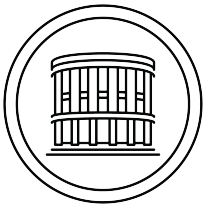
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ALOKATÍVNA EFEKTÍVNOSŤ V MODELOCH OBÁLKOVEJ ANALÝZY DÁT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024 Bc. János ZÁBORSKÝ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ALOKATÍVNA EFEKTÍVNOSŤ V MODELOCH OBÁLKOVEJ ANALÝZY DÁT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2024 **Bc. János ZÁBORSKÝ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. János Záborský
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Alokatívna efektívnosť v modeloch obálkovej analýzy dát
Allocative Efficiency in Models of Data Envelopment Analysis

Anotácia: Pomocou DEA modelov získame technickú efektívnosť, ktorú možno pre viaceré modely interpretovať ako ziskovú efektivitu v tieňových cenách. Ak poznáme pre daný produkčný proces skutočné trhové ceny, tak ziskovú efektivitu často vieme normalizovať tak, aby jej hodnota bola väčšia alebo rovná technickej efektivite. Rozdiel týchto hodnôt sa interpretuje ako alokatívna efektivita. Pri aplikácii tohoto postupu na modely založené na slackoch však uvedený rozdiel postráda vlastnosti, ktoré by rozumne definovaná alokatívna efektivita mala mať.

Cieľ: Cieľom práce bude analyzovať vlastnosti takto definovaných alokatívnych efektivít numericky aj analyticky a prípadne navrhnúť postupy, ktoré by tieto nedostatky prekonávali.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Dátum zadania: 10.01.2023

Dátum schválenia: 11.01.2023 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Rád by som touto cestou poďakoval svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za ochotu pri konzultáciach, pomoc, odborné rady a pozitívny postoj, pri písaní tejto práce. Zároveň by som taktiež veľmi rád poďakoval svojej rodine a priateľke za ich podporu a trpezlivosť.

Abstrakt v štátnom jazyku

ZÁBORSKÝ, János: Alokatívna efektívnosť v modeloch obálkovej analýzy dát [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Kaaplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2024, 62 s.

DEA modelovanie sa zaoberá meraním efektivity jednotlivých útvarov v rámci nejakej skupiny. Takáto efektivita sa nazýva technickou, pretože je vyjadrená v tieňových cenách. Ak poznáme skutočné ceny jednotlivých vstupov, tak možno pomocou DEA vypočítať aj ekonomickú efektivitu. Alokatívna efektivita dáva do súvisu technickú a ekonomickú efektivitu. Cieľom našej diplomovej práce bola práve analýza alokatívnej efektivity a jej vlastností. V prvej časti práce sme uviedli symboliku používanú v práci a taktiež základné poznatky z DEA modelovania. V rámci prvej kapitoly sme ešte predstavili neskôr potrebné modely. V druhej kapitole sa zameriavame na ekonomickú správaniu firiem a na funkcie merajúce ekonomickú efektivitu. V tretej kapitole práce je zostrojená analýza alokatívnej efektivity v jednotlivých modeloch. Pomocou príkladov sme sa snažili objasniť vzťahy medzi príslušnou ekonomickou, technickou a alokatívnou efektivitou. V záverečnej časti práce sme numericky ilustrovali rozklad ekonomických efektivít na reálnych dátach.

Kľúčové slová: Obálková analýza dát (DEA), efektívnosť, alokatívna efektivita

Abstract

ZÁBORSKÝ, János: Allocative Efficiency in Models of Data Envelopment Analysis [Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc, Bratislava, 2024, 62 p.

DEA modeling deals with measuring the efficiency of individual units within a group. Such efficiency is called technical because it is expressed in shadow prices. If we know the actual prices of the individual inputs, it is possible to calculate the economic efficiency using DEA. Allocative efficiency connects technical and economic efficiency. The aim of our thesis was the analysis of allocative efficiency and its properties. In the first part of the work, we presented the symbolism used in the work as well as the basic knowledge of DEA modeling. As part of the first chapter, we also presented the models needed later. In the second chapter, we focus on the economic behavior of companies and on the functions measuring economic efficiency. In the third chapter of the thesis, an analysis of allocative efficiency in individual models is constructed. With the help of examples, we tried to clarify the relationships between the relevant economic, technical and allocative efficiency. In the final part of the thesis, we numerically illustrated the decomposition of economic efficiencies on real data.

Keywords: Data envelopment analysis (DEA), efficiency, allocative efficiency

Obsah

Úvod **8**

1 Základné pojmy a definície **10**

1.1 Radiálny vstupne orientovaný model - R(I) 12

1.1.1 Príklad 1 12

1.2 Radiálny výstupne orientovaný model - R(O) 14

1.2.1 Príklad 2 14

1.3 Hyperbolický model 15

1.3.1 Príklad 3 16

1.4 DDF (*directional distance function*) model 17

1.4.1 Príklad 4 18

1.5 WA (*weighted aditive*) model 19

1.5.1 Príklad 5 20

2 Ekonomické správanie a ekonomická efektivita **22**

2.1 Nákladová funkcia a nákladová efektivita 22

2.2 Výnosová funkcia a výnosová efektivita 23

2.3 Funkcia rentability a rentabilná efektivita 24

2.4 Zisková funkcia a zisková neefektivita 25

3 Alokatívna (ne)efektivita **27**

3.1 Alokatívna efektivita v modeli $R(I)$ 27

3.1.1 Príklad 6 27

3.2 Alokatívna efektivita v modeli $R(O)$ 28

3.2.1 Príklad 7 29

3.3 Alokatívna efektivita v hyperbolickom modeli 30

3.3.1 Príklad 8 31

3.4 Alokatívna neefektivita v modeli DDF 31

3.4.1 Príklad 9 32

3.5 Alokatívna neefektivita v modeli WA 33

3.5.1 Príklad 10 34

3.6 Vlastnosti alokatívnych efektivít 35
3.6.1 Príklad 11 36

4 Empirická ilustrácia na dátach leteckých spoločností 38
4.1 Rozklad ekonomickej efektivity v orientovaných modeloch 41
4.2 Rozklad rentabilnej efektivity v hyperbolickom modeli 47
4.3 Rozklad ziskovej neefektivity v DDF modeli 51
4.4 Rozklad ziskovej neefektivity vo WA modeli 54

Záver 58

Zoznam použitej literatúry 60

Príloha A 63

Úvod

V dnešnom modernom svete venujeme stále väčšiu pozornosť efektivite a efektívnosti. Či už ide o voľný čas, prácu alebo domácnosť, vždy sa snažíme byť efektívni a efektívne riešiť naše úlohy. Pre firmy a pre výrobné subjekty zohráva efektívnosť dôležitú úlohu, napríklad z dôvodu dosiahnutia čo najvyššieho zisku. Preto sa snažia firmy efektívne využívať svoje finančné prostriedky a ľudské zdroje pre dosiahnutie čo najviac produktov. Nielen firmy sa snažia maximalizovať svoju produkciu, ale s efektívnosťou sa môžeme stretávať aj v zdravotníctve, školstve alebo v športe. Preto je pre nás dôležité určovanie efektívnosti a odhaľovanie opaku v dnešnej dobe.

Identifikácia efektivity alebo možnej neefektivity začala už v sedemdesiatych rokoch minulého storočia široko zaujímať matematikov a ekonómov, čo viedlo k vzniku disciplíny Obálková analýza dát (*Data Envelopment Analysis*), skrátene DEA. V súčasnej literatúre už existuje množstvo vedeckých prác a článkov, ktoré sa zaoberajú touto problematikou. V týchto článkoch môžeme nájsť definície jednotlivých DEA modelov, ktoré môžu byť užitočné pri rôznych úlohách.

Pomocou DEA analýzy dokážeme porovnávať určité útvary, ktoré vykonávajú rovnakú činnosť, napríklad ako firmy pôsobiace v rovnakom odvetví, alebo pobočky jednej banky, či športové tímy. Vieme určiť nielen efektívnosť daného útvaru, ale v prípade neefektívnosti môžeme identifikovať, kde by mal útvar urobiť zmeny, aby dosiahol efektívne výsledky, teda vieme nájsť tzv. efektívne vzory. DEA modely v skutočnosti riešia úlohy lineárneho programovania. Aby sme dosiahli úspech, veľmi dôležité je identifikácia vstupných a výstupných údajov, a po ich určení budeme schopní vybrať pre nás najvhodnejší DEA model. Teória DEA a základné DEA modely sú veľmi dobre popísané v skriptách [13], z čoho budeme vychádzať v našej práci.

Každá firma z ekonomického hľadiska túži dosiahnuť čo najlepšie výsledky a maximalizovať svoj zisk. Tieto výsledky chceme vyjadriť z matematického hľadiska, a preto v ekonómii definujeme určité funkcie merajúce ekonomickú efektivitu, pričom jednou z nich je zisková efektivita. Vyriešením DEA modelov získame technickú efektívnosť, ktorú môžeme pre tieto modely interpretovať ako príslušnú ekonomickú efektivitu v tieňových cenách. Hodnoty ekonomickej efektivity vyjadrené v skutočných trhových cenách sa nemusia rovnať hodnotám technickej efektivity. Rozdiel, resp. podiel týchto hodnôt sa interpretuje

ako alokatívna efektivita. V našej diplomovej práci sa zaoberáme práve spomínanou alokatívnou efektivitou a jej vlastnosťami. Za hlavné ciele považujeme analýzu alokatívnej efektivity v jednotlivých modeloch. Bližšie popíšeme rozklad ekonomických efektivít na technické a alokatívne efektivity, uvedieme v akom vzťahu sú k sebe a príslušné tvrdenia dokážeme. Výsledky z teórie objasníme pomocou príkladov a obrázkov, na ktorých aj graficky ilustrujeme, kde sa vyskytne alokatívna efektivita. Literatúra k tejto téme je dobre spracovaná v knihe [18] a v článku [1], z ktorých budeme najviac čerpať.

Práca je členená na štyri kapitoly. V prvej kapitole zavedieme používanú symboliku, vysvetlíme základné pojmy DEA modelovania a predstavíme neskôr potrebné modely. Pri každom modeli uvedieme aj krátky príklad, pomocou čoho znázorníme fungovanie jednotlivých modelov. Táto kapitola slúži ako teoretický základ práce. V druhej kapitole sa zameriavame na ekonomické správanie firiem a zadefinujeme funkcie merajúce ekonomickú efektivitu. Tretiu kapitolu venujeme alokatívnej efektivite (resp. neefektivite) v jednotlivých modeloch. Popíšeme vzťahy medzi príslušnými funkciami merajúce ekonomickú efektivitu, technickou efektivitou a alokatívnou efektivitou, následne ich dokážeme. Teóriu objasníme na príkladoch a na obrázkoch. Kapitolu uzatvára definícia dvoch významných vlastností alokatívnej efektivity, ktoré by mala splniť v rozumných prípadoch. Záverečná kapitola obsahuje numerickú ilustráciu rozkladu efektivít na reálnych dátach. Pri každom modeli uvedieme aj príslušné slacky technických efektivít. Výpočet realizujeme v softvéri *Julia*, predstavený v knihe [18].

1 Základné pojmy a definície

Uvažujme technológiu T charakterizovanú m vstupmi a s výstupmi. Vektorom $x \in \mathbb{R}^m_+$ budeme označovať hodnoty vstupov a hodnoty výstupov vektorom $y \in \mathbb{R}^s_+$. Hovoríme, že pre technológiu T je dvojica (x, y) prípustná, ak platí, že z x vieme technológiou T vyprodukovať y. V tejto práci predpokladáme, rovnako ako v [1], [18], že T je podmnožinou $\mathbb{R}^{m+n}_+$ a platia nasledovné axiómy:

(P1) $T \neq \oslash$,

(P2) $(0, y) \notin T$, výstupná produkcia, $y \neq 0$, vyžaduje použitie vstupov,

(P3) $T(x) := \{(u, y) \in T : u \leq x\}$ je ohraničený $\forall x \in \mathbb{R}^m_+$,

(P4) $(x, y) \in T, (x, -y) \leq (x', -y') \Rightarrow (x', y') \in T$, vstupy a výstupy sú voľne použiteľné,

(P5) T je uzavretá množina,

(P6) T je konvexná množina.

V DEA sa konštruuje aproximácia M technológie T pomocou pozorovaných údajov o n vstupno-výstupných dvojíc $(x_j, y_j), j = 1, \ldots, n$, pričom predpokladáme, že dáta sú kladné. Tieto dvojice sa v DEA označujú DMU_j, $j = 1, \ldots, n$, z anglického *Decision Making Unit*. Pre j-ty útvar označujeme vektor vstupov x_j a vektor výstupov y_j nasledovne:

$$x_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{bmatrix}, \quad y_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{ij} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ďalej definujeme matice vstupov X typu $m \times n$ a výstupov Y typu $s \times n$ nasledovne:

$$X := \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1j} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \ldots & x_{ij} & \ldots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mj} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1j} & \ldots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \ldots & y_{rj} & \ldots & y_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \ldots & y_{sj} & \ldots & y_{sn} \end{bmatrix}$$

Na základe dát X, Y sa definuje [3] tzv. *množinu produkčných možností* M, ktorá odpovedá variabilným výnosom z rozsahu:

$$M = \left\{(x, y) \in R^m \times R^s \quad | \quad X\lambda \leq x, \quad Y\lambda \geq y, \quad \lambda > 0, \quad e^T\lambda = 1\right\}, \tag{1}$$

kde e je vektor samých jednotiek.

Ďalej uvedieme definície pojmov Pareto optimalita a efektívna hranica množiny M.

Definícia 1.1. *Bod $(x_o, y_o) \in M$ sa nazýva **Pareto optimálnym** vzhladom na M, ak neexistuje $(x, y) \in M$, $(x, y) \neq (x_o, y_o)$ také, že $x \leq x_o, y \geq y_o$. [13]*

Teda, v Pareto optimálnom bode platí, že nevieme znížiť vstupy bez toho, aby sme neznížili výstupy a naopak, nevieme zvýšiť výstupy bez zvýšenia vstupov. V dôsledku toho by neefektívna firma mohla produkovať rovnaké výstupy s menším množstvom aspoň jedného vstupu, alebo mohla použiť rovnaké vstupy na výrobu väčšieho množstva aspoň jedného výstupu. Práve preto definujeme, rovnako ako v [13], pre množinu M dve podmnožiny jej hranice ∂M:

- **(silno)efektívna hranica** $\partial^S M$,
- **pseudoefektívna hranica** $\partial^P M$.

Efektívna hranica pozostáva z bodov, ktoré sú v M Pareto optimálne, to znamená:

$$\partial^S M = \{(x, y) \in M \quad | \quad (\tilde{x}, -\tilde{y}) \leq (x, -y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (x, y) \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \notin M\}.$$

Pseudoefektívnu hranicu definujeme ako množinu pseudoefektívnych bodov, t.j. tých bodov z ∂M, ktoré nie sú efektívne, to znamená:

$$\partial^P M = \{(x, y) \in M \quad | \quad (\tilde{x}, -\tilde{y}) < (x, -y) \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \notin M\} \backslash \partial^S M.$$

V nasledujúcich častiach predstavíme základné DEA modely, s ktorými budeme v ďalšom pracovať. Všetky modely budeme uvažovať nad množinou M predstavujúcou variabilné výnosy z rozsahu. Modelmi získame tzv. technickú efektivitu resp. neefektivitu. Najprv popíšeme tzv. radiálne orientované modely, označované aj ako BBC modely podľa svojich autorov Bankera, Charnesa a Coopra [3]. Poznáme dve verzie modelov - vstupne resp. výstupne orientované.

1.1 Radiálny vstupne orientovaný model - R(I)

Vstupne orientované radiálne modely $R(I)$ sa vyznačujú radiálnym skracovaním vstupov pri nezmenšenej hodnote výstupu. Hodnota $TE_{R(I)}(x_o, y_o)$ technickej efektivity útvaru $(x_o, y_o) \in M$ v modeli $R(I)$ sa definuje pomocou úlohy:

$$\begin{aligned} TE_{R(I)}(x_o, y_o) = \min_{\vartheta_o, \lambda} \quad & \vartheta_o, \\ & X\lambda \leq \vartheta_o x_o, \\ & Y\lambda \geq y_o, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

O tomto modeli je známe podľa [13], že je dobre definovaný vzhľadom na naše predpoklady o dátach, optimálna hodnota je

$$\vartheta_o^* = TE_{R(I)}(x_o, y_o) \leq 1.$$

Jednoznačne definovaná projekcia

$$(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (\vartheta_o^* x_o, y_o) \in \partial M,$$

nemusí patriť do $\partial^S M$. V podkapitole 1.1.1 uvedieme príklad, kde pomocou troch bodov ukážeme ako sa spočíta ϑ_o, ako sa projektuje na ∂M a či body sú efektívne alebo nie. Optimálnu hodnotu ϑ_o^* môžeme interpretovať nasledovne:

- ϑ_o^* je efektivitou bodu (x_o, y_o), ak projekcia $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) \in \partial^S M$
- ϑ_o^* je pseudoefektivitou bodu (x_o, y_o), ak projekcia $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) \in \partial^P M$.

Skutočnosť, či ϑ_o^* je efektivitou sa numericky dá overiť tzv. druhou fázou [13], kde pri zafixovanej hodnote ϑ_o^* sa maximalizuje súčet slackov. Ak je súčet slackov nulový, tak ϑ_o^* je efektivitou.

1.1.1 Príklad 1

Uvedieme krátky a jednoduchý príklad na znázornenie fungovania vstupne orientovaného radiálneho modelu $R(I)$.

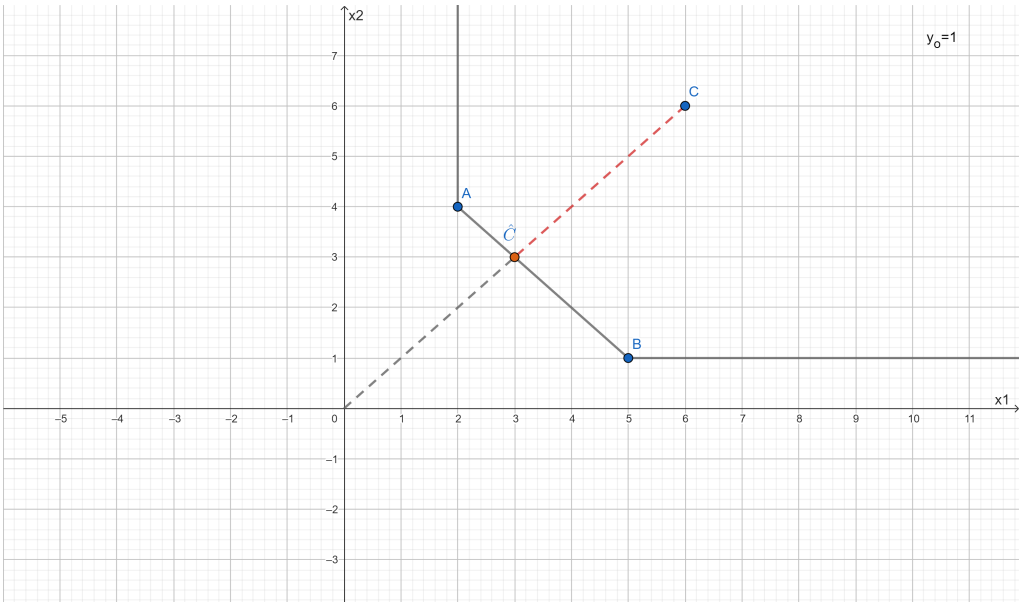
Uvažujme tri body $A = (2, 4, 1), B = (5, 1, 1), C = (6, 6, 1)$. Prvé dve súradnice jednotlivých bodov prislúchajú k vstupom a tretia zložka k výstupom. Výstupy sú identicky rovné jednotke, tým pádom Obr. 1 nakreslíme v rovine $y = 1$. Efektivitu jednotlivých bodov počítame pomocou úlohy (2). V tomto prípade matica X má rozmer 3×2, lebo máme tri body a dva vstupy, matica Y má rozmer 3×1 a obsahuje samé jednotky, keďže výstupy sú rovné 1. Po dosadením do úlohy (2) sme zistili, že body A a B sú efektívne, kým bod C je neefektívny.

Uvedené výsledky nám potvrdí aj Obr. 1, na ktorom si môžeme všimnúť, že efektívna hranica sa skladá z bodov, ktoré ležia na úsečke určenej bodmi A a B. Vstupná efektivita bodov A a B je $\vartheta^*_A = \vartheta^*_B = 1$. Je vidno tiež, že bod C je z vnútra množiny M, teda je neefektívny. Sprojektovaním bodu C dostaneme bod $\hat{C} = (3, 3, 1)$, ktorý leží na efektívnej hranice. Platí teda nasledovné

$$(\hat{x}_{C1}, \hat{x}_{C2}, \hat{y}_C) = (3, 3, 1) = (\vartheta^*_C(x_{C1}, x_{C2}), y_C) = (\vartheta^*_C(6, 6), 1),$$

z čoho vyplýva, že vstupná efektivita bodu C sa rovná:

$$\vartheta^*_C = \frac{1}{2}.$$



Obr. 1: Znázornenie radiálneho vstupne orientovaného modelu

1.2 Radiálny výstupne orientovaný model - R(O)

Výstupne orientované radiálne modely $R(O)$ sa vyznačujú radiálnym predlžovaním výstupov pri nezväčšenej hodnote vstupu. Hodnota $TE_{R(O)}(x_o, y_o)$ technickej efektivity útvaru $(x_o, y_o) \in M$ v modeli $R(O)$ sa definuje pomocou úlohy:

$$\begin{aligned} \Big(TE_{R(O)}(x_o, y_o)\Big)^{-1} = \max_{\psi_o, \lambda} \quad & \psi_o, \\ & X\lambda \leq x_o, \\ & Y\lambda \geq \psi_o y_o, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

O tomto modeli je známe podľa [13], že je dobre definovaný vzhľadom na naše predpoklady o dátach, prevrátená optimálna hodnota je

$$\frac{1}{\psi_o^*} = TE_{R(O)}(x_o, y_o) \leq 1.$$

Jednoznačne definovaná projekcia

$$(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (x_o, \psi_o^* y_o) \in \partial M,$$

nemusí patriť do $\partial^S M$. Ako sa spočíta ψ_o, ako sa projektuje na ∂M a či dané body sú efektívne alebo nie znázornime na príklade v podkapitole 1.2.1. Optimálnu hodnotu ψ_o^* môžeme interpretovať nasledovne:

- $\frac{1}{\psi_o^*}$ je efektivitou bodu (x_o, y_o), ak projekcia $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) \in \partial^S M$,
- $\frac{1}{\psi_o^*}$ je pseudoefektivitou bodu (x_o, y_o), ak projekcia $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) \in \partial^P M$.

1.2.1 Príklad 2

V tejto časti predstavíme príklad, ktorý nám umožní lepšie pochopiť fungovanie výstupne orientovaného radiálneho modelu $R(O)$.

Uvažujme tri body $A = (1, 5, 2), B = (1, 3, 6), C = (1, 2, 2)$. V tomto prípade chceme znázorniť radiálne predlžovanie výstupov, teda vstupy položíme rovné jednotke a Obr. 2 nakreslíme v rovine $x = 1$. Efektivitu jednotlivých bodov počítame pomocou úlohy (3).

Rozmery sa v podstate vymenia, keďže máme tri body a dva výstupy, matica Y má rozmer 3×2 a matica X má rozmer 3×1. Po dosadením do úlohy (3) sme zistili, že body A a B sú efektívne, kým bod C je neefektívny.

Získané výsledky, pomocou vyriešením úlohy (3), potvrdí aj Obr. 2, na ktorom vidíme, že efektívna hranica sa skladá z bodov, ktoré ležia na úsečke určenej bodmi A a B. Výstupná efektivita bodov A a B je $\psi_A^* = \psi_B^* = 1$. Bod C sa nachádza vo vnútri množiny M, teda je neefektívny. Sprojektovaním bodu C dostaneme bod $\hat{C} = (1, 4, 4)$, ktorý leží na efektívnej hranice. Platí teda nasledovné

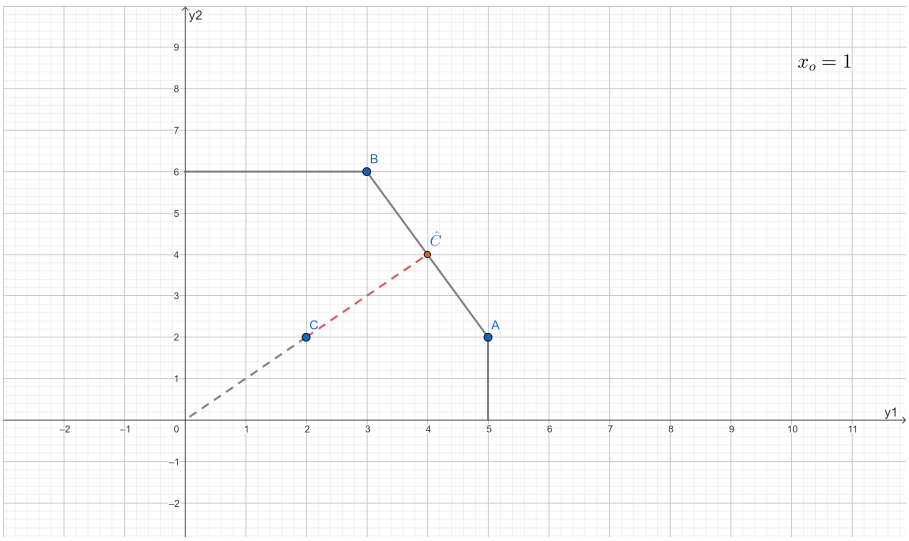
$$(\hat{x}_C, \hat{y}_{C1}, \hat{y}_{C2}) = (1, 4, 4) = (x_C, \psi_C^*(y_{C1}, y_{C2})) = (1, \psi_C^*(2, 2)),$$

z čoho vyplýva, že

$$\psi_C^* = 2,$$

a teda výstupná efektivita bodu C je

$$\frac{1}{\psi_C^*} = \frac{1}{2}.$$



Obr. 2: Znázornenie radiálneho výstupne orientovaného modelu

1.3 Hyperbolický model

Hyperbolický model, ktorý predstavili Färe, Grosskopf a Lovell v roku 1985 [11] ako miera technickej efektívnosti, kombinuje Farrellove vstupne a výstupne orientované ra-

diálne modely [12] do jednej funkcie, ktorá umožňuje súčasné radiálne skracovanie vstupov a predlžovanie výstupov pomocou jediného parametra. Táto vlastnosť hyperbolického modelu sa ukázala ako veľmi užitočná najmä pre environmentálne a iné aplikácie s nežiaducimi vstupmi alebo výstupmi. Na druhej strane, hyperbolický model vedie k úlohe nelineárneho konvexného programovania, a preto vyžaduje použitie techník konvexného programovania.

Hodnota $TE_H(x_o, y_o, \alpha)$ technickej efektivity útvaru $(x_o, y_o) \in M$ v hyperbolickom modeli sa definuje pomocou úlohy:

$$\begin{aligned} TE_H(x_o, y_o, \alpha) = \min_{\delta_o, \lambda} \quad & \delta_o, \\ & X\lambda \leq \delta_o^{1-\alpha} x_o, \\ & Y\lambda \geq \frac{1}{\delta_o^{\alpha}} y_o, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

pričom $\alpha \in [0, 1]$. O tomto modeli je známe podľa [15], že je dobre definovaný vzhľadom na naše predpoklady o dátach, optimálna hodnota je

$$0 < \delta_o^* = TE_H(x_o, y_o, \alpha) \leq 1.$$

Jednoznačne definovaná projekcia

$$(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = \left((\delta_o^{1-\alpha})^* x_o, \frac{1}{(\delta_o^{\alpha})^*} y_o \right) \in \partial M,$$

nemusí patriť do $\partial^S M$. Optimálnu hodnotu δ_o^* môžeme interpretovať nasledovne:

- δ_o^* je efektivitou bodu (x_o, y_o), ak projekcia $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) \in \partial^S M$,
- δ_o^* je pseudoefektivitou bodu (x_o, y_o), ak projekcia $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) \in \partial^P M$.

1.3.1 Príklad 3

Uvedieme krátky a jednoduchý príklad na lepšie pochopenie fungovania hyperbolického modelu.

Uvažujme štyri body $A = (4, 4), B = (3, 2), C = (7, 6), D = (6, 2)$. Prvá súradnica bodov prislúcha k vstupom a druhá zložka k výstupom, teda nachádzame sa v priestore

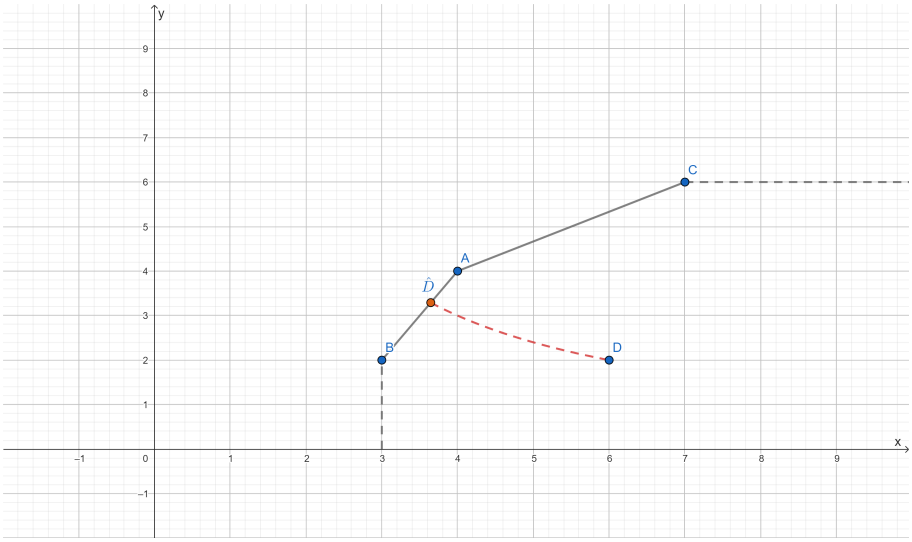
(x, y). Hodnotu technickej efektivity jednotlivých bodov počítame pomocou úlohy (4). V tomto prípade obe matice X a Y majú rozmer 4×1. V tejto úlohe sme použili $\alpha = \frac{1}{2}$. Po dosadením do úlohy (4) sme zistili, že body A, B a C sú efektívne, kým bod D je neefektívny.

Na Obr. 3 si môžeme všimnúť, že efektívna hranica sa skladá z bodov, ktoré ležia na úsečkách určených bodmi B, A a A, C. Efektivita bodov A, B, C je $\delta_A^* = \delta_B^* = \delta_C^* = 1$. Je vidno tiež, že bod D je z vnútra množiny M, teda je neefektívny. Sprojektovaním bodu D dostaneme bod $\hat{D} = (3{,}65, 3{,}29)$, ktorý leží na efektívnej hranice. Platí teda nasledovné

$$(\hat{x}_D, \hat{y}_D) = (3{,}65, 3{,}29) = \left(\left(\delta_D^{\frac{1}{2}}\right)^* x_D, \frac{1}{\left(\delta_D^{\frac{1}{2}}\right)^*} y_D \right) = \left(6 \left(\delta_D^{\frac{1}{2}}\right)^*, \frac{2}{\left(\delta_D^{\frac{1}{2}}\right)^*} \right),$$

z čoho vyplýva, že efektivita bodu D sa rovná:

$$\delta_D^* = 0{,}369208.$$



Obr. 3: Znázornenie hyperbolického modelu

1.4 DDF (*directional distance function*) model

V súčastnosti sa zvýšila využiteľnosť relatívne nového modelu, tzv. *Directional Distance Function* skrátene *DDF*. Tento model bol prvýkrát vypracovaný Chambersom a kol. v článku [9]. DDF model patrí medzi neorientované radiálne modely. Jeho výhodou je, že súčasne vieme skracovať vstupy alebo predlžovať výstupy pomocou jedného koeficientu

β. V tomto modeli kľúčovú rolu zohráva práve smer, v ktorom budeme skracovať resp. predlžovať údaje útvaru. Model vyžaduje dopredu stanoviť smerové vektory $(g_o^x, g_o^y)^T \geq 0$, od ktorých môžu závisieť niektoré vlastnosti modelu.

Hodnota $TI_{DDF}(x_o, y_o)$ technickej neefektivity útvaru $(x_o, y_o) \in M$ v modeli DDF sa definuje pomocou úlohy:

$$\begin{aligned} TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y) = \max_{\beta_o, \lambda} \quad & \beta_o, \\ & X\lambda \leq x_o - \beta_o g_o^x, \\ & Y\lambda \geq y_o + \beta_o g_o^y, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

O tomto modeli je známe podľa [18], že je dobre definovaný vzhľadom na naše predpoklady o dátach, optimálna hodnota je

$$\beta_o^* = TI_{DDF}(x_o, y_o) \geq 0,$$

čo vyjadruje neefektivitu daného útvaru (x_o, y_o), efektivitu dostaneme $1 - TI_{DDF}$. Jednoznačne definovaná projekcia

$$(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (x_o - \beta_o^* g_o^x, y_o + \beta_o^* g_o^y) \in \partial M,$$

nemusí patriť do $\partial^S M$. Optimálnu hodnotu β_o^* môžeme interpretovať ako tzv. mieru neefektivity, teda pre efektívny útvar (x_o, y_o) nadobúda hodnotu 0.

1.4.1 Príklad 4

V tejto časti predstavíme príklad na znázornenie fungovania DDF modelu.
Uvažujme štyri body $A = (4, 4), B = (3, 2), C = (7, 6), D = (6, 2)$. Prvá súradnica bodov prislúcha k vstupom a druhá zložka k výstupom, teda nachádzame sa v priestore (x, y). Hodnotu technickej neefektivity jednotlivých bodov počítame pomocou úlohy (5). V tomto prípade obe matice X a Y majú rozmer 4×1. Po dosadením do úlohy (5) sme zistili, že body A, B a C sú efektívne, kým bod D je neefektívny.

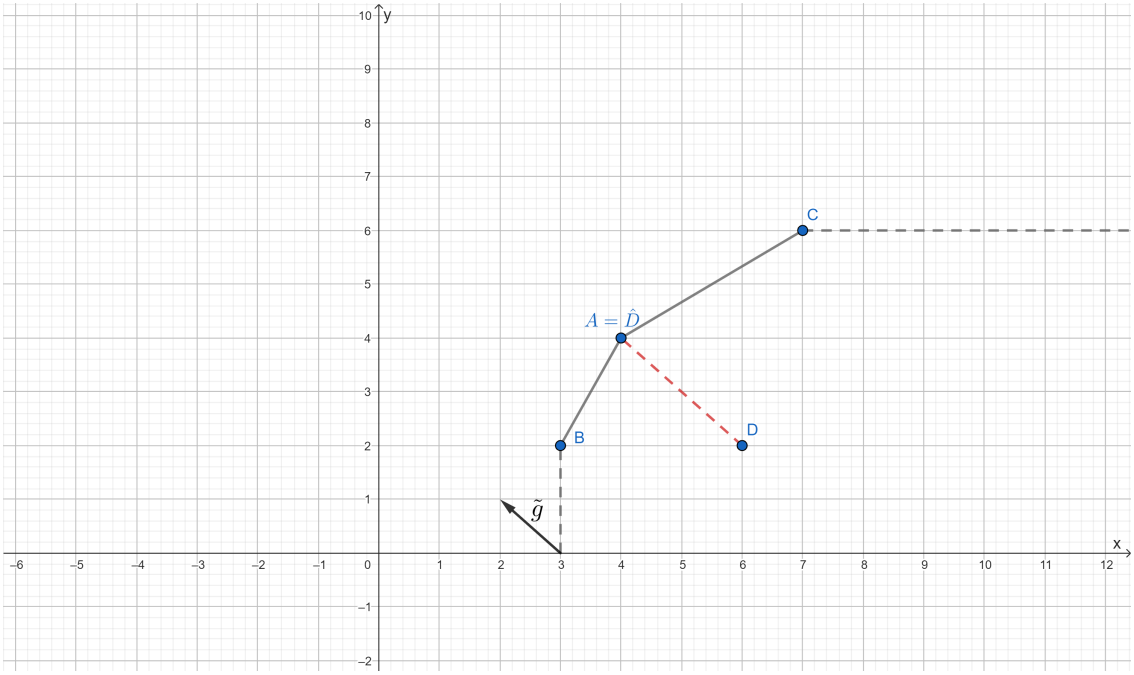
Na Obr. 4 si môžeme všimnúť, že efektívna hranica sa skladá z bodov, ktoré ležia na úsečkách určeným bodmi B, A a A, C. Neefektivita bodov A, B, C je $\beta_A^* = \beta_B^* = \beta_C^* = 0$.

Je vidno tiež, že bod D je z vnútra množiny M, teda je neefektívny. Sprojektovaním bodu D v smere $\tilde{g} = (g^x, g^y)^T = (-1, 1)^T$ dostaneme bod $A = \hat{D} = (4, 4)$, ktorý leží na efektívnej hranice. Platí teda nasledovné

$$(\hat{x}_D, \hat{y}_D) = (4, 4) = (x_D - \beta_D^* g_o^x, y_D + \beta_D^* g_o^y) = (6 - \beta_D^* \times 1, 2 + \beta_D^* \times 1),$$

z čoho vyplýva, že neefektivita bodu D sa rovná:

$$\beta_D^* = 2.$$



Obr. 4: Znázornenie DDF modelu

1.5 WA (*weighted aditive*) model

Po zavedení radiálne orientovaných modelov v literatúre boli definované ďalšie prístupy na meranie vzdialenosti medzi jednotlivými útvarmi a efektívnou hranicou, cieľom vyriešiť určité nevýhody radiálnych prístupov. Jedna z nevýhod radiálnych orientovaných modelov je, že pri hľadaní efektívneho vzoru uprednostňujú buď vstupy pred výstupmi, alebo výstupy pred vstupmi, ale niekedy nemáme preferencie, či chceme znížiť vstupy alebo naopak, zvýšiť výstupy. Ďalšia nevýhoda je, že pri optimalizačných modeloch (2) a (3) sa prehliada určitá neefektívnosť, ktorá pochádza zo slackov. V tomto kontexte, aditívny model bol prvýkrát vypracovaný Charnesom v článku [10]. Vychádzajúc z článku

[10], ďalší matematici zaviedli niektoré modifikácie aditívneho modelu, pridaním váh do účelovej funkcie. Rozšírenie modelu možno nájsť v prácach [7], [8] a [17].

Hodnota $TI_{WA}(x_o, y_o)$ technickej neefektivity útvaru $(x_o, y_o) \in M$ v modeli WA s kladnými váhami w_o^x, w_o^y sa definuje pomocou úlohy:

$$\begin{aligned} TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y) = \max_{\lambda, s^x, s^y} \quad & (w_o^x)^T s^x + (w_o^y)^T s^y, \\ & X\lambda + s^x = x_o, \\ & Y\lambda - s^y = y_o, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

kde účelová funkcia meria neefektivitu. Výhodou tohto modelu je, že pre útvar $(x_o, y_o) \in M$ sa optimalizačná úloha (6) simultánne snaží maximálne znížiť vstupy a zvýšiť výstupy.

O tomto modeli je známe podľa [1], že je dobre definovaný vzhľadom na naše predpoklady o dátach. Optimálna hodnota úlohy (6) je

$$(w_o^x)^T s^{x*} + (w_o^y)^T s^{y*} = TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y) \geq 0,$$

a projekciou je

$$(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (X\lambda^*, Y\lambda^*) = (x_o - s^{x*}, y_o + s^{y*}) \in \partial^S M.$$

Táto projekcia však nemusí byť definovaná jednoznačne. Útvar $(x_o, y_o) \in M$ je technicky efektívny ak optimálne slacky sú nulové:

$$s^{x*} = s^{y*} = 0 \Rightarrow TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y) = 0,$$

čiže čím väčšia je optimálna hodnota (s^{x*}, s^{y*}) tým je väčšia aj neefiktivita útvaru $(x_o, y_o) \in M$.

1.5.1 Príklad 5

V tejto časti uvedieme krátky príklad na lepšie pochopenie fungovania WA modelu. Uvažujme štyri body $A = (4, 4), B = (3, 2), C = (7, 6), D = (6, 2)$. Prvá súradnica bodov prislúcha k vstupom a druhá zložka k výstupom, teda nachádzame sa v priestore (x, y). Hodnotu technickej neefektivity jednotlivých bodov počítame pomocou úlohy (6). V tomto

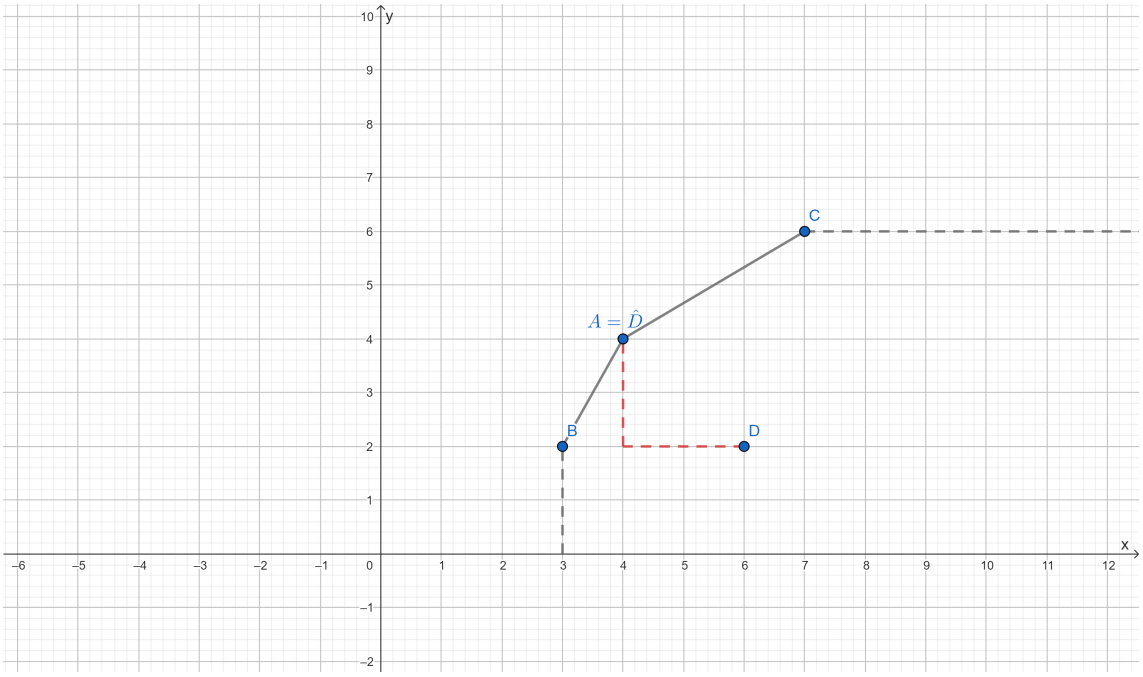
prípade obe matice X a Y majú rozmer 4×1. Po dosadením do úlohy (6) sme zistili, že body A, B a C sú efektívne, kým bod D je neefektívny.

Na Obr. 5 si môžeme všimnúť, že efektívna hranica sa skladá z bodov, ktoré ležia na úsečkách určeným bodmi B, A a A, C. Slacky $(s_A^x, s_A^y)^T = (s_B^x, s_B^y)^T = (s_C^x, s_C^y)^T = (0,0)^T$, teda neefektivita bodov A, B, C je $(w_o^x)^T s^x + (w_o^y)^T s^y = 0$, pričom $(w_o^x, w_o^y)^T = (1,1)^T$. Je vidno tiež, že bod D je z vnútra množiny M, teda je neefektívny. Sprojektovaním bodu D dostaneme bod $A = (4,4)$, ktorý leží na efektívnej hranice. Platí teda nasledovné

$$(\hat{x}_D, \hat{y}_D) = (4,4) = (x_D - s_D^{x*}, y_D + s_D^{y*}) = (6-2, 2+2),$$

z čoho vyplýva, že neefektivita bodu D sa rovná:

$$(w_o^x)^T s_D^{x*} + (w_o^y)^T s_D^{y*} = 4.$$



Obr. 5: Znázornenie WA modelu

2 Ekonomické správanie a ekonomická efektivita

V rámci trhu sa firmy zameriavajú na dosiahnutie najlepšieho možného hospodárskeho výsledku. Vo všeobecnosti sa predpokladá, že firmy majú v úmysle maximalizovať zisk, definovaný ako príjmy mínus náklady. Je však možné, že firma čelí obmedzeniam na strane výstupu alebo vstupu, ktoré bránia maximalizácii zisku výberom optimálnych výstupných a vstupných množstiev. V týchto prípadoch je optimalizačné správanie firiem reprezentované nákladovými a výnosovými funkciami. Tieto tri komplementárne pohľady, tj. náklady, výnosy a zisk, sú v praxi doplnené aj o možnosť reinterpretácie ekonomického správania firmy z hľadiska pomeru výnosov k nákladom, a nie ich rozdiel, zodpovedajúci konceptu rentability (*profitability*).

Označme vektorom $c \in R^m_{++}$ ceny vstupov a vektorom $p \in R^s_{++}$ ceny výstupov, pričom predpokladáme, že poznáme ich skutočné hodnoty.Štandardné DEA modely nepotrebujú znalosť c, p, ony si vytvoria svoje vlastné „tieňové ceny" pomocou multiplikatívnych verzií jednotlivých modelov.

V ďalšej časti tejto kapitoly zhrnieme definície funkcií nákladov, výnosov, rentability a zisku a príslušných efektivít.

2.1 Nákladová funkcia a nákladová efektivita

Pre každú fixovanú hodnotu výstupu $\bar{y} \geq 0$ a cenu vstupov c sa *nákladová funkcia* (*cost function*) definuje v prácach [1], [18] podľa nasledovného predpisu:

$$C(\bar{y}, c) = \min_x \{c^T x \quad | \quad (x, \bar{y}) \in M\}. \tag{7}$$

To znamená, že nákladová funkcia predstavuje minimálne náklady na výrobu fixného množstva výstupov $\bar{y}$ pri daných cenách vstupov c. Poznamenajme, že pre hodnoty $\bar{y}$ také, že existuje x, pre ktoré je $(x, \bar{y}) \in M$, je nákladová funkcia dobre definovaná a jej ďalšie vlastnosti sú popísané v [18, str. 44]. Jej hodnoty sa dajú vypočítať pomocou

nasledovnej úlohy lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} C(\bar{y}, c) = \min_{x,\lambda} \quad & c^T x, \\ & X\lambda \leq x, \\ & Y\lambda \geq \bar{y}, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Hodnotu x, v ktorej sa nadobúda minimum budeme označovať $\bar{x} = \bar{x}(\bar{y})$.

Pomocou nákladovej funkcie môžeme definovať *nákladovú efektivitu* $CE(x_o, y_o, c)$ bodu $(x_o, y_o) \in M$ nasledovne [18, str. 45]:

$$CE(x_o, y_o, c) = \frac{C(y_o, c)}{c^T x_o}. \tag{8}$$

To znamená, ze nákladová efektivita bodu (x_o, y_o) je pomerom minimálnych nákladov na úrovni výstupu útvaru $\bar{y} = y_o$ a jeho skutočných nákladov $c^T x_o$. Zrejme $CE(x_o, y_o, c) \leq 1$.

2.2 Výnosová funkcia a výnosová efektivita

Pre každú fixovanú hodnotu vstupu $\bar{x} \geq 0$ a cenu výstupov p sa *výnosová funkcia* (*revenue function*) definuje v prácach [1], [18] podľa nasledovného predpisu:

$$R(\bar{x}, p) = \max\{p^T y \quad | \quad (\bar{x}, y) \in M\}, \tag{9}$$

To znamená, že výnosová funkcia predstavuje maximálny výnos z predaja výstupných množstiev pri daných (fixných) výstupných cenách p. Podotýkajme, že pre hodnoty $\bar{x}$ také, že existuje y, pre ktoré je $(\bar{x}, y) \in M$, je výnosová funkcia dobre definovaná a jej ďalšie vlastnosti sú popísané v [18, str. 46]. Jej hodnoty sa dajú vypočítať pomocou nasledovnej úlohy lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} R(\bar{x}, p) = \min_{y,\lambda} \quad & p^T y, \\ & X\lambda \leq \bar{x}, \\ & Y\lambda \geq y, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Hodnotu y, v ktorej sa nadobúda maximum budeme označovať $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$.

Pomocou výnosovej funkcie môžeme definovať *výnosovú efektivitu* $RE(x_o, y_o, p)$ pre $(x_o, y_o) \in M$ nasledovne [18, str. 47]:

$$RE(x_o, y_o, p) = \frac{p^T y_o}{R(x_o, p)}. \tag{10}$$

To znamená, že výnosová efektivita bodu (x_o, y_o) je pomerom jeho skutočných výnosov $p^T y_o$ a maximálnych výnosov na úrovni vstupu útvaru $\bar{x} = x_o$. Zrejme $RE_(x_o, y_o, p) \leq 1$.

2.3 Funkcia rentability a rentabilná efektivita

Funkciu rentability definujeme podľa [1], [18] pomocou nasledovného predpisu:

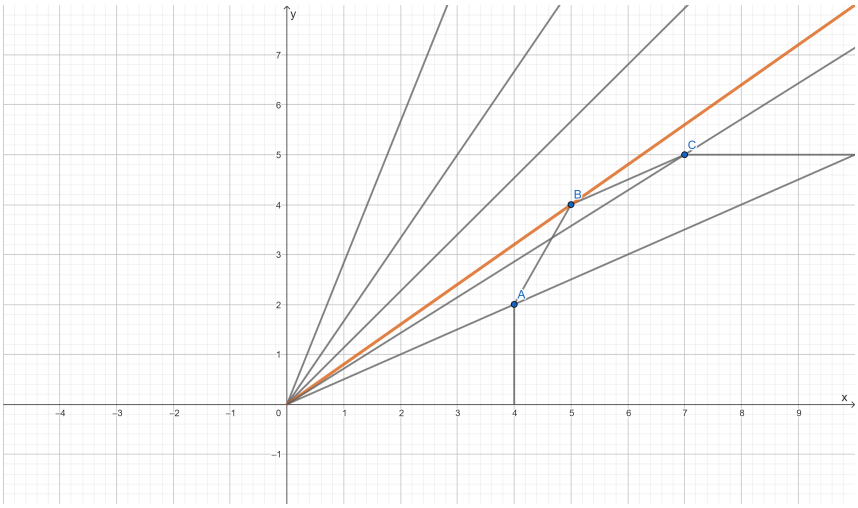
$$\Gamma(c, p) = \max \left\{ \frac{p^T y}{c^T x} \quad | \quad (x, y) \in M \right\}, \tag{11}$$

Funkcia rentability predstavuje maximálny pomer výnosov ku nákladom vzhľadom na technológiu, vstupné a výstupné ceny. Pre hodnoty $(x, y) \in M$ je funkcia rentability dobre definovaná a jej ďalšie vlastnosti sú popísané v [18, str. 48]. Vidíme, že účelová funkcia v tomto prípade nie je lineárna, teda musíme ju transformovať, aby sme dostali úlohu v tvare lineárneho programovania.

Transformáciu na úlohu lineárneho programovania spravíme pomocou úrovňových množín. Pre úrovňovú množinu funkcie $\Gamma(c, p)$, platí, že je to množina bodov, kde hodnota funkcie $\Gamma(c, p)$ ostáva konštantná. Nech k je nejaká konštanta a uvažujme $\Gamma(c, p) = k$. Potom platí

$$\frac{p^T y}{c^T x} = k \Leftrightarrow p^T y - k c^T x = 0,$$

teda úrovňové množiny pochádzajú počiatkom súradnicovej sústavy a preto sa maximum v (11) nadobúda v DMU, ktorý odpovedá konštantným výnosom z rozsahu (CRS). Na Obr. 6 znázorníme úrovňové množiny, vidíme, že maximum úlohy (11) sa nadobúda v bode B, ktorý odpovedá CRS.



Obr. 6: Ilustrácia úrovňových množín funkcie rentability

Hodnoty funkcie $\Gamma(c,p)$ sa dajú vypočítať pomocou nasledovnej úlohy lineárneho programovania:

$$\begin{aligned}\Gamma(c,p) = \max_{\lambda,x,y} \quad & p^T y, \\ & c^T x = 1, \\ & X\lambda \leq x, \\ & Y\lambda \geq y, \\ & \lambda \geq 0.\end{aligned}$$

Pomocou funkcie rentability môžeme definovať *rentabilnú efektivitu* $\Gamma E(x_o, y_o, c, p)$ pre $(x_o, y_o) \in M$ nasledovne [18, str. 50]:

$$\Gamma E(x_o, y_o, c, p) = \frac{\frac{p^T y_o}{c^T x_o}}{\Gamma(c,p)}. \tag{12}$$

To znamená, že rentabilná efektivita útvaru (x_o, y_o) je pomerom jeho skutočnej rentability $\frac{p^T y_o}{c^T x_o}$ a maximálnej rentability. Pokiaľ teda pozorovaná firma nepožaduje a nedodáva optimálne vstupné a výstupné množstvá, dostáva sa do rentabilnej neefektívnosti. Zrejme $\Gamma E(x_o, y_o, c, p) \leq 1$.

2.4 Zisková funkcia a zisková neefektivita

Ziskovú funkciu definujeme podľa [1], [18] pomocou nasledovného predpisu:

$$\Pi(c,p) = \max\{p^T y - c^T x \quad | \quad (x,y) \in M\} \tag{13}$$

Najreprezentatívnejšia miera ekonomickej efektívnosti zodpovedá ziskovej funkcie, definovanej ako maximálny príjem mínus náklady, vzhľadom na technológiu, ceny vstupov a výstupov. Dôvodom je, že maximalizácia zisku je všeobecne akceptovaným prevádzkovým cieľom firiem. Pre hodnoty $(x, y) \in M$ je zisková funkcia dobre definovaná a jej ďalšie vlastnosti sú popísané v [18, str. 51]. Jej hodnoty sa dajú vypočítať pomocou nasledovnej úlohy lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \Pi(c,p) = \max_{\lambda,x,y} \quad & p^T y - c^T x, \\ & X\lambda \leq x, \\ & Y\lambda \geq y, \\ & e^T\lambda = 1, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Pomocou ziskovej funkcie môžeme definovať *ziskovú neefektivitu* $\Pi I(x_o, y_o, c, p)$ pre $(x_o, y_o) \in M$ nasledovne [18, str. 52]:

$$\Pi I(x_o, y_o, c, p) = \Pi(c, p) - (p^T y_o - c^T x_o). \tag{14}$$

To znamená, že zisková neefektivita útvaru (x_o, y_o) je rozdiel medzi maximálnym ziskom a skutočným ziskom útvaru (x_o, y_o). Zrejme $\Pi I(x_o, y_o, c, p) \geq 0$.

3 Alokatívna (ne)efektivita

V tejto kapitole budeme definovať alokatívne efektivity resp. neefektivity podľla jednotlivých modelov. Pritom budeme využívať skutočnosť, že technická (ne)efektivita poskytovaná jednotlivými modelmi sa dá dať do určitého vzťahu s niektorým druhom ekonomickej (ne)efektivity odvodenej v predchádzajúcej kapitole. Takýto druh vzťahov sa v práci [18] označuje ako Fenchel-Mahlerova nerovnosť.

3.1 Alokatívna efektivita v modeli $R(I)$

Pre vstupne orientovaný radiálny model $R(I)$ odvodíme vzťah medzi nákladovou efektivitou a technickou efektivitou bodu $(x_o, y_o) \in M$.

Tvrdenie 3.1. *Pre každé $(x_o, y_o) \in M$ a ľubovoľnú fixnú hodnotu ceny vstupov c platí medzi nákladovou efektivitou $CE(x_o, y_o, c)$ a technickou efektivitou $TE_{R(I)}(x_o, y_o)$ nasledovný vzťah:*

$$CE(x_o, y_o, c) \leq TE_{R(I)}(x_o, y_o). \tag{15}$$

Dôkaz. Označme $\vartheta_o^* = TE_{R(I)}(x_o, y_o), \hat{x}_o = \vartheta_o^* x_o$ projekciu a $\bar{x}$ hodnotu, v ktorej sa nadobúda minimum v definícii nákladovej funkcie.

$$CE(x_o, y_o, c) = \frac{C(y_o, c)}{c^T x_o} = \frac{c^T \bar{x}}{c^T x_o} \leq \frac{c^T \hat{x}_o}{c^T x_o} = \frac{c^T \vartheta_o^* x_o}{c^T x_o} = \vartheta_o^* = TE_{R(I)}(x_o, y_o)$$

□

Alokatívnu efektivitu bodu $(x_o, y_o) \in M$ pri fixnej cene potom definujeme pomocou (15) ako multiplikatívny reziduál podľa vzťahu:

$$AE_{R(I)}(x_o, y_o, c) = \frac{CE(x_o, y_o, c)}{TE_{R(I)}(x_o, y_o)} \leq 1.$$

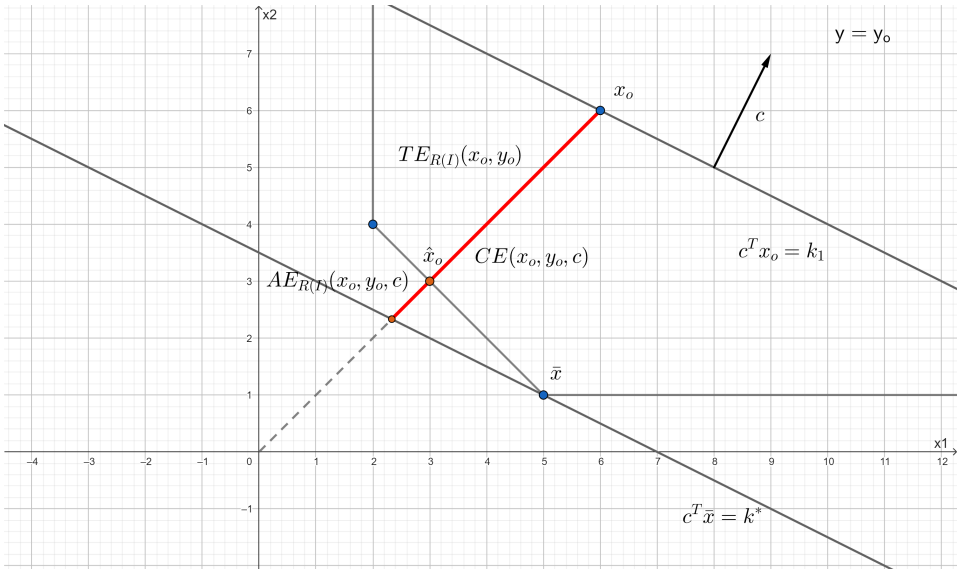
3.1.1 Príklad 6

Uvedieme krátky a jednoduchý príklad pre lepšie pochopenie vzťahov medzi nákladovou efektivitou $CE(x_o, y_o, c)$, technickou efektivitou $TE_{R(I)}(x_o, y_o)$ a alokatívnou efektivitou $AE_{R(I)}(x_o, y_o, c)$.

Na Obr. 7 sú dané tri body, pričom ich súradnice x_1 a x_2 sú tie isté ako v príklade 1 v podkapitole 1.1.1, len teraz sa nachádzame v rovine $y = y_o$. Nech ceny vstupov sú

$c = (1, 2)^T$, potom nákladová funkcia nadobúda minimum v bode $\bar{x} = (5, 1)$. Hodnota nákladovej funkcie C v bode $\bar{x}$ je 7 a v x_o je 18. Nákladová efektivita $CE(x_o, y_o, c)$ bodu x_o je na Obr. 7 vyznačená červenou farbou, a jej hodnota sa rovná $\frac{7}{18}$.

Dva body sú efektívne podľa modelu $R(I)$ a bod x_o je neefektívny. Bod x_o sa projektuje na efektívnu hranicu do bodu $\hat{x}_o$. Pomer hodnôt $\hat{x}_o$ ku hodnotám x_o je technická efektivita $TE_{R(I)}(x_o, y_o)$ bodu x_o, a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{2}$. Alokatívna efektivita $AE_{R(I)}(x_o, y_o, c)$ je podľa vyššie uvedenej definície pomerom nákladovej efektivity $CE(x_o, y_o, c) = \frac{7}{18}$ a technickej efektivity $TE_{R(I)(x_o,y_o)} = \frac{1}{2}$, a jej hodnota sa rovná $\frac{7}{9}$.



Obr. 7: Ilustrácia alokatívnej efektivity v modeli R(I)

3.2 Alokatívna efektivita v modeli $R(O)$

Pre výstupne orientovaný radiálny model $R(O)$ odvodíme vzťah medzi výnosovou efektivitou a technickou efektivitou bodu $(x_o, y_o) \in M$.

Tvrdenie 3.2. *Pre každé $(x_o, y_o) \in M$ a ľubovoľnú fixnú hodnotu ceny výstupov p platí medzi výnosovou efektivitou $RE(x_o, y_o, p)$ a technickou efektivitou $TE_{R(O)}(x_o, y_o)$ nasledovný vzťah:*

$$RE(x_o, y_o, p) = \frac{p^T y_o}{R(x_o, p)} \leq TE_{R(O)}(x_o, y_o). \tag{16}$$

Dôkaz. Označme $\frac{1}{\psi_o^*} = TE_{R(O)}(x_o, y_o), \hat{y}_o = \psi_o^* y_o$ projekciu a $\bar{y}$ hodnotu, v ktorej sa

nadobúda maximum v definícii výnosovej funkcie.

$$RE(x_o, y_o, p) = \frac{p^T y_o}{R(x_o, p)} = \frac{p^T y_o}{p^T \bar{y}} \leq \frac{p^T y_o}{p^T \hat{y}_o} = \frac{p^T y_o}{p^T(\psi_o^* y_o)} = \frac{1}{\psi_o^*} = TE_{R(O)}(x_o, y_o)$$

□

Alokatívnu efektivitu bodu $(x_o, y_o) \in M$ pri fixnej cene výstupov potom definujeme pomocou (16) ako multiplikatívny reziduál podľa vzťahu:

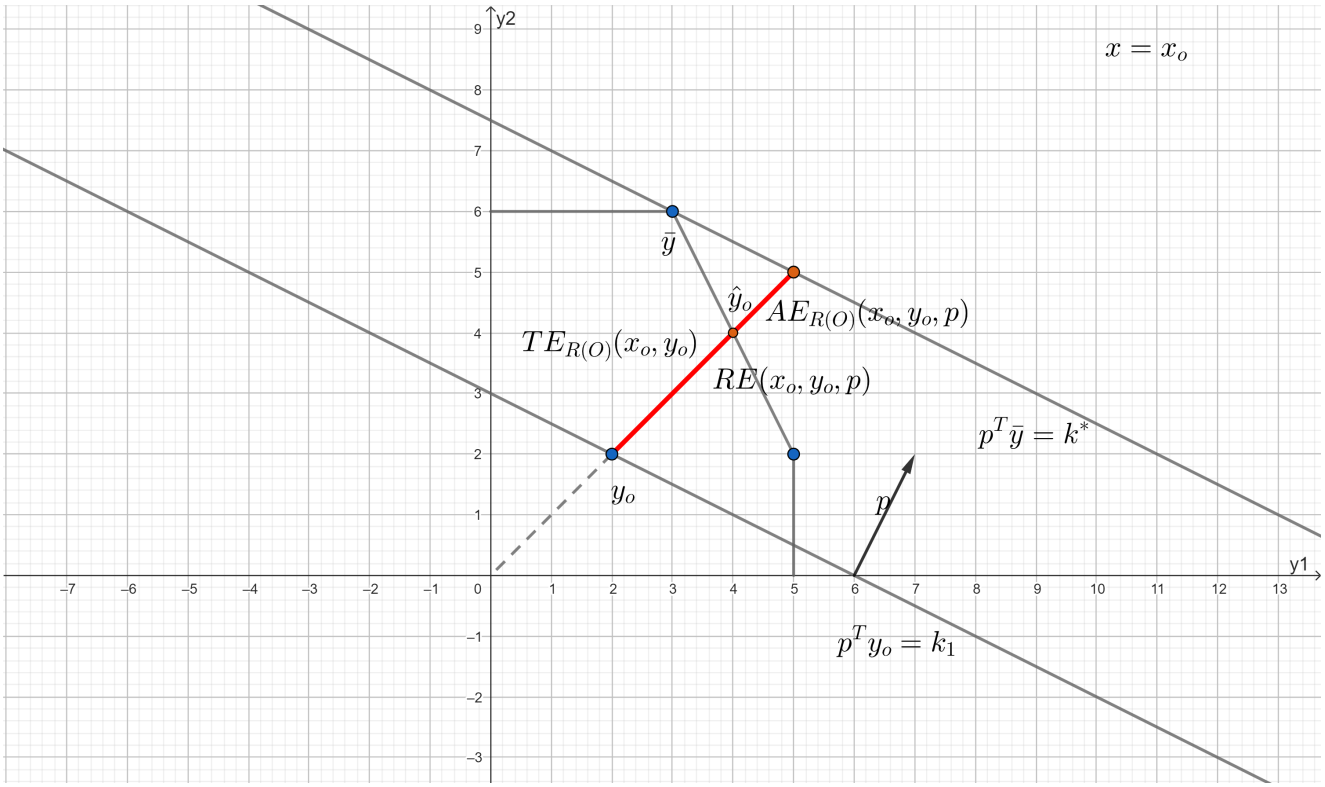
$$AE_{R(O)}(x_o, y_o, p) = \frac{RE(x_o, y_o, p)}{TE_{R(O)}(x_o, y_o)} \leq 1.$$

3.2.1 Príklad 7

V tejto časti predstavíme príklad, pre lepšie pochopenie vzťahov medzi výnosovou efektivitou $RE(x_o, y_o, p)$, technickou efektivitou $TE_{R(O)}(x_o, y_o)$ a alokatívnou efektivitou $AE_{R(O)}(x_o, y_o, p)$.

V tomto príklade použijeme tie isté tri body, ktoré sme uvažovali aj v podkapitole 1.2.1. Tie body sú znázornené na Obr. 8, pričom teraz sa nachádzame v rovine $x = x_o$. Nech ceny výstupov sú $p = (1, 2)^T$, potom výnosová funkcia nadobúda maximum v bode $\bar{y} = (3, 6)$. Hodnota výnosovej funkcie R v bode $\bar{y}$ je 15 a v bode y_o je 6. Výnosová efektivita $RE(x_o, y_o, p)$ bodu y_o je na Obr. 8 vyznačená červenou farbou, a jej hodnota sa rovná $\frac{2}{5}$.

Bod y_o je neefektívny a projektuje sa na efektívnu hranicu do bodu $\hat{y}_o$. Pomer hodnôt y_o ku hodnotám $\hat{y}_o$ je technická efektivita $TE_{R(O)}(x_o, y_o)$ bodu y_o, a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{2}$. Alokatívna efektivita $AE_{R(O)}(x_o, y_o, p)$ je podľa vyššie uvedenej definície pomerom výnosovej efektivity $RE(x_o, y_o, p) = \frac{2}{5}$ a technickej efektivity $TE_{R(O)}(x_o, y_o) = \frac{1}{2}$, a jej hodnota sa rovná $\frac{4}{5}$.



Obr. 8: Ilustrácia alokatívnej efektivity v modeli R(O)

3.3 Alokatívna efektivita v hyperbolickom modeli

Pre hyperbolický model odvodíme vzťah medzi rentabilnou efektivitou a technickou efektivitou bodu $(x_o, y_o) \in M$.

Tvrdenie 3.3. *Pre každé $(x_o, y_o) \in M$ a ľubovoľnú hodnotu ceny vstupov c a ceny výstupov p platí medzi rentabilnou efektivitou $\Gamma E(x_o, y_o, c, p)$ a technickou efektivitou $TE_H(x_o, y_o, \alpha)$ nasledovný vzťah:*

$$\Gamma E(x_o, y_o, c, p) = \frac{\frac{p^T y_o}{c^T x_o}}{\Gamma(c, p)} \leq TE_H(x_o, y_o, \alpha) = \delta_o^*. \tag{17}$$

Dôkaz. Označme $\delta_o^* = TE_H(x_o, y_o, \alpha)$, $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = \left((\delta_o^{1-\alpha})^* x_o, \frac{1}{(\delta_o^{\alpha})^*} y_o\right)$ projekciu a $\bar{x}, \bar{y}$ hodnoty, v ktorej sa nadobúda maximum v definícii funkcie rentability.

$$\Gamma E(x_o, y_o, c, p) = \frac{\frac{p^T y_o}{c^T x_o}}{\Gamma(c, p)} = \frac{\frac{p^T y_o}{c^T x_o}}{\frac{p^T \bar{y}}{c^T \bar{x}}} \leq \frac{\frac{p^T y_o}{c^T x_o}}{\frac{p^T \hat{y}}{c^T \hat{x}}} = \frac{\frac{p^T y_o}{c^T x_o}}{\frac{p^T \left(\frac{1}{(\delta_o^{\alpha})^*} y_o\right)}{c^T ((\delta_o^{1-\alpha})^* x_o)}} = \delta_o^* = TE_H(x_o, y_o, \alpha)$$

□

Alokatívnu efektivitu bodu $(x_o, y_o) \in M$ potom definujeme pomocou (17) ako multiplikatívny reziduál podľa vzťahu:

$$AE_H(x_o, y_o, c, p) = \frac{\Gamma E(x_o, y_o, c, p)}{TE_H(x_o, y_o, \alpha)}.$$

3.3.1 Príklad 8

V tejto podkapitole uvedieme krátky príklad, pre lepšie pochopenie vzťahov medzi rentabilnou efektivitou $\Gamma E(x_o, y_o, c, p)$, technickou efektivitou $TE_H(x_o, y_o, \alpha)$ a alokatívnou efektivitou $AE_H(x_o, y_o, c, p)$.

V tomto príklade použijeme tie isté tri body, ktoré sme uvažovali aj v podkapitole 1.3.1. Tie body sú znázornené na Obr. 9. Nech cena vstupov je $c = 1$, cena výstupov je $p = 2$ a pri vypočítaní technickej efektivity sme dosadili $\alpha = \frac{1}{2}$. Potom funkcia rentability nadobúda maximum v bode $A = (\bar{x}, \bar{y}) = (4, 4)$. Hodnota funkcie rentability Γ v bode $A = (\bar{x}, \bar{y})$ je 2 a v bode D je $\frac{2}{3}$. Rentabilná efektivita $\Gamma E(x_o, y_o, c, p)$ bodu D je na Obr. 9 vyznačená červenou farbou, a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{3}$.

Bod D je neefektívny a projektuje sa na efektívnu hranicu do bodu $\hat{D}$. „Vzdialenosť" medzi bodmi D a $\hat{D}$ je technická efektivita $TE_H\left(x_o, y_o, \frac{1}{2}\right)$ bodu D, a jej hodnota sa rovná 0,369208. Alokatívna efektivita $AE_H(x_o, y_o, c, p)$ je podľa vyššie uvedenej definície pomerom rentabilnej efektivity $\Gamma E(x_o, y_o, c, p) = \frac{1}{3}$ a technickej efektivity $TE_H\left(x_o, y_o, \frac{1}{2}\right) = 0{,}369208$, a jej hodnota sa rovná 0,902832.

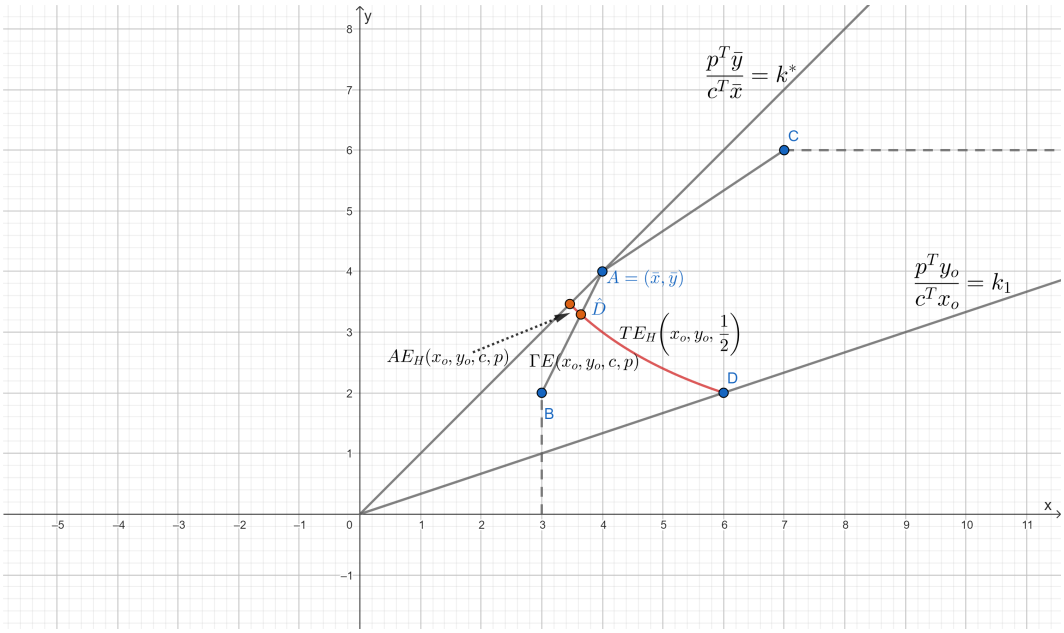
3.4 Alokatívna neefektivita v modeli DDF

Pre DDF model odvodíme vzťah medzi ziskovou neefektivitou a technickou efektivitou bodu $(x_o, y_o) \in M$.

Tvrdenie 3.4. *Pre každé $(x_o, y_o) \in M$ a ľubovoľnú hodnotu ceny vstupov c a ceny výstupov p platí medzi ziskovou neefektivitou $\Pi I_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y)$ a technickou efektivitou $TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y)$ nasledovný vzťah:*

$$\Pi I_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y) = \frac{\Pi(c, p) - (p^T y_o - c^T x_o)}{c^T g_o^x + p^T g_o^y} \geq TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y). \qquad (18)$$

Dôkaz tvrdenia je uvedený v [18, str. 328].



Obr. 9: Ilustrácia alokatívnej efektivity v hyperbolickom modeli

Alokatívnu neefektivitu bodu $(x_o, y_o) \in M$ potom definujeme pomocou (18) ako aditívny reziduál podľa vzťahu:

$$AI_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y) = \Pi I_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y) - TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y).$$

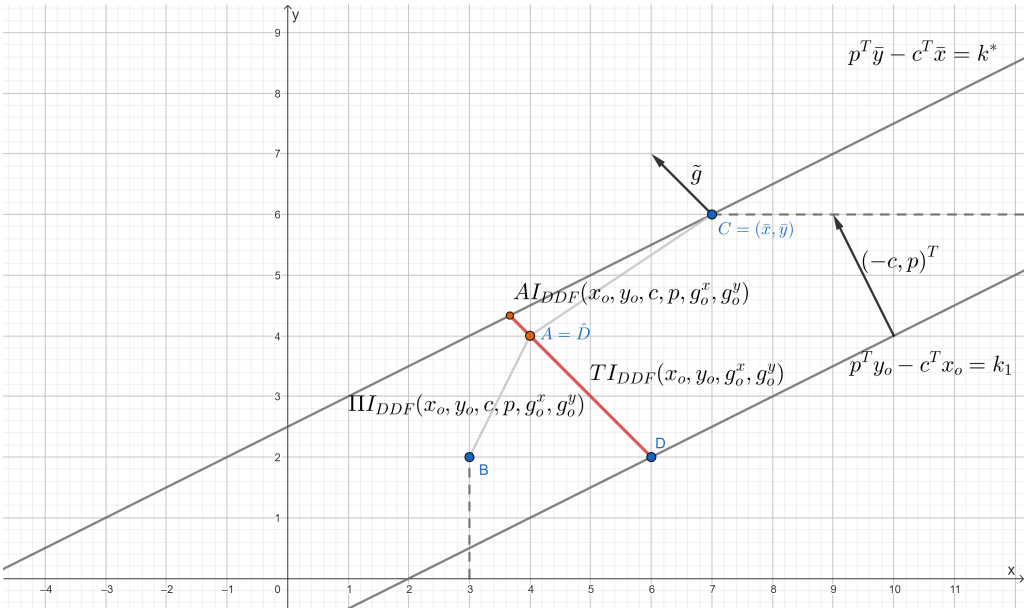
3.4.1 Príklad 9

V tejto časti predstavíme jednoduchý príklad, pre lepšie pochopenie vzťahov medzi ziskovou neefektivitou $\Pi I_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y)$, technickou neefektivitou $TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y)$ a alokatívnou efektivitou $AI_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y)$.

V tomto príklade použijeme tie isté tri body, ktoré sme uvažovali aj v podkapitole 1.4.1. Tie body sú znázornené na Obr. 10. Nech cena vstupov je $c = 1$ a cena výstupov je $p = 2$. Potom zisková funkcia nadobúda maximum v bode $C = (\bar{x}, \bar{y}) = (7, 6)$. Hodnota ziskovej funkcie Π v bode $C = (\bar{x}, \bar{y})$ je 5 a v bode D je -2. Zisková neefektivita $\Pi I_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y)$ bodu D je na Obr. 10 vyznačená červenou farbou, a jej hodnota sa rovná $\frac{7}{3}$.

Bod D je neefektívny a projektuje sa na efektívnu hranicu do bodu $A = \hat{D}$, pričom projektujeme v smere $\tilde{g} = (g^x, g^y)^T = (-1, 1)^T$. „Vzdialenosť" medzi bodmi D a $A = \hat{D}$ je technická neefektivita $TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y)$ bodu D, a jej hodnota sa rovná 2. Alokatívna neefektivita $AI_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y)$ je podľa vyššie uvedenej definície rozdielom ziskovej

neefektivity $\Pi I_{DDF}(x_o, y_o, c, p, g_o^x, g_o^y) = \frac{7}{3}$ a technickej neefektivity $TI_{DDF}(x_o, y_o, g_o^x, g_o^y) = 2$, a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{3}$.



Obr. 10: Ilustrácia alokatívnej neefektivity v DDF modeli

3.5 Alokatívna neefektivita v modeli WA

Pre WA model odvodíme vzťah medzi ziskovou neefektivitou a technickou efektivitou bodu $(x_o, y_o) \in M$.

Tvrdenie 3.5. *Pre každé $(x_o, y_o) \in M$ a ľubovoľnú hodnotu ceny vstupov c a ceny výstupov p platí medzi ziskovou neefektivitou $\Pi I_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y)$ a technickou efektivitou $TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y)$ nasledovný vzťah:*

$$\Pi I_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y) = \frac{\Pi(c,p) - (p^T y_o - c^T x_o)}{\min\left\{\frac{c_i}{w_i^x} \forall i, \frac{p_r}{w_r^y} \forall r\right\}} \geq TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y). \qquad (19)$$

Dôkaz tvrdenia je uvedený v [18, str. 255].

Alokatívnu neefektivitu bodu $(x_o, y_o) \in M$ potom definujeme pomocou (19) ako aditívny reziduál podľa vzťahu:

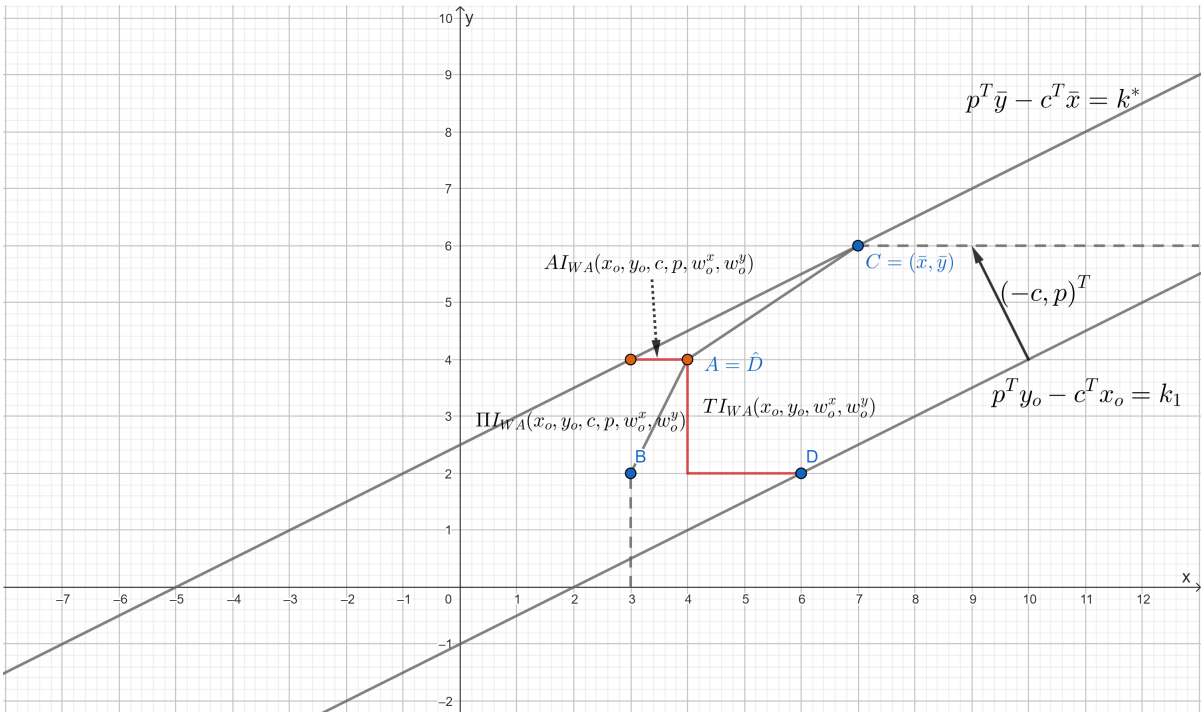
$$AI_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y) = \Pi I_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y) - TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y).$$

3.5.1 Príklad 10

Uvedieme krátky a jednoduchý príklad, pre lepšie pochopenie vzťahov medzi ziskovou neefektivitou $\Pi I_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y)$, technickou neefektivitou $TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y)$ a alokatívnou efektivitou $AI_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y)$.

V tomto príklade použijeme tie isté tri body, ktoré sme uvažovali aj v podkapitole 1.5.1. Tie body sú znázornené na Obr. 11. Nech cena vstupov je $c = 1$ a cena výstupov je $p = 2$. Potom zisková funkcia nadobúda maximum v bode $C = (\bar{x}, \bar{y}) = (7, 6)$. Hodnota ziskovej funkcie Π v bode $C = (\bar{x}, \bar{y})$ je 5 a v bode D je -2. Zisková neefektivita $\Pi I_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y)$ bodu D je na Obr. 11 vyznačená červenou farbou, a jej hodnota sa rovná 7.

Bod D je neefektívny a projektuje sa na efektívnu hranicu do bodu $A = \hat{D}$. Slacky $(s_D^x, s_D^y)^T = (2, 2)^T$, teda technická neefektivita $TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y)$ bodu D sa rovná 4, pričom $(w_o^x, w_o^y)^T = (1, 1)^T$. Alokatívna neefektivita $AI_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y)$ je podľa vyššie uvedenej definície rozdielom ziskovej neefektivity $\Pi I_{WA}(x_o, y_o, c, p, w_o^x, w_o^y) = 7$ a technickej neefektivity $TI_{WA}(x_o, y_o, w_o^x, w_o^y) = 4$, a jej hodnota sa rovná 3.



Obr. 11: Ilustrácia alokatívnej neefektivity v WA modeli

3.6 Vlastnosti alokatívnych efektivít

V prácach [1], [18] boli definované dve vlastnosti alokatívnej efektivity (resp. alokatívnej neefektivity), ktoré sa nazývajú esenciálna vlastnosť a rozšírená esenciálna vlastnosť. Definície týchto vlastnosti môžeme zhrnúť do nasledovnej spoločnej definície pre všetky modely a všetky typy ekonomických funkcii:

Definícia 3.6. *Označme $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ projekciu útvaru (x_o, y_o) v uvažovanom modeli technickej efektívnosti (resp. neefektívnosti). Ďalej označme $(\bar{x}, \bar{y})$ bod z M, v ktorom sa optimalizuje príslušná ekonomická funkcia $(C, R, \Gamma, resp.\Pi)$.*

a) Ak pre každé $(x_o, y_o) \in M$ také, že $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (\bar{x}, \bar{y})$ platí, že $AE(x_o, y_o) = 1$ (resp. $AI(x_o, y_o) = 0$), tak hovoríme, ze daný model spĺňa esenciálnu vlastnosť alokatívnej efektívnosti (resp. neefektívnosti),

b) Ak $AE(x_o, y_o) = AE(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$, (resp. $AI(x_o, y_o) = AI(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$), tak hovoríme, ze daný model spĺňa rozšírenú esenciálnu vlastnosť alokatívnej efektívnosti (neefektívnosti).

Inými slovami, ak pri multiplikatívnom prístupe sa útvar (x_o, y_o) projektuje do bodu $(\bar{x}, \bar{y})$, kde príslušná ekonomická efektivita sa maximalizuje (resp. minimalizuje), tak potom musí byť alokatívne efektívna, teda $AE(x_o, y_o) = 1$. Na druhej strane, ak alokatívna efektivita je definovaná aditívne, pričom útvar (x_o, y_o) sa projektuje do bodu $(\bar{x}, \bar{y})$, kde príslušná ekonomická efektivita maximalizuje (resp. minimalizuje), tak jeho alokatívna neefektivita musí byť nulová. Rozšírená esenciálna vlastnosť alokatívnej efektívnosti znamená, že pri multiplikatívnom (resp. aditívnom) prístupe alokatívna efektivita (resp. neefektivita) útvaru (x_o, y_o) sa vždy zhoduje s alokatívnou efektivitou projekcie útvaru. Ak rozklad príslušnej ekonomickej efektivity spĺňa rozšírenú esenciálnu vlastnosť, potom spĺňa aj esenciálnu vlastnosť.

Tvrdenie 3.7. *Nasledovné tvrdenia platia:*

i) Vstupne orientovaný radiálny model spĺňa definíciu 3.6.

ii) Výstupne orientovaný radiálny model spĺňa definíciu 3.6.

iii) Hyperbolický model spĺňa definíciu 3.6.

Dôkaz tvrdenia je uvedený v [1, str. 20].

Tabuľka 1 obsahuje zhrnutie platnosti esenciálnej a rozšírenej esenciálnej vlastnosti v jednotlivých modeloch. Z tabuľky nám vyplýva, že pri modeloch, v ktorých alokatívna efektivita je definovaná multiplikatívne, platí esenciálna aj rozšírená esenciálna vlastnosť. Pri DDF modeli platí len esenciálna vlastnosť a rozšírená esenciálna vlastnosť platí len vtedy, ak smerové vektory $(g_o^x, g_o^y)^T$ sú konštanté. V prípade WA modeli ani jedna z vlastností neplatí.

Tabuľka 1: Zhrnutie platnosti esenciálnej a rozšírenej esenciálnej vlastnosti v jednotlivých modeloch

	Multiplikatívny prístup			Aditívny prístup	
	Vstupný m.	Výstupný m.	Hyperbolický m.	DDF m.	WA m.
Esenciálna vl.	✓	✓	✓	✓	X
Rozšírená es. vl.	✓	✓	✓	X*	X

* Platí len pre konštantné smery

3.6.1 Príklad 11

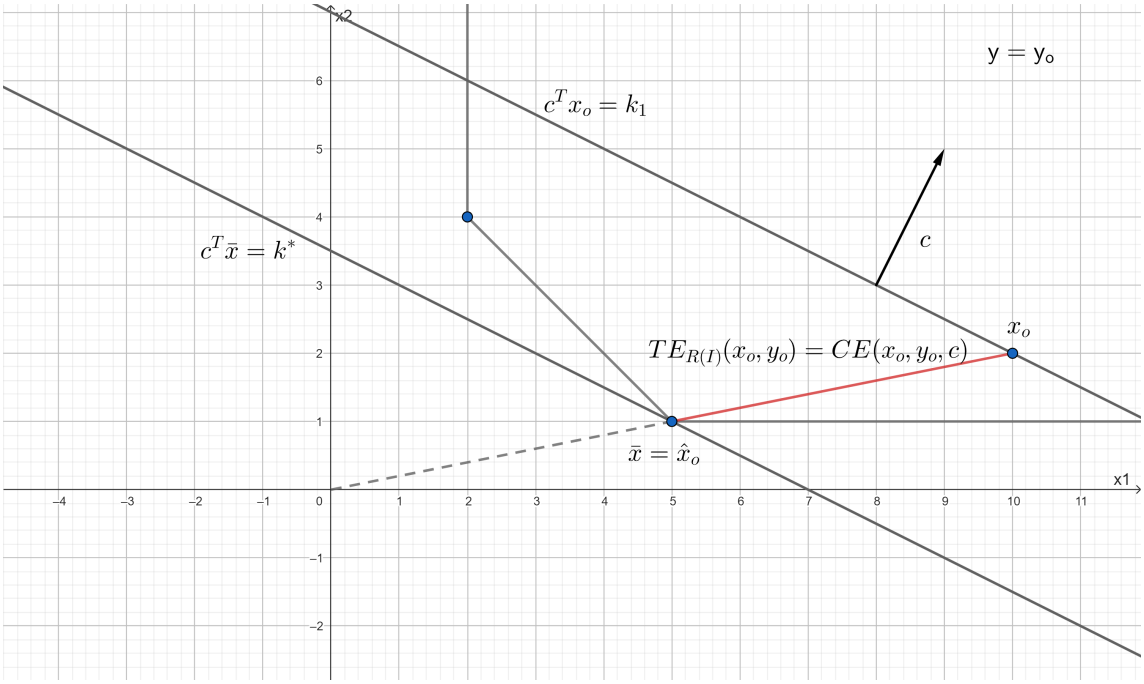
V tejto časti predstavíme krátky a jednoduchý príklad, pre lepšie pochopenie esenciálnej vlastnosti alokatívnej efektivity vo vstupnom modeli.

Uvažujme tri body so súradnicami $(2, 4, y_o)$, $(5, 1, y_o)$ $(10, 2, y_o)$. nachádzame sa v rovine $y = y_o$. Nech ceny vstupov sú $c = (1, 2)^T$, potom nákladová funkcia nadobúda minimum v bode $\bar{x} = (5, 1)$. Hodnota nákladovej funkcie C v bode $\bar{x}$ je 7 a v x_o je 14. Nákladová efektivita $CE(x_o, y_o, c)$ bodu x_o je na Obr. 12 vyznačená červenou farbou, a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{2}$.

Bod x_o je neefektívny a projektuje sa na efektívnu hranicu do bodu $\bar{x} = \hat{x}_o$. Pomer hodnôt $\hat{x}_o$ ku hodnotám x_o je technická efektivita $TE_{R(I)}(x_o, y_o)$ bodu x_o a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{2}$. Alokatívna efektivita $AE_{R(I)}(x_o, y_o, c)$ je pomerom nákladovej efektivity $CE(x_o, y_o, c) = \frac{1}{2}$ a technickej efektivity $TE_{R(I)}(x_o, y_o) = \frac{1}{2}$, teda jej hodnota sa rovná 1.

Na tomto jednoduchom príklade je krásne vidno, že v prípade ak útvar (x_o, y_o) projektujeme na efektívnu hranicu do bodu $\bar{x}$, v ktorom sa príslušná ekonomická funkcia

optimalizuje, tak alokatívna efektivita útvaru (x_o, y_o) sa rovná 1. Aj graficky sa môžeme o tom presvedčiť, že nevyskytuje žiadny rozdiel medzi technickou efektivitou a ekonomickou efektivitou.



Obr. 12: Ilustrácia esenciálnej vlastnosti alokatívnej efektivity v modeli R(I)

4 Empirická ilustrácia na dátach leteckých spoločností

V tejto kapitole si predstavíme výpočet a rozklad efektívnosti v jednotlivých modeloch využitím dát o leteckých spoločnostiach. Dátový súbor obsahuje 28 leteckých spoločností, skúmané počas 90. rokov minulého storočia, obsiahnuté v článku [6]. Letecké spoločnosti sú charakterizované pomocou piatich premenných, z ktorých tri premenné prislúchajú k vstupom a dve výstupom jednotlivých modelov. Jednotlivé letecké spoločnosti majú svoje vlastné ceny, ktoré tiež vstupujú do modelov. Vstupy $X = [X1, X2, X3]^T$, ceny vstupov $C = [C1, C2, C3]^T$, výstupy $Y = [Y1, Y2]^T$ a ceny výstupov $P = [P1, P2]^T$ sú nasledovné:

- $X1$ vyjadruje celkový počet personálu leteckých spoločností, vrátane pilotov, druhých pilotov, či všetkých zapojených do predaja lístkov. Ceny $C1$ tejto premennej sú mzdy personálu, vyjadrený v miliónoch amerických dolárov.

- $X2$ vyjadruje množstvo spotrebovaného paliva, vyčíslený v miliónoch galónov. Ceny $C2$ sú priemerné ceny za galón paliva vyjadrený v amerických dolároch.

- $X3$ vyjadruje nákladov, ktoré získame s odpočítaním nákladov na personál a palivo od celkových prevádzkových nákladov. Tento vstup zahŕňa okrem iného náklady na údržbu a všeobecné administratívne náklady. Ceny $C3$ sú odvodené od medzinárodného indexu PPP (*purchasing power parity - parita kúpnej sily*, čo je teoretický výmenný kurz mien dvoch štátov, definovaná ako pomer vnútorných kúpnych síl daných štátov.

- $Y1$ vyjadruje náklady na osobokilometer. Podľa [20] osobokilometre vyjadrujú veľkosť prepravných výkonov v osobnej doprave. Osobokilometer sa rovná preprave jednej osoby na vzdialenosť jedného kilometra. Ceny $P1$ sú priemerné cestovné, ktoré sa získali vydelením tržieb touto kvantitatívnou mierou.

- $Y2$ vyjadruje náklady na tonokilometer. Podľa [21] výkony v tonokilometroch vyjadrujú veľkosť prepravných výkonov v tonokilometroch vykonaných nákladnými dopravnými prostriedkami. Jeden tonokilometer vyjadruje prepravu jednej tony na vzdialenosť jedného kilometra. Ceny $P2$ sú priemerné cestovné, ktoré sa získali vydelením tržieb touto kvantitatívnou mierou.

Súbor je prílohou tejto práce.

Podotýkame, že tieto údaje používame na ilustráciu rôznych modelov, pričom našim cieľom nie je analýza efektívnosti jednotlivých leteckých spoločností. V našej práci rozklad efektívnosti v jednotlivých modeloch vykonáme pomocou softvéru *Julia* [5]. *Julia* je vysokoúrovňový programovací jazyk pre numerické a vedecké výpočty. V knihe [18] bol predstavený balíček, ktorý obsahuje špecifický súbor funkcií súvisiacich s témou meranie ekonomickej efektívnosti. Balík sa nazýva `BenchmarkingEconomicEfficiency.jl`, ktorý používa modely obálkovej analýzy dát zo všeobecnejšieho balíka `DataEnvelopmentAnalysis.jl`. Softvér rieši modely obálkovej analýzy, ktoré sme predstavili v našej práce v kapitole 1. Hoci v súčastnosti existujú bezplatné a komerčné softvérové balíky, ktoré riešia základné modely ekonomickej efektívnosti, balík vytvorený v programovacom jazyku Julia, nám dáva možnosť implementovať všetky modely používané v našej práci v jednom spoločnom jazyku. Spomínaný balík `BenchmarkingEconomicEfficiency.jl` je k dispozícii ako bezplatný softvér a je možné si ho stiahnuť zo stránky
`http://www.benchmarkingeconomicefficiency.com` [4].

Tabuľka 2 obsahuje krátke zhrnutie dát, vrátane deskriptívnych štatistík. Jednotlivé hodnoty boli vypočítané pomocou softvéru *R* [19]. V ďalšej časti tejto kapitoly uvedieme rozklad efektívnosti v jednotlivých modeloch. Pri každom modeli uvedieme aj príslušné slacky leteckých spoločností.

Tabuľka 2: Deskriptívna štatistika dát leteckých spoločností

	Výstupy a ich ceny				Vstupy a ich ceny					
	Y1	P1	Y2	P2	X1	C1	X2	C2	X3	C3
Priemer	43555,86	0,097357	1298,607	0,333929	28667,93	36,05714	838,1786	0,814286	2140,25	1,050357
Medián	29020,5	0,088	1044	0,303	21805	34,25	551,5	0,84	1505	1
Maximum	133796	0,192	5346	0,641	80627	79,9	2381	0,84	5678	1,626
Minimum	2943	0,064	65	0,193	4067	8,2	62	0,78	241	0,256
Smerodajná odchýlka	34877,86	0,032269	118,873	0,108158	20284,36	15,77385	653,5657	0,030224	1442,536	0,304914

4.1 Rozklad ekonomickej efektivity v orientovaných modeloch

V tejto podkapitole predstavíme rozklad nákladovej $CE(x, y, c)$ a výnosovej efektivity $RE(x, y, p)$ na ich príslušné technické a alokatívne komponenty. Hodnoty jednotlivých efektivít vo vstupnom modeli sú uvedené v tabuľke 3. Naopak, tabuľka 4 obsahuje hodnoty efektivít vo výstupnom modeli. Deskriptívna štatistika jednotlivých efektivít je uvádzaná v spodnej časti tabuľky. Výsledky ukazujú, že v priemere by odvetvie mohlo znížiť náklady o 31,9% $= (1 - 0{,}681) \times 100$. Až šesť leteckých spoločností je nákladovo efektívnych. Na druhej strane, v priemere by odvetvie mohlo zvýšiť výnosy o 11% $= (1/0{,}9) \times 100$. Až jedenásť leteckých spoločností je výnosovo efektívnych.

Všimnime si, že až päť leteckých spoločností je efektívnych z hľadiska nákladov aj výnosov: číslo 4, č. 8, č. 9, č. 19, č. 27 (*JAL, SIA, AUA, American, United*). Spearmanov korelačný koeficient medzi nákladovej a výnosovej efektivity je pomerne nízky, $\rho(CE(x, y, c), RE(x, y, p)) = 0{,}49$, čo dokazuje také rozdiely ako napríklad pri spoločnosti č. 12 (*Iberia*), kde nákladová efektivita bola na úrovni 0,291696, na opačnej strane výnosová efektivita bola na úrovni 0,766643. V tomto smere bol najväčší rozdiel vo výkone zistený pri spoločnosti č. 7 (*Saudia*), ktorá je výnosovo efektívna, zatiaľ čo jej nákladová efektivita je 0,32393.

Teraz si bližšie analyzujme technickú efektivitu pri vstupnom a výstupnom modeli. V oboch prípadoch je efektívnych až 13 leteckých spoločností. Toto dokazujú aj hodnoty opisnej štatistiky, keďže sú v priemere rovnako relevantné. Priemerná hodnota technickej efektivity pri vstupnom modeli je 0,928645 a pri výstupnom modeli je 0,92781. Spearmanov korelačný koeficient medzi technickými efektivitami pri vstupnom a výstupnom modeli je $\rho\left(TE_{R(I)}(x, y), TE_{R(O)}(x, y)\right) = 0{,}998$, čo tiež dokazuje ich závislosť.

Ak sa pozrieme na hodnoty alokatívnych efektivít, tak zistíme, že táto závislosť pri nich neplatí. Pri vstupnom modeli je šesť a pri výstupnom je až jedenásť alokatívne efektívnych leteckých spoločností. Hodnoty opisnej štatistiky sú tiež odlišné, v prípade vstupného modelu priemerná hodnota alokatívnej efektivity je 0,724367, v prípade výstupného je 0,970581. Spearmanov korelačný koeficient je $\rho\left(AE_{R(I)}(x, y, c), AE_{R(O)}(x, y, p)\right) = 0{,}102$, čo znamená skoro žiadnu závislosť. Hodnoty smerodajnej odchýlky sú tiež zaujímavé, v prípade vstupného modelu je 0,219085, v prípade výstupného je 0,042859, čo znamená, že hodnoty alokatívnych efektivít pri vstupnom modeli sú viacej kolísavé okolo priemeru.

Tabuľka 3: Rozklad nákladovej efektivity leteckých spoločností založený na radiálnom vstupnom modeli

	Letecká spoločnosť	Nákladová	Technická	Alokatívna
1	All Nippon Airways	0,987326	0,988137	0,999179
2	Cathay Pacific	0,792281	0,920937	0,860299
3	Garuda	0,632854	0,741866	0,853057
4	JAL	1	1	1
5	Malaysia Airlines	0,420648	0,695312	0,604978
6	Quantas	0,561248	1	0,561248
7	Saudia	0,32393	1	0,32393
8	SIA	1	1	1
9	AUA	1	1	1
10	British Airways	0,551149	0,891463	0,618252
11	Finnair	0,66006	1	0,66006
12	Iberia	0,291696	0,758604	0,384517
13	Lufthansa	1	1	1
14	SAS	0,369948	0,769733	0,480619
15	Swissair	0,447203	1	0,447203
16	TAP Air Portugal	0,519082	1	0,519082
17	Air Canada	0,430385	0,891029	0,48302
18	America West	0,642554	1	0,642554
19	American	1	1	1
20	Canadian	0,543736	0,8616	0,631077
21	Continental	0,833863	0,9947	0,838306
22	Delta	0,79547	0,932551	0,853004
23	Eastern	0,474195	0,801847	0,591378
24	Northwest	0,964068	0,986096	0,977662
25	Pan American	0,701735	0,986559	0,711296
26	TWA	0,699582	1	0,699582
27	United	1	1	1
28	Usair	0,423617	0,78163	0,541966
	Priemer	0,680951	0,928645	0,724367
	Medián	0,651307	0,991419	0,679821
	Maximum	1	1	1
	Minimum	0,291696	0,695312	0,32393
	Smerodajná odchýlka	0,242268	0,099871	0,219085

Tabuľka 4: Rozklad výnosovej efektivity leteckých spoločností založený na radiálnom výstupnom modeli

	Letecká spoločnosť	Výnosová	Technická	Alokatívna
1	All Nippon Airways	0,841975	0,990408	0,850129
2	Cathay Pacific	0,822662	0,906027	0,907989
3	Garuda	0,674893	0,706558	0,955184
4	JAL	1	1	1
5	Malaysia Airlines	0,632869	0,649029	0,975102
6	Quantas	1	1	1
7	Saudia	1	1	1
8	SIA	1	1	1
9	AUA	1	1	1
10	British Airways	0,88243	0,906538	0,973407
11	Finnair	1	1	1
12	Iberia	0,766643	0,773821	0,990724
13	Lufthansa	0,890601	1	0,890601
14	SAS	0,74984	0,769924	0,973915
15	Swissair	0,879176	1	0,879176
16	TAP Air Portugal	1	1	1
17	Air Canada	0,898947	0,899357	0,999544
18	America West	1	1	1
19	American	1	1	1
20	Canadian	0,869992	0,871018	0,998822
21	Continental	0,949321	0,994862	0,954223
22	Delta	0,923972	0,933689	0,989593
23	Eastern	0,743149	0,809668	0,917845
24	Northwest	0,96748	0,988741	0,978497
25	Pan American	0,981294	0,986957	0,994262
26	TWA	1	1	1
27	United	1	1	1
28	Usair	0,750297	0,792083	0,947246
	Priemer	0,900912	0,92781	0,970581
	Medián	0,936647	0,992635	0,992493
	Maximum	1	1	1
	Minimum	0,632869	0,649029	0,850129
	Smerodajná odchýlka	0,112974	0,104715	0,042859

Aby sme zistili, ako jednotlivé letecké spoločnosti, môžu vylepšiť svoju účinnosť, teda pri ktorom vstupe alebo výstupe vykazujú prebytok, uvádzame slacky leteckých spoločností v radiálnom vstupnom modeli v tabuľke 5. Z hľadiska vstupného modelu najviac leteckých spoločností vykazuje prebytok v nákladoch na tonokilometer ($Y2$). Jeho priemerná hodnota je 182,8519 miliónov amerických dolárov. Predstavuje to najvyššie percento priemerných veličín vo vstupnom modeli, keďže dosahuje 14%. Vo vstupnom modeli druhé najväčšie množstvo slackov prislúcha personálu leteckých spoločností ($X1$) s priemernou hodnotou 427 ľudí. Toto množstvo však predstavuje len 1,5% priemerného množstva tohto vstupu. Letecká spoločnosť č. 1 (*All Nippon Airways*) vykazuje slacky až v troch premenných, v galónoch paliva ($X2$), v operatívnych nákladoch ($X3$) a v nákladoch na tonokilometer ($Y2$). Všimnime si tiež, že každá letecká spoločnosť, ktorá je efektívna sa nachádza na efektívnej hranici, keďže pre nich sú slacky nulové, teda pseudoefektivita sa nevyskytuje v tomto prípade. Spoločnosť č. 20 (*Canadian*) je zaujímavá z tohto hľadiska, že ako jediná neefektívna spoločnosť projektuje na efektívnu hranicu a teda nevykazuje žiadne slacky.

Tabuľka 6 obsahuje slacky leteckých spoločností v radiálnom výstupnom modeli. Aj v tomto prípade najviac leteckých spoločností vykazuje prebytok v nákladoch na tonokilometer ($Y2$). Jeho priemerná hodnota je 193,1128 milión amerických dolárov. Vo výstupnom modeli tiež druhé najväčšie množstvo slackov prislúcha personálu leteckých spoločností ($X1$) s priemernou hodnotou 704 ľudí. Na druhej strane si všimnime, že v premennej $X1$ vykazujú slacky iba štyri spoločností, ktoré teda zjavne neefektívne rozdeľujú svojich zamestnancov. Z hľadiska výstupného modelu spoločnosti najefektívnejšie využívajú podmienky, ktoré majú k dispozícii v premenných ($X2$) galónoch paliva a v ($Y1$) nákladoch na osobokilometer. Iba jedna spoločnosť vykazuje slacky v spomínanej premennej $Y1$, čo znamená, že letecké spoločnosti efektívne využívajú svoje prostriedky na prepravu ľudí.

Dospeli sme k záveru, že pri rozklade nákladovej a výnosovej efektivity na ich technické a alokatívne faktory vznikajú prebytky vo forme slackov, ktoré ovplyvňujú pôsobenie jednotlivých leteckých spoločností na trhu a nemôžeme ich zanedbávať pri posúdení efektívnosti spoločností.

Tabuľka 5: Slacky leteckých spoločností v radiálnom vstupnom modeli

	Letecká spoločnosť	Technická ef.	slackX1	slackX2	slackX3	slackY1	slackY2
1	All Nippon Airways	0,988137	0	231,741	354,621	0	1503,72
2	Cathay Pacific	0,920937	0	0	126,607	1215,84	0
3	Garuda	0,741866	0	0	1616,06	0	170,123
4	JAL	1	0	0	0	0	0
5	Malaysia Airlines	0,695312	0	0	153,327	0	0
6	Quantas	1	0	0	0	0	0
7	Saudia	1	0	0	0	0	0
8	SIA	1	0	0	0	0	0
9	AUA	1	0	0	0	0	0
10	British Airways	0,891463	3585,56	0	543,48	0	0
11	Finnair	1	0	0	0	0	0
12	Iberia	0,758604	2425,36	0	0	0	0
13	Lufthansa	1	0	0	0	0	0
14	SAS	0,769733	0	0	0	0	150,561
15	Swissair	1	0	0	0	0	0
16	TAP Air Portugal	1	0	0	0	0	0
17	Air Canada	0,891029	5944,74	3,63788	0	0	0
18	America West	1	0	0	0	0	0
19	American	1	0	0	0	0	0
20	Canadian	0,8616	0	0	0	0	0
21	Continental	0,9947	0	0	0	0	1045,87
22	Delta	0,932551	0	142,17	0	0	126,223
23	Eastern	0,801847	0	0	0	0	548,843
24	Northwest	0,986096	0	25,3916	0	0	633,594
25	Pan American	0,986559	0	0	0	0	119,131
26	TWA	1	0	0	0	0	0
27	United	1	0	0	0	0	0
28	Usair	0,78163	0	0	0	0	821,787
	Priemer	0,928645	426,9879	14,39073	99,78911	43,42286	182,8519
	Medián	0,991419	0	0	0	0	0
	Maximum	1	5944,74	231,741	1616,06	1215,84	1503,72
	Minimum	0,695312	0	0	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	0,099871	1346,788	50,47022	321,6563	229,7722	379,0134

Tabuľka 6: Slacky leteckých spoločností v radiálnom výstupnom modeli

	Letecká spoločnosť	Technická ef.	slackX1	slackX2	slackX3	slackY1	slackY2
1	AllNipponAirways	0,990408	0	230,581	364,39	0	1523,55
2	CathayPacific	0,906027	0	0	140,711	817,13	0
3	Garuda	0,706558	0	0	2163,91	0	249,815
4	JAL	1	0	0	0	0	0
5	MalaysiaAirlines	0,649029	0	0	220,885	0	0
6	Quantas	1	0	0	0	0	0
7	Saudia	1	0	0	0	0	0
8	SIA	1	0	0	0	0	0
9	AUA	1	0	0	0	0	0
10	BritishAirways	0,906538	4605,59	0	673,707	0	0
11	Finnair	1	0	0	0	0	0
12	Iberia	0,773821	4865,91	0	0	0	0
13	Lufthansa	1	0	0	0	0	0
14	SAS	0,769924	0	0	0	0	216,651
15	Swissair	1	0	0	0	0	0
16	TAPAirPortugal	1	0	0	0	0	0
17	AirCanada	0,899357	6881,2	8,71969	0	0	0
18	AmericaWest	1	0	0	0	0	0
19	American	1	0	0	0	0	0
20	Canadian	0,871018	0	0	0	0	0
21	Continental	0,994862	0	0	0	0	1051,45
22	Delta	0,933689	0	154,447	0	0	122,405
23	Eastern	0,809668	0	0	0	0	639,592
24	Northwest	0,988741	0	40,0301	0	0	593,371
25	PanAmerican	0,986957	0	0	0	0	119,454
26	TWA	1	0	0	0	0	0
27	United	1	0	0	0	0	0
28	Usair	0,792083	3334,96	0	0	0	890,869
	Priemer	0,92781	703,1307	15,49206	127,2715	29,18321	193,1128
	Medián	0,992635	0	0	0	0	0
	Maximum	1	6881,2	230,581	2163,91	817,13	1523,55
	Minimum	0,649029	0	0	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	0,104715	1820,851	51,63253	425,3196	154,4231	388,5382

4.2 Rozklad rentabilnej efektivity v hyperbolickom modeli

Naša ďalšia podkapitola obsahuje rozklad rentabilnej efektivity $\Gamma E(x, y, c, p)$ v hyperbolickom modeli na príslušné technické $TE_H(x, y, \alpha)$ a alokatívne efektivity $AE_H(x, y, c, p)$. V tabuľke 7 sú uvedené hodnoty jednotlivých efektivít. Pri výpočte sme do modelu (4) dosadili $\alpha = \frac{1}{2}$. Deskriptívna štatistika jednotlivých efektivít je uvádzaná v spodnej časti tabuľky. Výsledky ukazujú, že v priemere by odvetvie mohlo znížiť náklady súvisiace s výrobou o 31,6% $= \left(1 - 0{,}467824^{\frac{1}{2}}\right) \times 100$, kým výnosy by mohlo zvýšiť o 46,2% $= \left(1/0{,}467824^{\frac{1}{2}} - 1\right) \times 100$. Z hľadiska rentability to znamená, že v priemere by sa mohlo zvýšiť o 113,75% $= (1/0{,}467824 - 1) \times 100$. Rentabilnú efektivitu maximalizuje, teda dosiahne hodnotu $\Gamma E(x, y, c, p) = 1$, iba letecká spoločnosť č. 8 (*SIA*), ktorej ekonomická výkonnosť prevyšuje o takmer 10% $\approx (1/0{,}915508) \times 100$ rentabilitu druhej spoločnosti v poradí (spoločnosť č. 4). Ak sa pozrieme bližšie na hodnoty rentabilnej efektivity, tak si môžeme všimnúť, že až 18 spoločností nedosiahne hodnotu vyššiu ako 0,5, čo je polovica rentabilnej efektivity vedúcej spoločnosti. Tento výsledok je pomerne robustný, keďže všetky spoločnosti prezentujú rozdielne trhové ceny a napriek tomu spoločnosť č. 8 sa vždy javí ako najziskovejšia.

Priemerná hodnota technickej efektivity leteckých spoločností je na úrovni 0,928075, čo je vyššia hodnota než v prípade alokatívnej efektivity, kde nadobúda hodnotu 0,50059. Práve aj táto priemerná hodnota naznačuje nám, že zdroj rentabilnej neefektívnosti je alokatívna neefektívnosť. Celkovo až 13 leteckých spoločností je technicky efektívnych. Letecká spoločnosť č. 7 (*Saudia*) predstavuje zaujímavý prípad, pretože zatiaľ čo maximalizuje produktivitu vzhľadom na súvisiace tieňové ceny, teda je technicky efektívna, tak v prípade rentabilnej efektivity ju spoločnosť č. 8 výrazne prevyšuje, pričom jej rentabilná efektivita je len na úrovni 0,251754. Z hľadiska alokatívnej efektivity je efektívna iba spoločnosť č. 8. Je vidno teda, že pre spoločnosti, ktoré sú technicky efektívne, alokatívna neefektivita spôsobuje rentabilnú neefektivitu.

Tabuľka 8 obsahuje slacky leteckých spoločností v hyperbolickom modeli. Tieto slacky predstavujú individuálne zníženia vstupov a zvýšenia výstupov, ktoré by danú spoločnosť projektovali na efektívnu hranicu $\partial^S M$. Pri projektovaní na efektívnu hranicu, vznikajú slacky pri všetkých vstupných premenných, čo vedie k podhodnoteniu alokatívnej efektivity a nadhodnoteniu technickej efektivity. Najviac leteckých spoločností vykazuje

prebytok v premennej $X1$, čo prislúcha k personálu jednotlivých spoločností. Priemerná hodnota slackov pri premennej $X1$ predstavuje približne 534 zamestnancov, kým najväčšiu priemernú hodnotu, 186,9054 miliónov amerických dolárov, dosiahnú pri premennej $Y2$.

Všimnime si, že hoci niektoré spoločnosti dosiahnú hodnotu jedna z pohľadu technickej efektivity, ani v tom prípade nie sú efektívne, lebo vykazujú kladné slacky v niektorých premenných. Táto situácia sa nastáva vtedy ak nejaká spoločnosť sa projektuje na pseudoefektívnu hranicu $\partial^P M$ namiesto efektívnej hranice $\partial^S M$. Znamená to tiež, že nejaká časť neefektívnosti vyjadrená kladným slackom, nebola zachytená pomocou efektivity danej spoločnosti. V tomto zmysle teda iba spoločnosť *Saudia* (č. 7) je efektívna, ostatné spoločnosti sú len pseudoefektívne. Je zaujímavé tiež, že spoločnosť č. 8, ktorá je rentabilne a alokatívne efektívna vykazuje kladné slacky.

Rovnako ako v prípade rozkladu nákladovej a výnosovej efektivity aj pri hyperbolickom modeli sa vyskytujú kladné slacky, ktoré neboli zahrnuté do hodnoty technickej efektivity. Tieto hodnoty nemôžeme zanedbávať z dôvodu, že by to viedlo k nadhodnoteniu alokatívnej efektivity. Je dôležité, aby sme brali do úvahy tieto hodnoty pri snahe zvyšovania efektivity, cieľom ktorého je dosiahnutie optimálnych vstupných a výstupných hodnôt, ktoré maximalizujú rentabilitu.

Tabuľka 7: Rozklad rentabilnej efektivity leteckých spoločností založený na hyperbolickom modeli

	Letecká spoločnosť	Rentabilná	Technická ef.	Alokatívna
1	AllNipponAirways	0,826027	0,989396	0,834880
2	CathayPacific	0,657708	0,913957	0,719627
3	Garuda	0,419076	0,723918	0,5789
4	JAL	0,915508	1	0,915508
5	MalaysiaAirlines	0,275818	0,671503	0,410747
6	Quantas	0,520198	1	0,520198
7	Saudia	0,251754	1	0,251754
8	SIA	1	1	1
9	AUA	0,218419	1	0,218419
10	BritishAirways	0,419165	0,899761	0,465863
11	Finnair	0,331891	1	0,331891
12	Iberia	0,243709	0,766962	0,317759
13	Lufthansa	0,411256	1	0,411256
14	SAS	0,293686	0,763829	0,384492
15	Swissair	0,344606	1	0,344606
16	TAPAirPortugal	0,253572	1	0,253572
17	AirCanada	0,382226	0,895473	0,426843
18	AmericaWest	0,439534	1	0,439534
19	American	0,490403	1	0,490403
20	Canadian	0,441114	0,866643	0,508992
21	Continental	0,57295	0,994782	0,575955
22	Delta	0,449728	0,933135	0,481954
23	Eastern	0,389806	0,806046	0,483603
24	Northwest	0,611905	0,987562	0,619612
25	PanAmerican	0,58313	0,986699	0,590991
26	TWA	0,521622	1	0,521622
27	United	0,527972	1	0,527972
28	Usair	0,306292	0,786425	0,389474
	Priemer	0,467824	0,928075	0,50059
	Medián	0,42935	0,992089	0,482778
	Maximum	1	1	1
	Minimum	0,218419	0,671503	0,218419
	Smerodajná odchýlka	0,197955	0,10251	0,18845

Tabuľka 8: Slacky leteckých spoločností v hyperbolickom modeli

	Letecká spoločnosť	Technická ef.	slackX1	slackX2	slackX3	slackY1	slackY2
1	AllNipponAirways	0,989396	0	231,1	360,012	0,0024	1514,66
2	CathayPacific	0,913957	0,003	0	132,863	1038,96	0
3	Garuda	0,723918	0,0033	0	1847,32	0	203,764
4	JAL	1	0,0025	0	0	0,0012	0,0003
5	MalaysiaAirlines	0,671503	0,0153	0	180,852	0	0
6	Quantas	1	0,006	0	0,0001	0	0,0004
7	Saudia	1	0	0	0	0	0
8	SIA	1	0,0026	0	0	0,0008	0,0002
9	AUA	1	0,0009	0	0	0	0,0001
10	BritishAirways	0,899761	4122,18	0	611,985	0	0
11	Finnair	1	0,0022	0	0	0	0,0001
12	Iberia	0,766962	3610,04	0	0	0	0
13	Lufthansa	1	0,0080	0	0,0002	0	0
14	SAS	0,763829	0,0171	0	0	0	185,545
15	Swissair	1	0,0194	0	0	0	0
16	TAPAirPortugal	1	0,0022	0	0,0002	0	0,0004
17	AirCanada	0,895473	6419,68	6,2151	0	0	0
18	AmericaWest	1	0,0031	0	0	0	0,0003
19	American	1	0,0057	0	0	0	0,0006
20	Canadian	0,866643	0,1504	0	0	0	0
21	Continental	0,994782	0,0083	0	0	0	1048,7
22	Delta	0,933135	0,0181	148,257	0	0	124,332
23	Eastern	0,806046	0,0169	0	0	0	592,789
24	Northwest	0,987562	0,006	33,4620	0	0	611,419
25	PanAmerican	0,986699	0,0065	0	0	0	118,514
26	TWA	1	0,0086	0	0	0	0,0011
27	United	1	0,0024	0	0	0,0024	0,0003
28	Usair	0,786425	785,31	0	0	0	833,624
	Priemer	0,928075	533,4828	14,9655	111,894	37,10596	186,9054
	Medián	0,992089	0,00625	0	0	0	0,0003
	Maximum	1	6419,68	231,1	1847,32	1038,96	1514,66
	Minimum	0,671503	0	0	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	0,10251	1538,215	51,01729	365,9851	196,3449	382,0722

4.3 Rozklad ziskovej neefektivity v DDF modeli

Rovnako ako v predchádzajúcich kapitolách, uvádzame rozklad ziskovej neefektivity $\Pi I_{DDF}(x, y, c, p, g^x, g^y)$ v DDF modeli na technickú $TI_{DDF}(x, y, g^x, g^y)$ a alokatívnu $AI_{DDF}(x, y, c, p, g^x, g^y)$ neefektivitu. Hodnoty jednotlivých efektivít sú uvedené v tabuľke 9. Pri zisťovaní maximálneho zisku pre danú spoločnosť, sme použili vlastné ceny danej spoločnosti. Vďaka rôznym cenám sú výsledky špecifické pre každú spoločnosť. Napríklad je možné, že technicky efektívna spoločnosť je ziskovo neefektívna pri svojich vlastných cenách tým, že nevyužíva optimálne vstupné množstvo, alebo nevyprodukuje optimálne výstupné množstvo, napriek tomu môže maximalizovať zisk pri cenách inej spoločnosti. Deskriptívna štatistika jednotlivých efektivít je uvádzaná v spodnej časti tabuľky. Pri výpočte sme do modelu 5 za smerové vektory (g^x, g^y) sme dosadili samé jednotky.

Z výsledkov vyplýva, že z hľadiska ziskovej neefektivity iba jedna spoločnosť (AUA) minimalizuje neefektivitu, teda dosiahne hodnotu $\Pi I_{DDF}(x, y, c, p, g^x, g^y) = 0$. 13 spoločností je technicky efektívnych, ostatné spoločnosti sú technicky a alokatívne neefektívnych. Priemerná hodnota ziskovej neefektivity je 23069,64, zatiaľ čo priemerná technická neefektivita má hodnotu 63,01528, a priemerná alokatívna neefektivita dosiahne hodnotu 23006,62. V dôsledku toho, 99% straty zisku spôsobuje alokatívna neefektivita, čo vyplynie z toho, že jednotlivé spoločnosti nevyužívajú efektívne svoje vstupné a výstupné produkty vzhľadom na ich trhové ceny.

Tabuľka 10 obsahuje slacky leteckých spoločností v DDF modeli. Pri pohľade na vstupov zistíme, že najväčšia priemerná hodnota slackov prislúcha k ostatným nákladom ($X3$) leteckých spoločností s hodnotou 152,3374 miliónov amerických dolárov, nasledujú slacky zodpovedajúce spotrebovanému palivu ($X2$) s priemernou hodnotou 5,113231 miliónov galónov, zatiaľ čo najmenšia priemerná hodnota slackov sa nadobúda pri premennej $X1$ s hodnotou 1608,581 zamestnancov. Z hľadiska výstupov najväčšie priemerné množstvo prislúcha k nákladom na tonokilometer ($Y2$) s hodnotou 162,5174 miliónov amerických dolárov. Za zmienku stojí, že v premennej náklady na osobokilometer ($Y1$) vykazuje slacky iba spoločnosť č. 2 (*Cathay Pacific*).

Tabuľka 9: Rozklad ziskovej neefektivity leteckých spoločností založený na DDF modeli

	Letecká spoločnosť	Zisková	Technická	Alokatívna
1	All Nippon Airways	7791,23	101,775	7689,45
2	Cathay Pacific	7676,78	37,718	7639,06
3	Garuda	5309,9	96,1174	5213,78
4	JAL	16766,6	0	16766,6
5	Malaysia Airlines	9653,31	80,1062	9573,20
6	Quantas	13009,6	0	13009,6
7	Saudia	18411,4	0	18411,4
8	SIA	5828,84	0	5828,84
9	AUA	0	0	0
10	British Airways	44774,1	128,468	44645,6
11	Finnair	4159,56	0	4159,56
12	Iberia	24534	180,228	24353,8
13	Lufthansa	39302,2	0	39302,2
14	SAS	17124,7	109,569	17015,1
15	Swissair	15125,3	0	15125,3
16	TAP Air Portugal	5925,03	0	5925,03
17	Air Canada	17657,9	93,3666	17564,5
18	AmericaWest	7131,77	0	7131,77
19	American	72095,4	0	72095,4
20	Canadian	11710,2	100,452	11609,7
21	Continental	29303,5	17,0631	29286,4
22	Delta	54687,8	246,558	54441,2
23	Eastern	15867,3	159,557	15707,7
24	Northwest	36969,6	67,9983	36901,6
25	PanAmerican	23071,3	32,4272	23038,9
26	TWA	29773,2	0	29773,2
27	United	65784,6	0	65784,6
28	Usair	46504,9	313,024	46191,9
	Priemer	23069,64	63,01528	23006,62
	Medián	16945,65	24,74515	16890,85
	Maximum	72095,4	313,024	72095,4
	Minimum	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	19209,18	83,05501	19188,39

Tabuľka 10: Slacky leteckých spoločností v DDF modeli

	Letecká spoločnosť	Technická neef.	slackX1	slackX2	slackX3	slackY1	slackY2
1	AllNipponAirways	101,775	0	136,782	272,478	0	1409,63
2	Cathay Pacific	37,718	0	0	201,659	464,108	0
3	Garuda	96,1174	0	0	2297,54	0	0
4	JAL	0	0	0	0	0	0
5	Malaysia Airlines	80,1062	0	0	487,239	0	0
6	Quantas	0	0	0	0	0	0
7	Saudia	0	0	0	0	0	0
8	SIA	0	0	0	0	0	0
9	AUA	0	0	0	0	0	0
10	British Airways	128,468	8488,95	0	842,374	0	0
11	Finnair	0	0	0	0	0	0
12	Iberia	180,228	8330,87	0	0	0	0
13	Lufthansa	0	0	0	0	0	0
14	SAS	109,569	0	0	159,865	0	143,572
15	Swissair	0	0	0	0	0	0
16	TAP Air Portugal	0	0	0	0	0	0
17	AirCanada	93,3666	5519,85	0	0	0	0
18	AmericaWest	0	0	0	0	0	0
19	American	0	0	0	0	0	0
20	Canadian	100,452	0	0	0	0	0
21	Continental	17,0631	0	0	0	0	980,053
22	Delta	246,558	3925,70	6,38847	0	0	0
23	Eastern	159,557	0	0	0	0	651,493
24	Northwest	67,9983	0	0	0	0	447,298
25	PanAmerican	32,4272	0	0	0	0	0
26	TWA	0	0	0	0	0	0
27	United	0	0	0	0	0	0
28	Usair	313,024	18774,9	0	4,29124	0	918,442
	Priemer	63,01528	1608,581	5,113231	152,3374	16,57529	162,5174
	Medián	24,74515	0	0	0	0	0
	Maximum	313,024	18774,9	136,782	2297,54	464,108	1409,63
	Minimum	0	0	0	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	83,05501	4160,624	25,83284	460,1282	87,70817	370,0197

4.4 Rozklad ziskovej neefektivity vo WA modeli

V tejto podkapitole uvádzame rozklad ziskovej neefektivity $\Pi I_{WA}(x, y, c, p, w^x, w^y)$ vo WA modeli na technickú $TI_{WA}(x, y, w^x, w^y)$ a alokatívnu $AI_{WA}(x, y, c, p, w^x, w^y)$ neefektivitu. Hodnoty jednotlivých efektivít sú uvedené v tabuľke 11. Pri zisťovaní maximálneho zisku pre danú spoločnosť, sme použili vlastné ceny danej spoločnosti. Jednotlivé spoločnosti môžu byť neefektívne pri svojich vlastných cenách, naopak, môže maximalizovať zisk pri cenách inej firmy, čo slúži ako benchmark pre danú spoločnosť. Deskriptívna štatistika jednotlivých efektivít je uvádzaná v spodnej časti tabuľky. Pri výpočte sme do modelu 6 za váhy $(w^x, w^y)^T$ dosadili samé jednotky.

Výsledky ukazujú, že ziskovú neefektivitu minimalizuje, teda dosiahne hodnotu $\Pi I_{WA}(x, y, c, p, w^x, w^y) = 0$, iba spoločnosť č. 9 (AUA). Z hľadiska technickej efektivity sú efektívne až 13 spoločností. Priemerná hodnota ziskovej neefektivity je 10099618, zatiaľ čo priemerná technická neefektivita má hodnotu 6422,21 a priemerná alokatívna neefektivita dosiahne hodnotu 10093192. V dôsledku toho, až 99% straty zisku spôsobuje alokatívna neefektivita. Teda tiež platí, že hoci spoločnosti minimalizujú technickú neefektivitu pri svojich vlastných cenách, ale z hľadiska ziskovej neefektivity sa im to nepodarí.

Tabuľka 12 obsahuje slacky leteckých spoločností vo WA modeli. Keďže za váhy sme dosadili jednotky, tak technická neefektivita danej spoločnosti sa rovná súčtom slackov tej spoločnosti. Pri pohľade na tri vstupy zistíme, že najväčšia priemerná hodnota slackov prislúcha k ostatným nákladom $(X3)$ leteckých spoločností s hodnotou 161,7929 miliónov amerických dolárov, zatiaľ čo najmenšia priemerná hodnota slackov sa nadobúda pri premennej $X1$ s hodnotou 4559 zamestnancov. Z hľadiska výstupov najväčšie priemerné množstvo slackov prislúcha k nákladom na osobokilometer $(Y1)$ s hodnotou 1243,675 miliónov amerických dolárov. V tomto prípade každá spoločnosť, ktorá je technicky efektívna, projektovaním dostane na efektívnu hranicu $\partial^S M$, keďže ani jedna z nich nevykazuje kladné slacky.

Tabuľka 11: Rozklad ziskovej neefektivity leteckých spoločností založený na WA modeli

	Letecká spoločnosť	Zisková	Technická	Alokatívna
1	All Nippon Airways	4005490	2465,95	400302,05
2	Cathay Pacific	3125950	7291,84	3118658,16
3	Garuda	576950	9880,49	567069,51
4	JAL	13059800	0	13059800
5	Malaysia Airlines	1659570	12546,7	1647023,3
6	Quantas	6674750	0	6674750
7	Saudia	6141270	0	6141270
8	SIA	1399380	0	1399380
9	AUA	0	0	0
10	British Airways	15016000	22495,3	14993504,7
11	Finnair	1461370	0	1461370
12	Iberia	8515930	24493,9	8491436,1
13	Lufthansa	15236800	0	15236800
14	SAS	5683650	16569	5667081
15	Swissair	6379300	0	6379300
16	TAP Air Portugal	1514140	0	1514140
17	Air Canada	8077010	11766,7	8065243,3
18	AmericaWest	2471520	0	2471520
19	American	33867500	0	33867500
20	Canadian	4932010	6701,14	4925308,6
21	Continental	12003000	1752,57	12001247,43
22	Delta	28364600	12411,3	28352188,7
23	Eastern	5654410	15303,3	5639106,7
24	Northwest	20947800	1781,9	20946018,1
25	PanAmerican	11583500	1530,98	11581969,02
26	TWA	14705000	0	14705000
27	United	31738500	0	31738500
28	Usair	17994100	32830,8	17961269,2
	Priemer	10099618	6422,21	10093192
	Medián	6527025	1641,775	6527025
	Maximum	33867500	32830,8	33867500
	Minimum	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	9386417	9022,62	9385953

Tabuľka 12: Slacky leteckých spoločností v WA modeli

	Letecká spoločnosť	Technická neef.	slackX1	slackX2	slackX3	slackY1	slackY2
1	All Nippon Airways	2465,95	0	230,581	364,39	341,485	1529,5
2	Cathay Pacific	7291,84	2337,85	0	164,722	4734,25	55,0174
3	Garuda	9880,49	2792,94	0	2262,790	4334,43	490,325
4	JAL	0	0	0	0	0	0
5	Malaysia Airlines	12546,7	7889,54	0	406,72	3919,76	330,705
6	Quantas	0	0	0	0	0	0
7	Saudia	0	0	0	0	0	0
8	SIA	0	0	0	0	0	0
9	AUA	0	0	0	0	0	0
10	British Airways	22495,3	18927,3	0	1207,05	2360,91	0
11	Finnair	0	0	0	0	0	0
12	Iberia	24493,9	19782,3	52,6022	0	3997,5	661,524
13	Lufthansa	0	0	0	0	0	0
14	SAS	16569	13468,6	0	124,529	2274,62	701,217
15	Swissair	0	0	0	0	0	0
16	TAP Air Portugal	0	0	0	0	0	0
17	Air Canada	11766,7	11304	166,334	0	0	296,345
18	AmericaWest	0	0	0	0	0	0
19	American	0	0	0	0	0	0
20	Canadian	6701,14	6063,71	111,385	0	0	526,041
21	Continental	1752,57	612,836	0	0	0	1139,73
22	Delta	12411,3	10721,2	135,192	0	0	1554,93
23	Eastern	15303,3	10511,9	60,914	0	3093,7	1636,79
24	Northwest	1781,9	1051,07	59,3287	0	0	671,5
25	PanAmerican	1530,98	1227,68	0	0	0	303,292
26	TWA	0	0	0	0	0	0
27	United	0	0	0	0	0	0
28	Usair	32830,8	20956,2	0	0	9766,24	2108,43
	Priemer	6422,21	4558,826	29,15489	161,7929	1243,675	428,7624
	Medián	1641,775	306,418	0	0	0	27,5087
	Maximum	32830,8	20956,2	230,581	2262,79	9766,24	2108,43
	Minimum	0	0	0	0	0	0
	Smerodajná odchýlka	9022,62	6822,398	60,15883	478,6198	2317,817	615,3243

Všimnime si, že hodnoty neefektivít v DDF a WA modeli nadobúdajú pomerne veľké hodnoty. V prípade DDF modelu je tomu tak preto, že zvolené hodnoty smerového vektora sú malé oproti hodnotám jednotlivých vstupov. Túto situáciu by bolo možné napraviť tak, že by sa zvolili smerové vektory rádovo rovnako veľké, ako sú hodnoty jednotlivých vstupov a výstupov. V prípade WA modelu je tomu tak preto, že zvolené hodnoty váhy sú malé oproti hodnotám jednotlivých vstupov. Túto situáciu by bolo možné napraviť tak, že rozmer váhy by svojou veľkosťou mali byť prevrátenou hodnotou rozmeru daného vstupu, či výstupu. Voľba tzv. *range* smerov v DDF modeli podľa článku [16], a voľba váh podľa *Range adjusted measure (RAM)* vo WA modeli podľa článku [14] by zabezpečili, že oba modely by boli invariantne na zmenu jednotiek aj posun, a navyše by príslušné hodnoty neefektivít boli v intervale $[0, 1)$.

Záver

Hlavným cieľom tejto diplomovej práce bola analýza alokatívnej efektivity numericky aj analyticky a popísať jej vlastnosti. Táto analýza zahŕňala jednak systematické spracovanie doteraz známych poznatkov ako aj ilustráciu teórie na príkladoch a obrázkoch.

Prvá kapitola tvorí základný teoretický rámec práce. Najprv sme zaviedli používanú symboliku a vysvetlili základné pojmy DEA modelovania, pričom sme vychádzali z učebného textu [13]. Následne sme predstavili modely, ktorými sa v celej práci zaoberáme. Prvými predstavenými modelmi sú vstupne a výstupne orientované radiálne modely, známe ako BBC modely (Podkapitola 1.1 a 1.2). Potom nasledoval hyperbolický model (Podkapitola 1.3), ktorej teoretická časť je prevážne založená na práci [15]. Následne sme predstavili DDF model (Podkapitola 1.4), pričom sme vychádzali z práce [2]. Prvú kapitolu uzatvára predstavenie WA modelu (Podkapitola 1.5) vychádzajúc najmä z článkov [4], [18].

Druhá kapitola je venovaná ekonomickému správaniu firiem a funkciám merajúce ekonomickú efektivitu, pričom vychádzame najmä z prác [1] a [18]. Podkapitoly uvedené v tejto časti práce majú podobnú štruktúru. Najprv sme predstavili definíciu funkcie (napr. nákladovej), ktorá je z ekonomického hľadiska významná pre jednotlivých firiem, potom sme uviedli ako sa počítajú hodnoty týchto funkcií pomocou lineárneho programovania a následne sme definovali funkciu merajúcu ekonomickú efektivitu (napr. nákladovú).

V tretej kapitole sme sa sústredili na alokatívnu efektivitu (resp. neefektivitu). V rámci jednotlivých podkapitol sme uviedli najprv vzťah medzi príslušnou ekonomickou efektivitou a technickou efektivitou. Následne sme zakomponovali aj alokatívnu efektivitu do rozkladu. Každú podkapitolu sme ukončili príkladom, kde sme objasnili rozklad ekonomickej efektivity na technickú a alokatívnu efektivitu. Na konci tejto kapitoly sme definovali významné vlastnosti alokatívnych efektivít, spolu so zhrnutím, ktoré modely ich spĺňajú a ktoré nie.

Dôležitou časťou tretej kapitoly sú dôkazy jednotlivých tvrdení a príklady na znázornenie rozkladu efektivít v jednotlivých modeloch. Ako prvé sme uviedli a dokázali Tvrdenie 3.1, pomocou čoho sme popísali vzťah medzi technickou efektivitou v modeli $R(I)$ a nákladovou efektivitou. V ďalšej časti sme sformulovali a dokázali Tvrdenie 3.2 o vzťahu medzi technickou efektivitou v modeli $R(O)$ a výnosovou efektivitou. Následne sme predstavili a dokázali Tvrdenie 3.3, obsahujúce vzťah medzi rentabilnou efektivitou a

technickou efektivitou v hyperbolickom modeli. Posledných dvoch tvrdení sme nedokázali, ale aj tie sme numericky a graficky ilustrovali na príkladoch.

V záverečnej kapitole sme predstavili numerickú ilustráciu rozkladu ekonomickej efektivity na dátach leteckých spoločností. Dáta sme preberali z článku [6]. Získané numerické výsledky sme zapísali do prehľadných tabuliek, pričom sme uviedli aj príslušné slacky technických efektivít. Výpočet sme realizovali pomocou softvéru *Julia*. Našim cieľom bola ilustrácia rôznych modelov a nie analýza efektívnosti jednotlivých leteckých spoločností.

Za hlavný prínos tejto diplomovej práce považujeme jednak prehľadné a kompaktné spracovanie danej problematiky, ako i ilustráciu jednotlivých modelov na príkladoch. Podarilo sa nám podrobne dokázať niekoľko tvrdení v podkapitolách 3.1, 3.2, 3.3. Ďalším z prínosov boli jednotlivé príklady spolu s obrázkami ilustrujúce jednotlivé rozklady ekonomických efektivít.

Daná téma samozrejme poskytuje priestor na ďalší výskum, napríklad podrobnou analýzou vlastností alokatívnych efektivít (resp. neefektivít). Bolo by tiež zaujímavé experimentovať s ďalšími voľbami smerového vektora v DDF modeli a voľbami váh vo WA modeli a skúmať, ako by jednotlivé výsledky zmenili.

Zoznam použitej literatúry

[1] Aparicio, J., Zofío, J. L., Pastor, J. T.: *Decomposing Economic Efficiency into Technical and Allocative Components: An Essential Property*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 197, No. 1 (2023), 98-129

[2] Bagin, M.: *Modely obálkovej analýzy dát založené na meraní smerovej vzdialenosti*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2018

[3] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W.: *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*, Management science, Vol. 30, No. 9 (1984), 1078-1092

[4] Barbero, J., Zofío, J. L.: *The measurement of profit, profitability, cost and revenue efficiency through data envelopment analysis: A comparison of models using BenchmarkingEconomicEfficiency. jl*, Socio-Economic Planning Sciences, Vol. 89, No. 101656 (2023), 1-18

[5] Bezanson, J. a kol.: *Julia: A fresh approach to numerical computing*, SIAM review, Vol. 59, No. 1 (2017), 65-98

[6] Coelli, T., Griffel-Tatjé, E., Perelman, S.: *Capacity utilisation and profitability: A decomposition of short-run profit efficiency*, International journal of production economics, Vol. 79, No. 3 (2002), 261-278

[7] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T.: *RAM: a range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA*, Journal of Productivity analysis, Vol. 11 (1999), 5-42

[8] Cooper, W. W. a kol.: *Decomposing profit inefficiency in DEA through the weighted additive model*, European Journal of Operational Research, Vol. 212, No. 2 (2011), 411-416

[9] Chambers, R. G., Chung, Y., Färe, R.: *Profit, Directional Distance Function and Nerlovian Efficiency*, Journal of optimization theory and applications, Vol. 98 (1998), 351-364

[10] Charnes, A. a kol.: *Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions*, Journal of Econometrics, Vol. 30, No. 1-2 (1985), 91-107

[11] Färe, R. S., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K.: *The measurement of efficiency of production*, Norwell, Mass: Kluwer Academic Publishers, Boston, 1985

[12] Farrell, M. J.: *The measurement of productive efficiency*, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 120, No. 3 (1957), 253-290

[13] Halická, M.: DEA modely, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (12.1.2024): `http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/DEAskripta.pdf`

[14] Halická, M., Trnovská, M.:*A unified approach to non-radial graph models in data envelopment analysis: common features, geometry, and duality*, EJOR 289 (2021), 611-627

[15] Halická, M., Trnovská, M.: *Duality and profit efficiency for the hyperbolic measure model*, European Journal of Operational Research, Vol. 278, No. 2 (2019), 410-421

[16] Halická, M., Trnovská, M., Černý, A.: *A unified approach to radial, hyperbolic, and directional efficiency measurement in data envelopment analysis*, EJOR 3012 (2024), 298-314

[17] Lovell, C. A. K., Pastor, J. T.:*Units invariant and translation invariant DEA models*, Operations research letters, Vol. 18, No. 3 (1995), 147-151

[18] Pastor, J. T., Aparicio, J., Zofío, J. L.: *Benchmarking Economic Efficiency*, International Series in Operations Research and Management Science, Springer, 2022

[19] R Core Team: R: *A language and environment of statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020. [cit. 28.04.2024] Dostupné na adrese: `https://www.R-project.org/`

[20] ŠÚ SR [online] *Webové sídlo Štatistického úradu Slovenskej republiky*, [cit. 28.04.2024] Dostupné na adrese: `https://slovak.statistics.sk/PACVPEM/vocabPagesDetails.html?id=10067&lang=sk`

[21] ŠÚ SR [online] *Webové sídlo Štatistického úradu Slovenskej republiky*, [cit. 28.04.2024] Dostupné na adrese: https://slovak.statistics.sk/PACVPEM/vocabPagesDetails.html?id=10066&lang=sk

Príloha A

Tabuľka 13: Dáta o leteckých spoločnostiach

	Výstupy a ich ceny				Vstupy a ich ceny					
Name	Y1	P1	Y2	P2	X1	C1	X2	C2	X3	C3
All Nippon Airways	35261	0.137	614	0.608	12222	67.5	860	0.84	2008	1.347
Cathay Pacific	23388	0.087	1580	0.278	12214	33.5	456	0.84	1492	0.721
Garuda	14074	0.09	539	0.393	10428	8.2	304	0.84	3171	0.256
JAL	57290	0.106	3781	0.372	21430	79.9	1351	0.84	2536	1.347
Malaysia Airlines	12891	0.072	599	0.265	15156	10.8	279	0.84	1246	0.401
Quantas	28991	0.064	1330	0.239	17997	30.7	393	0.84	1474	0.993
Saudia	18969	0.095	760	0.318	24078	29.2	235	0.84	806	1.235
SIA	32404	0.064	1902	0.263	10864	13.3	523	0.84	1512	0.898
AUA	2943	0.192	65	0.641	4067	47.9	62	0.84	241	1.32
British Airways	67364	0.113	2618	0.264	51802	35.6	1294	0.84	4276	1.08
Finnair	9925	0.098	157	0.411	8630	31.5	185	0.84	303	1.581
Iberia	23312	0.122	845	0.412	30140	39.9	499	0.84	1238	1.073
Lufthansa	50989	0.132	5346	0.3	45514	48.6	1078	0.84	3314	1.302
SAS	20799	0.168	619	0.462	22180	52.8	377	0.84	1234	1.489
Swiss air	20092	0.144	1375	0.324	19985	57.8	392	0.84	964	1.626
TAP Air Portugal	8961	0.1	234	0.444	10520	23.5	121	0.84	831	0.671
Air Canada	27676	0.089	998	0.306	22766	38.5	626	0.78	1197	1.035
America West	18378	0.069	169	0.263	11914	21.8	309	0.78	611	1
American	133796	0.079	1838	0.252	80627	35	2381	0.78	5149	1
Canadian	24372	0.081	625	0.319	16613	31.9	513	0.78	1051	1.035
Continental	69050	0.072	1090	0.24	35661	27.4	1285	0.78	2835	1
Delta	96540	0.086	1300	0.339	61675	42.4	1997	0.78	3972	1
Eastern	29050	0.073	245	0.261	21350	23.9	580	0.78	1498	1
Northwest	85744	0.077	2513	0.273	42989	41.5	1762	0.78	3678	1
Pan American	54054	0.068	1382	0.193	28638	32.1	991	0.78	2193	1
TWA	62345	0.07	1119	0.223	35783	32.5	1118	0.78	2389	1
United	131905	0.078	2326	0.274	73902	35.5	2246	0.78	5678	1
Usair	59001	0.1	392	0.413	53557	36.4	1252	0.78	3030	1