkách 22, 23, 24 a 25 počítali podľa kapitoly 2 definícia

2.4. s neznámym $\sigma$. 95% Interval spoľahlivosti hovorí, že na 95% sa v danom intervale nachádza skutočná súčasná cena európskej opcie. Z výsledkov V tabuľkách 22, 23, 24 a 25 môžeme vidieť, že hodnoty vypočítané pomocou analytickým riešením sa nachádzajú v týchto 95% intervaloch spoľahlivosti.

Percentuálnu chybu sme V tabuľkách 22, 23, 24 a 25 počítali podľa kapitola 2 definícia 2.10.. Percentuálna chyba, označená ako % chyba, vyjadruje rozdiel medzi odhadnutou cenou bariérovej opcie a jej skutočnou hodnotou ako percento z hodnoty. Táto percentuálna chyba nám poskytuje informáciu o presnosti odhadu ceny bariérovej opcie pomocou danej metódy v porovnaní s referenčnou hodnotou získanou z analytického riešenia.

# Záver

V tejto práci sme sa venovali vývoju a aplikáciám metódy Monte Carlo s dôrazom na jej využitie vo financiách. Našim cieľom bolo poskytnúť prehľad o historickom vývoji a finančných aplikáciach s ilustračnými príkladmi.

V práci sme k ilustračným príkladom uviedli grafické výstupy a algoritmy metódy Monte Carlo. Grafy a algoritmy boli implementované v programovacom jazyku R a ich kódy sú pridané ako príloha k diplomovej práci.

Ilustračné príklady sa týkali využitia metódy Monte Carlo vo financiách, ktoré demonštrovali použitie v odhadoch očakávaných hodnôt krátkodobej úrokovej sadzby, oceňovaní akcií a opcií.

V kapitole 3 sme v ilustračných príkladoch modelovali krátkodobú úrokovú sadzbu pomocou Vašíčkovho a Cox–Ingersoll–Ross modelu, ktoré boli kalibrované na reálne finančné dáta. Pre takto modelované krátkodobé úrokové sadzby sme metódou Monte Carlo odhadli očakávanú hodnotu a štandardnú odchýlku krátkodobej úrokovej sadzby.

V kapitole 4 sme v ilustračných príkladoch modelovali a odhadovali metódou Monte Carlo cenu akcie a portfólia. Cenu akcie sme modelovali geometrickým Brownovým pohybom v riskreálnom prostredí.

V kapitole 5 sme v ilustračných príkladoch optimalizovali portfólio metódou Monte Carlo a v kapitole 6 sme pre toto portfólio v ilustračnom príklade vypočítali Value at Risk.

V kapitole 7 sme v ilustračných príkladoch odhadovali metódou Monte Carlo súčasnú cenu európskej, ázijskej, bariérovej a lookback opcie a modelovali cenu podkladového aktíva. Cenu podkladového aktíva sme modelovali geometrickým Brownovým pohybom v riskneutrálnom prostredí. V prípade európskej opcie sme na modelovanie ceny podkladového aktíva použili Hestonov model.

Výsledky našich simulácií ukázali, že metóda Monte Carlo môže poskytnúť spoľahlivé odhady a prognózy a byť užitočným nástrojom v oblasti financií.

# Zoznam použitej literatúry


[1] Lutkevich, B. : *Monte Carlo simulation* , dostupné na internete (21.12.2023), https://www.techtarget.com/searchcloudcomputing/definition/Monte-Carlo-simulation

[2] Kanade, V.: *What Is a Monte Carlo Simulation? Working, Applications, Pros, and Cons*, dostupné na internete (21.12.2023), https://www.spiceworks.com/tech/tech-general/articles/what-is-a-monte-carlo-simulation/

[3] Kalos, M., Whitlock, P.: *Monte Carlo Methods*, 2. vydanie, WILEY-VCH, USA, Weinheim, 2008, ISBN: 978-3-527-40760-6

[4] Kalas, J., Pekár, J.: *Simulačné metódy*, skriptá, FMFI UK, Bratislava, 1991

[5] Nxumalo, M.:*Monte Carlo Methods in Finance*, Bakalárka práca, Univerzita v Kapskom Meste, Južná Afrika, dostupné na internete (1.10.2023),https://www.academia.edu/33232183/Monte_Carlo_Methods_in_Finance

[6] Glasserman, P.:*Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New York, USA, 2003

[7] Hull, J.:*Options, Futures, and other Derivatives*, 9. vydanie, Pearson, Londýn, UK

[8] Dáta, Historické ceny aktív (1.1.2024), https://finance.yahoo.com/

[9] Agustini, F. , Affianti W, I. R., Putri, E. R.: *Stock price prediction using geometric Brownian motion*, Journal of Physics, séria 974, IOP Publishing, 2018 , dostupné na internete (11.1.2024), https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/974/1/012047/pdf

[10] Andel, J.: *Základy matematické statistiky*, Univerzita Karlova v Prahe, Matematicko-fyzikálna fakulta, Česká republika, 2002

[11] MAMON, R. S.: *Three Ways to Solve for Bond Prices in theVasicek Model*, Univerzita Brickej Columbie, Fakulta štatistiky, Kanada, JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND DECISION SCIENCES, 8(1), 1–14, 2004, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[12] Herrala, N.: *VASICEK INTEREST RATE MODEL: PARAMETER ESTIMATION, EVOLUTION OF THE SHORT-TERM INTEREST RATE AND TERM STRUCTURE*, Bakalárska práca, LAPPEENRANTA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY , Fínsko, dostupné na internete (1.4.2024),https://lutpub.lut.fi/bitstream/handle/10024/43257/nbnfi-fe200901141021.pdf?sequence=3

[13] Hayes, A.:*Euro Interbank Offer Rate (Euribor) Definition, Uses, Vs. Eonia*, dostupné na internete (1.4.2024),https://www.investopedia.com/terms/e/euribor.asp#toc-what-is-the-euro-interbank-offer-rate-euribor

[14] Frost, J. :*Mean Squared Error (MSE)*, dostupné na internete (1.4.2024),https://statisticsbyjim.com/regression/mean-squared-error-mse/

[15] Kladívko, K.: *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION OF THE COX-INGERSOLL-ROSS PROCESS: THE MATLAB IMPLEMENTATION*, článok, Česká republika, dostupné na internete (11.1.2024), https://dsp.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB07/prispevky/kladivko_k/kladivko_k.pdf

[16] Stehlíková, B.: *Finančné deriváty*, Prednášky, FMFI, Univerzita Komenského, letný semester, 2022/2023 ,

[17] Dunn, R., Hauser, P., Seibold, Gong, H.: *Estimating Option Prices with Heston's Stochastic Volatility Model*, dostupné na internete (11.4.2024), https://www.valpo.edu/mathematics-statistics/files/2015/07/Estimating-Option-Prices-with-Heston%E2%80%99s-Stochastic-Volatility-Model.pdf

[18] Karlsson, P.: *The Heston Model - Stochastic Volatility and Approximation*, bakalárska práca, Lund univerzita, Fakulta ekonómie, Švédsko, dostupné na internete (11.1.2024), https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordOId=1436827&fileOId=1646914

[19] OECD: *Short-term interest rates*, internetová stránka, dostupné na internete (11.1.2024), https://data.oecd.org/interest/short-term-interest-rates.htm

[20] Likeš, O.: Opcie: Sprievodca obchodovania s opciami pre začiatočníkov, 2023, dostupné na internete (11.2.2024), https://www.lynxbroker.sk/investovanie/burzy/opcie/zaklady-opcii/co-su-opcie-ako-funguju/

[21] Editori Encyklopédie Britannica, O.: standard deviation, 2024, dostupné na internete (11.4.2024), https://www.britannica.com/topic/standard-deviation-statistics

[22] Jafari, A. M., Abbasian, S.: *The Moments for Solution of the Cox-Ingersoll-Ross Interest Rate Model*, Journal of Finance and Economics, Vol. 5, No. 1, 2017, s. 34-37 dostupné na internete (11.3.2024), https://pubs.sciepub.com/jfe/5/1/4

[23] Clewlow, L., Strickland, Ch.: *Implementing Derivatives Models*, John Wiley & Sons Ltd, Západný Sussex, 1998, Anglicko, s. 3-7 ,ISBN: 978-0-471-96651-7

[24] Black F., Scholes M: \ *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, článok, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 1973, 637-654

[25] Ye, Z.: *The Black-Scholes and Heston Models for Option Pricing*, diplomová práca, Univerzita v Waterloo, Kanada, dostupné na internete (15.4.2024), https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/7541/Ye_Ziqun.pdf?sequence=1

[26] Mrázek, M., Pospíšil, J.: *Calibration and simulation of Heston model*, journal Open Mathematics, vol. 15, no. 1,2017, s.679-704, dostupné na internete (15.4.2024), https://doi.org/10.1515/math-2017-0058

[27] BYJU's: *Percent Error*, dostupné na internete (15.4.2024), https://byjus.com/maths/percent-error/

[28] Fér Financie: *Ázijská opcia (Asian option)*, dostupné na internete (15.4.2024), https://ferfinancie.sk/slovnik-investora/azijska-opcia-asian-option/

[29] Haug, E. G.: *THE COMPLETE GUIDE TO Option Pricing Formulas*, druhá edícia, McGraw-Hill, 2007, New York, USA, ISBN: 13-978-0071389976

[30] Mkhize, N. G. Z : *THE PRICING THEORY OF ASIAN OPTIONS*, diplomová práca, Fakulta vedy a polnohospodárstva, University of KwaZulu-Natal, Durban, Juhoafrická republika, 2007, dostupné na internete (15.4.2024), https://researchspace.ukzn.ac.za/server/api/core/bitstreams/3ef7b2c4-9bd6-4040-933f-4b31fca23a77/content

[31] Wiklund, E.: *Asian Option Pricing and Volatility*, diplomová práca, Královský technologický institut Stockholm, University of KwaZulu-Natal, Švédsko, 2012, dostupné na internete (17.4.2024), https://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb12/120412a.pdf

[32] Chen, J.: *What Is a Barrier Option? Knock-in vs. Knock-out Options*, 2014, dostupné na internete (18.4.2024), https://www.investopedia.com/terms/b/barrieroption.asp

[33] *Central Limit Theorem*, , dostupné na internete (18.4.2024), https://sphweb.bumc.bu.edu/otlt/mph-modules/bs/bs704_probability/BS704_Probability12.html

[34] Quark: *Buffon a jeho ihla*, 2023, dostupné na internete (18.4.2024), https://www.quark.sk/buffon-a-jeho-ihla/

[35] Hrnčiarová, Z.: *Metoda Monte Carlo a její realizace*, Bakalárska práca, Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno, Česká republika, 2015, s.3, dostupné na internete (18.4.2024), https://is.muni.cz/th/gkrvz/bp_ZH.pdf

[36] Badger, L.:*Lazzarini's Lucky Approximation of* $\pi$, Mathematics Magazine, Taylor & Francis, Ltd., Vol. 67, No. 2 , 1994, s.83-91, dostupné na internete (18.4.2024), https://www.jstor.org/stable/2690682

[37] Metropolis, N.:*THE BEGINNING of the MONTE CARLO METHOD* , dostupné na internete (18.4.2024), https://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?00326866.pdf

[38] Behera, A:*Portfolio Optimisation using Monte Carlo Simulation* , 2023, dostupné na internete (18.4.2024), https://medium.com/@beingamanforever/portfolio-optimisation-using-monte-carlo-simulation-25d88003782e

[39] Melicherčík, I.: *Finančná matematika*, Prednášky, FMFI, Univerzita Komenského, zimný semester, 2021/2022, Bratislava

[40] CFI Team: *Risk-Adjusted Return Ratios* , dostupné na internete (19.4.2024), https://corporatefinanceinstitute.com/resources/wealth-management/risk-adjusted-return-ratios/

[41] *What is the Prague interbank offered rate (PRIBOR)?*, dostupné na internete (20.4.2024), https://capital.com/prague-interbank-offered-rate-pribor-definition

[42] McNei, A. J., Frey, R., Embrechts, P.: *Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools*,Princeton University Press, 2005, New Jersey, USA, ISBN: 0-691-12255-5

[43] Jurča, P.: *Kvantitatívne metódy v riadení rizík*, Prednášky, FMFI, Univerzita Komenského, zimný semester, 2022/2023, Bratislava

[44] Data *3 Month Treasury Bill* , dostupné na internete (20.4.2024), https://ycharts.com/indicators/3_month_t_bill

# Prilohy

# Príloha A

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 3.1.1:

```
## Odhad strednej hodnoty úrokovej sadzby v čase t Vašíčkovho
     modelu pomocou Monte Carla

# Analytické riešenie
analyticke_riesenie_vasicek<- function(kappa, theta, sigma, r
    _0, dt,T)
{
  E <- numeric((T * 250)+1)
  var <- numeric((T * 250)+1)
  for (j in 0 : (T * 250))
  {
    # Stredná hodnota
    E[j+1] <- r_0 * exp(-kappa * (j*dt)) + theta * (1 - exp(-
        kappa * (j*dt)))
    # rozptyl
    var[j+1] <- (sigma^2 / (2 * kappa)) * (1 - exp(-2 * kappa
         * (j*dt)))
  }
  return(list(E = E, var = var))
}

# Odhad strednej hodnoty Vašíčkovho modelu pomocou metódy
    Monte Carlo:
mean_Vasicek <- function(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,n)
{
  r <- matrix(0, nrow = n, ncol = (T * 250)+1 )
  r[,1] <- r_0

  for (j in 1 : (T * 250))
```

```
{
  for (i in 1:(n))
  {
    dW <- sqrt(dt)*rnorm(1)
    r[i,j+1] <- r[i,j] + kappa*(theta - r[i,j])*dt + sigma*
        dW # SDE Vašíčkovho modelu
  }
}
str_hodnoty_r <- apply(r, 2, mean)  # Odhadnutá stredná
    hodnota
s <- apply(r, 2, sd)  # Odhad štandardnej odchýlky
var <- apply(r, 2, var) # s^2 Odhad rozptylu
SE <- s/sqrt(n)  #  Štandardná chyba
#95%  Interval spoľahlivosti strednej hodnoty
IS_horne <- str_hodnoty_r +  qnorm(1 - 0.025) * sqrt(
    analyticke_riesenie_vasicek(kappa, theta, sigma, r_0,
    dt,T)$var)/sqrt(n)
IS_dolne <- str_hodnoty_r -  qnorm(1 - 0.025) * sqrt(
    analyticke_riesenie_vasicek(kappa, theta, sigma, r_0,
    dt,T)$var)/sqrt(n)
#95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky
IS_dolne_sd<- sqrt((n-1) * var / qchisq(1 - 0.025, df = n -
     1))
IS_horne_sd <- sqrt((n-1) * var / qchisq(0.025, df = n - 1)
    )
# Priemerná kvadratická chyba
MSE <- mean((analyticke_riesenie_vasicek(kappa, theta,
    sigma, r_0, dt,T)$E - str_hodnoty_r)^2)
return(list(r = r, str_hodnoty_r =  str_hodnoty_r, IS_dolne
     = IS_dolne, IS_horne =  IS_horne, IS_dolne_sd = IS_
    dolne_sd, IS_horne_sd =  IS_horne_sd, s = s, var = var,
```

```
       SE = SE, MSE = MSE))
}
# odhad strednej hodnoty úrokovej sadzby modelovanej Vašíčkom
# Parametre:
T <- 50/250
r_0 <- 0.03244
dt <- 1/(250)
kappa <- 0.2475
theta <- 0.0325
sigma <- 0.0064
# Analytické riešenie strednej hodnoty
analyticke_str_hodnota <- analyticke_riesenie_vasicek(kappa,
    theta, sigma, r_0, dt, T)
# Simulácia 10 000
r <- mean_Vasicek(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,10000)
# Simulácia 20 000
r_2 <- mean_Vasicek(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,20000)
# simulácia 30 000
r_3 <- mean_Vasicek(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,30000)
```

# Príloha B

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 3.2.1:

```
## Odhad strednej hodnoty a rozptylu úrokovej sadzby
    modelovanej Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modelom pomocou metó
    dy Monte Carla

# Analytický výpočet strednej hodnoty  a štandardnej odchýlky
     úrokových sadzieb CIR modelom
analyticke_riesenie_CIR<- function(kappa, theta, sigma, r_0,
    dt, T)
```

```
{
  E <- numeric((T*250)+1)
  var <- numeric((T*250)+1)
  for (j in 0 : (T*250))
  {

    # Skutočná stredná hodnota krátkodobej úrokovej sadzby
        modelovanej CIR modelom
    E[j+1] <- r_0 * exp(-kappa * (j*dt)) + theta * (1 - exp(-
        kappa * (j*dt)))

    # Skutočný rozptyl krátkodobej úrokovej sadzby
        modelovanej CIR modelom
    var[j+1] <- (sigma^2 / kappa) * r_0 * (exp(-kappa * j *
        dt) - exp(-2 * kappa * j * dt)) + (theta * sigma^2) /
         (2 * kappa) * (1 - exp(-kappa * j * dt))^2

  }

  return(list(E = E, var = var))
}

# Modelovanie úrokovej sadzby CIR modelom
CIR_model <- function(kappa, theta, sigma, r0, dt ,T, n) {
  r <- matrix(0, nrow = n, ncol = (T*250) + 1)
  r[, 1] <- r0

  for (j in 1:(T*250)) {
    for (i in 1:n) {
      dW <- sqrt(dt) * rnorm(1)
      r[i, j + 1]  <- r[i, j] + kappa * (theta - r[i, j]) *
```

```
        dt + sigma * sqrt(max(r[i, j], 0)) * dW
    r[i, j + 1] <- max(r[i, j + 1], 0)
  }
}
# Odhadnutá stredná hodnota
str_hodnoty_r <- apply(r, 2, mean)
# Odhad štandardnej odchýlky
s <- apply(r, 2, sd)
# s^2 Odhad rozptylu
var <- apply(r, 2, var)
# Štandardná chyba
SE <- s/sqrt(n)
# 95% Interval spoľahlivosti strednej hodnoty
IS_horne <- str_hodnoty_r +  qnorm(1 - 0.025) * sqrt(
    analyticke_riesenie_vasicek(kappa, theta, sigma, r_0,
    dt,T)$var)/sqrt(n)
IS_dolne <- str_hodnoty_r -  qnorm(1 - 0.025) * sqrt(
    analyticke_riesenie_vasicek(kappa, theta, sigma, r_0,
    dt,T)$var)/sqrt(n)
# 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky
IS_dolne_sd<- sqrt((n-1) * var / qchisq(1 - 0.025, df = n -
     1))
IS_horne_sd <- sqrt((n-1) * var / qchisq(0.025, df = n - 1)
    )
# Priemerná kvadratická chyba
MSE <- mean((analyticke_riesenie_vasicek(kappa, theta,
    sigma, r_0, dt,T)$E - str_hodnoty_r)^2)

return(list(r = r, str_hodnoty_r =  str_hodnoty_r, IS_dolne
     = IS_dolne, IS_horne =  IS_horne, IS_dolne_sd = IS_
    dolne_sd, IS_horne_sd =  IS_horne_sd, s = s, var = var,
```

```
        SE = SE, MSE = MSE))
}

# Odhad strednej hodnoty úrokovej sadzby modelovanej Vašíčkom
# Parametre:
T <- 50/250
r_0 <- 0.0258
dt <- 1/(250)
kappa <- 0.4363
theta <- 0.0613
sigma <- 0.1491
# Analytické riešenie
analyticke_riesenie <- analyticke_riesenie_CIR(kappa, theta,
    0.1491, r_0, dt, T)

# Simulácia 10 000
r <- CIR_model(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,10000)

# Simulácia 20 000
r_2 <- CIR_model(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,20000)

# Simulácia 30 000
r_3 <- CIR_model(kappa, theta, sigma, r_0, dt, T,30000)
```

# Príloha C

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 4.1:

```
# Ilustračný príklad na predikciu odhadovanej očakávanej ceny
    akcie (Apple) pomocou metódy Monte Carlo
# kde ceny akcie modelujeme geometrickým Brownovým pohybom
# Načítanie potrebných knižníc
```

```r
library(quantmod)
library(ggplot2)
# Data
# Načítanie dát historických cien akcie spoločnosti Apple
getSymbols("NSRGY", from = "2019-01-01", to = "2024-01-01",
    auto.assign = TRUE)
head(NSRGY)
datumi <- index(NSRGY)
data <- NSRGY$NSRGY.Adjusted
chartSeries(data, up.col = "green3",theme="white", name ="
    Cena akcie NSRGY")
# Funkcia na výpočet logaritmických výnosov
vynosy <- function(data)
{
  vynos <- diff(log(data)) # Logaritmické výnosy aktíva
  vynos <- vynos[-1]
  chartSeries(vynos,up.col = "green3",theme="white", name ="V
      ýnosy akcie NSRGY") # Graf historických výnosov
  return(vynos)
}
# Odhad parametrov GBP pre cenu podkladového aktíva
parametre <- function(vynos,dt)
{
  mu <- mean(vynos)/dt
  sd <- sd(vynos)/sqrt(dt)
  return(list(mu = mu, sd = sd))
}
# Vypočítame si výnosy akcie NSRGY
vynosy_NSRGY<-vynosy(data)
analyticke_riesenie_GBP <- function(mu, sigma, S_0, dt,T) {
  N <- (T * 250)
```

```
  E <- numeric(N+1)
  var <- numeric(N+1)
  for (j in 0 : N)
  {
    # Analytická stredná hodnota GBP
    E[j+1] <- S_0 * exp(mu* j * dt)
    # Analytická rozptyl GBP
    var[j+1] <- S_0^2 * exp(2 * mu * j* dt) * (exp(sigma^2 *
        j*dt) - 1)
  }
  return(list(E = E, var = var))
}
# Vytvorenie funkcie na výpočet očakávanej ceny,
# ktorá simuluje cenny akcie pomocou GBP
ocakavana_cena_akcie_GBP <- function(S_0, mu, sigma, T, dt, n
    ) {
  N <- N
  S <- matrix(NA, nrow = n, ncol = (N+1))
  S[,1] <- S_0
  dt <- 1/250
  for (j in 1:N)
  {
    for (i in 1:n)
    {
      S[i,j+1] <- S[i,j] * exp((mu - 0.5 * sigma^2) * dt +
          sigma * sqrt(dt) * rnorm(1))
    }
  }
  # Odhadnutá očakávaná cena akcie (stredná hodnota ceny
      akcie)
  str_hodnoty_S <- apply(S, 2, mean)
```

```
  # Odhad štandardnej odchýlky
  s <- apply(S, 2, sd)
  #s^2 Odhad rozptylu
  var <- apply(S, 2, var)
  #  Štandarná chyba
  SE <- s/sqrt(n)
  # 95% Interval spoľahlivosti strednej hodnoty
  IS_horne <- str_hodnoty_S +  qnorm(1 - 0.025) * sqrt(
      analyticke_riesenie_GBP(mu, sigma, S_0, dt,T)$var)/sqrt
      (n)  # 95% IS pre odhadovanú strednú hodnotu
  IS_dolne <- str_hodnoty_S -  qnorm(1 - 0.025) * sqrt(
      analyticke_riesenie_GBP(mu, sigma, S_0, dt,T)$var)/sqrt
      (n)
  # 95% Interval spoľahlivosti štandardnej odchýlky
  IS_dolne_sd <- sqrt((n-1) * var / qchisq(1 - 0.025, df = n
      - 1))
  IS_horne_sd <- sqrt((n-1) * var / qchisq(0.025, df = n - 1)
      )
  # Priemerná kvadratická chyba
  MSE <- mean((analyticke_riesenie_GBP(mu, sigma, S_0, dt,T)$
      E - str_hodnoty_S)^2)

  return(list(S = S, str_hodnoty_S =  str_hodnoty_S, IS_dolne
       = IS_dolne, IS_horne =  IS_horne, IS_dolne_sd = IS_
      dolne_sd, IS_horne_sd =  IS_horne_sd, s = s, var = var,
       SE = SE, MSE = MSE))
}

# Parametre ilustračného príkladu
# Ako cenu aktíva v čase 0 sme si zvolili poslednú historickú
    cenu
```

```
S_0 <- data[length(data)]
# Časový krok rovný jednému dňu za predpokladu, že rok má 250
    pracovných dní
dt <- 1/250
# Stredná hodnota výnosov aktíva
mu <- parametre(vynosy_NSRGY,dt)$mu
# Volatilita výnosov aktíva
sigma <- parametre(vynosy_NSRGY,dt)$sd
# Časový horizont
T <- 50/250
# Analytické riešenie
analyticke_riesenie  <- analyticke_riesenie_GBP(mu, sigma, S_
    0, dt, T)
# Simulácia 10 000
S <- ocakavana_cena_akcie_GBP(S_0, mu, sigma, T, dt, 10000)
# Simulácia 20 000
S_2 <- ocakavana_cena_akcie_GBP(S_0, mu, sigma, T, dt, 20000)
# Simulácia 30 000
S_3 <- ocakavana_cena_akcie_GBP(S_0, mu, sigma, T, dt, 30000)
```

# Príloha D

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 5.1:

```
# Ilustračný príklad optimalizácie portfólia
# Načítanie potrebných knižníc
library(quantmod)
library(ggplot2)
# Akcie v portfóliu
akcie <- c('AAPL','MSFT','AMZN')
# Dátumy
start <- as.Date("2019-01-01")
```

```r
end <- as.Date("2024-01-01")
# Stiahnutie historických cien akcií
cena <- list()
for (akcia in akcie) {
  getSymbols(akcia, from = start, to = end)
  cena[[akcia]] <- Ad(get(akcia))
}
data <- do.call(cbind, cena)
colnames(data) <- akcie

# Logaritmické výnosy aktíva
vynosy <- function(data)
{
  vynos <- diff(log(data))
  vynos <- vynos[-1]
  return(vynos)
}
vynos <- matrix(0, nrow = nrow(data) - 1, ncol = ncol(data))
# Výpočet denných logaritmických výnosov pre každú akciu
for (i in seq_along(akcie)) {
  vynos[, i] <- vynosy(data[, i])
}
# priemerné denné výnosy
mean_vynos <- colMeans(vynos)
# Kovariancia
cov_matica <- cov(vynos)
nahodne_portfolio_mc <- function(pocet_portfolii, mean_vynos,
    cov_matica, r) {
  matica <- matrix(NA, nrow = pocet_portfolii, ncol = 3)
  max_sharpe_ratio <- 0
  for (i in 1:pocet_portfolii)
```

```
  {
    # Generovanie náhodných váh z rovnovážneho rozdelenia
    vahy <- runif(length(mean_vynos))
    # Upravíme váhy tak, aby ich súčet boli rovný 1
    vahy <- vahy / sum(vahy)
    # Ročný očakávaný výnos portfólia
    r_p <- sum(mean_vynos * vahy) * 250
    # Ročná štandardná odchýlka portfólia
    sd_p<- sqrt(t(vahy) %*% cov_matica %*% vahy) * sqrt(250)
    # sharpe ratio
    sharpe_ratio <- (r_p - r) / sd_p
    # Výpočty uložíme do matice
    matica[i, 1] <- r_p
    matica[i, 2] <- sd_p
    matica[i, 3] <- sharpe_ratio
    # Hľadanie optimálneho portfólia
    if (sharpe_ratio > max_sharpe_ratio)
    {
      max_sharpe_ratio <- sharpe_ratio
      optim_r_p <- r_p
      optim_sd_p <- sd_p
      optim_vahy <- vahy
    }
  }
  colnames(matica) <- c('r_p', 'sd_p', 'sharpe_ratio')
  return(list( matica= matica, optim_vahy = optim_vahy, optim
      _r_p = optim_r_p, optim_sd_p = optim_sd_p, max_sharpe_
      ratio = max_sharpe_ratio))
}
# Bezriziková úroková sadzba
r_0 <- 0.052
```

```
# Ilustračný príklad
vysledok <- nahodne_portfolio_mc(50000, mean_vynos, cov_
    matica, r_0)
```

# Príloha E

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 6.1:

```
# Ilustračný príklad výpočtu VaR pomocou metódy Monte Carlo
# Načítanie potrebných knižníc
library(rmgarch)
library(rugarch)
library(MASS)
library(evir)
library(fGarch)
library(quantmod)
# Akcie v portfóliu
akcie <- c('AAPL','MSFT','AMZN')
# Dátumy
start <- as.Date("2023-01-01")
end <- as.Date("2024-01-01")
# Stiahnutie historických cien akcií
cena <- list()
for (akcia in akcie) {
  getSymbols(akcia, from = start, to = end)
  cena[[akcia]] <- Ad(get(akcia))
}
data <- do.call(cbind, cena)
colnames(data) <- akcie
# Logaritmické výnosy aktíva
vynosy <- function(data)
{
```

```
  vynos <- diff(log(data))
  vynos <- vynos[-1]
  return(vynos)
}
vynos <- matrix(0, nrow = nrow(data) - 1, ncol = ncol(data))
# Výpočet denných logaritmických výnosov pre každú akciu
for (i in seq_along(akcie)) {
  vynos[, i] <- vynosy(data[, i])
}
# priemerné denné výnosy
mean_vynos <- colMeans(vynos)
# váhy v portfóliu
vahy <- vysledok$optim_vahy
# Denné historické výnosy portfólia
r_p <- vahy[1]*vynos[,1] + vahy[2]*vynos[,2] + vahy[3]*vynos
    [,3]
# Vykreslenie denných výnosov nášho portfólia
plot(r_p, type = "l", main = "Denné výnosy nášho portfólia",
    xlab = "časové obdobie od 3.1.2023 do 29.12.2023", ylab =
     "výnos v %")
# Zadefinujeme si garch(1,1) pomocou funkcie ugarchspec
garch_11 <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH"
    , garchOrder = c(1,1)),
                           mean.model = list(armaOrder = c
                               (0,0)))
# Vytvorenie garch modelov pre jednotlivé výnosy:
# Vyriešime si garch(1,1) model pre AAPL akciu
model_1 <- ugarchfit(garch_11, data = vynos[,1])
# Do vektora dáme koeficienty z modelu
coef_Model1 <- as.vector(model_1@fit$matcoef[2:4,1])
# Vyriešime si garch(1,1) model pre MSFT akciu
```

```
model_2 <- ugarchfit(garch_11, data = vynos[,2])
# Do vektora dáme koeficienty z modelu
coef_Model2 <- as.vector(model_2@fit$matcoef[2:4,1])
# Vyriešime si garch(1,1) model pre AMZN akciu
model_3 <- ugarchfit(garch_11, data = vynos[,1])
# Do vektora dáme koeficienty z modelu
coef_Model3 <- as.vector(model_3@fit$matcoef[2:4,1])
# Stredné hodnoty výnosov akcií
mean_vynos <- colMeans(vynos)
# Rezídua výnosov výmenných kurzov
rezidua_1 <- vynos[,1]-rep(mean_vynos[1], length(vynos[,1]))
rezidua_2 <- vynos[,2]-rep(mean_vynos[2], length(vynos[,2]))
rezidua_3 <- vynos[,3]-rep(mean_vynos[3], length(vynos[,3]))
# odhady sigma
sigma1 <- sqrt(coef_Model1[1] + coef_Model1[3]*sigma(model_1)
    [length(vynos[,1])-50]^2 + coef_Model1[2]*rezidua_1[
    length(vynos[,1])]^2)
sigma2 <- sqrt(coef_Model2[1] + coef_Model2[3]*sigma(model_2)
    [length(vynos[,1])-50]^2 + coef_Model2[2]*rezidua_2[
    length(vynos[,1])]^2)
sigma3 <- sqrt(coef_Model3[1] + coef_Model3[3]*sigma(model_3)
    [length(vynos[,1])-50]^2 + coef_Model3[2]*rezidua_2[
    length(vynos[,1])]^2)
# Korelačná matica:
R <- cor(stard_rezidua)
# Variačno-kovariančná matica:
Sigma <- diag(c(as.numeric(sigma1), as.numeric(sigma2), as.
    numeric(sigma3)))%*%R%*%diag(c(as.numeric(sigma1), as.
    numeric(sigma2), as.numeric(sigma3)))
# Simulácia výnosov akcií
simulation<- mvrnorm(n = 50000, mean_vynos, Sigma, tol = 1e
```

```
    -6, empirical = TRUE)
# Výpočet výnosov portfólia
rp_CCCGARCH_sim <- (vahy[1]*simulation[,1] + vahy[2]*
    simulation[,2] +  vahy[3]*simulation[,3])
# VaR nášho portfólia:
VaR_CCCGARCH_99.0 <- quantile(rp_CCCGARCH_sim, probs = 0.01)
print(VaR_CCCGARCH_99.0)
VaR_CCCGARCH_95.0 <- quantile(rp_CCCGARCH_sim, probs = 0.05)
print(VaR_CCCGARCH_95.0)
```

# Príloha F

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 7.3.1:

```
\begin{lstlisting}
 # Cena Európskej opcie
# Cena vypočítaná ako diskontovaný očakávaný payoff
# Cena aktíva modelovaná risk neutrálnym GBP
# Načítanie potrebných knižníc
library(quantmod)
library(ggplot2)
# Načítanie dát historických cien akcie spoločnosti Apple
getSymbols("AAPL", from = "2021-01-01", to = "2024-01-01",
    auto.assign = TRUE)
head(AAPL)
datumi <- index(AAPL)
data <- AAPL$AAPL.Adjusted
chartSeries(data, up.col = "green3",theme="white", name ="
    Cena␣akcie␣AAPL")

# Funkcia na výpočet logaritmických výnosov
vynosy <- function(data)
```

```
{
  vynos <- diff(log(data)) # Logaritmické výnosy aktíva
  vynos <- vynos[-1]
  chartSeries(vynos,up.col = "green3",theme="white", name ="V
      ýnosy␣akcie␣AAPL") # Graf historických výnosov
  return(vynos)
}
# Odhad parametrov GBP (geometrický Brownov pohyb) pre cenu
    podkladového aktíva
parametre <- function(vynos,dt)
{
  sd <- sd(vynos)/sqrt(dt)
  return(list(mu = mu, sd = sd))
}
# Vypočítame si výnosy akcie AAPL
vynosy_AAPL<-vynosy(data)
# Funkcia na modelovanie ceny aktíva ako GBM pomocou metódy
    Monte Carlo a výpočet ceny európskej opcie
cena_Europka_opcia_GBP <- function(S_0, sigma, r, K, dt, T, n
    , typ) {
  S <- matrix(NA, nrow = n, ncol = (T * 250)+1)
  S[, 1] <- S_0
  # simulovanie ceny aktíva ako GBM
  for (i in 1:n)
  {
    for (j in 1:(T * 250)) {
      S[i, j+1] <- S[i, j ] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt +
          sigma*sqrt(dt) * rnorm(1))
    }
  }
  # Výpočet ceny Európskej opcie
```

```
  if (typ == "call") # v prípade Call opcie
  {
    payoff_opcie <- pmax(S[,(T * 250) + 1] - K, 0)        # v
        výplata Európskej call opcie
    opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T) # Cena
        opcie je diskontovaná hodnota priemernej výplaty
        opcie
  }
  else # v prípade put opcie
  {
    payoff_opcie <- pmax(K - S[,(T * 250) + 1], 0)        # v
        výplata Európskej put opcie
    opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T) # Cena
        opcie je diskontovaná hodnota priemernej výplaty
        opcie
  }
  s <- sqrt(var(payoff_opcie) * exp(-2 * r * T))  #
      Volatilita
  SE <- s / sqrt(n)  # Standard error

  return(list(S = S, opcia_cena = opcia_cena, s = s, SE = SE)
      )
}
# Funkcia pre výpočet ceny európskej call opcie podľa Black-
    Scholesovej formuly
black_scholes_call <- function(S, K, r, T, sigma) {
  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma *
      sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)
  Nd1 <- pnorm(d1)
  Nd2 <- pnorm(d2)
```

```
  call_bs <- S * Nd1 - K * exp(-r * T) * Nd2
  return(call_bs)
}
# Funkcia pre výpočet ceny európskej put opcie podľa Black-
    Scholesovej formuly
black_scholes_put <- function(S, K, r, T, sigma) {
  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma *
      sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)
  Nd1 <- pnorm(d1)
  Nd2 <- pnorm(d2)
  put_bs <- K * exp(-r * T) * (1 - Nd2) - S * (1 - Nd1)
  return(put_bs)
}
# Parametre GBP
# Definícia vstupných hodnôt
# Aktuálna cena aktíva
S_0 <- as.numeric(data[length(data)])
# Časový krok
dt <- 1/250
# Volatilita výnosov aktíva
sigma <- parametre(vynosy_AAPL,dt)$sd
# Bezriziková úroková miera
r <- 0.052
# Maturita opcie
T <- 1
# Počet simulácií
n_1 <-  c(10000, 20000, 30000)
# Definícia hodnôt pre K
K <- seq(160, 200, by = 20) # Rozsah hodnôt strajku
# cena pre call
```

```
typ <- "call"
  for (i in seq_along(K)) {
    for (j in  seq_along(n_1)){
  n <- n_1[j]
  E <- K[i]
  call_mc <- cena_Europka_opcia_GBP(S_0, sigma, r, E, dt, T,
      n, typ)
  call_bs <- black_scholes_call(S_0, E, r, T, sigma)
  # Vypočítanie percentuálnej chyby odhadu od Black-Scholes
  chyba <- (abs(call_mc$opcia_cena - call_bs)/abs(call_bs)) *
       100
  # Výpočet 95% intervalu spoľahlivosti pre cenu
  IS_horne <- call_mc$opcia_cena +  qt(0.975, df = n - 1) *
      call_mc$SE
  IS_dolne <- call_mc$opcia_cena -  qt(0.975, df = n - 1) *
      call_mc$SE
  # Výpis výsledkov
  print(paste("Pre K =", E, "n =", n,"Cena opcie MC", call_mc
      $opcia_cena, "SE je", call_mc$SE,"Interval spoľ
      ahlivosti",IS_dolne,"a",IS_horne , "cena opcie BS",
      call_bs,"a percentuálna chyba je", chyba))
  }
}
# cena pre put
typ <- "put"
 for (i in seq_along(K)) {
   for (j in  seq_along(n_1)){
     n <- n_1[j]
  E <- K[i]
  put_bs <- black_scholes_put(S_0, E, r, T, sigma)
  put_mc <- cena_Europka_opcia_GBP(S_0, sigma, r, E, dt, T, n
```

```
      , typ)
  # Vypočítanie percentuálnej chyby odhadu od Black-Scholes
  chyba <- (abs(put_mc$opcia_cena - put_bs)/abs(put_bs)) *
      100
  # Výpočet intervalu spoľahlivosti pre cenu
  IS_horne <- put_mc$opcia_cena +  qt(0.975, df = n - 1) *
      put_mc$SE  # 95% IS pre odhadovanú strednú hodnotu
  IS_dolne <- put_mc$opcia_cena -  qt(0.975, df = n - 1) *
      put_mc$SE
  # Výpis výsledkov
  print(paste("Pre K =", E,"n =", n,"Cena opcie MC", put_mc$
      opcia_cena, "SE je", put_mc$SE,"Interval spoľahlivosti"
      ,IS_dolne,"a",IS_horne , "cena opcie BS", put_bs,"a
      percentuálna chyba je", chyba))
 }
}
```

# Príloha G

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 7.3.2:

```
\begin{lstlisting}
# Cena Európskej opcie
# Cena vypočítaná ako diskontovaný očakavaný payoff
# Cena aktíva modelovaná risk neutrálnym Hestonovým modelom
library(MASS)
# Funkcia na odhad ceny európskej opcie v čase 0 pomocou metó
    dy Monte Carlo,
# kde podkladové aktívum je modelované risk neutrálnym
    Hestonovým modelom
cena_Europska_opcia_Heston_model <- function(v0, kappa, theta
    , rho, sigma, S_0, r, K, dt, T, n, typ) {
```

```
mu <- matrix(c(0.0), nrow = 1, ncol = 2)
cov <- matrix(c(1, rho, rho,1),nrow = 2, ncol = 2)
S <- matrix(0, nrow = n, ncol = (T * 250) + 1)
S[, 1] <- S_0
v <- matrix(0, nrow = n, ncol = (T * 250) + 1)
v[, 1] <- v0
for (i in 1:n)
{
  for (j in 1:( (T * 250)))
  {
    Z <- mvrnorm(n=1, mu, cov)
    S[i, j+1] <- S[i, j] * exp((r - 0.5 * v[i, j]) * dt +
        sqrt(v[i, j] * dt) * Z[1])
    v[i, j+1] <- v[i, j] + kappa * (theta - v[i, j]) * dt +
         sigma * sqrt(v[i, j] * dt) * Z[2]
    v[i, j+1] <- max(v[i, j+1], 0)
  }
}
if (typ == "call")
{
  payoff_opcie <- pmax(S[,  (T * 250) + 1] - K, 0)         #
      Payoff európskej call opcie
  opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T) #
      Diskontovaná cena európskej call opcie
}
else
{
  payoff_opcie <- pmax(K - S[, (T * 250) + 1], 0)         #
      Payoff Európskej put opcie
  opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T) #
      Diskontovaná cena európskej put opcie
```

```
  }
  s <- sqrt(var(payoff_opcie) * exp(-2 * r * T))  #
      Volatilita
  SE <- s / sqrt(n)  # Standard error
  return( return(list(S = S, opcia_cena = opcia_cena, v=v, SE
      =SE)))
}
# Parametre príkladu:
S_0 <- 7962.31                # Cena aktíva v čase 0
r <- 0.000207                 # Bezriziková úroková miera
K <-  7000                    # Štrajk
T <- 6/12                     # Maturita
n <- 10000                    # Počet simulací
v0 <- 0.02497
kappa <- 1.22136
theta <- 0.06442
rho <- -0.66255
sigma <- 0.55993
n <- 10000
dt <- 1/250
# Funkcia na modelovanie ceny aktíva ako GBM pomocou metódy
    Monte Carlo a výpočet ceny európskej opcie
typ <- "call"
n_1 <-  c(10000, 20000, 30000)
# Definícia hodnôt pre K
K <- seq(7400, 8000, by = 200) # Rozsah hodnôt strajku
# Cena pre call
typ <- "call"
for (i in seq_along(K)) {
  E <-K[i]
  for (j in  seq_along(n_1)){
```

```
    n <- n_1[j]
  call_mc <- cena_Europka_opcia_Heston_model(v0, kappa, theta
      , rho, sigma, S_0, r, E, dt, T, n, typ)
    # Výpočet intervalu spoľahlivosti pre cenu
  IS_horne <- call_mc$opcia_cena +  qnorm(1 - 0.025) * call_
      mc$SE  # 95% IS pre odhadovanú strednú hodnotu
  IS_dolne <- call_mc$opcia_cena -  qnorm(1 - 0.025) * call_
      mc$SE
  # Výpis výsledkov
  print(paste("Pre K=", E,"n=", n ,"Cena opcie MC", call_mc$
      opcia_cena, "SE je", call_mc$SE,"Interval spoľahlivosti
      ",IS_dolne,"a",IS_horne))
 }
}
```

# Príloha č.8

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 7.4.1:

```
\begin{lstlisting}
# Cena ázijskej opcie
# Cena vypočítaná ako diskontovaný očakavaný payoff
# Cena aktíva modelovaná risk neutrálnym GBP
# Načítanie potrebných knižníc
library(quantmod)
library(ggplot2)
library(RQuantLib)
# Načítanie dát historických cien akcie spoločnosti Apple
getSymbols("AAPL", from = "2021-01-01", to = "2024-01-01",
    auto.assign = TRUE)
head(AAPL)
datumi <- index(AAPL)
```

```
data <- AAPL$AAPL.Adjusted
chartSeries(data, up.col = "green3",theme="white", name ="
    Cena akcie AAPL")
# Funkcia na výpočet logaritmických výnosov
vynosy <- function(data)
{
  # Logaritmické výnosy aktíva
  vynos <- diff(log(data))
  vynos <- vynos[-1]
  # Graf historických výnosov
  chartSeries(vynos,up.col = "green3",theme="white", name ="V
      ýnosy akcie AAPL")
  return(vynos)
}
# Odhad parametrov GBP pre cenu podkladového aktíva
parametre <- function(vynos,dt)
{
  sd <- sd(vynos)/sqrt(dt)
  return(list(mu = mu, sd = sd))
}
# Vypočítame si výnosy akcie AAPL
vynosy_AAPL<-vynosy(data)
# Funkcia na modelovanie ceny aktíva ako GBP a výpočet ceny á
    zijskej opcie
cena_Azia_opcia_GBP <- function(S_0, sigma, r, K, dt, T, n,
    typ, priemerna_cena) {
  S <- matrix(NA, nrow = n, ncol = (T*250+1))
  S[, 1] <- S_0
  # Simulovanie ceny aktíva ako GBP
  for (j in 1:(T*250))
  {
```

```
  for (i in 1:n) {
    S[i, j+1] <- S[i, j] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt +
        sigma*sqrt(dt) * rnorm(1))
  }
}
# Ázijská opcia typu priemerná cena
if (priemerna_cena == "Ano")
{
  if (typ == "call")
  {
    # Payoff ázijskej call opcie
    payoff_opcie <- pmax(apply(S, 1, mean) - K, 0)
    # Diskontovaná cena ázijskej call opcie
    opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T)
  }
  else
  {
    # Payoff ázijskej put opcie
    payoff_opcie <- pmax(K - apply(S, 1, mean), 0)
    # Diskontovaná cena ázijskej put opcie
    opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T)
  }
}
# Ázijská opcia typu priemerná realizačná cena
else
{
  # Výpočet ceny ázijskej opcie
  if (typ == "call")
  {
    # Payoff ázijskej call opcie
    payoff_opcie <- pmax(S[,(T * 250) + 1] - apply(S, 1,
```

```
          mean) , 0)
      # Diskontovaná cena ázijskej call opcie
      opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T)
    }
    else
    {
      # Payoff ázijskej put opcie
      payoff_opcie <- pmax( apply(S, 1, mean) - S[,(T * 250)
          + 1], 0)
      # Diskontovaná cena ázijskej put opcie
      opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T)
    }
    # Volatilita
  }
  s <- sqrt(var(payoff_opcie) * exp(-2 * r * T))
  # Standard error
  SE <- s / sqrt(n)
  return(list(S = S, opcia_cena = opcia_cena, s = s, SE = SE)
      )
}
# Parametre GBP
# Ako cenu aktíva v čase 0 sme si zvolili poslednú historickú
    cenu
S_0 <- data[length(data)]
# Časový krok rovný jednému dňu za predpokladu, že rok má 250
    pracovných dní
dt <- 1/250
# Volatilita výnosov aktíva
sigma <- parametre(vynosy_AAPL,dt)$sd
# Bezriziková úroková miera
r <- 0.052
```

```r
# Maturita opcie
T <- 1
# Počet simulácií
n_1 <- c(10000,20000,30000)
# Rozsah hodnôt realizačnej ceny
K <- seq(160, 200, by = 20)
# Cena pre call
typ <- "call"
# Typ áziskej opcie
priemerna_cena <- "Ano"
# Ilustračný príklad pre call ázijskú opciu typu priemerná
    cena
for (i in seq_along(K)) {
  E <- K[i]
  for (j in  seq_along(n_1)){
  n <- n_1[j]
  call_mc <-cena_Azia_opcia_GBP(S_0, sigma, r, E, dt, T, n,
      typ, priemerna_cena)
  # Výpočet intervalu spoľahlivosti pre cenu
  IS_horne <- call_mc$opcia_cena +  qt(0.975, df = n - 1) *
      call_mc$SE
  IS_dolne <- call_mc$opcia_cena -  qt(0.975, df = n - 1) *
      call_mc$SE
  # Výpis výsledkov
  print(paste("Pre K=", E, "n=",n, "Cena opcie MC", call_mc$
      opcia_cena, "SE je", call_mc$SE,
                "Interval spľahlivosti",IS_dolne,"a",IS_horne )
                    )
  }
}
# Ilustračný prílad pre call ázjsku opciu typu priemerná
```

```
    realizačná cena
# Typ ázijskej opcie
for (j in  seq_along(n_1)){
n <- n_1[j]
priemerna_cena <- "Nie"
call_mc <- cena_Azia_opcia_GBP(S_0, sigma, r, NA, dt, T, n,
    typ, priemerna_cena)
# Výpočet intervalu spoľahlivosti pre cenu
IS_horne <- call_mc$opcia_cena +  qt(0.975, df = n - 1) *
    call_mc$SE
IS_dolne <- call_mc$opcia_cena -  qt(0.975, df = n - 1) *
    call_mc$SE
# Výpis výsledkov
print(paste("Cena opcie MC", "n=",n , call_mc$opcia_cena, "SE
    je", call_mc$SE,
          "Interval spoľahlivosti",IS_dolne,"a",IS_horne))
}
```

# Príloha č.8

Kódová implementácia ilustračného príkladu z časti 7.5.1:

```
# Cena barierovej opcie
# Cena vypočítaná ako diskontovaný očakavaný payoff
# Cena aktíva modelovaná risk neutrálnym GBP
# Načítanie potrebných knižníc
library(quantmod)
library(ggplot2)
library(RQuantLib)
# Načitanie dat historických cien podkladového aktíva Apple
getSymbols("AAPL", from = "2021-01-01", to = "2024-01-01",
    auto.assign = TRUE)
```

```
head(AAPL)
datumi <- index(AAPL)
data <- AAPL$AAPL.Adjusted
chartSeries(data, up.col = "green3",theme="white", name ="
    Cena akcie AAPL")
# Funkcia na výpočet logaritmických výnosov
vynosy <- function(data)
{
  # Logaritmické výnosy aktíva
  vynos <- diff(log(data))
  vynos <- vynos[-1]
  # Graf historických výnosov
  chartSeries(vynos,up.col = "green3",theme="white", name ="V
      ýnosy akcie AAPL")
  return(vynos)
}
# Odhad parametrov GBP pre cenu podkladového aktíva
parametre <- function(vynos,dt)
{
  sd <- sd(vynos)/sqrt(dt)
  return(list(mu = mu, sd = sd))
}
# Vypočítame si výnosy akcie AAPL
vynosy_AAPL<-vynosy(data)
# Funkcia pre výpočet ceny bariérovej opcie
cena_barierova_opcia_GBP <- function(S_0, sigma, r, K, dt, T,
    n, typ, typ_b, B) {
  S <- matrix(NA, nrow = n, ncol = (T*250) + 1)
  payoff_opcie <- numeric(n)
  S[, 1] <- S_0
  farba <- rep(1, length(payoff_opcie))
```

```
# Simulácia ceny aktíva ako GBP
for (i in 1:n) {
  for (j in 1:(T*250)) {
    S[i, j+1] <- S[i, j] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt +
        sigma * sqrt(dt) * rnorm(1))
  }
}
# Výpočet ceny bariérovej opcie podľa zvoleného typu
if (typ_b == "upout") {
  for (i in 1:n) {
    if (max(S[i, ]) < B) {
      farba[i] <- 1
      if (typ == "call") {
        payoff_opcie[i] <- pmax(S[i, (T*250) + 1] - K, 0)
      } else {
        payoff_opcie[i] <- pmax(K - S[i, (T*250) + 1], 0)
      }
    } else {
      payoff_opcie[i] <- 0
      farba[i] <- 0
    }
  }
} else if (typ_b == "upin") {
  for (i in 1:n) {
    if (max(S[i, ]) > B) {
      farba[i] <- 1
      if (typ == "call") {
        payoff_opcie[i] <- pmax(S[i, (T*250) + 1] - K, 0)
      } else {
        payoff_opcie[i] <- pmax(K - S[i, (T*250) + 1], 0)
      }
```

```
    } else {
      payoff_opcie[i] <- 0
      farba[i] <- 0
    }
  }
} else if (typ_b == "downin") {
  for (i in 1:n) {
    if (min(S[i, ]) < B) {
      farba[i] <- 1
      if (typ == "call") {
        payoff_opcie[i] <- pmax(S[i, (T*250) + 1] - K, 0)
      } else {
        payoff_opcie[i] <- pmax(K - S[i, (T*250) + 1], 0)
      }
    } else {
      payoff_opcie[i] <- 0
      farba[i] <- 0
    }
  }
} else if (typ_b == "downout") {
  for (i in 1:n) {
    if (min(S[i, ]) > B) {
      farba[i] <- 1
      if (typ == "call") {
        payoff_opcie[i] <- pmax(S[i, (T*250) + 1] - K, 0)
      } else {
        payoff_opcie[i] <- pmax(K - S[i, (T*250) + 1], 0)
      }
    } else {
      payoff_opcie[i] <- 0
      farba[i] <- 0
```

```
      }
    }
  }

  # Odhad ceny
  opcia_cena <- mean(payoff_opcie) * exp(-r * T)
  # Volatilita výplat
  s <- sqrt(var(payoff_opcie) * exp(-2 * r * T))
  SE <- s / sqrt(n)  # štandardná chyba
  return(list(S = S, opcia_cena = opcia_cena, s = s, SE = SE,
       farba = farba))
}
# Parametre GBP
# Aktuálna cena aktíva
S_0 <- as.numeric(data[length(data)])
# Časový krok
dt <- 1/250
# Volatilita výnosov aktíva
sigma <- parametre(vynosy_AAPL,dt)$sd
# Bezriziková úroková miera
r <- 0.052
# Maturita opcie
T <- 1
# Realizačná cena
K <- c(110,140)
# Počet simulácií
n <- 10000
typ <-c("call", "put")
# Typy bariérovej opcie v ilustračnom príklade
typ_b <- c("downout","downin")
pocet_simulacii <-c(10000,20000)
```

```
# Zvolené bariery v jednotlivých typoch barierovej opcie
B <- c(100, 140)
for (b in seq_along(typ)) {
  for (a in seq_along(typ_b)) {
    for (j in seq_along(K)) {
      E <- K[j]
      for (i in seq_along(B)) {
        for (l in seq_along(pocet_simulacii)) {
          n <- pocet_simulacii[l]
          mc <- cena_barierova_opcia_GBP(S_0, sigma, r, E, dt
              , T, n, typ[b],
                                         typ_b[a], B[i])
          riesenie <- BarrierOption(barrType= typ_b[a], type=
              typ[b], underlying=S_0,
                                    strike=E, dividendYield
                                        =0, riskFreeRate
                                        =0.052,
                                    maturity=1, volatility=
                                        sigma, barrier=B[i])$
                                        value
          # Vypočítanie percentuálnej chyby odhadu od Black-
              Scholes
          chyba <- (abs(mc$opcia_cena - riesenie)/abs(
              riesenie)) * 100

          # Výpočet intervalu spoľahlivosti pre cenu
          # 95% IS pre odhadovanú strednú hondnotu
          IS_horne <- mc$opcia_cena +  qt(0.975, df = n - 1)
              * mc$SE
          IS_dolne <- mc$opcia_cena -  qt(0.975, df = n - 1)
              * mc$SE
```

```
          # Výpis výsledkov
          print(paste("Pre K =", E,"n=",n, "Cena opcie MC",
              mc$opcia_cena, "SE je",
                      mc$SE,"Interval spoľahlivosti",IS_dolne
                          ,"a",IS_horne ,
                      "exaktná cena opcie ", riesenie,"a
                          percentuálna chyba je"
                      , chyba, "typ barierovej opcie","typ",
                          typ[b],"-",typ_b[a], "bariera", B[i
                          ]))

        }
      }
    }
  }
}
K <- c(300, 320)
typ <-c("call")
# Typy barierovej opcie v ilustračnom príklade
typ_b <- c("upout","upin")
# Zvolené braiery v jednotlivých typoch barierovej opcie
B <- c(310, 330 )
for (b in seq_along(typ)) {
  for (a in seq_along(typ_b)) {
    for (j in seq_along(K)) {
      E <- K[j]
      for (i in seq_along(B)) {
        for (l in seq_along(pocet_simulacii)) {
          n <- pocet_simulacii[l]
          mc <- cena_barierova_opcia_GBP(S_0, sigma, r, E, dt
```

```
    , T, n, typ[b],
                                    typ_b[a], B[i])
riesenie <- BarrierOption(barrType= typ_b[a], type=
    typ[b], underlying=S_0,
                          strike=E, dividendYield
                              =0, riskFreeRate
                              =0.052,
                          maturity=1, volatility=
                              sigma, barrier=B[i])$
                              value
# Vypočítanie percentuálnej chyby odhadu od Black-
    Scholes
chyba <- (abs(mc$opcia_cena - riesenie)/abs(
    riesenie)) * 100

# Výpočet intervalu spoľahlivosti pre cenu
# 95% IS pre odhadovanú strednú hondnotu
IS_horne <- mc$opcia_cena +  qt(0.975, df = n - 1)
    * mc$SE
IS_dolne <- mc$opcia_cena -  qt(0.975, df = n - 1)
    * mc$SE

# Výpis výsledkov
print(paste("Pre␣K␣=", E, "Cena␣opcie␣MC", mc$opcia
    _cena, "SE␣je",
              mc$SE,"Interval␣spoľahlivosti",IS_dolne
                  ,"a",IS_horne ,
              "exaktná␣cena␣opcie␣", riesenie,"a␣
                  percentuálna␣chyba␣je"
              , chyba, "typ␣barierovej␣opcie","typ",
                  typ[b],"-",typ_b[a], "bariera", B[i
```

```
                                ]))
          }
        }
      }
    }
}
```