UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ OBÁLKOVÁ ANALÝZA DÁT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2025 Bc. Martina ČÁPKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ OBÁLKOVÁ ANALÝZA DÁT

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.

Bratislava 2025 **Bc. Martina ČÁPKOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martina Čápková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Dvojstupňová sieťová obálková analýza dát
Two-stage network data envelopment analysis

Anotácia: Obálková analýza dát (DEA) je neparametrická metóda na vyhodnocovanie relatívnej efektivity útvarov. V sieťovej DEA sa zohľadňuje pri vyhodnocovaní efektivity aj vnútorná štruktúra útvarov, čo vedie k informatívnejším a spoľahlivejším záverom. Dvojstupňové modely majú zo sieťových modelov najjednoduchšiu štruktúru, kde výstupy z prvej fázy slúžia ako vstupy do druhej fázy výrobného procesu.

Vedúci: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 11.01.2024

Dátum schválenia: 25.01.2024 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou by som sa rada poďakovala svojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Márii Trnovskej, PhD. za ochotu, odborné rady, užitočné pripomienky a usmernenia, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a známym za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

ČÁPKOVÁ, Martina: Dvojstupňová sieťová obálková analýza dát [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2025, 111 s.

V našej diplomovej práci sa zaoberáme prepracovanejším typom DEA (*Data Envelopment Analysis*) modelovania, a to dvojstupňovou sieťovou obálkovou analýzou dát. Táto sa na rozdiel od klasickej DEA pozerá na vnútornú štruktúru, teda neberie do úvahy iba celkové vstupy a výstupy, ale aj medziprodukty vznikajúce v prvej fáze. Neurčuje teda len efektívnosť celého útvaru, ale aj jednotlivých fáz, respektíve identifikuje, v ktorej fáze problém spočíva. Cieľom našej práce je najskôr vysvetliť princíp sieťovej DEA a sformulovať všeobecné modely, a následne transformovať teóriu a modely na dvojstupňovú sieťovú DEA. Pre všetky prezentované modely uvádzame aplikáciu na ilustračnom príklade. V záverečnej kapitole našej diplomovej práce sa pozrieme na aplikáciu týchto modelov na komplikovanejších reálnych dátach a porovnáme výsledky s klasickými modelmi ignorujúcimi vnútornú štruktúru.

Kľúčové slová: Obálková analýza dát (DEA), Sieťová DEA, Nezávislý model, Prepojený model, Relačný model, Dvojstupňová sieťová obálková analýza dát, Základný dvojstupňový model, Všeobecný dvojstupňový model bez spätnej väzby

Abstract

ČÁPKOVÁ, Martina: Two-stage network data envelopment analysis [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2025, 111 p.

In our master's thesis, we focus on a more advanced type of DEA (*Data Envelopment Analysis*) modeling, two-stage network data envelopment analysis. Unlike traditional DEA, this approach emphasizes the internal structure, meaning it considers overall inputs and outputs and the intermediate products generated in the first stage. Therefore, it does not simply determine the efficiency of the entire unit but also evaluates the efficiency of individual stages, identifying where the problem lies. The aim of our work is, at first, to explain the principle of network DEA and formulate general models, and then transform the theory and models into two-stage network DEA. For all presented models, we provide an application on an illustrative example. In the final chapter of our master's thesis, we look at applying these models to more complex real-world data and compare the results with traditional models without the internal structure.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), Network DEA, Independent model, Connected model, Relational model, Two-stage Network Data Envelopment Analysis, Basic Two-stage model, General Two-stage model without feedback

Obsah

Zoznam obrázkov **9**

Zoznam tabuliek **11**

Úvod **14**

1 DEA modelovanie **16**

1.1 Základné pojmy a symbolika DEA modelovania 16

1.2 CCR a BCC model 19

1.3 HDF model 20

1.4 DDF model 21

2 Úvod do sieťovej DEA **22**

2.1 História a základ sieťovej DEA 23

2.2 Symbolika sieťovej DEA 24

2.3 Základné modely pre meranie efektívnosti v sieťovej DEA 26

2.3.1 Nezávislý model 26

2.3.2 Prepojený model 29

2.3.3 Relačný model 30

2.4 Prehľad empirických štúdií 32

2.5 Zovšeobecnenie uvádzaných modelov 32

3 Dvojstupňová sieťová DEA **35**

3.1 Základný dvojstupňový sieťový DEA model 35

3.1.1 Kumulatívny nezávislý základný dvojstupňový sieťový model 36

3.1.2 Prepojený základný dvojstupňový sieťový model 43

3.1.3 Relačný základný dvojstupňový sieťový model 45

3.2 Všeobecný dvojstupňový sieťový DEA model 48

3.2.1 Najčastejšie používané obdoby všeobecných dvojstupňových sieťových modelov 49

3.2.2 Kumulatívny nezávislý všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby 51

3.2.3 Prepojený všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby 54
3.2.4 Relačný všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby . 56

4 Aplikácia modelov na reálnych dátach 60
4.1 Základná dvojstupňová sieťová DEA 60
4.1.1 Kumulatívny nezávislý model bankového procesu 61
4.1.2 Prepojený model bankového procesu 64
4.1.3 Relačný model bankového procesu 67
4.2 Všeobecná dvojstupňová sieťová DEA bez spätnej väzby 69
4.2.1 Kumulatívny nezávislý model R&D procesu 70
4.2.2 Prepojený model R&D procesu 73
4.2.3 Relačný model R&D procesu 76

Záver 78

Zoznam použitej literatúry 80

Príloha A: Ďalšie empirické štúdie s inými typmi sieťových modelov 86

Príloha B: Doplňujúce tabuľky k aplikáciám na reálnych dátach 87
B.1 Americké komerčné banky 87
B.2 Regióny Číny 89

Príloha C: Zdrojové kódy 91
C.1 CRS 91
C.1.1 ZÁKLADNÁ DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ DEA 91
C.1.2 VŠEOBECNÁ DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ DEA BEZ SPÄTNEJ VÄZBY 101
C.2 VRS 111
C.2.1 ZÁKLADNÁ AJ VŠEOBECNÁ DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ DEA BEZ SPÄTNEJ VÄZBY 111

Zoznam obrázkov

1 Technológia so svojimi vstupmi a výstupmi (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [19]*) 16

2 Schéma sieťovej DEA pre firmu s 3 prepojenými divíziami (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [50]*) 22

3 Schéma základného dvojstupňového sieťového systému (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [29]*) 36

4 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ-I-CRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 38

5 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ-O-CRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 39

6 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ-HDF-CRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 39

7 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ-DDF-CRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 39

8 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z $(KNZ-I-VRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 41

9 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z $(KNZ-O-VRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 41

10 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z $(KNZ-HDF-VRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 42

11 Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z $(KNZ-DDF-VRS)$ modelu (Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*) 42

12 Schéma všeobecného dvojstupňového sieťového systému (Zdroj: *vlastné spracovanie*) 49
13 Schéma základného dvojstupňového sieťového systému so spätnou väzbou (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [29]*) 50
14 Schéma všeobecného dvojstupňového sieťového systému bez spätnej väzby (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [29]*) 51
15 Schéma procesu produkcie banky (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [48]*) . . 60
16 Schéma procesu regionálneho výskumu a vývoja (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [33]*) 69

Zoznam tabuliek

1 Prehľad vyššie popísaných modelov v empirických štúdiách 32

2 Parametrizácia sieťových modelov pre vstupné, výstupné, HDF a DDF tvary 33

3 Vstupy, medziprodukty a výstupy v Príklade 3.1 37

4 Výsledky z (KNZ) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 38

5 Výsledky z (KNZ) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 40

6 Výsledky z ($PREP$) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 44

7 Výsledky z ($PREP$) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 45

8 Výsledky z (REL) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 46

9 Výsledky z (REL) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 47

10 Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 47

11 Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1 48

12 Vstupy, medziprodukty a výstupy v Príklade 3.2 52

13 Výsledky z ($KNZ - g$) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 53

14 Výsledky z ($KNZ-g$) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 54

15 Výsledky z ($PREP - g$) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 55

16 Výsledky z ($PREP - g$) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 56

17 Výsledky z ($REL - g$) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 57

18 Výsledky z $(REL-g)$ modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 58

19 Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 58

20 Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2 59

21 Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri CRS pre jednotlivé americké komerčné banky získané pomocou *Kumulatívneho nezávislého modelu* 62

22 Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé americké komerčné banky získané pomocou vstupného a výstupného *Kumulatívneho nezávislého modelu* 63

23 Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé americké komerčné banky získané pomocou HDF a DDF *Kumulatívneho nezávislého modelu* 64

24 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS 65

25 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS 66

26 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS 67

27 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS 68

28 Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri CRS pre jednotlivé regióny Číny získané pomocou *Kumulatívneho nezávislého modelu* 71
29 Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé regióny Číny získané pomocou vstupného a výstupného *Kumulatívneho nezávislého modelu* 72
30 Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé regióny Číny získané pomocou HDF a DDF *Kumulatívneho nezávislého modelu* 73
31 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS 74
32 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS 75
33 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS 76
34 Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS 77
35 Prehľad iných typov modelov v empirických štúdiách 86
36 Údaje o amerických komerčných bankách 87
37 Normalizované dáta amerických komerčných bánk 88
38 Údaje o regiónoch v Číne 89
39 Normalizované dáta regiónov v Číne 90

Úvod

Každý deň sa stretávame s rôznymi situáciami, kde podvedome hodnotíme efektivitu – či už pri rozhodovaní, ktorú pokladňu v supermarkete si vybrať, aby sme čakali čo najkratšie, alebo pri výbere trasy do práce, aby sme sa vyhli dopravným zápcham. O efektívnosti hovoríme vtedy, keď sú dostupné zdroje využité čo najlepším spôsobom. No kým v bežnom živote sa spoliehame na intuíciu, v akademickom prostredí sú na meranie efektívnosti potrebné systematické a presné metódy.

Jednou z najznámejších metód na hodnotenie efektívnosti je obálková analýza dát (z angl. *Data Envelopment Analysis*, skrátene *DEA*), ktorá oficiálne vznikla v roku 1978 v práci Charnesa, Coopera a Rhodesa. DEA je vedná oblasť, ktorá využíva neparametrické metódy na hodnotenie výkonnosti rozhodovacích jednotiek. Tieto metódy zahŕňajú rôzne optimalizačné modely, vrátane lineárnych aj nelineárnych, ktoré analyzujú vzťahy medzi vstupmi a výstupmi. Klasický DEA model predpokladá, že každá jednotka transformuje určité vstupy (financie, pracovná sila, suroviny) na výstupy (produkty, služby), pričom cieľom je určiť, ktoré jednotky pracujú efektívne a ktoré zaostávajú [8].

Tradičná DEA však často analyzuje systémy ako *čierne skrinky* (z angl. *Black-Box*), teda berie do úvahy len celkové vstupy a výstupy bez detailného pohľadu na vnútorné procesy. To môže byť v mnohých prípadoch nedostatočné, pretože veľa organizácií funguje ako viacstupňové systémy, kde výstupy jednej fázy slúžia ako vstupy pre ďalšiu fázu. Práve preto vznikla sieťová DEA (z angl. *Network DEA*), ktorá umožňuje analyzovať zložitejšie procesy a hodnotiť efektívnosť jednotlivých medzistupňov.

Špecifickým prípadom sieťovej DEA je dvojstupňová sieťová DEA (z angl. *Two-Stage Network DEA*), ktorá sa využíva v situáciách, kde organizácie fungujú v dvoch navzájom prepojených fázach. V prvej fáze sa vstupy transformujú na medziprodukty, ktoré slúžia ako vstupy do druhej fázy na produkciu konečných výstupov. Takýmto spôsobom môžeme napríklad v bankovníctve analyzovať efektívnosť získavania vkladov v prvej fáze a efektívnosť poskytovania úverov v druhej fáze.

Dvojstupňová sieťová DEA sa rozšírila v posledných rokoch, keďže mnohé reálne systémy majú dvojstupňovú štruktúru. Umožňuje nielen určiť, či je jednotka ako celok efektívna, ale aj identifikovať, či problém spočíva v prvej alebo druhej fáze. Týmto spôsobom poskytuje hlbší pohľad na fungovanie analyzovaných procesov a môže byť cenným ná-

strojom pre analytikov. Literatúra zaoberajúca sa sieťovou DEA je veľmi rozmanitá a poskytuje obrovské množstvo modelov, ktoré ponúkajú priestor pre rôzne modifikácie.

Cieľom tejto diplomovej práce je preskúmať a zjednotiť rôzne modely sieťovej DEA a bližšie nahliadnuť na dvojstupňovú sieťovú obálkovú analýzu dát a ilustrovať ju na jednoduchých príkladoch. Ďalej aplikujeme dvojstupňovú sieťovú DEA na dva konkrétne datasety a analyzujeme efektívnosť rozhodovacích jednotiek podľa predstavených modelov.

Naša práca je štrukturovaná do štyroch kapitol. V prvej kapitole uvádzame základné pojmy, symboliku a modely v DEA modelovaní. V ďalšej kapitole predstavujeme sieťovú DEA spolu s jej symbolikou, sformulujeme jej základné modely v obálkovom tvare, pre ktoré nájdeme kompaktný zápis a následne aj všeobecnú schému. V priebehu našej práce budeme používať rôzne tvary týchto modelov. Taktiež tu uvedieme prehľad štúdií, ktoré využívajú uvedené modely sieťovej DEA. Informácie pritom čerpáme najmä z práce [29]. Následne naše modely v tretej kapitole pretransformujeme pre konkrétne tvary dvojstupňovej sieťovej DEA a ilustrujeme na jednoduchých príkladoch. V záverečnej kapitole aplikujeme modely na reálne dáta z článkov [48], [33] a porovnáme výsledky s výstupmi z klasických black-boxových modelov.

1 DEA modelovanie

V úvodnej kapitole zavedieme základné pojmy a symboliku v oblasti obálkovej analýzy dát (DEA modelov), ktoré budeme v našej práci ďalej používať a tvoria základ pre ďalšie poznatky. Vychádzame pri tom predovšetkým z učebného textu [19], pričom podrobne popísanú teóriu DEA modelov môžeme nájsť najmä v práci [6]. K dispozícii je však množstvo ďalších publikácií zameraných na teóriu DEA, ktorých zoznam je uvedený na stránke [8]. Základné princípy DEA sú rozobrané aj v iných literatúrach mimo spomenutú stránku, napríklad v knihe [29], na ktorú sa v práci ešte budeme odvolávať.

Základnými pojmami v oblasti DEA modelov sú efektivita a efektívnosť. Tie sú naviazané na spôsob vykonávania určitej konkrétnej činnosti, ktorú nazývame *technológiou* T alebo produkciou (viď **Obr. 1**). Porovnávať budeme útvary zaoberajúce sa rovnakou činnosťou (ide o homogénnosť danej skupiny producentov). Technológia je charakterizovaná dvomi základnými faktormi: *m vstupmi*, ktoré sa technológiou spotrebovávajú a *s výstupmi*, ktoré sú ňou produkované. Jednotlivé faktory môžu byť merané v rôznych jednotkách.



Obr. 1: Technológia so svojimi vstupmi a výstupmi
(Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [19]*)

1.1 Základné pojmy a symbolika DEA modelovania

Hodnoty vstupov v technológii T označujeme vektorom $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ a hodnoty výstupov vektorom $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$. Ak výstupy $\mathbf{y}$ je možné technológiou T vyrobiť zo vstupov $\mathbf{x}$, tak dvojica $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je pre technológiu T prípustná. Množinu obsahujúcu všetky prípustné $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ označujeme ako *množinu produkčných možností* $= G$. Pričom každú prípustnú dvojicu stotožníme s určitým producentom.

Obyčajne však celá množina produkčných možností nie je známa, ale poznáme niekoľko jej prípustných dvojíc $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, čo nám pomôže zostrojiť jej aproximáciu M, s ktorou

pracujeme v ďalšej analýze.

Pojem producent môžeme voľne zameniť za označenia útvar, jednotka alebo DMU (*Decision Making Unit*). Uvažujeme teda n útvarov DMU_j, $j = 1, ..., n$, riadiacich sa technológiou T. Toto pomenovanie predstavuje nezávislosť pri rozhodovaní jednotlivých útvarov ohľadom zmeny vstupov na výstupy, teda hovorí, že každý útvar je samostatná rozhodovacia jednotka.

Hodnota i-teho vstupu pre útvar DMU_j sa značí x_{ij} a y_{rj} reprezentuje hodnotu r-tého výstupu pre tento útvar. Potom vektory vstupov $\mathbf{x_j} \in \mathbb{R}^m_+$ a výstupov $\mathbf{y_j} \in \mathbb{R}^s_+$ pre útvar DMU_j definujeme ako:

$$\mathbf{x_j} = \begin{pmatrix} x_{1j}, & \dots & x_{ij}, & \dots & x_{mj} \end{pmatrix}^T, \qquad \mathbf{y_j} = \begin{pmatrix} y_{1j}, & \dots & y_{rj}, & \dots & y_{sj} \end{pmatrix}^T, \qquad j = 1, ..., n.$$

Prehľadnejší a užitočnejší zápis najmä pri programovaní modelov je pomocou matíc. Matica vstupov označovaná $\mathbf{X}$ je typu $m \times n$ a matica výstupov $\mathbf{Y}$ má rozmer $s \times n$. Obsahujú hodnoty vstupov a výstupov všetkých útvarov, čo zapisujeme nasledovne:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} & \dots & \mathbf{x_j} & \dots & \mathbf{x_n} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} \mathbf{y_1} & \dots & \mathbf{y_j} & \dots & \mathbf{y_n} \end{pmatrix}.$$

Pre nami pozorovaný útvar budeme používať index $o \in \{1, ..., n\}$ s vektorom vstupov $\mathbf{x_o}$ a vektorom jeho výstupov $\mathbf{y_o}$.

V celej našej práci predpokladáme nezápornosť všetkých vstupov a výstupov každého útvaru, pričom existuje aspoň jeden kladný vstup aj výstup pre každý útvar, teda ako v [19] žiadame splnenie predpokladu:

Predpoklad 1.1. *Pre všetky* $j = 1, ..., n$ *platí* $\mathbf{x_j} \geq 0_m$, $\mathbf{x_j} \neq 0_m$ *a* $\mathbf{y_j} \geq 0_s$, $\mathbf{y_j} \neq 0_s$.

Na začiatku tejto podkapitoly sme spomenuli množinu produkčných možností G a jej aproximáciu M, ktorá môže byť v podobe dvoch základných typov na základe výnosov z rozsahu. Výnosy z rozsahu môžu byť konštantné (ozn. CRS = Constant Return to Scale), kedy s každým bodom $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je v G obsiahnutá aj celá priamka $c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall c > 0$. V inom prípade hovoríme o variabilných výnosoch (ozn. VRS = Variable Returns to Scale). Potom pod množinou M_{CRS} rozumieme množinu:

$$M_{CRS} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+s} | \quad \mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x}, \quad \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}, \quad \lambda \geq 0 \right\}$$

a pod M_{VRS} si predstavíme množinu:

$$M_{VRS} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+s} | \quad \mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x}, \quad \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}, \quad \lambda \geq 0, \quad e^T\lambda = 1 \right\}.$$

Takto skonštruované množiny tvoria "obálku" dát pre dané DMU, z čoho vychádza samotné pomenovanie DEA modelovania. Zo spôsobu konštrukcie týchto množín vidíme, že M_{CRS} je uzavretý konvexný kužeľ a M_{VRS} je uzavretá konvexná množina a obe sú generované vektormi jednotlivých DMU_j rozšírené o dvojice, ktoré majú väčšie vstupy alebo menšie výstupy.

Ďalej podľa [19] definujeme efektívne body v množine M, ktorá predstavuje buď M_{CRS} alebo M_{VRS}:

Definícia 1.2. *Bod* $(\mathbf{x_A}, \mathbf{y_A}) \in M$ *nazývame Pareto-***efektívnym** *v* M*, vtedy a len vtedy, ak* **neexistuje** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M$ *také, že* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{x_A}, \mathbf{y_A})$ *a zároveň* $\mathbf{x_A} \geq \mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y_A} \leq \mathbf{y}$*. Bod, ktorý nie je Pareto-efektívnym nazývame Pareto-***neefektívnym** *v* M*.*

Zjednodušene, bod je Pareto-efektívnym (namiesto tohto výrazu budeme používať výraz efektívny), keď bez zvýšenia vstupov, nedokážeme zvýšiť výstupy, a naopak, keď nie je možné znížiť vstupy bez toho, aby sme znížili výstupy.

Je teda očividné, že **efektívny** bod musí byť z hranice množiny M. Avšak na hranici tejto množiny nemusia byť len efektívne body, tieto nazývame **pseudoefektívne**, pričom body nachádzajúce sa vo vnútri množiny M sú **neefektívne**. Z tohto dostávame, že hranica množiny $M = \partial M$ pozostáva z dvoch častí:

Hranica efektívnosti tvorená efektívnymi bodmi na hranici

$$H_E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial M \quad | \quad \nexists(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in M : (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \neq (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{y}\},$$

Hranica pseudoefektívnosti tvorená neefektívnymi bodmi na hranici

$$H_P = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial M \quad | \quad \exists(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in M : (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \neq (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{y}\}.$$

Posledným dôležitým pojmom je **efektívny vzor**. Označujeme tak bod z hranice efektívnosti, ktorého vstupy sú nanajvýš také ako vstupy skúmaného bodu z množiny M a výstupy aspoň také ako výstupy tohto skúmaného bodu.

Jedno z hlavných delení DEA modelov je podľa orientovanosti na **orientované**, uprednostňujúce buď vstupy (vstupné modely) alebo výstupy (výstupné modely), a **neorientované**, nepreferujú vstupy pred výstupmi a naopak, ale zachytávajú neefektivitu súčasne vo vstupoch aj výstupoch. Okrem toho poznáme dva rôzne prístupy určovania efektivity v DEA modeloch - **multiplikatívny** a **obálkový**, ktoré sú k sebe navzájom duálne. Pri

multiplikatívnom prístupe priraďujeme vstupom a výstupom rôzne váhy, pričom obálkový prístup súvisí s našimi množinami M_{CRS} a M_{VRS}. My budeme v našej práci používať iba obálkový prístup.

1.2 CCR a BCC model

Medzi najviac uplatňované a používané modely patrí klasický CCR model. Je jedným z prvých DEA modelov, ktorý vymysleli Charnes, Cooper a Rhodes (1978). My si ho tu uvedieme, pretože tvorí základ veľmi veľa modelov, čo využijeme v priebehu práce. Ide o orientovaný model zodpovedajúci konštantným výnosom z rozsahu. Môže mať teda podobu vstupného (Input - I) aj výstupného (Output - O) modelu. V [19] je tento model definovaný nasledovne:

Vstupný model CCR-I-OM geometricky predstavuje radiálne skracovanie vstupov na hranicu M_{CRS} pri nezmenených výstupoch. Koeficient θ predstavuje dané skracovanie, preto ho minimalizujeme a model aplikovaný na DMU_o s $\mathbf{x_o} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{y_o} \in \mathbb{R}^s$ má nasledujúci tvar:

$$(CCR-I-OM)_o: \quad \min_{\theta,\lambda} \quad \theta \tag{1.1}$$

$$\mathbf{X}\lambda \leq \theta \mathbf{x_o}, \tag{1.1.1}$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_o}, \tag{1.1.2}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{1.1.3}$$

Je zrejmé, že θ je z intervalu $[0, 1]$ a predstavuje mieru efektivity, pričom optimálnu hodnotu účelovej funkcie budeme značiť θ^*.

Analogicky výstupný model CCR-O-OM geometricky predstavuje radiálne predlžovanie výstupov na hranicu M_{CRS} pri nezmenených vstupoch. Spomenuté predlžovanie predstavuje v tomto prípade koeficient ψ, ktorý maximalizujeme. Úloha aplikovaná na DMU_o s $\mathbf{x_o} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{y_o} \in \mathbb{R}^s$ má teda tvar:

$$(CCR-O-OM)_o: \quad \max_{\psi,\lambda} \quad \psi \tag{1.2}$$

$$\mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x_o}, \tag{1.2.1}$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \psi \mathbf{y_o}, \tag{1.2.2}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{1.2.3}$$

V tomto prípade musí koeficient spĺňať $\psi \geq 1$ a za mieru efektivity útvaru považujeme hodnotu $\frac{1}{\psi}$, pričom optimálna hodnota účelovej funkcie je $\psi^* \in [0, \infty)$. Hodnoty efektivít z oboch modelov, θ a $\frac{1}{\psi}$, sa pre ten istý útvar rovnajú. Potom môžeme tento model prepísať ako minimalizačnú úlohu s pôvodným parametrom θ nasledovne:

$$(CCR-O-OM)_o: \quad \min_{\theta,\lambda} \quad \theta \tag{1.3}$$

$$\mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x_o}, \tag{1.3.1}$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \frac{1}{\theta}\mathbf{y_o}, \tag{1.3.2}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{1.3.3}$$

Modifikáciou CCR modelu o podmienku modelovania konvexného obalu vznikol klasický BCC model. Za jeho autorov je považovaná trojica Banker, Cooper a Charnes (1984). Rovnako ide o orientovaný model, ktorý však už zodpovedá variabilným výnosom z rozsahu. Vznikne pridaním podmienky $e^T\lambda = 1$ k ohraničeniam CCR modelov (1.1), (1.2) a (1.3).

1.3 HDF model

Hyperbolic Distance Function je model, ktorý vyvinuli Färe, Grosskopf a Lovell (1985) ako spôsob spojenia vstupne a výstupne orientovaných radiálnych modelov merania technickej efektívnosti do jedného modelu. Ako ďalej uvádza práca [13], HDF umožňuje súčasne a proporcionálne redukovať vstupy a zvyšovať výstupy pomocou jediného škálovacieho faktora, čo jej dáva špecifickú štruktúru. Teda radíme ho medzi neorientované modely, pričom HDF nepreferuje ani vstupy, ani výstupy. Menia sa súčasne v rovnakom pomere, takže ide o symetrický prístup v zmysle efektívnosti. Na druhej strane, jeho hlavnou nevýhodou je nelineárnosť, čo spôsobuje výpočtové problémy, najmä pri variabilných výnosoch z rozsahu (VRS).

Ako uvádza článok [7], tento model býva definovaný iba nad kladnými dátami, t.j. $\mathbf{x_j} > 0$ a $\mathbf{y_j} > 0$, $j = 1, ..., n$. Model pre meranie efektivity DMU_o s $\mathbf{x_o} \in \mathbb{R}^m_{\geq}$ a $\mathbf{y_o} \in \mathbb{R}^s_{\geq}$ možno potom sformulovať ako:

$$(HDF)_o: \quad \min \quad \theta \tag{1.4}$$

$$\mathbf{X}\lambda \leq \theta \mathbf{x_o}, \tag{1.4.1}$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \frac{1}{\theta}\mathbf{y_o}, \tag{1.4.2}$$

$$\lambda \geq 0, \quad \left(e^T\lambda = 1\right). \tag{1.4.3}$$

Ak v (1.4.3) ponecháme iba ohraničenie na nezápornosť, model zodpovedá konštantným výnosom z rozsahu. Pokiaľ pridáme aj ohraničenie na rovnosť v zátvorke, dostávame model s variabilnými výnosmi z rozsahu.

1.4 DDF model

Ďalším modelom, ktorý si spomenieme je *Proportional Directional Distance Function*, ktorý patrí medzi neorientované modely. Ide o pomerne nový model, ktorý bol prvýkrát predstavený v roku 1997 Briecom. V tejto časti opäť vychádzame najmä z článku [7].

HDF model (1.4) vedie za pomoci linearizácie $\frac{1}{\theta} - 1 \sim 1 - \theta$ pri $\theta = 1$ k modelu:

$$(DDF)_o: \quad \min \quad \theta \tag{1.5}$$

$$\mathbf{X}\lambda \leq \mathbf{x_o} - (1-\theta)\mathbf{x_o}, \tag{1.5.1}$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y_o} + (1-\theta)\mathbf{y_o}, \tag{1.5.2}$$

$$\lambda \geq 0, \quad \left(e^T\lambda = 1\right). \tag{1.5.3}$$

Ak označíme $\beta = 1 - \theta$ a nahradíme $\min \theta$ za $\max \beta$ s použitím špeciálneho smerového vektora $\mathbf{g} = (\mathbf{x_o}, \mathbf{y_o})$ dostávame verziu *Directional Distance Function* modelu.

Model (1.6) môžeme prepísať do tvaru:

$$(DDF)_o: \quad \min \quad \theta \tag{1.6}$$

$$\mathbf{X}\lambda \leq \theta \mathbf{x_o}, \tag{1.6.1}$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq (2-\theta)\mathbf{y_o}, \tag{1.6.2}$$

$$\lambda \geq 0, \quad \left(e^T\lambda = 1\right). \tag{1.6.3}$$

Podobne platí, že ak v (1.5.3), resp. (1.6.3), ponecháme iba prvé ohraničenie, dostávame model s konštantnými výnosmi z rozsahu. Ak však pridáme aj ohraničenie v zátvorke, model zodpovedá variabilným výnosom z rozsahu.

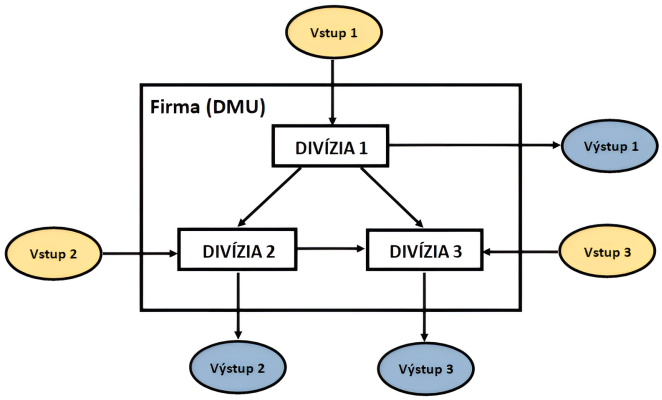
2 Úvod do sieťovej DEA

Táto kapitola sa zameriava na uvedenie do problematiky sieťovej DEA a zavedenie základných pojmov a modelov. V našej práci vychádzame predovšetkým zo štúdie Ch. Kaa [29], v ktorej sa pozrel na problematiku sieťovej DEA. Taktiež budeme čerpať z článku [50] a prác [4], [18], [36].

Počiatočné práce a výskumy z oblasti DEA sa zameriavali na celkovú efektívnosť jednotlivých DMU, bez ohľadu na vnútornú štruktúru organizácií. Teda brali do úvahy iba vstupy dodávané do daného DMU a výstupy produkované daným DMU.

V skutočnosti sa organizácie zvyčajne skladajú z niekoľkých divízií, resp. sektorov, z ktorých každý vykonáva rôzne funkcie, ktoré sa mnohými spôsobmi vzájomne ovplyvňujú. Vďaka tomu sa v mnohých prípadoch, ako napríklad v bankovom sektore, ukázalo, že ignorovanie jednotlivých divízií organizácií môže viesť k skresleným a zavádzajúcim výsledkom. Preto sa postupne začal rozvíjať koncept sieťovej DEA, ktorý sa pozerá na vnútornú štruktúru, teda zahŕňa rozdelenie organizácií na jednotlivé časti a hodnotí efektívnosť v kontexte ich vzájomných interakcií.

Firma sa typicky skladá z viacerých oddelení alebo divízií, pričom každá z nich môže mať svoje vlastné vstupy a výstupy, ale taktiež častokrát nastáva situácia kedy výstupy jednej divízie sú vstupmi inej, teda medzi divíziami vznikajú určité prepojenia a tvorí sa medziprodukt. Schému firmy s 3 prepojenými divíziami môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:



Obr. 2: Schéma sieťovej DEA pre firmu s 3 prepojenými divíziami
(Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [50]*)

Vidíme, že firma má celkovo 3 typy vstupov a 3 typy výstupov, pričom každá divízia má svoje vlastné "vonkajšie" vstupy a výstupy. Ich prepojenia však značia, že vznikajú *medziprodukty*, teda časť celkových výstupov danej divízie sa použije ako vstup do inej divízie, čo z tradičných DEA modelov nepoznáme.

2.1 História a základ sieťovej DEA

Podľa práce Kaa [29], na štúdium výkonnosti DMU je potrebné preštudovať jej jednotlivé divízie, aby sme mohli identifikovať príčinu akejkoľvek neefektívnosti a zistená efektívnosť bola zmysluplná. Tento jav si v skorých štádiách vývoja DEA všimol Charnes a kol. (1986), pri štúdiu náboru armády pozostávajúceho z dvoch procesov. Prvý spočíval vo vytváraní povedomia prostredníctvom reklám a druhým bolo samotné vytváranie kontraktov. Práve rozdelenie veľkých operácií na detailnejšie menšie operácie pomáha identifikovať skutočný vplyv vstupných faktorov.

Hoci myšlienka zohľadniť divízie výrobného systému pri meraní efektívnosti bola v literatúre diskutovaná už v 80. a 90. rokoch 20. storočia, pojem **sieťová DEA** (z angl. Network DEA) sa prvýkrát oficiálne objavil až v roku 2000 v práci Färe a Grosskopfa [10].

Ak sa vrátime pred vznik sieťovej DEA, jedným z prvých prístupov k metóde DEA bol tzv. *Black-Box* alebo *čierna skrinka*, kedy úplne odignorujeme divízie a pozeráme sa na firmu ako na celok. Teda nevieme aké sú efektivity jednotlivých divízií a výsledná efektivita môže byť pomerne skreslená. Ďalším prístupom bola separácia na jednotlivé divízie, ktorých efektivita bola vyhodnocovaná samostatne, avšak stráca sa tu prepojenie medzi danými divíziami. Práve tieto nedostatky viedli k vytvoreniu sieťovej obálkovej analýzy dát, ktorá zohľadňuje rovnako efektivitu jednotlivých divízií ako aj celkovú efektivitu.

Meranie výkonu sieťového systému je na rozdiel od merania výkonu celej jednotky DMU ťažké vyjadriť pomocou všeobecného modelu, pretože ide o rôzne štruktúry sieťového výrobného systému. Tento prístup umožňuje meranie efektívnosti vo viacstupňových produkčných systémoch, pričom najjednoduchšou štruktúrou je dvojstupňový systém. V ňom sa všetky vstupy dodávané zvonka využívajú v prvej fáze (divízii) na výrobu medziproduktov, ktoré sa následne použijú v druhej fáze (divízii) na výrobu konečných výstupov systému. Ako sa systémy komplikujú, modelovanie ich štruktúry sa stáva náročnejším a

systematické vyjadrenie modelu je možné len pre určité špecifické typy systémov, pričom pre iné neštruktúrované systémy to zostáva náročné.

2.2 Symbolika sieťovej DEA

Pri meraní efektivity sieťových systémov sa v literatúre používajú rôzne označenia. Celú firmu alebo podnik zvyčajne pomenúvame termínmi *útvar*, *systém*, *technológia* alebo *DMU* a jednotlivé divízie môžu byť označované ako *divízia*, *sektor*, *sub-DMU*, *sub-technológia* alebo *sub-systém*. V našej práci budeme používať pojmy DMU a divízia.

Na základe práce [29] predpokladajme, že každý útvar DMU_j $(j = 1, ..., n)$ je zložený z p divízií. V jednotlivých útvaroch DMU_j sú divízie jednotne usporiadané tak, že k-ta divízia určitého útvaru DMU_j je rovnakého typu ako k-ta divízia ostatných útvarov DMU, teda sa môžu navzájom porovnávať. Následne k-tu divíziu útvaru DMU_j budeme značiť DMU_j^k, $k = 1, ..., p$. Potom pre $j = 1, ..., n$ a $k = 1, ..., p$:

- x_{ij}^k značí i-ty vonkajší vstup $(i = 1, ..., m)$ vstupujúci do divízie DMU_j^k,
- y_{rj}^k predstavuje r-tý vonkajší výstup $(r = 1, ..., s)$ vyprodukovaný divíziou DMU_j^k.

V rámci jedného DMU_j uvažujeme m typov vstupov a s typov výstupov. Jednotlivé divízie DMU_j^k však spravidla využívajú len určitú podmnožinu týchto vstupov a výstupov. Aby bola zachovaná jednotnosť rozmerov m vstupov a s výstupov pre všetky divízie, vstupy a výstupy, ktoré daná divízia nepoužíva, doplníme nulovými hodnotami.

Teda divízia DMU_j^k je charakterizovaná dvojicou $(\mathbf{x_j^k}, \mathbf{y_j^k})$, kde vektory vstupov $\mathbf{x_j^k} \in \mathbb{R}_+^m$ a výstupov $\mathbf{y_j^k} \in \mathbb{R}_+^s$ definujeme ako:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_j^k} &= \left(x_{1j}^k, \ \ldots \ x_{ij}^k, \ \ldots \ x_{mj}^k\right)^T, \\ \mathbf{y_j^k} &= \left(y_{1j}^k, \ \ldots \ y_{rj}^k, \ \ldots \ y_{sj}^k\right)^T. \end{aligned}$$

V prípade, že máme dáta pre divízie a nechceme zohľadňovať sieťovú štruktúru, môžeme riešiť klasický black-boxový DEA model, ktorého celkový vektor vstupov $\mathbf{x_j} \in \mathbb{R}_+^m$ použitý útvarom DMU_j a vektor výstupov $\mathbf{y_j} \in \mathbb{R}_+^s$ ním vyprodukovaný, ktoré obsahujú všetky divízie tohto útvaru, majú tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_j} &= \sum_{k=1}^{p} \mathbf{x_j^k}, \\ \mathbf{y_j} &= \sum_{k=1}^{p} \mathbf{y_j^k}. \end{aligned}$$

Vo všeobecných sieťových modeloch budeme používať značenie po jednotlivých divíziách DMU_j^k, preto budeme mať nasledovné dátové matice vstupov a výstupov k-tych divízií všetkých DMU rozmerov $m \times n$ a $s \times n$:

$$\mathbf{X^k} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1^k} & \dots & \mathbf{x_j^k} & \dots & \mathbf{x_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y^k} = \begin{pmatrix} \mathbf{y_1^k} & \dots & \mathbf{y_j^k} & \dots & \mathbf{y_n^k} \end{pmatrix}.$$

Dôležitou súčasťou sieťovej DEA je, okrem vstupov a výstupov, *medziprodukt*, ktorý je produkovaný aj spotrebovávaný systémom, preto nie je navonok viditeľný. Uvažujme teda h typov medziproduktov produkovaných divíziou DMU_j^k. Pokiaľ dochádza k produkcií daného medziproduktu, označenie $z_{gj}^{(a,b)}$, $g = 1, ..., h$, predstavuje g-ty medziprodukt, ktorý divízia DMU_j^a produkuje ako "vnútorný" výstup a ktorý zároveň vstupuje do divízie DMU_j^b ako "vnútorný" vstup. Analogicky ako pri vstupoch a výstupoch, ak divízia určitý medziprodukt nevytvára ani nespotrebováva, jeho hodnota sa v modeli nastavuje na nulu, pričom zrejme platí aj $z_{gj}^{(a,a)} = 0$.

Celkový g-ty medziprodukt $z_{gj}^{(k,:)}$ produkovaný divíziou DMU_j^k pre všetky ďalšie divízie útvaru DMU_j a celkové množstvo f-tého medziproduktu $z_{fj}^{(:,k)}$ produkovaného ostatnými divíziami útvaru DMU_j vstupujúci do k-tej divízie tohto útvaru definujeme ako:

$$z_{gj}^{(k,:)} = \sum_{b=1}^{p} z_{gj}^{(k,b)},$$
$$z_{fj}^{(:,k)} = \sum_{a=1}^{p} z_{fj}^{(a,k)}.$$

Ďalej nech pre medziprodukty systému platí:

- $\mathbf{z_j^{(a,b)}} \in \mathbb{R}_+^h$ = vektor všetkých h medziproduktov medzi divíziami DMU_j^a a DMU_j^b,
- $\mathbf{z_j^{(k,:)}} \in \mathbb{R}_+^h$ = vektor celkových medziproduktov produkovaných divíziou DMU_j^k a spotrebovaných ostatnými divíziami útvaru DMU_j definovaný ako:

$$\mathbf{z_j^{(k,:)}} = \begin{pmatrix} z_{1j}^{(k,:)}, & \dots & z_{gj}^{(k,:)}, & \dots & z_{hj}^{(k,:)} \end{pmatrix}^T,$$

- $\mathbf{z_j^{(:,k)}} \in \mathbb{R}_+^h$ = vektor celkových medziproduktov vstupujúcich do divízie DMU_j^k od všetkých ostatných divízií útvaru DMU_j definovaný ako:

$$\mathbf{z_j^{(:,k)}} = \begin{pmatrix} z_{1j}^{(:,k)}, & \dots & z_{fj}^{(:,k)}, & \dots & z_{hj}^{(:,k)} \end{pmatrix}^T.$$

Máme teda dva typy matice medziproduktov k-tej divízie rozmeru $h \times n$, a to:

- matica, ktorej j-ty stĺpec reprezentuje medziprodukty vytvorené k-tou divíziou útvaru DMU_j vstupujúcich do ostatných divízií tohto útvaru

$$\mathbf{Z^{(k,:)}} = \left(\mathbf{z_1^{(k,:)}}, \quad \dots \quad \mathbf{z_j^{(k,:)}}, \quad \dots \quad \mathbf{z_n^{(k,:)}} \right),$$

- matica, ktorej j-ty stĺpec reprezentuje medziprodukty vstupujúce do k-tej divízie útvaru DMU_j od ostatných divízií tohto útvaru

$$\mathbf{Z^{(:,k)}} = \left(\mathbf{z_1^{(:,k)}}, \quad \dots \quad \mathbf{z_j^{(:,k)}}, \quad \dots \quad \mathbf{z_n^{(:,k)}} \right).$$

Hoci teoreticky by každá divízia mohla využívať a produkovať všetky vstupy, medziprodukty a výstupy, v praxi však každá divízia využíva len ich vybranú podmnožinu, čo vedie k vysokej riedkosti v maticiach vstupov $\mathbf{X^k}$, medziproduktov $\mathbf{Z^{(k,:)}}$, $\mathbf{Z^{(:,k)}}$ a výstupov $\mathbf{Y^k}$.

2.3 Základné modely pre meranie efektívnosti v sieťovej DEA

Sieťová DEA nie je špecifický model, ale skôr skupina modelov, ktoré majú spoločné črty. Existuje množstvo spôsobov merania efektívnosti systému. V tejto podkapitole si uvedieme klasifikáciu modelov do 3 typov podľa [29]. Okrem nich sa ešte často používajú modely založené na teórii hier a SBM modely. Všetky majú samozrejme viacero variácií a rozšírení, my si však uvedieme iba obálkový tvar modelov.

Okrem uvedených typov modelov existujú v sieťovej DEA ďalšie rôzne typy štruktúr a modelov. Rozlišujeme dve, a to *sériové* a *paralelné* štruktúry, pričom vo väčšine prípadov sa zvyknú rôzne kombinovať. Najrozšírenejšími typmi sieťových DEA modelov sú *statické*, *dynamické* a modely so *spoločnou technológiou*. Všetky tieto typy a štruktúry sú prehľadne spracované v článkoch [20], [28] a taktiež v práci [4]. My sa v ďalšej kapitole budeme zaoberať obyčajnou dvojstupňovou sieťou, ktorá je statická so sériovou štruktúrou, preto tieto typy pre našu prácu nie je potrebné viac popisovať.

2.3.1 Nezávislý model

Nezávislý model[1] predstavuje najpriamejší spôsob merania efektívnosti sieťového systému, ktorý spočíva v meraní efektivity jednotlivých divízií ako nezávislých DMU bez ohľadu na

[1] V anglickej literatúre sa zvykne nazývať *Independent model*.

prepojenia medzi nimi. Teda každú divíziu daného DMU_o porovnáme so zodpovedajúcou divíziou ostatných DMU_j $(j = 1, ..., n)$ použitím zaužívaných DEA modelov.

V knihe [29] autori najčastejšie používajú vstupne, príp. výstupne orientované formulácie modelov. Sú zároveň aj veľmi rozšírenými typmi modelov využívaných v kontexte sieťovej analýzy v literatúre. Preto *Nezávislý model* pre meranie efektivity k-tej divízie útvaru DMU_o, ktorý je predstavený aj v knihe [29], je vo vstupnej formulácií nasledovný:

$$\min \quad \theta^k \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k \lambda_j^k \leq \theta^k x_{io}^k, \qquad i = 1, ..., m \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{a=1}^{p} z_{fj}^{(a,k)} \right) \lambda_j^k \leq \theta^k \sum_{a=1}^{p} z_{fo}^{(a,k)}, \qquad f = 1, ..., h \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{b=1}^{p} z_{gj}^{(k,b)} \right) \lambda_j^k \geq \sum_{b=1}^{p} z_{go}^{(k,b)}, \qquad g = 1, ..., h \tag{2.1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^k \lambda_j^k \geq y_{ro}^k, \qquad r = 1, ..., s \tag{2.1.4}$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad \forall j \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = 1 \right). \tag{2.1.5}$$

Pokiaľ v ohraničení (2.1.5) ponecháme iba prvé ohraničenie na nezápornosť, model zodpovedá konštantným výnosom z rozsahu. Ak k nemu pridáme ohraničenie v zátvorke, dostaneme model zodpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu. Ďalej budú všetky spomenuté modely nadobúdať dvojakú podobu, pre prípad s CRS aj pre prípad s VRS.

Optimálna hodnota θ^{k*} modelu (2.1) udáva efektivitu divízie DMU_j^k, ktorá nadobúda hodnotu z intervalu $[0, 1]$. Teda pri efektívnej divízii je jej hodnota 1. Pri špeciálnom type technologickej množiny je tento model podobný klasickému CCR (resp. BCC) modelu.

My sme pre lepšiu prehľadnosť a manipuláciu odvodili kompaktný zápis modelu:

$$\min \quad \theta^k \tag{2.2}$$

$$\mathbf{X^k} \lambda^k \leq \theta^k \mathbf{x_o^k}, \tag{2.2.1}$$

$$\mathbf{Z^{(:,k)}} \lambda^k \leq \theta^k \mathbf{z_o^{(:,k)}}, \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{Z^{(k,:)}} \lambda^k \geq \mathbf{z_o^{(k,:)}}, \tag{2.2.3}$$

$$\mathbf{Y^k} \lambda^k \geq \mathbf{y_o^k}, \tag{2.2.4}$$

$$\lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T \lambda^k = 1 \right). \tag{2.2.5}$$

Takto uvedený model nezávisle vyhodnocuje jednu divíziu DMU_o^k útvaru DMU_o. Vzniknutý *Nezávislý model* má potom $n+1$ premenných. Ohraničenia (2.2.1) - (2.2.4) predstavujú systém $m+2h+s$ nerovností.

Nás však zaujíma celková efektivita útvaru DMU_o, preto vyriešením p úloh typu (2.1) získame p hodnôt θ^{k*}, ktoré v súčte predstavujú kumulatívnu efektivitu pre tento útvar. Preto sa v literatúre, napr. [29], zvykne používať formulácia vo forme nasledujúceho kumulatívneho modelu:

$$\min \quad \sum_{k=1}^{p} \theta^k \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k \lambda_j^k \leq \theta^k x_{io}^k, \qquad i=1,...,m, \quad k=1,...,p \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{a=1}^{p} z_{fj}^{(a,k)} \right) \lambda_j^k \leq \theta^k \sum_{a=1}^{p} z_{fo}^{(a,k)}, \qquad f=1,...,h, \quad k=1,...,p \tag{2.3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{b=1}^{p} z_{gj}^{(k,b)} \right) \lambda_j^k \geq \sum_{b=1}^{p} z_{go}^{(k,b)}, \qquad g=1,...,h, \quad k=1,...,p \tag{2.3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^k \lambda_j^k \geq y_{ro}^k, \qquad r=1,...,s, \quad k=1,...,p \tag{2.3.4}$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad \forall j,k \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = 1 \right). \tag{2.3.5}$$

Model (2.3) sa takto uvádza v literatúre, ale v podstate neponúka inú informáciu ako nezávisle nakumulované modely (2.1). [2]

Opäť sme odvodili ohraničenia v kompaktnom tvare, pričom hodnota účelovej funkcie nasledujúceho modelu môže v maxime dosahovať až hodnotu p:

$$\min \quad e^T \theta^k \tag{2.4}$$

$$\mathbf{X^k} \lambda^k \leq \theta^k \mathbf{x_o^k}, \qquad k=1,...,p \tag{2.4.1}$$

$$\mathbf{Z^{(:,k)}} \lambda^k \leq \theta^k \mathbf{z_o^{(:,k)}}, \qquad k=1,...,p \tag{2.4.2}$$

$$\mathbf{Z^{(k,:)}} \lambda^k \geq \mathbf{z_o^{(k,:)}}, \qquad k=1,...,p \tag{2.4.3}$$

$$\mathbf{Y^k} \lambda^k \geq \mathbf{y_o^k}, \qquad k=1,...,p \tag{2.4.4}$$

$$\lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T \lambda^k = 1 \right). \tag{2.4.5}$$

[2] Zaujímavou alternatívou alebo modifikáciou modelu (2.3) by mohol byť model, kde sa ohraničenia (2.3.1) - (2.3.4) zosumujú cez k. V dostupnej literatúre sme však takúto úpravu nenašli. Tento návrh tak predstavuje možné smerovanie a rozšírenie našej práce v budúcnosti.

Takto vzniknutý model nazveme *Kumulatívny nezávislý model*. Tento vyhodnocuje všetky divízie $DMU_o^k,\ k = 1, ..., p$, útvaru DMU_o . Keď však má model (2.4) reprezentovať efektivitu daného útvaru DMU_o skrz jednotlivé divízie DMU_o^k, tak by bolo korektné, aby výsledná efektivita celého útvaru DMU_o dosahovala maximálne hodnotu 1, ktorá by sa už dala porovnávať s ďalšími modelmi. To môžeme dosiahnuť napríklad tým, že urobíme aritmetický priemer získaných výsledných hodnôt θ^{k*}, ktorý pre pozorovaný útvar môžeme označiť $\boldsymbol{\theta}^*$. Alebo alternatívne, nahradíme účelovú funkciu modelu (2.4) aritmetickým priemerom, ktorý pre útvar DMU_o označíme ako $\boldsymbol{\theta} = \frac{e^T\theta^k}{p}$.

Počet ohraničení (2.4.1) - (2.4.4) nám však v tomto prípade stúpne až na $(m+2h+s)\cdot p$ a počet premenných na $(n+1)\cdot p$, teda dostávame výpočtovo náročnejší model.

2.3.2 Prepojený model

Hlavnou myšlienkou *Prepojeného modelu* [3] je zahrnúť efektívnosť všetkých divízií a ich vzájomné interakcie, čo znamená, že efektivita systému nebude nadhodnotená ako v prípadoch, keď sú divízie považované za nezávislé jednotky. Meria teda efektívnosť celého DMU, pričom efektivity jednotlivých divízií sa zvyčajne nedajú získať. Model používa fixné prepojenie medzi divíziami, teda "vnútorné" vstupy (medziprodukty) sa spravidla nechávajú nezmenené, aby sa zabezpečilo, že výstupy jednej divízie presne zodpovedajú vstupom nasledujúcej.

Pre všeobecný systém siete sa v literatúre [29] pre všetky divízie útvaru DMU_o uvádza vstupný *Prepojený model* v tvare:

$$\min \quad \theta \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k \lambda_j^k \leq \theta x_{io}^k, \qquad i = 1, ..., m, \quad k = 1, ..., p \tag{2.5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{a=1}^{p} z_{fj}^{(a,k)} \right) \lambda_j^k \leq \sum_{a=1}^{p} z_{fo}^{(a,k)}, \qquad f = 1, ..., h, \quad k = 1, ..., p \tag{2.5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{b=1}^{p} z_{gj}^{(k,b)} \right) \lambda_j^k \geq \sum_{b=1}^{p} z_{go}^{(k,b)}, \qquad g = 1, ..., h, \quad k = 1, ..., p \tag{2.5.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^k \lambda_j^k \geq y_{ro}^k, \qquad r = 1, ..., s, \quad k = 1, ..., p \tag{2.5.4}$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad \forall j, k \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = 1 \right). \tag{2.5.5}$$

[3] V anglickej literatúre sa zvykne nazývať *Connected model*.

Nami odvodený kompaktný zápis potom bude nasledovný:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta & & (2.6)\\
& \mathbf{X^k}\lambda^k \leq \theta \mathbf{x_o^k}, & k = 1, ..., p \quad & (2.6.1)\\
& \mathbf{Z^{(:,k)}}\lambda^k \leq \mathbf{z_o^{(:,k)}}, & k = 1, ..., p \quad & (2.6.2)\\
& \mathbf{Z^{(k,:)}}\lambda^k \geq \mathbf{z_o^{(k,:)}}, & k = 1, ..., p \quad & (2.6.3)\\
& \mathbf{Y^k}\lambda^k \geq \mathbf{y_o^k}, & k = 1, ..., p \quad & (2.6.4)\\
& \lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^k = 1\right). & & (2.6.5)
\end{aligned}$$

V tomto prípade nám počet ohraničení zostáva rovnaký ako pri *Kumulatívnom nezávislom modeli*, ale dostávame menší počet premenných, a to $n \cdot p + 1$.

Je potrebné poznamenať dva rozdiely v porovnaní so zodpovedajúcim *Kumulatívnym nezávislým modelom*, pričom oba sa viažu k parametru θ. Prvým rozdielom oproti *Kumulatívnemu nezávislému modelu* je, že tento parameter je rovnaký pre všetkých p divízií, čo zodpovedá pridaniu ohraničenia na rovnosť θ^k v modeli (2.3), resp. (2.4), čím zmenšíme množinu prípustných riešení. Druhým rozdielom je jeho naviazanosť iba na "vonkajšie" vstupy, zatiaľ čo medziprodukty zostávajú nezmenené, čím sa zachovávajú prepojenia medzi divíziami.

2.3.3 Relačný model

Posledným typom modelu, ktorým sa budeme zaoberať, je *Relačný model* [4], ktorý je schopný merať efektivity jednotlivých divízií aj celého DMU. Avšak podobne ako pri *Prepojenom modeli*, jeho hlavným cieľom je predovšetkým merať efektívnosť celého DMU.[5] V literatúre sa uvádza, že tento model je kombináciou konceptov modelov (2.4) (príp. jeho modifikácie so súčtami ohraničení) a (2.6).

Takýto všeobecný vstupne orientovaný model sa v literatúre [29] vyskytuje v nasledujúcej obálkovej podobe:

[4] V anglickej literatúre sa zvykne nazývať *Relational model*.

[5] V našej práci uvádzame iba obálkové tvary modelov, avšak v multiplikatívnom tvare je tento model schopný nielen hodnotiť celkovú efektívnosť DMU, ale aj samostatne merať efektívnosť jeho jednotlivých divízií. Pre rôzne štruktúry siete možno navyše odvodiť vzťah medzi celkovou efektívnosťou a efektívnosťami divízií, pričom základnou požiadavkou modelu je používanie rovnakých váh pre medziprodukty bez ohľadu na to, či sú vstupom alebo výstupom.

$$\min \quad \theta \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k}\lambda_j^k \leq \theta \sum_{k=1}^{p} x_{io}^{k}, \qquad i = 1, ..., m, \tag{2.7.1}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{b=1}^{p} z_{gj}^{(k,b)}\right) - \sum_{a=1}^{p} z_{fj}^{(a,k)}\right] \lambda_j^k \geq 0, \qquad g = 1, ..., h, \tag{2.7.2}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} y_{rj}^{k}\lambda_j^k \geq \sum_{k=1}^{p} y_{ro}^{k}, \qquad r = 1, ..., s, \tag{2.7.3}$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad \forall j, k \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = 1\right). \tag{2.7.4}$$

Jeho kompaktný tvar potom bude nasledovný:

$$\min \quad \theta \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbf{X^k}\lambda^k \leq \theta \sum_{k=1}^{p} \mathbf{x_o^k}, \tag{2.8.1}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\mathbf{Z^{(k,:)}} - \mathbf{Z^{(:,k)}}\right) \lambda^k \geq 0, \tag{2.8.2}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbf{Y^k}\lambda^k \geq \sum_{k=1}^{p} \mathbf{y_o^k}, \tag{2.8.3}$$

$$\lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^k = 1\right). \tag{2.8.4}$$

V rámci porovnania tohto modelu s klasickým black-boxovým modelom (1.1) sa ukázalo, že *Relačný model* predstavuje jeho rozšírenie, v ktorom sa zohľadňuje vnútorná štruktúra DMU prostredníctvom obmedzení (2.8.2) špecifických pre jednotlivé divízie. Tieto dodatočné obmedzenia vedú k presnejšiemu vyhodnoteniu procesov v rámci DMU, a preto výsledky nemusia byť zhodné s tými, ktoré poskytuje black-boxový prístup. Systémová efektivita *Relačného modelu* (2.8) tak neprevyšuje efektivitu klasického black-boxového CCR modelu (1.1).

Pri porovnaní tohto modelu so zodpovedajúcim *Prepojeným modelom* môžeme vidieť dve odlišnosti - všetky obmedzenia *Relačného modelu* sú súčtom obmedzení nad p divíziami a obmedzenia (2.6.2), (2.6.3) sú v tomto modeli skombinované do jedného. Takže počet premenných zostáva rovnaký ako pri *Prepojenom modeli* a počet ohraničení (2.8.1) - (2.8.3) sa zníži na $m+h+s$. Tento typ modelu je teda menej prísny, množina prípustných riešení sa oproti modelu (2.6) zredukuje, a preto jeho optimálna hodnota θ^* nadobúda menšie alebo rovnako veľké hodnoty ako optimálna hodnota *Prepojeného modelu*.

2.4 Prehľad empirických štúdií

Za pomoci prác [20] a [28] si uvedieme stručný prehľad niekoľkých empirických štúdií zaoberajúcich sa sieťovou DEA. V **Tabuľke 1** sú uvedené štúdie a články využívajúce doteraz nami spomínané typy modelov, spolu s relevantnými detailmi použitých prístupov a na doplnenie v **Prílohe A** spomíname významné štúdie, ktoré využívajú iné typy modelov. Môžeme si všimnúť, že všetky tieto štúdie sa zaoberajú práve dvojstupňovou sieťovou DEA, ktorá je predmetom aj našej práce.

Typ použitého sieťového DEA modelu		Aplikácia	Zdroj
Nezávislý model	dvojstupňový vstupný obálkový model s CRS aj VRS	vzorka firiem S&P 500 v 2005	[37]
	dvojstupňový vstupný obálkový model s CRS aj VRS	bankový sektor	[42]
	dvojstupňový vstupný obálkový model s CRS založený na superefektívnosti	priemyselné spoločnosti	[45]
	dvojstupňový výstupný obálkový model s CRS aj VRS	bankový sektor	[48]
	dvojstupňový výstupný obálkový model s VRS	baseballová liga	[49]
	dvojstupňový vstupný, výstupný multiplikatívny model s VRS	bankový sektor	[51], [52]
	dvojstupňový vstupný obálkový aj multiplikatívny model s CRS aj VRS	zdravotné poisťovne	[54]
Prepojený model	dvojstupňový obálkový model s CRS	vlastnícke práva	[12]
	dvojstupňový výstupný obálkový model s VRS	farmy	[14]
	dvojstupňový vstupný obálkový aj multiplikatívny model s VRS	bankový sektor	[15]
	dvojstupňový modifikovaný neorientovaný obálkový model s VRS	bankové holdingové spoločnosti	[21]
	dvojstupňový obálkový model s CRS aj VRS s nežiadúcimi výstupmi	letecké spoločnosti	[39]
Relačný model	dvojstupňový multiplikatívny model s CRS aj VRS	neživotné poisťovne	[23]
	dvojstupňový vstupný multiplikatívny model s CRS	neživotné poisťovne v Taiwane	[30]
	dvojstupňový vstupný multiplikatívny aj obálkový model s CRS	bankový sektor	[31]
	dvojstupňový multiplikatívny model s CRS	univerzity v Číne	[35]
	dvojstupňový obálkový model s VRS	priemyselné spoločnosti	[38]
	dvojstupňový aditívny model s VRS	letecké spoločnosti	[41]
	dvojstupňový multiplikatívny model s VRS	americké podielové fondy	[47]

Tabuľka 1: Prehľad vyššie popísaných modelov v empirických štúdiách

2.5 Zovšeobecnenie uvádzaných modelov

V podkapitole **2.3** sme odvodili vstupné formy *Kumulatívneho nezávislého, Prepojeného* a *Relačného modelu*. Cieľom tejto časti je na základe článku [7] sformulovať všeobecné schémy pre tieto modely, pričom sa okrem vstupných a výstupných modelov zameriame aj na *path-based* modely spomenuté v kapitole **1**, a to konkrétne na HDF a DDF tvary modelov. Okrem toho môžeme pozorovať, že pri *Kumulatívnom nezávislom modeli* sú jednotlivé parametre θ^k naviazané na "vonkajšie" ($\mathbf{x^k}$) aj "vnútorné" ($\mathbf{z}^{(:,\mathbf{k})}$) vstupy (variant **XYZ**), pričom pri *Prepojnom modeli* sa parameter θ viaže iba k "vonkajším" vstupom (variant **XY**).

Univerzálne všeobecné schémy *Nezávislého* (NZ) a *Kumulatívneho nezávislého modelu* (KNZ), ktoré sú odvodené od všeobecnej schémy štandardných path-based modelov uvedenej v článku [7], aplikované na útvar DMU_o reprezentovaný štvoricou $(\mathbf{x_o}, \mathbf{z_o^{(:,k)}}, \mathbf{z_o^{(k,:)}}, \mathbf{y_o})$, budú mať v kompaktnom tvare formuláciu:

$$
\begin{aligned}
(NZ)_o: \quad \min \quad & \theta^k && (2.9)\\
& \mathbf{X^k}\lambda^k \leq \psi^I(\theta^k)\mathbf{x_o^k}, && (2.9.1)\\
& \mathbf{Z^{(:,k)}}\lambda^k \leq \psi^I(\theta^k)\mathbf{z_o^{(:,k)}}, && (2.9.2)\\
& \mathbf{Z^{(k,:)}}\lambda^k \geq \psi^O(\theta^k)\mathbf{z_o^{(k,:)}}, && (2.9.3)\\
& \mathbf{Y^k}\lambda^k \geq \psi^O(\theta^k)\mathbf{y_o^k}, && (2.9.4)\\
& \lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^k = 1\right). && (2.9.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(KNZ)_o: \quad \min \quad & e^T\theta^k && (2.10)\\
& \mathbf{X^k}\lambda^k \leq \psi^I(\theta^k)\mathbf{x_o^k}, \qquad k = 1, ..., p && (2.10.1)\\
& \mathbf{Z^{(:,k)}}\lambda^k \leq \psi^I(\theta^k)\mathbf{z_o^{(:,k)}}, \qquad k = 1, ..., p && (2.10.2)\\
& \mathbf{Z^{(k,:)}}\lambda^k \geq \psi^O(\theta^k)\mathbf{z_o^{(k,:)}}, \qquad k = 1, ..., p && (2.10.3)\\
& \mathbf{Y^k}\lambda^k \geq \psi^O(\theta^k)\mathbf{y_o^k}, \qquad k = 1, ..., p && (2.10.4)\\
& \lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^k = 1\right), && (2.10.5)
\end{aligned}
$$

kde ψ^I, ψ^O predstavujú reálne funkcie, ktoré majú predpisy v závislosti od svojej premennej, pre nami pozorované špecifické 4 modely, uvedené v nasledovnej tabuľke:

	I(input)	**O(output)**	**HDF**	**DDF**
$\psi^I(\theta)$	θ	1	θ	θ
$\psi^O(\theta)$	1	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{\theta}$	2 - θ

Tabuľka 2: Parametrizácia sieťových modelov pre vstupné, výstupné, HDF a DDF tvary

Variant **XY** by v prípade (KNZ) modelu nebol vhodný, pretože nezahrnutím parametra θ^k pri obmedzeniach na medziprodukty implicitne predpokladá ich fixný prenos medzi divíziami, čím medzi nimi zavádza závislosť. To by bolo v rozpore so základným konceptom nezávislosti, na ktorom je model (KNZ) postavený.

V *Prepojenom modeli* sa "vnútorné" vstupy považujú za fixné prepojenia medzi divíziami. Sú to interné zdroje, ktoré sú plne využité v ďalšej fáze, a preto sa na ne efek-

tívnostný parameter θ typicky neaplikuje. Preto variant **XYZ**, kde "vnutorné" vstupy nie sú fixné, ale môžu sa meniť nezávisle, by bol pre tento typ modelov v rozpore s ich konceptom. [6]

Formulácia všeobecnej schémy *Prepojeného modelu* ($PREP$), ktorá je opäť odvodená od všeobecnej schémy štandardných path-based modelov uvedenej v článku [7], aplikovanej na útvar DMU_o, ktorý je reprezentovaný štvoricou $(\mathbf{x_o}, \mathbf{z_o^{(:,k)}}, \mathbf{z_o^{(k,:)}}, \mathbf{y_o})$, bude v kompaktnom tvare nasledovná:

$$(PREP)_o: \quad \min \quad \theta \tag{2.11}$$

$$\mathbf{X^k}\lambda^k \leq \psi^I(\theta)\mathbf{x_o^k}, \qquad k = 1, ..., p \tag{2.11.1}$$

$$\mathbf{Z^{(:,k)}}\lambda^k \leq \mathbf{z_o^{(:,k)}}, \qquad k = 1, ..., p \tag{2.11.2}$$

$$\mathbf{Z^{(k,:)}}\lambda^k \geq \mathbf{z_o^{(k,:)}}, \qquad k = 1, ..., p \tag{2.11.3}$$

$$\mathbf{Y^k}\lambda^k \geq \psi^O(\theta)\mathbf{y_o^k}, \qquad k = 1, ..., p \tag{2.11.4}$$

$$\lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^k = 1\right). \tag{2.11.5}$$

V tomto type pracujeme už len s funkciami ψ^I, ψ^O vzťahujúcimi sa na "vonkajšie" vstupy a výstupy, pričom ich predpis v závislosti od premennej θ uvádzame v **Tabuľke 2**.

Pri *Relačnom modeli* nastáva zmena v ohraničení pre medziprodukty, a teda jeho všeobecnú schému (REL), odvodenú od všeobecnej schémy path-based modelov v článku [7], pre meranie efektivity útvaru DMU_o možno v kompaktnom tvare vyjadriť takto:

$$(REL)_o: \quad \min \quad \theta \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbf{X^k}\lambda^k \leq \psi^I(\theta) \sum_{k=1}^{p} \mathbf{x_o^k}, \tag{2.12.1}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\mathbf{Z^{(k,:)}} - \mathbf{Z^{(:,k)}}\right) \lambda^k \geq 0, \tag{2.12.2}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbf{Y^k}\lambda^k \geq \psi^O(\theta) \sum_{k=1}^{p} \mathbf{y_o^k}, \tag{2.12.3}$$

$$\lambda^k \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^k = 1\right). \tag{2.12.4}$$

Taktiež pre tento typ modelov budú hodnoty funkcií ψ^I, ψ^O v závislosti od parametra θ totožné s tými uvádzanými v **Tabuľke 2**.

[6] Modifikácia na variant **XYZ** by však nemusela byť úplne nezmyselná. Namiesto zmeny samotného modelu by sa zmenila jeho interpretácia. Model by potom nehodnotil efektívnosť pri fixných vnútorných tokoch, ale flexibilitu a prerozdelenie interných zdrojov medzi divíziami.

3 Dvojstupňová sieťová DEA

V tejto kapitole sa bližšie sústredíme na dvojstupňovú sieťovú obálkovú analýzu dát, čo predstavuje najjednoduchšiu formu sieťových systémov. Proces vyhodnocovania efektívnosti sa v nej delí na 2 fázy: premieňanie vonkajších vstupov v prvej divízii na medziprodukty, ktoré vstupujú do druhej divízie, kde sa vytvárajú konečné výstupy. Tento prístup umožňuje podrobnejšiu analýzu fungovania systému, pretože umožňuje odhadnúť efektívnosť jednotlivých fáz (divízií) nezávisle a odhaliť, ktorá časť systému alebo procesu je menej efektívna. Opäť budeme čerpať predovšetkým zo štúdie [29], ale pomôžeme si aj prácou [4].

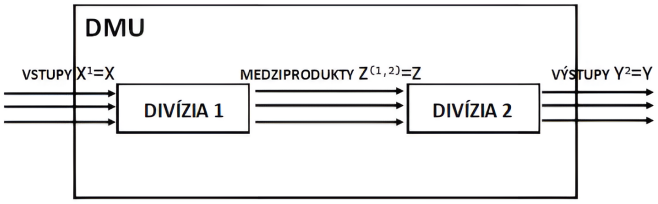
Dvojstupňové systémy začali priťahovať pozornosť matematikov, keď si všimli, že účinky niektorých vstupov môžu na výstupy vplývať nepriamo. Príkladom je vplyv informačných technológií (IT) na pôsobenie banky, od ktorého by sme očakávali, že by mal byť pozitívny. Fungovanie bankovníctva pritom podľa štúdie Wanga a kol. (1997) môžeme rozdeliť na 2 fázy - zber kapitálu a investície. Táto štúdia ukázala, že prínos IT bol len ku zberu kapitálu, pričom to, či banka skutočne dosiahne zisk, závisí od správnych investičných rozhodnutí.

3.1 Základný dvojstupňový sieťový DEA model

V základnom dvojstupňovom sieťovom modeli [7] je výrobný proces jednotlivých divízií prepojený sériovo. Teda výstup z prvej divízie DMU_j^1 sa bezprostredne stáva vstupom druhej divízie DMU_j^2. To znamená, že prvá divízia DMU_j^1 neprodukuje finálne výstupy y_{rj}^1 a druhá divízia DMU_j^2 nespotrebováva vonkajšie vstupy x_{ij}^2. Vstupmi divízie DMU_j^2 a zároveň výstupmi divízie DMU_j^1 sú medziprodukty $z_{gj}^{(1,2)}$, ktoré sú všetky spotrebované systémom. Schému takéhoto systému popisuje **Obr. 3**.

Na základe štruktúry uvedenej na tomto obrázku, typicky uvažujeme $\mathbf{Y^1}, \mathbf{Z^{(2,1)}}$ a $\mathbf{X^2}$ nulové. Rovnako $\mathbf{Z^{(1,1)}}$ a $\mathbf{Z^{(2,2)}}$ sú nulové.

[7] V anglickej literatúre sa zvykne nazývať *Basic two-stage DEA/systems.*



Obr. 3: Schéma základného dvojstupňového sieťového systému
(Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [29]*)

Symboliku zodpovedajúcu **Obr. 3** pri základnej dvojstupňovej sieťovej DEA, kde potrebujeme iba 2 divízie ($p = 2$), môžeme nasledovne zovšeobecniť:

- $\mathbf{X^1} = \mathbf{X}$ = matica vonkajších vstupov divízie DMU_j^1 rozmeru $m \times n$,
- $\mathbf{Y^2} = \mathbf{Y}$ = matica finálnych výstupov divízie DMU_j^2 rozmeru $s \times n$,
- $\mathbf{Z^{(1,2)}} = \mathbf{Z}$ = matica medziproduktov rozmeru $h \times n$ v tvare:

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} \mathbf{z_1} & \dots & \mathbf{z_j} & \dots & \mathbf{z_n} \end{pmatrix}.$$

V ďalších podkapitolách naformulujeme *Kumulatívny nezávislý, Prepojený* a *Relačný model* vo všeobecnej podobe pre základnú dvojstupňovú sieťovú DEA, ktorá zodpovedá vyššie uvedenej symbolike, pričom do modelov budú vstupovať funkcie ψ^I a ψ^O zadefinované v **Tabuľke 2**.

3.1.1 Kumulatívny nezávislý základný dvojstupňový sieťový model

Kumulatívny nezávislý model (2.10) z podkapitoly **2.5** upravíme pre systém s dvoma divíziami podľa zavedenej symboliky do nasledujúceho všeobecného kompaktného tvaru:

$$(KNZ)_o: \quad \min \quad \theta^1 + \theta^2 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{X}\lambda^1 \leq \psi^I(\theta^1)\mathbf{x_o}, \tag{3.1.1}$$

$$\mathbf{Z}\lambda^1 \geq \psi^O(\theta^1)\mathbf{z_o}, \tag{3.1.2}$$

$$\lambda^1 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^1 = 1\right), \tag{3.1.3}$$

$$\mathbf{Z}\lambda^2 \leq \psi^I(\theta^2)\mathbf{z_o}, \tag{3.1.4}$$

$$\mathbf{Y}\lambda^2 \geq \psi^O(\theta^2)\mathbf{y_o}, \tag{3.1.5}$$

$$\lambda^2 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^2 = 1\right). \tag{3.1.6}$$

Pre funkcie ψ^I a ψ^O dostávame pre rôzne variácie modelov hodnoty uvádzané v **Tabuľke 2** v závislosti od premenných θ^1 a θ^2.

Výsledný model aplikujeme vo všetkých jeho uvedených tvaroch na jednoduchý príklad s 5 DMU.

Príklad 3.1. *Majme 5 DMU s jedným vonkajším vstupom, jedným medziproduktom a jedným finálnym výstupom. Prislúchajúce dáta uvádzame v tabuľke:*

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Vstupy **X**	3	8	5	2	6
Medziprodukty **Z**	3	6	2	2	4
Výstupy **Y**	1	7	3	1	2

Tabuľka 3: Vstupy, medziprodukty a výstupy v Príklade 3.1

Najprv sa pozrieme na modely s konštantnými výnosmi z rozsahu.

Výsledné hodnoty efektivít oboch fáz θ^{1*} a θ^{2*}, spriemerované výsledné efektivity $\boldsymbol{\theta}^*$ a ich projekcie na hranicu množiny M_{CRS} uvádzame pre všetky tvary (KNZ) modelu v **Tabuľke 4**.

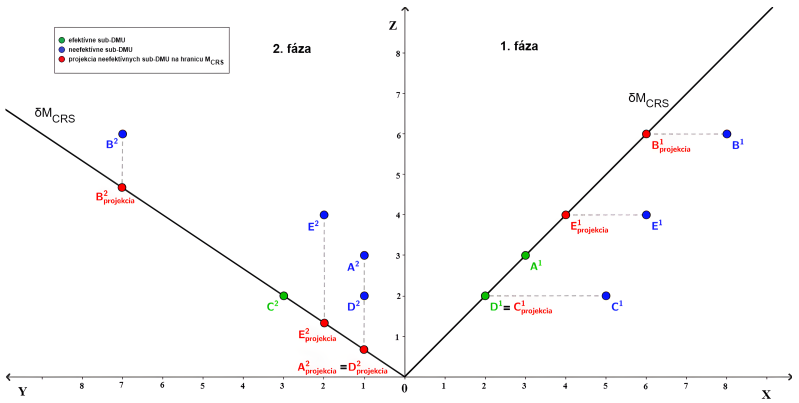
V ďalšom budeme používať označenia $\hat{x}, \hat{z}^1$ a $\hat{z}^2, \hat{y}$, ktoré predstavujú projekcie prvej a druhej fázy *Kumulatívneho nezávislého* (KNZ) modelu.

Vizualizáciu oboch fáz spolu s hranicou množiny M_{CRS} prinášajú **Obr. 4, 5, 6** a **7**.

Môžeme vidieť, že vo všetkých tvaroch modelu sú v prvej fáze efektívne 2 divízie, a to A^1 a D^1, pričom v druhej fáze je efektívna 1 divízia, konkrétne C^2. Teda žiadny útvar DMU nie je efektívny v obidvoch fázach, tým pádom nie je ani celkovo efektívny. Taktiež vidíme, že vstupný a výstupný model dávajú totožné hodnoty efektivít, pričom sa líšia iba v jednotlivých projekciách. Okrem toho môžeme pozorovať, že hodnoty efektivít sú najnižšie pri vstupných/výstupných tvaroch a najvyššie pri HDF tvare funkcie ψ.

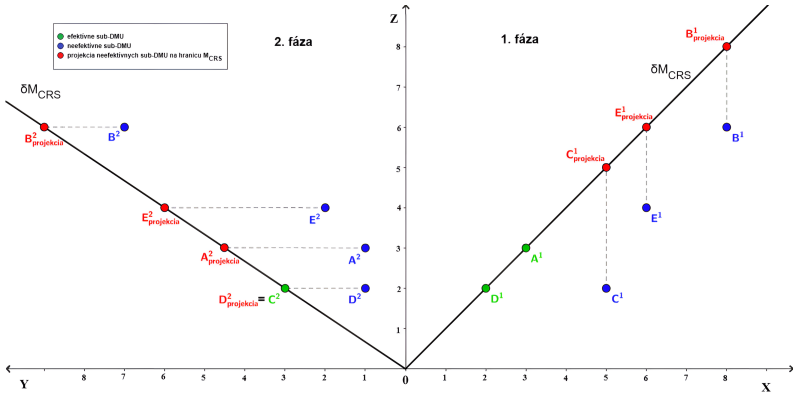
DMU	EFEKTIVITY			PROJEKCIE			
	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\hat{x}$	$\hat{z}^1$	$\hat{z}^2$	$\hat{y}$
(**KNZ – I – CRS**)							
A	**1**	2/9	11/18	3	3	2/3	1
B	3/4	7/9	55/72	6	6	14/3	7
C	2/5	**1**	7/10	2	2	2	3
D	**1**	1/3	2/3	2	2	2/3	1
E	2/3	1/3	1/2	4	4	4/3	2
(**KNZ – O – CRS**)							
A	**1**	2/9	11/18	3	3	3	4.5
B	3/4	7/9	55/72	8	8	6	9
C	2/5	**1**	7/10	5	5	2	3
D	**1**	1/3	2/3	2	2	2	3
E	2/3	1/3	1/2	6	6	4	6
(**KNZ – HDF – CRS**)							
A	**1**	0.4714	0.7357	3	3	1.4142	2.1213
B	0.8660	0.8819	0.8740	6.9282	6.9282	5.2915	7.9373
C	0.6325	**1**	0.8162	3.1623	3.1623	2	3
D	**1**	0.5774	0.7887	2	2	1.1547	1.7321
E	0.8165	0.5774	0.6969	4.8990	4.8990	2.3094	3.4641
(**KNZ – DDF – CRS**)							
A	**1**	0.3636	0.6818	3	3	1.0909	1.6364
B	0.8571	0.8750	0.8661	6.8571	6.8571	5.25	7.875
C	0.5714	**1**	0.7857	2.8571	2.8571	2	3
D	**1**	0.5	0.75	2	2	1	1.5
E	0.8	0.5	0.65	4.8	4.8	2	3

Tabuľka 4: Výsledky z (KNZ) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1



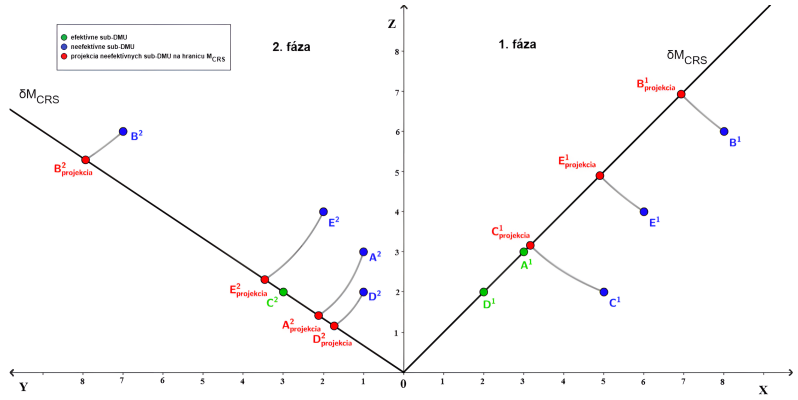
Obr. 4: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ - I - CRS)$ modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)



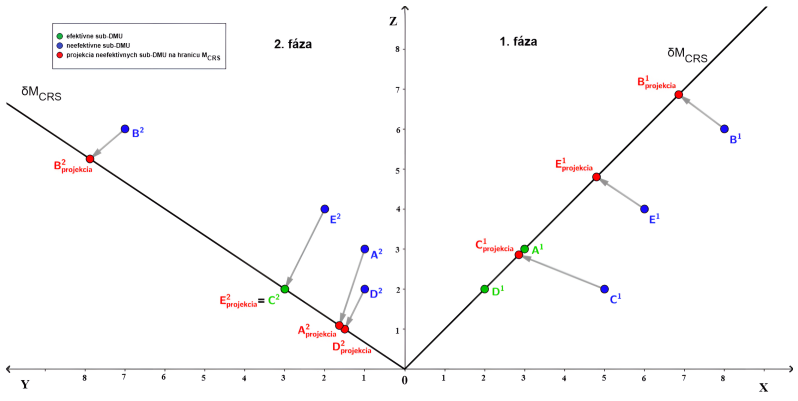
Obr. 5: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ - O - CRS)$ modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)



Obr. 6: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ - HDF - CRS)$ modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)



Obr. 7: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{CRS} z $(KNZ - DDF - CRS)$ modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)

Pozrime sa ešte na prípad variabilných výnosov z rozsahu.

Výsledné hodnoty efektivít oboch fáz θ^{1*} a θ^{2*}, spriemerované výsledné efektivity $\boldsymbol{\theta^*}$ a projekcie $\hat{x}, \hat{z}^1, \hat{z}^2, \hat{y}$ na hranicu množiny M_{VRS} sú spracované v **Tabuľke 5**.

Zároveň uvádzame aj grafické výstupy týchto modelov s hranicou množiny M_{VRS}, ktoré sú zobrazené na **Obr. 8-11**.

DMU	EFEKTIVITY			PROJEKCIE			
	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\hat{x}$	$\hat{z}^1$	$\hat{z}^2$	$\hat{y}$
(**KNZ – I – VRS**)							
A	**1**	$2/3^\flat$	$5/6^\flat$	3	3	2	1
B	**1**	**1**	**1**	8	6	6	7
C	2/5	**1**	7/10	2	2	2	3
D	**1**	$\mathbf{1}^\flat$	$\mathbf{1}^\flat$	2	2	2	1
E	7/9	$1/2^\flat$	$23/36^\flat$	14/3	4	2	2
(**KNZ – O – VRS**)							
A	**1**	1/4	5/8	3	3	3	4
B	**1**	**1**	**1**	8	6	6	7
C	0.4762	**1**	0.7381	5	4.2	2	3
D	**1**	1/3	2/3	2	2	2	3
E	5/6	2/5	37/60	6	4.8	4	5
(**KNZ – HDF – VRS**)							
A	**1**	$2/3^\flat$	$5/6^\flat$	3	3	2	1.5
B	**1**	**1**	**1**	8	6	6	7
C	0.6406	**1**	0.8203	3.2032	3.1219	2	3
D	**1**	$\mathbf{1}^\flat$	$\mathbf{1}^\flat$	2	2	2	1
E	0.9005	0.5931	0.7468	5.4031	4.4419	2.3723	3.3723
(**KNZ – DDF – VRS**)							
A	**1**	$2/3^\flat$	$5/6^\flat$	3	3	2	4/3
B	**1**	**1**	**1**	8	6	6	7
C	0.5714	**1**	0.7857	2.8571	2.8571	2	3
D	**1**	$\mathbf{1}^\flat$	$\mathbf{1}^\flat$	2	2	2	1
E	0.8947	0.5	0.6974	5.3684	4.4211	2	3

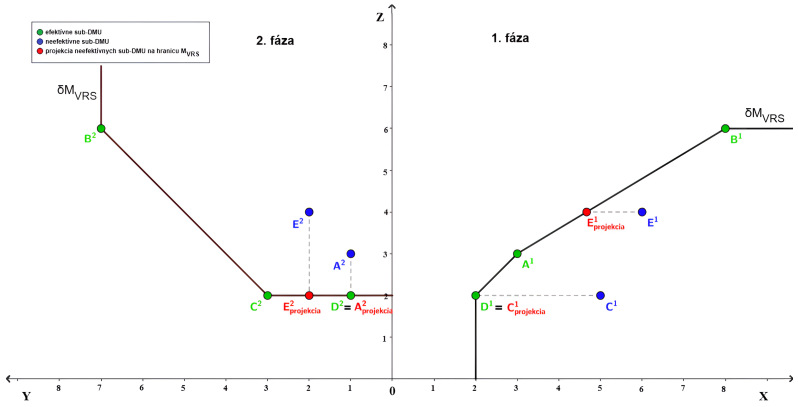
Tabuľka 5: Výsledky z (KNZ) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

Pri vstupnom modeli $(KNZ - I - VRS)$ sú v 1. fáze 3 efektívne divízie, presnejšie A^1, B^1 a D^1, a divízie C^1 a E^1 sú neefektívne s efektivitami $\frac{2}{5}$ a $\frac{7}{9}$. V 2. fáze sa podobne javia 3 efektívne divízie, konkrétne B^2, C^2 a D^2, avšak ak sa pozrieme na **Obr. 8**, môžeme vidieť, že divízia D^2 sa nachádza na pseudoefektívnej hranici M_{VRS}, preto je táto divízia pseudoefektívna [8]. Rovnako z obrázka vidíme, že neefektívne divízie A^2 a E^2 projektujú na

[8]Znakom $\flat$ sú v **Tabuľke 5** značené divízie, ktoré projektujú na pseudoefektívnu hranicu alebo sú pseudoefektívne.

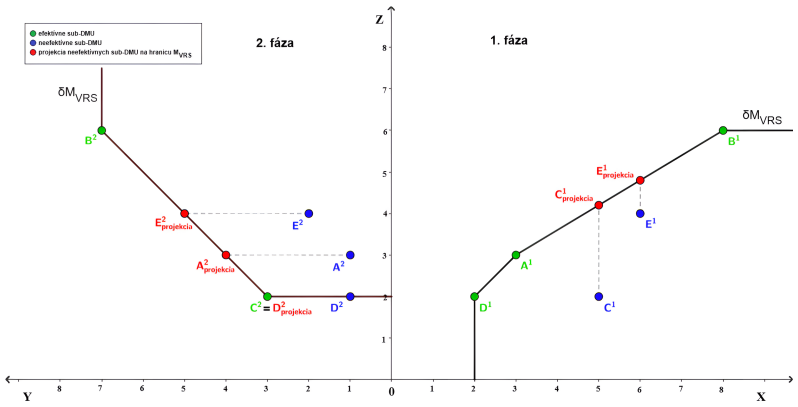
pseudoefektívnu hranicu, preto sú ich efektivity vlastne pseudoefektivitami. To si vieme overiť aj pomocou slackov, kedy $\mathbf{s^y}$ obsahuje nenulovú zložku pre divízie A^2, D^2 a E^2. Potom efektívne vzory pre výstupy týchto 3 divízií budú $y^E_{A^2} = 2.4067$, $y^E_{D^2} = 2.4443$ a $y^E_{E^2} = 2.7084$.

Pri výstupnom modeli ($KNZ - O - VRS$) takýto problém už nenastáva, pretože v oboch fázach všetky neefektívne divízie projektujú na efektívnu hranicu M_{VRS} (viď. **Obr. 9**). Navyše efektivity vstupného a výstupného modelu sa pre prípad s VRS, narozdiel od prípadu s CRS (viď. **Tabuľka 4**), vo všeobecnosti nemusia rovnať, ale naďalej rovnako identifikujú efektívne útvary.



Obr. 8: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z ($KNZ - I - VRS$) modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)



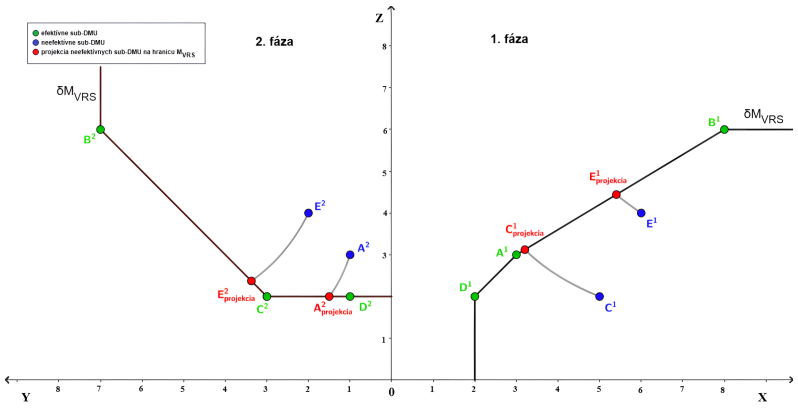
Obr. 9: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z ($KNZ - O - VRS$) modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)

Podobne ako to bolo pri vstupnom modeli s VRS, aj HDF a DDF tvary modelu

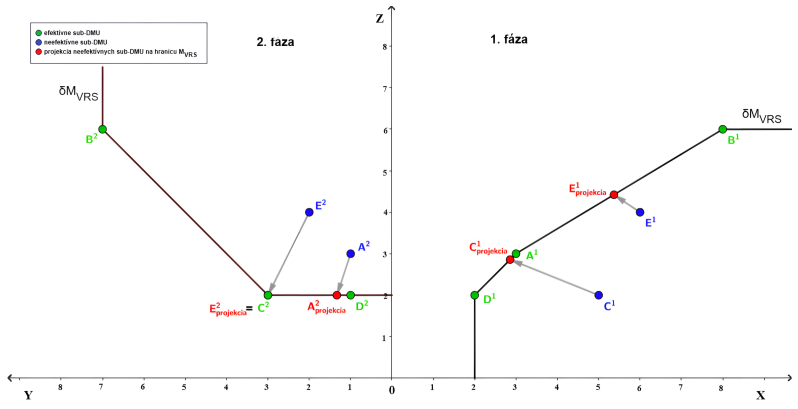
projektujú v prvej fáze na efektívnu hranicu. Avšak v druhej fáze opäť v oboch prípadoch nastáva problém pri divízii D^2, ktorá je pseudoefektívna a divízii A^2, ktorá projektuje na pseudoefektívnu hranicu. Znovu si to môžeme overiť pomocou slackov, kedy $\mathbf{s^y}$ obsahuje aj v HDF aj v DDF prípade nenulovú hodnotu pre divízie A^2 a D^2. Efektívne vzory pre výstupy týchto divízií sú $y^E_{A^2} = 2.2821$ a $y^E_{D^2} = 2.1916$ pri HDF modeli, resp. $y^E_{A^2} = 2.5832$ a $y^E_{D^2} = 2.4466$ pri DDF modeli.

Na druhú stranu divízia E^2, ktorá pri vstupnom modeli projektovala na pseudoefektívnu hranicu, v týchto dvoch prípadoch projektuje na efektívnu hranicu, teda je neefektívna s efektivitou 0.5951, resp. 0.5 (viď. **Obr. 10** a **11**).



Obr. 10: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z $(KNZ - HDF - VRS)$ modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)



Obr. 11: Grafické znázornenie výsledkov prvej a druhej divízie všetkých 5 DMU a ich projekcií na δM_{VRS} z $(KNZ - DDF - VRS)$ modelu

(Zdroj: *vlastné spracovanie v Geogebre*)

3.1.2 Prepojený základný dvojstupňový sieťový model

Prepojený model (2.11) môžeme pre dvojstupňový systém na základe podkapitoly **2.5** a symboliky uvedenej pri **Obr. 3** sformulovať vo všeobecnom kompaktnom tvare nasledovne:

$$
\begin{aligned}
(PREP)_o: \quad \min \quad & \theta && (3.2)\\
& \mathbf{X}\lambda^1 \leq \psi^I(\theta)\mathbf{x_o}, && (3.2.1)\\
& \mathbf{Z}\lambda^1 \geq \mathbf{z_o}, && (3.2.2)\\
& \lambda^1 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^1 = 1\right), && (3.2.3)\\
& \mathbf{Z}\lambda^2 \leq \mathbf{z_o}, && (3.2.4)\\
& \mathbf{Y}\lambda^2 \geq \psi^O(\theta)\mathbf{y_o}, && (3.2.5)\\
& \lambda^2 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^2 = 1\right). && (3.2.6)
\end{aligned}
$$

Pričom hodnoty funkcií ψ^I a ψ^O v závislosti od parametra θ sú uvedené v **Tabuľke 2** v podkapitole **2.5**.

Vráťme sa späť k nášmu **Príkladu 3.1** s 5 DMU a aplikujme naň tieto modely.

V **Tabuľke 6** sú pri konštantných výnosoch z rozsahu pre všetky nami analyzované tvary $(PREP)$ modelu uvedené hodnoty výsledných efektivít θ^* spolu s projekciami, ktoré ďalej pre *Prepojený* a rovnako aj *Relačný model* budeme značiť $\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}$.

Môžeme pozorovať, že efektivity pri vstupnom a výstupnom $(PREP)$ modeli sa líšia. Presnejšie, efektivity pri vstupnom modeli sú totožné s efektivitami z prvej fázy vstupného *Kumulatívneho nezávislého modelu* uvedené v prvom stĺpci **Tabuľky 4** a efektivity výstupného modelu sú totožné s efektivitami z druhej fázy výstupného *Kumulatívneho nezávislého modelu* uvádzanými v druhom stĺpci tejto tabuľky. Preto pre vstupný model máme 2 efektívne útvary, a to A a D a pre výstupný model máme len jeden efektívny útvar C. Teda môžeme vidieť, že v prípade *Prepojeného modelu* nemusí byť táto typická vlastnosť o rovnosti efektivít vstupného a výstupného black-boxového modelu splnená.

Podobne vidíme, že pre vstupný tvar *Prepojeného modelu* je zanedbateľné uvažovať druhú divíziu, pretože nespotrebováva vonkajšie vstupy a pre jeho výstupný tvar môžeme zase zanedbať prvú divíziu, pretože neprodukuje finálne výstupy, teda pri takejto jednoduchej sieťovej štruktúre nemajú tieto dva modely význam.

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**PREP – I – CRS**)				
A	**1**	3	3	1
B	3/4	6	6	7
C	2/5	2	2	3
D	**1**	2	2	1
E	2/3	4	4	2
(**PREP – O – CRS**)				
A	2/9	3	3	4.5
B	7/9	8	6	9
C	**1**	5	2	3
D	1/3	2	2	3
E	1/3	6	4	6

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**PREP – HDF – CRS**)				
A	**1**	3	3	1
B	7/9	6.2222	6	9
C	**1**	5	2	3
D	**1**	2	2	1
E	2/3	4	4	3
(**PREP – DDF – CRS**)				
A	**1**	3	3	1
B	3/4	6	6	8.75
C	**1**	5	2	3
D	**1**	2	2	1
E	2/3	4	4	8/3

Tabuľka 6: Výsledky z ($PREP$) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

Pri HDF a DDF tvaroch funkcie ψ vidíme, že určujú tie isté efektívne útvary, konkrétne útvary A, C a D. V týchto prípadoch už však nepozorujeme žiadnu zhodu s *Kumulatívnym nezávislým modelom*, pretože pri týchto modeloch parameter θ vystupuje v ohraničeniach oboch divízií (nemožno ich viac zanedbať ako to bolo možné pri vstupnom a výstupnom tvare modelu), ale už nie pri ohraničeniach na medziprodukty.

V prípade VRS sú naše výsledné hodnoty pre všetky tvary funkcie ψ uvádzané v **Tabuľke 7**.

Opäť vidíme zhodu v efektivitách s *Kumulatívnym nezávislým modelom* v prvej fáze pri vstupných modeloch a v druhej fáze pri výstupných modeloch. Aj tu ako pri CRS platí, že pri vstupnom tvare modelu je možné zanedbať druhú divíziu a pri jeho výstupnom tvare zase jeho prvú divíziu. Teda vstupný model označil za efektívne útvary A, B a D a z výstupného modelu máme dva efektívne útvary, B a C.

Rovnako ako pri modeloch s CRS, aj pri variabilných výnosoch z rozsahu označujú HDF a DDF tvary funkcie ψ tie isté útvary za efektívne, presnejšie A, B, C a D, a dokonca pre útvar E vyhodnocujú rovnakú hodnotu efektivity.

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**PREP – I – VRS**)				
A	**1**	3	3	1
B	**1**	8	6	7
C	2/5	2	2	3
D	**1**	2	2	1
E	7/9	4.6667	4	2
(**PREP – O – VRS**)				
A	1/4	3	3	4
B	**1**	8	6	7
C	**1**	5	2	3
D	1/3	2	2	3
E	2/5	6	4	5

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**PREP – HDF – VRS**)				
A	**1**	3	3	1
B	**1**	8	6	7
C	**1**	5	2	3
D	**1**	2	2	1
E	7/9	4.6667	4	2.5714
(**PREP – DDF – VRS**)				
A	**1**	3	3	1
B	**1**	8	6	7
C	**1**	5	2	3
D	**1**	2	2	1
E	7/9	4.6667	4	2.4444

Tabuľka 7: Výsledky z ($PREP$) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

3.1.3 Relačný základný dvojstupňový sieťový model

Očakáva sa, že medziprodukt vyprodukovaný prvou divíziou bude mať čo najväčšie hodnoty, aby táto divízia vykazovala čo najvyššiu efektivitu, a naopak, chceli by sme, aby mal menšie hodnoty kvôli druhej divízii, ktorá ho spotrebováva. Nastáva konflikt záujmov medzi nárokmi divízií, preto spojíme ohraničenia (3.2.2) a (3.2.4) do jedného a dostávame menej prísny *Relačný model* z podkapitoly **2.3.3** s ohraničením $Z\lambda^1 \geq Z\lambda^2$. Toto zabezpečuje, že medziprodukt vnímaný ako "vnútorný" výstup dosahuje aspoň také hodnoty ako ten, ktorý je vnímaný ako "vnútorný" vstup. Formulácia tohto modelu v kompaktnom všeobecnom dvojstupňovom tvare je nasledovná:

$$(REL)_o: \quad \min \quad \theta \tag{3.3}$$

$$\mathbf{X}\lambda^1 \leq \psi^I(\theta)\mathbf{x_o}, \tag{3.3.1}$$

$$\mathbf{Z}\lambda^1 \geq \mathbf{Z}\lambda^2, \tag{3.3.2}$$

$$\mathbf{Y}\lambda^2 \geq \psi^O(\theta)\mathbf{y_o}, \tag{3.3.3}$$

$$\lambda^1 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^1 = 1\right), \tag{3.3.4}$$

$$\lambda^2 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^2 = 1\right). \tag{3.3.5}$$

Opäť sú hodnoty funkcií ψ^I a ψ^O v závislosti od parametra θ totožné s tými, ktoré sú

uvádzané v **Tabuľke 2**.

Keď tento typ modelu znovu aplikujeme na náš **Príklad 3.1** s 5 DMU, pre konštantné výnosy z rozsahu dostávame výsledky prezentované v **Tabuľke 8**.

Z tejto tabuľky je zjavné, že tento typ modelu v každom tvare funkcie ψ vyhodnocuje všetky útvary ako neefektívne, pričom dodržiava aj vlastnosť o rovnosti efektivít vstupného a výstupného modelu.

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**REL – I – CRS**)				
A	2/9	2/3	2/3	1
B	7/12	14/3	14/3	7
C	2/5	2	2	3
D	1/3	2/3	2/3	1
E	2/9	4/3	4/3	2
(**REL – O – CRS**)				
A	2/9	3	3	4.5
B	7/12	8	8	12
C	2/5	5	5	7.5
D	1/3	2	2	3
E	2/9	6	6	9

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**REL – HDF – CRS**)				
A	0.4714	1.4142	1.4142	2.1213
B	0.7638	6.1101	6.1101	9.1652
C	0.6325	3.1623	3.1623	4.7434
D	0.5774	1.1547	1.1547	1.7321
E	0.4714	2.8284	2.8284	4.2426
(**REL – DDF – CRS**)				
A	0.3636	1.0909	1.0909	1.6364
B	0.7368	5.8947	5.8947	8.8421
C	0.5714	2.8571	2.8571	4.2857
D	0.5	1	1	1.5
E	0.3636	2.1818	2.1818	3.2727

Tabuľka 8: Výsledky z (REL) modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

Skutočnosť, že pri CRS nie je ani jeden variant *Relačného modelu* schopný identifikovať efektívne jednotky, súvisí s tým, že žiaden z útvarov nedosahuje efektivitu v oboch fázach súčasne. Tento jav možno pozorovať aj v prípade *Kumulatívneho nezávislého modelu*, kde v rámci nášho príkladu žiaden z útvarov DMU nemá efektívne obe divízie.

Podobne sa ešte pozrieme na prípad s variabilnými výnosmi z rozsahu. Výsledné hodnoty sú uvedené v **Tabuľke 9**.

V tomto prípade dostávame 2 efektívne útvary, B a D, pri HDF a DDF tvare funkcie ψ a aj pri vstupnom *Relačnom modeli*, pričom pri výstupnom je efektívny len útvar B. To znamená, že efektívne DMU musia byť efektívne v oboch svojich divíziách. Ak by nás zaujímala aj efektivita jednotlivých divízií, môžeme modelu (3.3) odvodiť jeho duálny model v multiplikatívnom tvare a jednoducho dopočítať efektivity divízií z ohraničení.

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**REL – I – VRS**)				
A	2/3	2	2	1
B	**1**	8	6	7
C	2/5	2	2	3
D	**1**	2	2	1
E	1/3	2	2	2
(**REL – O – VRS**)				
A	1/4	3	3	4
B	**1**	8	6	7
C	0.5769	5	4.2	5.2
D	1/3	2	2	3
E	0.3448	6	4.8	5.8

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE		
	θ^*	$\hat{x}$	$\hat{z}$	$\hat{y}$
(**REL – HDF – VRS**)				
A	2/3	2	2	1.5
B	**1**	8	6	7
C	0.6984	3.4922	3.2953	4.2953
D	**1**	2	2	1
E	1/2	3	3	4
(**REL – DDF – VRS**)				
A	2/3	2	2	1.3333
B	**1**	8	6	7
C	0.6333	3.1667	3.1	4.1
D	**1**	2	2	1
E	3/8	2.5	2.25	3.25

Tabuľka 9: Výsledky z (*REL*) modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

Na záver **Príkladu 3.1** uvádzame 2 sumárne tabuľky obsahujúce skóre jednotlivých modelov pre našich 5 DMU spolu s optimálnymi hodnotami z klasických black-boxových DEA modelov, ktoré zanedbávajú sieťovú štruktúru, teda uvažujú iba vonkajšie vstupy a výstupy. **Tabuľka 10** zodpovedá modelom s konštantnými výnosmi z rozsahu a **Tabuľka 11** udáva optimálne hodnoty modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu.

Kvôli jednoznačnému porovnaniu modelov, pre *Kumulatívny nezávislý model* neuvádzame efektivity jednotlivých divízií, ale aritmetický priemer získaných optimálnych hodnôt θ^{1*} a θ^{2*}.

	CRS															
	I (vstupný)				O (výstupný)				HDF				DDF			
	KNZ	PREP	REL	klasický CCR	KNZ	PREP	REL	klasický CCR	KNZ	PREP	REL	klasický HDF	KNZ	PREP	REL	klasický DDF
A	0.6111	**1**	0.2222	0.3810	0.6111	0.2222	0.2222	0.3810	0.7357	**1**	0.4714	0.6172	0.6818	**1**	0.3636	0.5517
B	0.7639	0.75	0.5833	**1**	0.7639	0.7778	0.5833	**1**	0.8740	0.7778	0.7638	**1**	0.8661	0.75	0.7368	**1**
C	0.7	0.4	0.4	0.6857	0.7	**1**	0.4	0.6857	0.8162	**1**	0.6325	0.8281	0.7857	**1**	0.5714	0.8136
D	0.6667	**1**	0.3333	0.5714	0.6667	0.3333	0.3333	0.5714	0.7887	**1**	0.5774	0.7559	0.75	**1**	0.5	0.7273
E	0.5	0.6667	0.2222	0.3810	0.5	0.3333	0.2222	0.3810	0.6969	0.6667	0.4714	0.6172	0.65	0.6667	0.3636	0.5517

Tabuľka 10: Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

Je zrejmé, že najvýraznejšie skreslenie optimálnych hodnôt efektivít θ^* vykazuje *Prepo-*

jený model, ktorý identifikuje najväčší počet útvarov ako efektívnych, hoci pri CRS žiaden DMU nedosahuje efektivitu v oboch divíziách. Z tohto dôvodu tento model nepredstavuje vhodný výber pre analýzu daných dát. Platí však, že optimálne hodnoty efektivít *Prepojeného modelu* sú aspoň také ako *Relačného modelu*.

	VRS															
	I (vstupný)				**O (výstupný)**				**HDF**				**DDF**			
	KNZ	**PREP**	**REL**	**klasický BCC**	**KNZ**	**PREP**	**REL**	**klasický BCC**	**KNZ**	**PREP**	**REL**	**klasický HDF**	**KNZ**	**PREP**	**REL**	**klasický DDF**
A	0.8333	**1**	0.6667	0.6667	0.6250	0.25	0.25	0.5	0.8333	**1**	0.6667	0.7676	0.8333	**1**	0.6667	0.75
B	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
C	0.7	0.4	0.4	0.8	0.7381	**1**	0.5769	0.75	0.8203	**1**	0.6984	0.8810	0.7857	**1**	0.6333	0.8750
D	**1**	**1**	**1**	**1**	0.6667	0.3333	0.3333	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
E	0.6389	0.7778	0.3333	0.5	0.6167	0.4	0.3448	0.4	0.7468	0.7778	0.5	0.6667	0.6974	0.7778	0.3750	0.6250

Tabuľka 11: Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.1

Z výsledkov porovnania ďalej vyplýva, že vo všetkých prípadoch naozaj platí, že klasické black-boxové modely dosahujú efektivitu väčšiu alebo rovnú v porovnaní s *Relačným modelom*. Rovnako naprieč všetkými prípadmi aj *Kumulatívny nezávislý model* vykazuje hodnoty, ktoré sú minimálne rovné tým, ktoré dosahuje *Relačný model*. Nepozorujeme však žiadny vzťah medzi aritmetickým priemerom optimálnych hodnôt θ^{1*}, θ^{2*} *Kumulatívneho nezávislého modelu*, optimálnymi hodnotami θ^* *Prepojeného modelu* a klasických black-boxových modelov.

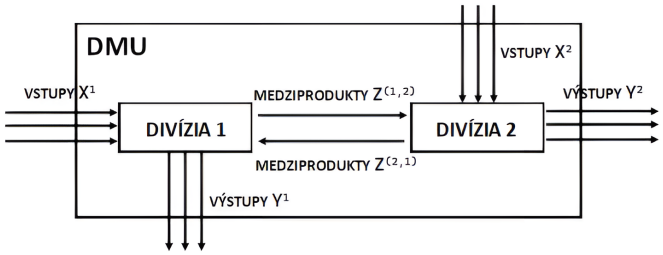
3.2 Všeobecný dvojstupňový sieťový DEA model

Doteraz diskutovaný základný dvojstupňový sieťový systém popisuje typ produkcie, kde všetky medziprodukty z_{gj} vyrábané divíziou DMU_j^1 spotrebúva divízia DMU_j^2 na výrobu finálnych výstupov. Presnejšie žiadny medziprodukt z_{gj} "nevyteká" zo systému a druhá divízia DMU_j^2 okrem medziproduktov nespotrebováva iné vstupy dodávané zvonku.

Avšak prípady z reálneho sveta sú zvyčajne komplikovanejšie ako tento základný dvojstupňový sieťový systém. Preto máme všeobecnú dvojstupňovú sieťovú DEA [9], ktorá prvej divízii DMU_j^1 umožňuje mať konečné výstupy y_{rj} a druhej divízii DMU_j^2 umožňuje mať vonkajšie vstupy x_{ij}. Okrem toho medziprodukty môžu prúdiť v oboch smeroch, teda $\mathbf{Z^{(2,1)}}$, čo nazývame aj spätnou väzbou, už nie je nulové. Schéma takejto všeobecnej

[9] V anglickej literatúre sa zvykne nazývať *General two-stage DEA/systems*.

dvojstupňovej siete je zobrazená na **Obr. 12**.



Obr. 12: Schéma všeobecného dvojstupňového sieťového systému
(Zdroj: *vlastné spracovanie*)

Symbolika sa nám podľa **Obr. 12** oproti základnej dvojstupňovej sieťovej DEA zmení na:

- $\mathbf{X^1}$ = matica vonkajších vstupov divízie DMU_j^1 rozmeru $m \times n$,
- $\mathbf{X^2}$ = matica vonkajších vstupov divízie DMU_j^2 rozmeru $m \times n$,
- $\mathbf{Y^1}$ = matica finálnych výstupov divízie DMU_j^1 rozmeru $s \times n$,
- $\mathbf{Y^2}$ = matica finálnych výstupov divízie DMU_j^2 rozmeru $s \times n$,
- $\mathbf{Z^{(1,2)}}$ = matica medziproduktov z divízie DMU_j^1 do divízie DMU_j^2 rozmeru $h \times n$ (zvykne sa označovať $\mathbf{Z}$)
- $\mathbf{Z^{(2,1)}}$ = matica medziproduktov z divízie DMU_j^2 do divízie DMU_j^1 rozmeru $h \times n$ (zvykne sa označovať $\mathbf{F}$ ako matica feedbackov, resp. spätnej väzby)
- $\mathbf{Z^{(1,1)}} = \mathbf{Z^{(2,2)}} = 0$

3.2.1 Najčastejšie používané obdoby všeobecných dvojstupňových sieťových modelov

Všeobecné dvojstupňové sieťové modely zvyknú mať rôzne verzie a vo všeobecnosti nemusia obsahovať všetky komponenty, ktoré sú znázornené na **Obr. 12**. Z tohto dôvodu uvádzame najpoužívanejšie varianty takejto všeobecnej schémy.

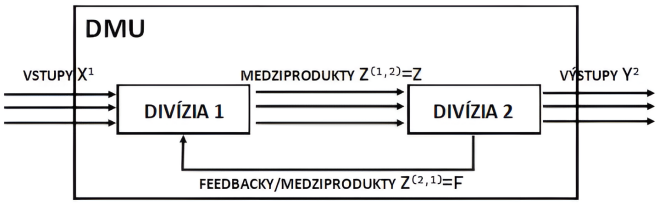
- **Základný dvojstupňový sieťový model**

  V podkapitole **3.1** sme predstavili najzákladnejšiu verziu dvojstupňového sieťového systému ilustrovanú na **Obr. 3**. Ten zodpovedá všeobecnému dvojstupňovému modelu s nulovými hodnotami pre vonkajšie vstupy $\mathbf{X^2}$ divízie DMU_j^2, pre vonkajšie výstupy $\mathbf{Y^1}$ divízie DMU_j^1 a pre medziprodukty $\mathbf{Z^{(2,1)}}$.

- **Základný dvojstupňový sieťový model so spätnou väzbou**

  Modelom so spätnou väzbou (feedbackom) nazývame systém, v ktorom okrem niektorých medziproduktov z_{gj} produkovaných divíziou DMU_j^1 a spotrebovaných divíziou DMU_j^2 môžu byť aj niektoré výstupy produkované divíziou DMU_j^2 ďalej využívané divíziou DMU_j^1. Tieto opačné medziprodukty označujeme termínom feedbacky.

  Tento typ modelov vlastne predstavuje základný dvojstupňový systém, s tým rozdielom, že niektoré výstupy druhej divízie sú privádzané späť do prvej divízie ako súčasť vstupov do produkcie. Prvú štúdiu zaoberajúcu sa feedbackovými systémami napísali Liang a spol. [35], kde skúmali výkonnosť univerzity, v ktorej sa konečný výstup v podobe finančných prostriedkov na výskum vracia z druhej fázy do prvej, aby sa vytvárali nové publikácie.



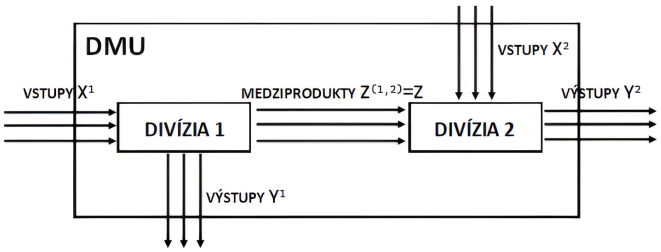
Obr. 13: Schéma základného dvojstupňového sieťového systému so spätnou väzbou (Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [29]*)

Podľa schémy na **Obr. 13**, v tomto type sieťového systému divízia DMU_j^1 spotrebováva vonkajšie vstupy $\mathbf{X^1} = \mathbf{X}$ a feedbacky/medziprodukty $\mathbf{Z^{(2,1)}} = \mathbf{F}$, pričom jej vyprodukovaným výstupom sú medziprodukty $\mathbf{Z^{(1,2)}} = \mathbf{Z}$. Tieto vstupujú do divízie DMU_j^2, kde produkujú konečné výstupy $\mathbf{Y^2} = \mathbf{Y}$ spolu s feedbackmi/medziproduk-

tami $\mathbf{Z^{(2,1)}} = \mathbf{F}$. Potom do nášho dvojstupňového *Relačného modelu* (3.3) pribudne navyše ohraničenie pre feedbacky/medziprodukty $\mathbf{F}\lambda^1 \leq \mathbf{F}\lambda^2$. Okrem toho, v tejto verzii všeobecného dvojstupňového systému máme nulové vonkajšie výstupy $\mathbf{Y^1}$ divízie DMU_j^1 a vonkajšie vstupy $\mathbf{X^2}$ divízie DMU_j^2.

- **Všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby**

  V ďalšom postupe našej práce sa budeme venovať všeobecným dvojstupňovým sieťovým modelom bez spätnej väzby, ktorých schému znázorňuje **Obr. 14**.



Obr. 14: Schéma všeobecného dvojstupňového sieťového systému bez spätnej väzby
(Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [29]*)

  V tomto prípade divízia DMU_j^1 spotrebováva vonkajšie vstupy $\mathbf{X^1}$ na vytvorenie konečných výstupov $\mathbf{Y^1}$ a medziproduktov $\mathbf{Z^{(1,2)}} = \mathbf{Z}$, kým divízia DMU_j^2 produkuje finálne výstupy $\mathbf{Y^2}$ z vonkajších vstupov $\mathbf{X^2}$ a medziproduktov $\mathbf{Z^{(1,2)}} = \mathbf{Z}$. Teda v porovnaní so schémou na **Obr. 12**, v prípade tohto modelu sú medziprodukty/feedbacky $\mathbf{Z^{(2,1)}} = \mathbf{F}$ nulové.

Ďalšia časť našej práce sa špeciálne sústreďuje práve na všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby, pre ktorý odvodíme tvary modelov popísané v podkapitole **2.5**.

3.2.2 Kumulatívny nezávislý všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby

Opäť ako v prípade základnej dvojstupňovej siete odvodíme model pre všeobecný systém bez spätnej väzby (feedbacku), ktorý označíme $(KNZ - g)$. Jeho všeobecná formulácia pre všeobecnú dvojstupňovú sieť bez spätnej väzby v kompaktnom tvare bude takáto:

$$
\begin{aligned}
(KNZ-g)_o: \quad \min \quad & \theta^1+\theta^2 && (3.4)\\
& \mathbf{X^1}\lambda^1 \le \psi^I(\theta^1)\mathbf{x_o^1}, && (3.4.1)\\
& \mathbf{Z}\lambda^1 \ge \psi^O(\theta^1)\mathbf{z_o}, && (3.4.2)\\
& \mathbf{Y^1}\lambda^1 \ge \psi^O(\theta^1)\mathbf{y_o^1}, && (3.4.3)\\
& \lambda^1 \ge 0 \quad \left(e^T\lambda^1=1\right), && (3.4.4)\\
& \mathbf{X^2}\lambda^2 \le \psi^I(\theta^2)\mathbf{x_o^2}, && (3.4.5)\\
& \mathbf{Z}\lambda^2 \le \psi^I(\theta^2)\mathbf{z_o}, && (3.4.6)\\
& \mathbf{Y^2}\lambda^2 \ge \psi^O(\theta^2)\mathbf{y_o^2}, && (3.4.7)\\
& \lambda^2 \ge 0 \quad \left(e^T\lambda^2=1\right). && (3.4.8)
\end{aligned}
$$

Funkcie ψ^I a ψ^O nadobúdajú v závislosti od premenných θ^1 a θ^2 pre rôzne variácie modelov hodnoty uvedené v **Tabuľke 2**.

Modely aplikujeme na ilustračný príklad s 5 DMU.

Príklad 3.2. *Predpokladajme, že máme 5 DMU, ktoré v prvej divízii používajú jeden vonkajší vstup* $\mathbf{X^1}$ *na produkciu jedného konečného výstupu* $\mathbf{Y^1}$ *a jedného medziproduktu* $\mathbf{Z}$*, ktorý spolu s jedným vonkajším vstupom* $\mathbf{X^2}$ *využíva druhá divízia na výrobu jedného finálneho výstupu* $\mathbf{Y^2}$*. Zodpovedajúce dáta uvádzame v tabuľke:*

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Vstupy $\mathbf{X^1}$	3	8	5	2	6
Vstupy $\mathbf{X^2}$	1	1	4	2	3
Medziprodukty $\mathbf{Z}$	3	6	2	2	4
Výstupy $\mathbf{Y^1}$	1	7	3	1	2
Výstupy $\mathbf{Y^2}$	2	3	5	1	4

Tabuľka 12: Vstupy, medziprodukty a výstupy v Príklade 3.2

Znova sa najprv zameriame na modely s konštantnými výnosmi z rozsahu.

Pre všetky tvary $(KNZ-g)$ modelu uvádzame v nasledujúcej tabuľke výsledné hodnoty efektivít oboch fáz θ^{1*} a θ^{2*}, ich spriemerované výsledné efektivity $\boldsymbol{\theta^*}$, ako aj projekcie $\hat{x}^1, \hat{z}^1, \hat{y}^1$ a $\hat{x}^2, \hat{z}^2, \hat{y}^2$ prvej a druhej divízie pre jednotlivé DMU:

DMU	EFEKTIVITY			PROJEKCIE					
	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\hat{x}^1$	$\hat{z}^1$	$\hat{y}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}^2$	$\hat{y}^2$
(**KNZ – I – CRS – g**)									
A	**1**	0.9778	0.9889	3	3	1	0.9778	2.9333	2
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.6857	**1**	0.8429	3.4286	2	3	4	2	5
D	**1**	0.3548	0.6774	2	2	1	0.7097	0.7097	1
E	0.6667	0.88	0.7733	4	4	2	2.64	3.52	4
(**KNZ – O – CRS – g**)									
A	**1**	0.9778	0.9889	3	3	1	1	3	2.0455
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.6857	**1**	0.8429	5	2.9167	4.3750	4	2	5
D	**1**	0.3548	0.6774	2	2	1	2	2	2.8182
E	0.6667	0.88	0.7733	6	6	3	3	4	4.5455
(**KNZ – HDF – CRS – g**)									
A	**1**	0.9888	0.9944	3	3	1	0.9888	2.9665	2.0226
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.8281	**1**	0.9140	4.1404	2.4152	3.6228	4	2	5
D	**1**	0.5957	0.7978	2	2	1	1.1914	1.1914	1.6787
E	0.8165	0.9381	0.8773	4.8990	4.8990	2.4495	2.8142	3.7523	4.2640
(**KNZ – DDF – CRS – g**)									
A	**1**	0.9888	0.9944	3	3	1	0.9888	2.9663	2.0225
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.8136	**1**	0.9068	4.0678	2.3729	3.5593	4	2	5
D	**1**	0.5238	0.7619	2	2	1	1.0476	1.0476	1.4762
E	0.8	0.9362	0.8681	4.8	4.8	2.4	2.8085	3.7447	4.2553

Tabuľka 13: Výsledky z $(KNZ - g)$ modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Pre všetky tvary platí, že v prvej fáze sú efektívne 3 divízie, presnejšie A^1, B^1 a D^1, kým v druhej fáze máme 2 efektívne divízie, a to B^2 a C^2. Dostali sme iba jediný útvar DMU, B, ktorý je efektívny v oboch fázach a tiež jediný útvar DMU, E, ktorý je v oboch fázach neefektívny. Vstupný a výstupný model dávajú opäť rovnaké hodnoty efektivít, pričom rozdielne sú len v projekciách.

Ďalej ak použijeme modely s variabilnými výnosmi z rozsahu, naše výsledky sa zmenia nasledovne:

DMU	EFEKTIVITY			PROJEKCIE					
	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\hat{x}^1$	$\hat{z}^1$	$\hat{y}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}^2$	$\hat{y}^2$
(**KNZ – I – VRS – g**)									
A	**1**	**1**	**1**	3	3	1	1	3	2
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.8	**1**	0.9	4	2	3	4	2	5
D	**1**	**1**	**1**	2	2	1	2	2	1
E	0.7778	0.8810	0.8294	4.6667	4	2	2.6429	3.5238	4
(**KNZ – O – VRS – g**)									
A	**1**	**1**	**1**	3	3	1	1	3	2
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.75	**1**	0.875	5	2.6667	4	4	2	5
D	**1**	**1**	**1**	2	2	1	2	2	1
E	0.8333	0.9231	0.8782	6	4.8	2.4	3	4	4.3333
(**KNZ – HDF – VRS – g**)									
A	**1**	**1**	**1**	3	3	1	1	3	2
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.8810	**1**	0.9405	4.4051	2.2701	3.4051	4	2	5
D	**1**	**1**	**1**	2	2	1	2	2	1
E	0.9005	0.9465	0.9235	5.4031	4.4419	2.2209	2.8394	3.7859	4.2263
(**KNZ – DDF – VRS – g**)									
A	**1**	**1**	**1**	3	3	1	1	3	2
B	**1**	**1**	**1**	8	6	7	1	6	3
C	0.875	**1**	0.9375	4.3750	2.25	3.3750	4	2	5
D	**1**	**1**	**1**	2	2	1	2	2	1
E	0.8947	0.9444	0.9196	5.3684	4.4211	2.2105	2.8333	3.7778	4.2222

Tabuľka 14: Výsledky z $(KNZ - g)$ modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Z **Tabuľky 14** vidíme, že pri všetkých typoch modelov máme v prvej fáze opäť tri efektívne divízie, A^1, B^1 a D^1, ale v druhej fáze máme pri VRS až 4 efektívne divízie, konkrétne A^2, B^2, C^2 a D^2. Teda útvary A, B a D sú efektívne v oboch fázach a útvar $DMU\ E$ je ako jediný v oboch fázach neefektívny.

3.2.3 Prepojený všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby

Pre všeobecný dvojstupňový systém bez spätnej väzby má *Prepojený model* nasledujúci kompaktný tvar:

$$(PREP-g)_o: \quad \min \quad \theta \tag{3.5}$$

$$\mathbf{X^1}\lambda^1 \leq \psi^I(\theta)\mathbf{x_o^1}, \tag{3.5.1}$$

$$\mathbf{Z}\lambda^1 \geq \mathbf{z_o}, \tag{3.5.2}$$

$$\mathbf{Y^1}\lambda^1 \geq \psi^O(\theta)\mathbf{y_o^1}, \tag{3.5.3}$$

$$\lambda^1 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^1 = 1\right), \tag{3.5.4}$$

$$\mathbf{X^2}\lambda^2 \leq \psi^I(\theta)\mathbf{x_o^2}, \tag{3.5.5}$$

$$\mathbf{Z}\lambda^2 \leq \mathbf{z_o}, \tag{3.5.6}$$

$$\mathbf{Y^2}\lambda^2 \geq \psi^O(\theta)\mathbf{y_o^2}, \tag{3.5.7}$$

$$\lambda^2 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^2 = 1\right). \tag{3.5.8}$$

Funkcie ψ^I a ψ^O v závislosti od parametra θ stále nadobúdajú hodnoty z **Tabuľky 2**.

Tieto modely opäť aplikujeme na našom jednoduchom **Príklade 3.2** s 5 DMU.

Opätovne sa najprv pozrieme na výsledky z modelov s CRS a potom na ich VRS verzie. Pre konštantné výnosy z rozsahu dostávame v našom príklade nasledovné výsledky:

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(PREP – I – CRS – g)						
A	**1**	3	1	3	1	2
B	**1**	8	1	6	7	3
C	**1**	5	4	2	3	5
D	**1**	2	2	2	1	1
E	0.8333	5	2.5	4	2	4
(PREP – O – CRS – g)						
A	0.9778	3	1	3	1.0227	2.0455
B	**1**	8	1	6	7	3
C	**1**	5	4	2	3	5
D	**1**	2	2	2	1	1
E	0.88	6	3	4	2.2727	4.5455

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(PREP – HDF – CRS – g)						
A	**1**	3	1	3	1	2
B	**1**	8	1	6	7	3
C	**1**	5	4	2	3	5
D	**1**	2	2	2	1	1
E	0.9281	5.5684	2.7842	4	2.155	4.31
(PREP – DDF – CRS – g)						
A	**1**	3	1	3	1	2
B	**1**	8	1	6	7	3
C	**1**	5	4	2	3	5
D	**1**	2	2	2	1	1
E	0.925	5.55	2.775	4	2.15	4.3

Tabuľka 15: Výsledky z $(PREP-g)$ modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Z **Tabuľky 15** vidíme, že pri HDF, DDF tvare funkcie ψ a pri vstupnom *Prepojenom modeli* dostávame 4 efektívne DMU, a to A, B, C a D, kým pri výstupnom modeli sú efektívne iba úvary B, C a D. Útvar E je ako jediný neefektívny pri všetkých formuláciách

modelu. Vidíme teda, že pri *Prepojenom modeli* stále platí, že efektivity vstupného a výstupného modelu sú odlišné aj pri použití CRS.

Po aplikovaní modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu budeme mať takéto výsledky:

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(PREP – I – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	1	5	4	2	3	5
D	1	2	2	2	1	1
E	0.8333	5	2.5	4	2	4
(PREP – O – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	1	5	4	2	3	5
D	1	2	2	2	1	1
E	0.9231	6	3	4	2.1667	4.3333

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(PREP – HDF – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	1	5	4	2	3	5
D	1	2	2	2	1	1
E	0.9465	5.6788	2.8394	4	2.1131	4.2263
(PREP – DDF – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	1	5	4	2	3	5
D	1	2	2	2	1	1
E	0.9444	5.6667	2.8333	4	2.1111	4.2222

Tabuľka 16: Výsledky z $(PREP - g)$ modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Pre tento prípad modelov už aj výstupný *Prepojený model* určuje 4 DMU ako efektívne a jediným neefektívnym DMU naďalej ostáva DMU E.

Pri modeloch s CRS aj s VRS už nepozorujeme spojitosť s efektivitami prvej a druhej divízie *Kumulatívneho nezávislého modelu*, ako to bolo pri základnej dvojstupňovej sieti. Tento rozdiel vyplýva z toho, že v prípade všeobecnej dvojstupňovej siete sú pri oboch divíziách zahrnuté vonkajšie vstupy a výstupy, tým pádom už nemožno zanedbať jednu alebo druhú divíziu.

3.2.4 Relačný všeobecný dvojstupňový sieťový model bez spätnej väzby

Rovnako ako v základnej dvojstupňovej sieťovej DEA, kombináciou obmedzení (3.5.2) a (3.5.6) a sčítaním obmedzení pre vonkajšie vstupy a výstupy dostaneme všeobecný tvar *Relačného modelu* pre všeobecnú dvojstupňovú sieťovú DEA bez spätnej väzby v kompaktnom tvare:

$$(REL-g)_o: \quad \min \quad \theta \tag{3.6}$$

$$\mathbf{X^1}\lambda^1 + \mathbf{X^2}\lambda^2 \leq \psi^I(\theta)(\mathbf{x_o^1} + \mathbf{x_o^2}), \tag{3.6.1}$$

$$\mathbf{Z}\lambda^1 \geq \mathbf{Z}\lambda^2, \tag{3.6.2}$$

$$\mathbf{Y^1}\lambda^1 + \mathbf{Y^2}\lambda^2 \geq \psi^O(\theta)(\mathbf{y_o^1} + \mathbf{y_o^2}), \tag{3.6.3}$$

$$\lambda^1 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^1 = 1\right), \tag{3.6.4}$$

$$\lambda^2 \geq 0 \quad \left(e^T\lambda^2 = 1\right). \tag{3.6.5}$$

Hodnoty funkcií ψ^I a ψ^O v závislosti od premennej θ sú stále totožné s tými uvádzanými v **Tabuľke 2**.

Potom výsledky tohto typu modelu použitého v **Príklade 3.2** budú pri konštantných výnosoch z rozsahu nadobúdať hodnoty uvedené v **Tabuľke 17**.

Môžeme vidieť, že jediným efektívnym útvarom je vo všetkých tvaroch modelu iba *DMU B*. Teda podľa *Relačného modelu* je útvar B ako jediný efektívny v oboch svojich divíziách.

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(REL – I – CRS – g)						
A	0.675	2.025	0.675	1.8	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8	4	3.2	4.8	3	5
D	0.45	0.9	0.9	1.2	1	1
E	0.6	3.6	1.8	3.6	2	4
(REL – O – CRS – g)						
A	0.675	3	1	2.6667	1.4815	2.963
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8	5	4	6	3.75	6.25
D	0.45	2	2	2.6667	2.2222	2.2222
E	0.6	6	3	6	3.3333	6.6667

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(REL – HDF – CRS – g)						
A	0.8216	2.4648	0.8216	2.1909	1.2172	2.4343
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8944	4.4721	3.5777	5.3666	3.3541	5.5902
D	0.6708	1.3416	1.3416	1.7889	1.4907	1.4907
E	0.7746	4.6476	2.3238	4.6476	2.5820	5.1640
(REL – DDF – CRS – g)						
A	0.806	2.4179	0.806	2.1493	1.194	2.3881
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8889	4.4444	3.5556	5.3333	3.3333	5.5556
D	0.6207	1.2414	1.2414	1.6552	1.3793	1.3793
E	0.75	4.5	2.25	4.5	2.5	5

Tabuľka 17: Výsledky z $(REL-g)$ modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Ako posledné ešte uvedieme **Tabuľku 18** s výslednými hodnotami tohto príkladu pre *Relačný model* všeobecnej dvojstupňovej siete bez spätnej väzby s VRS.

Pre vstupný, HDF a DDF tvar dostávame 2 neefektívne DMU, C a E, pričom DMU A, B a D tieto modely vyhodnocujú ako efektívne. Avšak pri DMU D pozorujeme, že

projekcia medziproduktov $\hat{z}$ nie je zhodná s pôvodnou hodnotou medziproduktov, teda dochádza k istej neefektivite v spracovaní týchto medziproduktov.

Pri výstupnom modeli je už útvar D rovnako ako útvary C a E považovaný za neefektívny a za efektívne tento model vyhodnocuje iba útvary A a B.

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(REL – I – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8182	4.0909	3.2727	4.9091	3	5
D	1	2	2	2.5184	1	1
E	0.6364	3.8182	1.9091	3.8182	2	4
(REL – O – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8	5	4	6	3.75	6.25
D	0.6667	2	2	3	1.5	1.5
E	0.6	6	3	6	3.3333	6.6667

DMU	EFEKTIVITY	PROJEKCIE				
	θ^*	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{z}$	$\hat{y}^1$	$\hat{y}^2$
(REL – HDF – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8995	4.4973	3.5979	5.3968	3.3353	5.5588
D	1	2	2	2.5528	1	1
E	0.7854	4.7124	2.3562	4.7124	2.5465	5.0929
(REL – DDF – VRS – g)						
A	1	3	1	3	1	2
B	1	8	1	6	7	3
C	0.8947	4.4737	3.5789	5.3684	3.3158	5.5263
D	1	2	2	2.5396	1	1
E	0.7647	4.5882	2.2941	4.5882	2.4706	4.9412

Tabuľka 18: Výsledky z $(REL - g)$ modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Súhrnný prehľad optimálnych hodnôt efektivít zo všetkých našich modelov spolu s optimálnymi hodnotami klasických black-boxových modelov pre **Príklad 3.2** môžeme vidieť v **Tabuľkách 19** a **20**. Pri *Kumulatívnom nezávislom modeli* uvádzame aritmetický priemer optimálnych hodnôt z oboch fáz.

	CRS															
	I (vstupný)				O (výstupný)				HDF				DDF			
	KNZ-g	PREP-g	REL-g	klasický CCR	KNZ-g	PREP-g	REL-g	klasický CCR	KNZ-g	PREP-g	REL-g	klasický HDF	KNZ-g	PREP-g	REL-g	klasický DDF
A	0.9889	1	0.675	1	0.9889	0.9778	0.675	1	0.9944	1	0.8216	1	0.9944	1	0.806	1
B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C	0.8429	1	0.8	1	0.8429	1	0.8	1	0.914	1	0.8944	1	0.9068	1	0.8889	1
D	0.6774	1	0.45	0.6923	0.6774	1	0.45	0.6923	0.7978	1	0.6708	0.8321	0.7619	1	0.6207	0.8182
E	0.7733	0.8333	0.6	0.8485	0.7733	0.88	0.6	0.8485	0.8773	0.9281	0.7746	0.9211	0.8681	0.925	0.75	0.9180

Tabuľka 19: Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s konštantnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

Vidíme, že naďalej platia vzťahy medzi optimálnymi hodnotami modelov, a to, že *Relačné modely* dávajú vo všetkých prípadoch najmenšie hodnoty efektivít a spolu s *Kumulatívnymi nezávislými modelmi* vyhodnocujú pri neefektívnych útvaroch nižšie efektivity ako klasické black-boxové modely. Zaujímavé je, že túto vlastnosť v našom príklade pri

variabilných výnosoch z rozsahu dodržiavajú aj *Prepojené modely*, ktoré zároveň produkujú vyššie hodnoty efektivít ako *Kumulatívne nezávislé* a *Relačné modely*. Naopak pri konštantných výnosoch z rozsahu *Prepojené modely* dosahujú vyššie aj nižšie hodnoty efektivít ako klasické modely. Inak *Prepojené modely* vykazujú aj pri CRS vyššie hodnoty efektivít ako *Kumulatívne nezávislé* a *Relačné modely*. Výnimkou je výstupný *Prepojený model*, ktorý má pri útvare $DMU\ A$ menšiu efektivitu ako *Kumulatívny nezávislý model*.

	VRS															
	I (vstupný)				**O (výstupný)**				**HDF**				**DDF**			
	KNZ-g	**PREP-g**	**REL-g**	**klasický BCC**	**KNZ-g**	**PREP-g**	**REL-g**	**klasický BCC**	**KNZ-g**	**PREP-g**	**REL-g**	**klasický HDF**	**KNZ-g**	**PREP-g**	**REL-g**	**klasický DDF**
A	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
B	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
C	0.9	**1**	0.8182	**1**	0.875	**1**	0.8	**1**	0.9405	**1**	0.8995	**1**	0.9375	**1**	0.8947	**1**
D	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0.6667	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
E	0.8294	0.8333	0.6364	0.9123	0.8782	0.9231	0.6	0.9231	0.9235	0.9465	0.7854	0.9582	0.9196	0.9444	0.7647	0.9573

Tabuľka 20: Porovnanie optimálnych hodnôt θ^* modelov s variabilnými výnosmi z rozsahu v Príklade 3.2

4 Aplikácia modelov na reálnych dátach

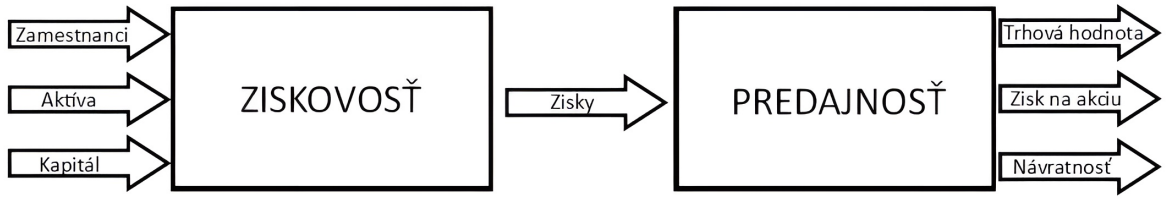
V poslednej kapitole aplikujeme všetky modely uvádzané v predchádzajúcej kapitole na dvoch reálnych príkladoch. Najprv sa pozrieme na základný dvojstupňový systém pri dátach s 30 americkými komerčnými bankami a v záverečnej časti vezmeme dáta regionálneho procesu výskumu a vývoja (z angl. regional R&D process) v 30 regiónoch v Číne, na ktoré aplikujeme všeobecný dvojstupňový systém bez spätnej väzby.

Pre oba datasety budeme modely počítať za predpokladu CRS aj VRS. Keďže predpoklad CRS býva v reálnych aplikáciách zriedka splnený, je z praktického hľadiska vhodnejšie pracovať s modelmi s VRS. Tie poskytujú väčšiu flexibilitu a umožňujú presnejšie hodnotenie efektívnosti jednotiek rôznych veľkostí.

4.1 Základná dvojstupňová sieťová DEA

Seiford a Zhu vo svojej práci [48] skúmali výkonnosť 55 amerických komerčných bánk v roku 1995 prostredníctvom dvojstupňového výrobného procesu definovaného z hľadiska ziskovosti a predajnosti [10]. Na účely analýzy pomocou našich modelov sme z pôvodného súboru údajov, používaného v tejto práci, vybrali prvých 30 bánk. Ako vstupy do prvej fázy uvažujeme počet zamestnancov, aktíva (v miliónoch $) a kapitál (v miliónoch $), za medziprodukty berieme zisky (v miliónoch $) a koncovými výstupmi sú trhová hodnota (v miliónoch $), zisk na akciu (v $) a návratnosť investorom (v %).

Na lepšiu prehľadnosť uvádzame tento proces bánk na **Obr. 15**, kde prvá fáza meria ziskovosť, t.j. schopnosť banky generovať zisky a druhá fáza predstavuje predajnosť, t.j. výkonnosť banky na akciovom trhu.



Obr. 15: Schéma procesu produkcie banky

(Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [48]*)

[10] Na analýzu dát používali dvojstupňový výstupný *Nezávislý model* s CRS aj VRS.

Konkrétne dáta, ktoré pochádzajú z rebríčka Fortune 1000 (Fortune, apríl 1996), zobrazuje **Tabuľka 36** v **Prílohe B**. Namiesto konkrétnych názvov bánk uvádzame len číselné označenie.

Pred aplikovaním modelov v MATLAB-e sme dáta normalizovali, aby sa zabezpečila porovnateľnosť veličín rôznych rádov a jednotiek, a aby sa zlepšila numerická stabilita optimalizačného procesu. Hoci normalizácia nie je pre správnosť DEA analýzy striktne nevyhnutná, jej využitie je v praxi bežné a zlepšuje spoľahlivosť riešenia. My ju spravíme pomocou maximálnych hodnôt jednotlivých vstupov, medziproduktov a výstupov, t.j. každú hodnotu určitého vstupu/medziproduktu/výstupu predelíme maximálnou hodnotou toho istého vstupu/medziproduktu/výstupu. Tieto normalizované hodnoty môžeme nájsť v **Tabuľke 37** v **Prílohe B**. S takto normalizovanými dátami už môžeme ďalej pracovať.

4.1.1 Kumulatívny nezávislý model bankového procesu

V prvej časti na naše normalizované dáta aplikujeme (KNZ) model (3.1) z predchádzajúcej kapitoly. Všetkých 8 tvarov tohto modelu vyhodnotilo celkovo jednu banku, ktorá je efektívna v oboch fázach, konkrétne banku č. 16.

Tvary modelu pri konštantných výnosoch z rozsahu navyše vyhodnotili prvú fázu ako efektívnu pri bankách č. 5, 17, 30 a druhú fázu ako efektívnu pri bankách č. 10, 13, 27, 29.

Tvary modelu pri variabilných výnosoch z rozsahu vyhodnocujú banky č. 5, 17 a 30 ako efektívne v 1. fáze a neefektívne v 2. fáze a banky č. 2, 10, 13, 15, 18 a 27 ako efektívne v 2. fáze, ale neefektívne v 1. fáze. Navyše okrem spomenutej banky č. 16, ktorá je efektívna v oboch fázach pre všetkých 8 tvarov, dostávame pri VRS ešte ďalšie 2 efektívne banky v oboch svojich fázach, a to banky č. 1 a 29.

Pre jednotlivé banky sú pre všetkých 8 tvarov tohto modelu všetky hodnoty efektivít oboch fáz, aritmetické priemery výsledných hodnôt $\boldsymbol{\theta}^*$ a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov uvádzané v **Tabuľke 21** (s CRS) a v **Tabuľkách 22**, **23** (s VRS). V zátvorkách sú zobrazené ranky (poradie) jednotlivých bánk, pričom pri CRS ich v prípade efektivít jednotlivých fáz a klasických modelov uvádzame len pri vstupných modeloch, pretože pre ostatné typy modelov sú rovnaké. V prípade rovnosti hodnôt efek-

tivít viacerých bánk sa ich rank stanovuje ako priemer poradových pozícií prislúchajúcich týmto bankám.

	CRS															
	I				O				HDF				DDF			
Banka č.	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	0.7530 (9.)	0.3928 (29.)	0.5729 (21.)	0.5988 (18.)	0.7530	0.3928	0.5729	0.5988	0.8678	0.6267	0.7473 (22.)	0.7738	0.8591	0.5640	0.7116 (22.)	0.7491
2	0.5521 (26.)	0.4174 (28.)	0.4847 (30.)	0.4521 (29.)	0.5521	0.4174	0.4847	0.4521	0.7430	0.6460	0.6945 (30.)	0.6724	0.7114	0.5889	0.6502 (30.)	0.6227
3	0.6273 (15.)	0.4263 (27.)	0.5268 (28.)	0.5318 (22.)	0.6273	0.4263	0.5268	0.5318	0.7920	0.6529	0.7225 (28.)	0.7293	0.7710	0.5978	0.6844 (28.)	0.6944
4	0.7838 (8.)	0.3883 (30.)	0.5860 (20.)	0.6145 (16.)	0.7838	0.3883	0.5860	0.6145	0.8853	0.6232	0.7542 (19.)	0.7839	0.8788	0.5594	0.7191 (20.)	0.7612
5	**1** (2,5.)	0.4911 (22.)	0.7456 (8.)	**1** (3.)	**1**	0.4911	0.7456	**1**	**1**	0.7008	0.8504 (9.)	**1**	**1**	0.6587	0.8294 (10.)	**1**
6	0.6193 (18.)	0.5002 (21.)	0.5597 (23.)	0.5676 (21.)	0.6193	0.5002	0.5597	0.5676	0.7869	0.7072	0.7471 (23.)	0.7534	0.7649	0.6668	0.7159 (21.)	0.7241
7	0.5963 (21.)	0.4399 (26.)	0.5181 (29.)	0.5251 (24.)	0.5963	0.4399	0.5181	0.5251	0.7722	0.6632	0.7177 (29.)	0.7246	0.7471	0.6110	0.6790 (29.)	0.6886
8	0.6204 (17.)	0.4814 (23.)	0.5509 (25.)	0.5847 (19.)	0.6204	0.4814	0.5509	0.5847	0.7877	0.6939	0.7408 (25.)	0.7647	0.7658	0.6500	0.7079 (24.)	0.7380
9	0.6351 (14.)	0.4746 (24.)	0.5548 (24.)	0.5156 (25.)	0.6351	0.4746	0.5548	0.5156	0.7970	0.6889	0.7429 (24.)	0.7181	0.7769	0.6437	0.7103 (23.)	0.6804
10	0.2463 (30.)	**1** (3.)	0.6231 (18.)	0.5016 (26.)	0.2463	**1**	0.6231	0.5016	0.4963	**1**	0.7481 (21.)	0.7083	0.3952	**1**	0.6976 (25.)	0.6681
11	0.3777 (28.)	0.7002 (14.)	0.5389 (26.)	0.5284 (23.)	0.3777	0.7002	0.5389	0.5284	0.6146	0.8368	0.7257 (27.)	0.7269	0.5483	0.8236	0.6860 (27.)	0.6914
12	0.6494 (13.)	0.5256 (19.)	0.5875 (19.)	0.4592 (28.)	0.6494	0.5256	0.5875	0.4592	0.8058	0.7250	0.7654 (18.)	0.6776	0.7874	0.6890	0.7382 (17.)	0.6293
13	0.2876 (29.)	**1** (3.)	0.6438 (15.)	0.5794 (20.)	0.2876	**1**	0.6438	0.5794	0.5363	**1**	0.7682 (17.)	0.7612	0.4467	**1**	0.7234 (19.)	0.7337
14	0.6180 (19.)	0.4515 (25.)	0.5348 (27.)	0.4835 (27.)	0.6180	0.4515	0.5348	0.4835	0.7861	0.6719	0.7290 (26.)	0.6954	0.7639	0.6221	0.6930 (26.)	0.6518
15	0.5746 (24.)	0.8607 (9.)	0.7177 (11.)	0.8048 (10.)	0.5746	0.8607	0.7177	0.8048	0.7580	0.9277	0.8429 (12.)	0.8971	0.7298	0.9251	0.8275 (12.)	0.8918
16	**1** (2,5.)	**1** (3.)	**1** (1.)	**1** (3.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1** (1.)	**1**	**1**	**1**	**1** (1.)	**1**
17	**1** (2,5.)	0.5224 (20.)	0.7612 (6.)	0.9701 (6.)	**1**	0.5224	0.7612	0.9701	**1**	0.7228	0.8614 (7.)	0.9849	**1**	0.6863	0.8431 (7.)	0.9848
18	0.8044 (6.)	0.8883 (8.)	0.8463 (4.)	0.8812 (8.)	0.8044	0.8883	0.8463	0.8812	0.8969	0.9425	0.9197 (4.)	0.9387	0.8916	0.9408	0.9162 (4.)	0.9368
19	0.7352 (10.)	0.6937 (15.)	0.7144 (12.)	0.6623 (13,5.)	0.7352	0.6937	0.7144	0.6623	0.8574	0.8329	0.8452 (11.)	0.8138	0.8474	0.8192	0.8333 (9.)	0.7968
20	0.7002 (12.)	0.5705 (17.)	0.6354 (17.)	0.7471 (11.)	0.7002	0.5705	0.6354	0.7471	0.8368	0.7553	0.7961 (16.)	0.8644	0.8237	0.7266	0.7751 (16.)	0.8553
21	0.5833 (23.)	0.7041 (13.)	0.6437 (16.)	0.6623 (13,5.)	0.5833	0.7041	0.6437	0.6623	0.7638	0.8391	0.8014 (15.)	0.8138	0.7368	0.8264	0.7816 (15.)	0.7968
22	0.6210 (16.)	0.7449 (11.)	0.6830 (13.)	0.6115 (17.)	0.6210	0.7449	0.6830	0.6115	0.7880	0.8631	0.8256 (13.)	0.7820	0.7662	0.8538	0.8100 (13.)	0.7589
23	0.5937 (22.)	0.5426 (18.)	0.5682 (22.)	0.4035 (30.)	0.5937	0.5426	0.5682	0.4035	0.7705	0.7366	0.7536 (20.)	0.6352	0.7451	0.7035	0.7243 (18.)	0.5750
24	0.8191 (5.)	0.6927 (16.)	0.7559 (7.)	**1** (3.)	0.8191	0.6927	0.7559	**1**	0.9051	0.8323	0.8687 (6.)	**1**	0.9006	0.8184	0.8595 (6.)	**1**
25	0.6177 (20.)	0.9347 (7.)	0.7762 (5.)	0.9125 (7.)	0.6177	0.9347	0.7762	0.9125	0.7859	0.9668	0.8764 (5.)	0.9552	0.7637	0.9663	0.8650 (5.)	0.9542
26	0.5634 (25.)	0.7886 (10.)	0.6760 (14.)	0.6265 (15.)	0.5634	0.7886	0.6760	0.6265	0.7506	0.8880	0.8193 (14.)	0.7915	0.7208	0.8818	0.8013 (14.)	0.7704
27	0.4880 (27.)	**1** (3.)	0.7440 (9.)	0.8118 (9.)	0.4880	**1**	0.7440	0.8118	0.6985	**1**	0.8493 (10.)	0.9010	0.6559	**1**	0.8279 (11.)	0.8961
28	0.7312 (11.)	0.7192 (12.)	0.7252 (10.)	0.7168 (12.)	0.7312	0.7192	0.7252	0.7168	0.8551	0.8480	0.8516 (8.)	0.8466	0.8447	0.8366	0.8407 (8.)	0.8350
29	0.7919 (7.)	**1** (3.)	0.8960 (3.)	**1** (3.)	0.7919	**1**	0.8960	**1**	0.8899	**1**	0.9450 (3.)	**1**	0.8839	**1**	0.9419 (3.)	**1**
30	**1** (2,5.)	0.9634 (6.)	0.9817 (2.)	**1** (3.)	**1**	0.9634	0.9817	**1**	**1**	0.9815	0.9908 (2.)	**1**	**1**	0.9813	0.9907 (2.)	**1**

Tabuľka 21: Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri CRS pre jednotlivé americké komerčné banky získané pomocou *Kumulatívneho nezávislého modelu*

Z **Tabuľky 21** vidíme, že spriemerované efektivity optimálnych hodnôt oboch fáz $\boldsymbol{\theta^*}$ sú s optimálnymi hodnotami klasických black-boxových modelov totožné len pri efektívnej banke č. 16. Vo všetkých ostatných prípadoch sa od seba líšia, pričom $\boldsymbol{\theta^*}$ sú v 10-12 prípadoch väčšie ako optimálne hodnoty black-boxových modelov, a vo väčšine prípadov sú väčšie efektivity black-boxových modelov. Tie vyhodnocujú navyše ďalšie 4 banky ako efektívne, konkrétne banky č. 5, 24, 29 a 30. Teda vidíme, že klasické modely nadhodnocujú efektivitu tých bánk, ktoré vykazujú pomerne dobrú efektivitu pri sieťovom modeli, a to tým, že ich považujú za efektívne. Túto ideu potvrdzujú aj ranky, ktoré majú pri jednotlivých bankách porovnateľnú výšku. Najväčší rozdiel v rankoch medzi priemernou efektivitou *Kumulatívnych nezávislých sieťových modelov* a klasických black-boxových modelov pozorujeme pri banke č. 12, a to o 9 až 11 miest a banke č. 23, a to o 8 až 12 miest,

pričom však hodnoty efektivít z týchto 2 typov modelov sa pre tieto banky veľmi nelíšia.

	VRS							
	I				O			
Banka č.	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*BCC}_{klasický}$
1	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)
2	0.8128 (11.)	**1** (5.)	0.9064 (7.)	0.8585 (14.)	0.8387 (11.)	**1** (5.)	0.9193 (7.)	0.9329 (13.)
3	0.7746 (16.)	0.9346 (13.)	0.8546 (10.)	0.8086 (17.)	0.8118 (13.)	0.9546 (13.)	0.8832 (10.)	0.8519 (18.)
4	0.9187 (8.)	0.7752 (20.)	0.8470 (11.)	0.8061 (18.)	0.9328 (8.)	0.8475 (20.)	0.8902 (8.)	0.9052 (15.)
5	**1** (3,5.)	0.8856 (14.)	0.9428 (5.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	0.9311 (14.)	0.9656 (5.)	**1** (5,5.)
6	0.6475 (24.)	0.7212 (25.)	0.6843 (26.)	0.6919 (21.)	0.7204 (18.)	0.8583 (19.)	0.7893 (18.)	0.8409 (19.)
7	0.6192 (26.)	0.6572 (26.)	0.6382 (27.)	0.6050 (26.)	0.6967 (19.)	0.8035 (23.)	0.7501 (21.)	0.7310 (24.)
8	0.7296 (17.)	0.9404 (12.)	0.8350 (14.)	0.8569 (15.)	0.7887 (14.)	0.9627 (12.)	0.8757 (11.)	0.8981 (17.)
9	0.7871 (14.)	0.8225 (15.)	0.8048 (15.)	0.9178 (11.)	0.8493 (9.)	0.8937 (16.)	0.8715 (12.)	0.9495 (11.)
10	0.4913 (28.)	**1** (5.)	0.7457 (19.)	0.5691 (28.)	0.2559 (30.)	**1** (5.)	0.6280 (29.)	0.5098 (30.)
11	0.4305 (29.)	0.7823 (19.)	0.6064 (28.)	0.5756 (27.)	0.4377 (28.)	0.9094 (15.)	0.6736 (27.)	0.7084 (26.)
12	0.7046 (18.)	0.7649 (22.)	0.7347 (20.)	0.8214 (16.)	0.7780 (15.)	0.8759 (18.)	0.8270 (16.)	0.8999 (16.)
13	0.3754 (30.)	**1** (5.)	0.6877 (25.)	0.6329 (23.)	0.3149 (29.)	**1** (5.)	0.6574 (28.)	0.7561 (22.)
14	0.6220 (25.)	0.5060 (30.)	0.5640 (30.)	0.5075 (30.)	0.6854 (20.)	0.6856 (29.)	0.6855 (26.)	0.6655 (28.)
15	0.6791 (19.)	**1** (5.)	0.8395 (12.)	**1** (5,5.)	0.5876 (25.)	**1** (5.)	0.7938 (17.)	**1** (5,5.)
16	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)
17	**1** (3,5.)	0.5873 (28.)	0.7936 (18.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	0.7795 (26.)	0.8898 (9.)	**1** (5,5.)
18	0.8309 (10.)	**1** (5.)	0.9155 (6.)	**1** (5,5.)	0.8450 (10.)	**1** (5.)	0.9225 (6.)	**1** (5,5.)
19	0.7900 (13.)	0.7992 (17.)	0.7946 (17.)	0.8701 (13.)	0.8176 (12.)	0.8829 (17.)	0.8502 (14.)	0.9378 (12.)
20	0.7958 (12.)	0.6239 (27.)	0.7098 (23.)	0.7520 (20.)	0.7294 (17.)	0.7015 (28.)	0.7155 (23.)	0.7847 (20.)
21	0.6543 (21.)	0.7605 (23.)	0.7074 (24.)	0.6642 (22.)	0.5884 (24.)	0.7885 (25.)	0.6885 (25.)	0.7395 (23.)
22	0.6499 (23.)	0.7872 (18.)	0.7185 (22.)	0.6173 (25.)	0.6340 (22.)	0.8053 (22.)	0.7196 (22.)	0.6840 (27.)
23	0.6018 (27.)	0.5482 (29.)	0.5750 (29.)	0.5423 (29.)	0.6156 (23.)	0.5970 (30.)	0.6063 (30.)	0.5183 (29.)
24	0.9568 (7.)	0.7653 (21.)	0.8611 (9.)	**1** (5,5.)	0.9377 (7.)	0.7927 (24.)	0.8652 (13.)	**1** (5,5.)
25	0.7787 (15.)	0.9906 (10.)	0.8847 (8.)	**1** (5,5.)	0.6828 (21.)	0.9925 (10.)	0.8376 (15.)	**1** (5,5.)
26	0.6530 (22.)	0.8037 (16.)	0.7283 (21.)	0.6293 (24.)	0.5755 (26.)	0.8245 (21.)	0.7000 (24.)	0.7235 (25.)
27	0.6738 (20.)	**1** (5.)	0.8369 (13.)	0.8799 (12.)	0.5226 (27.)	**1** (5.)	0.7613 (20.)	0.9269 (14.)
28	0.8450 (9.)	0.7445 (24.)	0.7948 (16.)	0.7538 (19.)	0.7753 (16.)	0.7721 (27.)	0.7737 (19.)	0.7779 (21.)
29	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)
30	**1** (3,5.)	0.9679 (11.)	0.9839 (4.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	0.9653 (11.)	0.9826 (4.)	**1** (5,5.)

Tabuľka 22: Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé americké komerčné banky získané pomocou vstupného a výstupného *Kumulatívneho nezávislého modelu*

V prípade (KNZ) modelu s VRS (**Tabuľky 22** a **23**) sú spriemerované efektivity optimálnych hodnôt oboch fáz $\boldsymbol{\theta^*}$ s optimálnymi hodnotami klasických black-boxových modelov tiež totožné len pri efektívnych bankách, konkrétne bankách č. 1, 16 a 29. Vo všetkých ostatných prípadoch sa od seba líšia, pričom $\boldsymbol{\theta^*}$ sú pri vstupnom, HDF a DDF tvare takmer v polovici prípadov väčšie ako optimálne hodnoty black-boxových modelov, kým pri výstupnom tvare to platí len v 6 prípadoch.

Ďalej vidíme, že klasické modely vyhodnocujú väčší počet bánk ako efektívnych, aj keď podľa (KNZ) modelu nie sú efektívne v oboch svojich divíziách, preto zo sieťového modelu dostávame informatívnejšie hodnoty o vnútornom fungovaní bánk. Pri bankách č. 24 a 25 nám pri sieťovom modeli dokonca nevyšla efektívna ani jedna divízia, ale

podľa klasických modelov sú tieto banky efektívne. Ich priemerné optimálne hodnoty zo sieťových modelov sa však pohybujú v rozmedzí $0.83 - 0.93$, preto sú považované za banky s dobrou výkonnosťou. Rozdiely v rankoch priemernej efektivity (KNZ) modelov a klasických modelov sú aj v prípade variabilných výnosov z rozsahu minimálne, najväčšie môžeme pozorovať pri bankách č. 2, 15 a 17.

	VRS							
	HDF				**DDF**			
Banka č.	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)
2	0.9096 (10.)	**1** (5.)	0.9548 (7.)	0.9351 (15.)	0.9051 (10.)	**1** (5.)	0.9526 (7.)	0.9327 (15.)
3	0.8921 (14.)	0.9729 (13.)	0.9325 (9.)	0.9132 (18.)	0.8857 (14.)	0.9725 (13.)	0.9291 (9.)	0.9089 (18.)
4	0.9626 (8.)	0.9055 (19.)	0.9341 (8.)	0.9317 (17.)	0.9618 (8.)	0.9001 (19.)	0.9309 (8.)	0.9283 (17.)
5	**1** (3,5.)	0.9563 (14.)	0.9781 (5.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	0.9551 (14.)	0.9775 (5.)	**1** (5,5.)
6	0.8315 (19.)	0.9029 (20,5.)	0.8672 (20.)	0.8807 (19.)	0.8153 (19.)	0.8963 (21.)	0.8558 (20.)	0.8695 (19.)
7	0.8162 (20.)	0.8688 (26.)	0.8425 (21.)	0.8276 (24.)	0.7969 (20.)	0.8573 (26.)	0.8271 (22.)	0.8089 (24.)
8	0.8745 (16.)	0.9769 (12.)	0.9257 (12.)	0.9389 (14.)	0.8654 (16.)	0.9765 (12.)	0.9210 (12.)	0.9367 (14.)
9	0.9083 (11.)	0.9318 (16.)	0.9200 (13.)	0.9683 (11.)	0.9032 (11.)	0.9288 (16.)	0.9160 (13.)	0.9677 (11.)
10	0.5575 (29.)	**1** (5.)	0.7788 (27.)	0.7260 (29.)	0.5027 (29.)	**1** (5.)	0.7513 (27.)	0.6956 (29.)
11	0.6172 (28.)	0.9348 (15.)	0.7760 (29.)	0.8071 (27.)	0.5623 (28.)	0.9317 (15.)	0.7470 (28.)	0.7828 (27.)
12	0.8596 (17.)	0.9164 (18.)	0.8880 (17.)	0.9343 (16.)	0.8474 (18.)	0.9116 (18.)	0.8795 (18.)	0.9315 (16.)
13	0.5567 (30.)	**1** (5.)	0.7784 (28.)	0.8359 (22.)	0.4911 (30.)	**1** (5.)	0.7456 (29.)	0.8180 (22.)
14	0.7947 (22.)	0.7720 (29.)	0.7834 (26.)	0.7649 (28.)	0.7720 (22.)	0.7328 (29.)	0.7524 (26.)	0.7288 (28.)
15	0.7961 (21.)	**1** (5.)	0.8981 (16.)	**1** (5,5.)	0.7798 (21.)	**1** (5.)	0.8899 (16.)	**1** (5,5.)
16	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)
17	**1** (3,5.)	0.8398 (27.)	0.9199 (14.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	0.8204 (27.)	0.9102 (14.)	**1** (5,5.)
18	0.9136 (9.)	**1** (5.)	0.9568 (6.)	**1** (5,5.)	0.9098 (9.)	**1** (5.)	0.9549 (6.)	**1** (5,5.)
19	0.8975 (13.)	0.9239 (17.)	0.9107 (15.)	0.9574 (12.)	0.8918 (13.)	0.9201 (17.)	0.9060 (15.)	0.9561 (12.)
20	0.8747 (15.)	0.8051 (28.)	0.8399 (23.)	0.8694 (20.)	0.8683 (15.)	0.7849 (28.)	0.8266 (23.)	0.8597 (20.)
21	0.7809 (24.)	0.8810 (24.)	0.8310 (25.)	0.8315 (23.)	0.7611 (24.)	0.8735 (24.)	0.8173 (25.)	0.8152 (23.)
22	0.7907 (23.)	0.8928 (22.)	0.8418 (22.)	0.8095 (26.)	0.7685 (23.)	0.8868 (22.)	0.8276 (21.)	0.7890 (26.)
23	0.7780 (25.)	0.7576 (30.)	0.7678 (30.)	0.6440 (30.)	0.7530 (26.)	0.7269 (30.)	0.7400 (30.)	0.5862 (30.)
24	0.9741 (7.)	0.8835 (23.)	0.9288 (10.)	**1** (5,5.)	0.9738 (7.)	0.8763 (23.)	0.9251 (10.)	**1** (5,5.)
25	0.8577 (18.)	0.9958 (10.)	0.9268 (11.)	**1** (5,5.)	0.8501 (17.)	0.9958 (10.)	0.9230 (11.)	**1** (5,5.)
26	0.7711 (27.)	0.9029 (20,5.)	0.8370 (24.)	0.8233 (25.)	0.7518 (27.)	0.8979 (20.)	0.8248 (24.)	0.8052 (25.)
27	0.7729 (26.)	**1** (5.)	0.8864 (19.)	0.9522 (13.)	0.7550 (25.)	**1** (5.)	0.8775 (19.)	0.9507 (13.)
28	0.9027 (12.)	0.8716 (25.)	0.8871 (18.)	0.8620 (21.)	0.8990 (12.)	0.8628 (25.)	0.8809 (17.)	0.8504 (21.)
29	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	**1** (5.)	**1** (2.)	**1** (5,5.)
30	**1** (3,5.)	0.9832 (11.)	0.9916 (4.)	**1** (5,5.)	**1** (3,5.)	0.9830 (11.)	0.9915 (4.)	**1** (5,5.)

Tabuľka 23: Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé americké komerčné banky získané pomocou *HDF* a *DDF Kumulatívneho nezávislého modelu*

4.1.2 Prepojený model bankového procesu

Ďalej na naše normalizované dáta použijeme model (3.2), ktorého výsledné efektivity sú pre všetky jeho tvary uvedené v **Tabuľkách 24** a **25**. Hodnoty v zátvorkách opäť predstavujú ranky jednotlivých bánk. Pri klasických black-boxových modeloch s CRS sú uvedené len pre vstupný model, pretože vo všetkých prípadoch klasických modelov s CRS

sú rovnaké. Pri modeloch s VRS majú HDF a DDF tvary klasického modelu tiež rovnaké ranky, preto ich uvádzame len raz.

Vidíme, že vo všetkých 8 tvaroch aj tento model vyhodnocuje len banku č. 16 ako efektívnu. Pri CRS máme v troch tvaroch modelu, okrem výstupného tvaru, 3 efektívne banky, presnejšie 5, 17, 30, a v troch tvaroch modelu, okrem vstupného tvaru, máme 4 efektívne banky, a to banky č. 10, 13, 27 a 29.

Oproti CRS, model s VRS klasifikuje banky č. 1 a 29 ako efektívne vo všetkých 4 tvaroch a navyše určuje banky č. 2, 15 a 18 ako efektívne v troch tvaroch okrem vstupného tvaru. Ostatné banky vyhodnocuje rovnako ako model pri CRS.

	CRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Banka č.	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	0.7530 (9.)	0.5988 (18.)	0.3928 (29.)	0.5988	0.7530 (15.)	0.7738	0.7530 (14.)	0.7491
2	0.5521 (26.)	0.4521 (29.)	0.4174 (28.)	0.4521	0.5521 (30.)	0.6724	0.5521 (30.)	0.6227
3	0.6273 (15.)	0.5318 (22.)	0.4263 (27.)	0.5318	0.6273 (24.)	0.7293	0.6273 (22.)	0.6944
4	0.7838 (8.)	0.6145 (16.)	0.3883 (30.)	0.6145	0.7838 (14.)	0.7839	0.7838 (13.)	0.7612
5	**1** (2,5.)	**1** (3.)	0.4911 (22.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**
6	0.6193 (18.)	0.5676 (21.)	0.5002 (21.)	0.5676	0.6193 (26.)	0.7534	0.6193 (24.)	0.7241
7	0.5963 (21.)	0.5251 (24.)	0.4399 (26.)	0.5251	0.5963 (28.)	0.7246	0.5963 (26.)	0.6886
8	0.6204 (17.)	0.5847 (19.)	0.4814 (23.)	0.5847	0.6204 (25.)	0.7647	0.6204 (23.)	0.7380
9	0.6351 (14.)	0.5156 (25.)	0.4746 (24.)	0.5156	0.6351 (23.)	0.7181	0.6351 (21.)	0.6804
10	0.2463 (30.)	0.5016 (26.)	**1** (3.)	0.5016	**1** (4,5.)	0.7083	**1** (4,5.)	0.6681
11	0.3777 (28.)	0.5284 (23.)	0.7002 (14.)	0.5284	0.7002 (20,5.)	0.7269	0.5717 (29.)	0.6914
12	0.6494 (13.)	0.4592 (28.)	0.5256 (19.)	0.4592	0.6494 (22.)	0.6776	0.6494 (20.)	0.6293
13	0.2876 (29.)	0.5794 (20.)	**1** (3.)	0.5794	**1** (4,5.)	0.7612	**1** (4,5.)	0.7337
14	0.6180 (19.)	0.4835 (27.)	0.4515 (25.)	0.4835	0.6180 (27.)	0.6954	0.6180 (25.)	0.6518
15	0.5746 (24.)	0.8048 (10.)	0.8607 (9.)	0.8048	0.8607 (11.)	0.8971	0.8382 (11.)	0.8918
16	**1** (2,5.)	**1** (3.)	**1** (3.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**
17	**1** (2,5.)	0.9701 (6.)	0.5224 (20.)	0.9701	**1** (4,5.)	0.9849	**1** (4,5.)	0.9848
18	0.8044 (6.)	0.8812 (8.)	0.8883 (8.)	0.8812	0.8883 (10.)	0.9387	0.8742 (10.)	0.9368
19	0.7352 (10.)	0.6622 (14.)	0.6937 (15.)	0.6622	0.7352 (17.)	0.8138	0.7352 (15.)	0.7968
20	0.7002 (12.)	0.7471 (11.)	0.5705 (17.)	0.7471	0.7002 (20,5.)	0.8644	0.7002 (18.)	0.8553
21	0.5833 (23.)	0.6623 (13.)	0.7041 (13.)	0.6623	0.7041 (19.)	0.8138	0.5833 (28.)	0.7968
22	0.6210 (16.)	0.6115 (17.)	0.7449 (11.)	0.6115	0.7449 (16.)	0.7820	0.6575 (19.)	0.7589
23	0.5937 (22.)	0.4035 (30.)	0.5426 (18.)	0.4035	0.5937 (29.)	0.6352	0.5937 (27.)	0.5750
24	0.8191 (5.)	**1** (3.)	0.6927 (16.)	**1**	0.8191 (12.)	**1**	0.8191 (12.)	**1**
25	0.6177 (20.)	0.9125 (7.)	0.9347 (7.)	0.9125	0.9347 (9.)	0.9552	0.9302 (9.)	0.9542
26	0.5634 (25.)	0.6265 (15.)	0.7886 (10.)	0.6265	0.7886 (13.)	0.7915	0.7319 (16.)	0.7704
27	0.4880 (27.)	0.8118 (9.)	**1** (3.)	0.8118	**1** (4,5.)	0.9010	**1** (4,5.)	0.8961
28	0.7312 (11.)	0.7168 (12.)	0.7192 (12.)	0.7168	0.7312 (18.)	0.8466	0.7312 (17.)	0.8350
29	0.7919 (7.)	**1** (3.)	**1** (3.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**
30	**1** (2,5.)	**1** (3.)	0.9634 (6.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**	**1** (4,5.)	**1**

Tabuľka 24: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS

Pri porovnaní optimálnych hodnôt *Prepojených modelov* s klasickými black-boxovými modelmi nie je možné identifikovať žiadny opakujúci sa trend.

	VRS							
	I		O		HDF		DDF	
Banka č.	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	**1** (3,5.)	**1** (5,5.)	**1** (5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
2	0.8128 (11.)	0.8585 (14.)	**1** (5.)	0.9329 (13.)	**1** (6,5.)	0.9351 (15.)	**1** (6,5.)	0.9327
3	0.7746 (16.)	0.8086 (17.)	0.9546 (13.)	0.8519 (18.)	0.9546 (16.)	0.9132 (18.)	0.9524 (16.)	0.9089
4	0.9187 (8.)	0.8061 (18.)	0.8475 (20.)	0.9052 (15.)	0.9187 (17.)	0.9317 (17.)	0.9187 (17.)	0.9283
5	**1** (3,5.)	**1** (5,5.)	0.9311 (14.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
6	0.6475 (24.)	0.6919 (21.)	0.8583 (19.)	0.8409 (19.)	0.8583 (22.)	0.8807 (19.)	0.8349 (23.)	0.8695
7	0.6192 (26.)	0.6050 (26.)	0.8035 (23.)	0.7310 (24.)	0.8035 (26.)	0.8276 (24.)	0.7554 (27.)	0.8089
8	0.7296 (17.)	0.8569 (15.)	0.9627 (12.)	0.8981 (17.)	0.9627 (14.)	0.9389 (14.)	0.9613 (14.)	0.9367
9	0.7871 (14.)	0.9178 (11.)	0.8937 (16.)	0.9495 (11.)	0.8937 (19.)	0.9683 (11.)	0.8810 (19.)	0.9677
10	0.4913 (28.)	0.5691 (28.)	**1** (5.)	0.5098 (30.)	**1** (6,5.)	0.7260 (29.)	**1** (6,5.)	0.6956
11	0.4305 (29.)	0.5756 (27.)	0.9094 (15.)	0.7084 (26.)	0.9094 (18.)	0.8071 (27.)	0.9004 (18.)	0.7828
12	0.7046 (18.)	0.8214 (16.)	0.8759 (18.)	0.8999 (16.)	0.8759 (21.)	0.9343 (16.)	0.8584 (21.)	0.9315
13	0.3754 (30.)	0.6329 (23.)	**1** (5.)	0.7561 (22.)	**1** (6,5.)	0.8359 (22.)	**1** (6,5.)	0.8180
14	0.6220 (25.)	0.5075 (30.)	0.6856 (29.)	0.6655 (28.)	0.6856 (29.)	0.7649 (28.)	0.6220 (29.)	0.7288
15	0.6791 (19.)	**1** (5,5.)	**1** (5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
16	**1** (3,5.)	**1** (5,5.)	**1** (5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
17	**1** (3,5.)	**1** (5,5.)	0.7795 (26.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
18	0.8309 (10.)	**1** (5,5.)	**1** (5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
19	0.7900 (13.)	0.8701 (13.)	0.8829 (17.)	0.9378 (12.)	0.8829 (20.)	0.9574 (12.)	0.8674 (20.)	0.9561
20	0.7958 (12.)	0.7520 (20.)	0.7015 (28.)	0.7847 (20.)	0.7958 (27.)	0.8694 (20.)	0.7958 (24.)	0.8597
21	0.6543 (21.)	0.6642 (22.)	0.7885 (25.)	0.7395 (23.)	0.7885 (28.)	0.8315 (23.)	0.7318 (28.)	0.8152
22	0.6499 (23.)	0.6173 (25.)	0.8053 (22.)	0.6840 (27.)	0.8053 (25.)	0.8095 (26.)	0.7582 (26.)	0.7890
23	0.6018 (27.)	0.5423 (29.)	0.5970 (30.)	0.5183 (29.)	0.6018 (30.)	0.6440 (30.)	0.6018 (30.)	0.5862
24	0.9568 (7.)	**1** (5,5.)	0.7927 (24.)	**1** (5,5.)	0.9568 (15.)	**1** (5,5.)	0.9568 (15.)	**1**
25	0.7787 (15.)	**1** (5,5.)	0.9925 (10.)	**1** (5,5.)	0.9925 (13.)	**1** (5,5.)	0.9925 (13.)	**1**
26	0.6530 (22.)	0.6293 (24.)	0.8245 (21.)	0.7235 (25.)	0.8245 (24.)	0.8233 (25.)	0.7871 (25.)	0.8052
27	0.6738 (20.)	0.8799 (12.)	**1** (5.)	0.9269 (14.)	**1** (6,5.)	0.9522 (13.)	**1** (6,5.)	0.9507
28	0.8450 (9.)	0.7538 (19.)	0.7721 (27.)	0.7779 (21.)	0.8450 (23.)	0.8620 (21.)	0.8450 (22.)	0.8504
29	**1** (3,5.)	**1** (5,5.)	**1** (5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**
30	**1** (3,5.)	**1** (5,5.)	0.9653 (11.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1** (5,5.)	**1** (6,5.)	**1**

Tabuľka 25: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS

Výstupné, HDF a DDF tvary ($PREP$) modelu s CRS aj VRS určujú väčší počet efektívnych bánk než ich klasické ekvivalenty, pričom banku č. 24 nepovažujú za efektívnu, kým všetky klasické modely jej efektívnosť pripúšťajú. Vymykajú sa len vstupné modely, ktoré ako jediné identifikujú menej efektívnych bánk než zodpovedajúce klasické modely.

Podobne ani ranky bánk získané z jednotlivých modelov nevykazujú žiadny zreteľný trend, pričom medzi jednotlivými tvarmi pozorujeme výrazné rozdiely. Napríklad v **Tabuľke 25** vidíme pri banke č. 10, že síce vstupný tvar modelu prideľuje tejto banke rovnaký rank ako jeho klasický ekvivalent, ale výstupný, HDF a DDF tvar udeľujú tejto banke najvyšší možný rank, kým podľa klasických black-boxových modelov je bankou s najnižšími rankami.

4.1.3 Relačný model bankového procesu

Rovnako na normalizované dáta bánk použijeme aj model (3.3) a výsledky zapíšeme do **Tabuliek 26** a **27**. Pri CRS, *Relačný* aj klasický model dávajú rovnaké poradie pre všetky tvary, preto ich uvádzame iba raz, a to pri vstupných modeloch.

V tomto prípade všetkých 8 tvarov modelu vyhodnocuje, rovnako ako pri *Kumulatívnom nezávislom modeli*, celkovo iba 1 efektívnu banku, menovite banku č. 16.

Navyše model s variabilnými výnosmi z rozsahu dáva vo všetkých 4 tvaroch efektívne aj banky č. 1 a 29, okrem vstupného tvaru považuje za efektívnu aj banku č. 18 a okrem výstupného tvaru aj banku č. 30.

	CRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Banka č.	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	0.2958 (23.)	0.5988 (18.)	0.2958	0.5988	0.5439	0.7738	0.4565	0.7491
2	0.2304 (30.)	0.4521 (29.)	0.2304	0.4521	0.4800	0.6724	0.3745	0.6227
3	0.2674 (26.)	0.5318 (22.)	0.2674	0.5318	0.5171	0.7293	0.4220	0.6944
4	0.3044 (20.)	0.6145 (16.)	0.3044	0.6145	0.5517	0.7839	0.4667	0.7612
5	0.4911 (11.)	**1** (3.)	0.4911	**1**	0.7008	**1**	0.6587	**1**
6	0.3098 (19.)	0.5676 (21.)	0.3098	0.5676	0.5566	0.7534	0.4730	0.7241
7	0.2623 (28.)	0.5251 (24.)	0.2623	0.5251	0.5122	0.7246	0.4156	0.6886
8	0.2987 (22.)	0.5847 (19.)	0.2987	0.5847	0.5465	0.7647	0.4600	0.7380
9	0.3014 (21.)	0.5156 (25.)	0.3014	0.5156	0.5490	0.7181	0.4632	0.6804
10	0.2463 (29.)	0.5016 (26.)	0.2463	0.5016	0.4963	0.7083	0.3952	0.6681
11	0.2644 (27.)	0.5284 (23.)	0.2644	0.5284	0.5142	0.7269	0.4183	0.6914
12	0.3413 (17.)	0.4592 (28.)	0.3413	0.4592	0.5842	0.6776	0.5089	0.6293
13	0.2876 (24.)	0.5794 (20.)	0.2876	0.5794	0.5363	0.7612	0.4467	0.7337
14	0.2790 (25.)	0.4835 (27.)	0.2790	0.4835	0.5282	0.6954	0.4363	0.6518
15	0.4946 (10.)	0.8048 (10.)	0.4946	0.8048	0.7033	0.8971	0.6618	0.8918
16	**1** (1.)	**1** (3.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
17	0.5224 (8.)	0.9701 (6.)	0.5224	0.9701	0.7228	0.9849	0.6863	0.9848
18	0.7145 (4.)	0.8812 (8.)	0.7145	0.8812	0.8453	0.9387	0.8335	0.9368
19	0.5100 (9.)	0.6622 (14.)	0.5100	0.6622	0.7141	0.8138	0.6755	0.7968
20	0.3995 (16.)	0.7471 (11.)	0.3995	0.7471	0.6321	0.8644	0.5709	0.8553
21	0.4108 (15.)	0.6623 (13.)	0.4108	0.6623	0.6409	0.8138	0.5823	0.7968
22	0.4626 (13.)	0.6115 (17.)	0.4626	0.6115	0.6801	0.7820	0.6326	0.7589
23	0.3222 (18.)	0.4035 (30.)	0.3222	0.4035	0.5676	0.6352	0.4873	0.5750
24	0.5674 (6.)	**1** (3.)	0.5674	**1**	0.7533	**1**	0.7240	**1**
25	0.5774 (5.)	0.9125 (7.)	0.5774	0.9125	0.7599	0.9552	0.7321	0.9542
26	0.4443 (14.)	0.6265 (15.)	0.4443	0.6265	0.6666	0.7915	0.6153	0.7704
27	0.4880 (12.)	0.8118 (9.)	0.4880	0.8118	0.6985	0.9010	0.6559	0.8961
28	0.5258 (7.)	0.7168 (12.)	0.5258	0.7168	0.7251	0.8466	0.6892	0.8350
29	0.7919 (3.)	**1** (3.)	0.7919	**1**	0.8899	**1**	0.8839	**1**
30	0.9634 (2.)	**1** (3.)	0.9634	**1**	0.9815	**1**	0.9813	**1**

Tabuľka 26: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS

Z porovnania s klasickými modelmi vidíme, že *Relačné modely* vyhodnocujú menší

počet bánk ako efektívnych. Pri konštantných výnosoch z rozsahu považujú za efektívnu 1 banku, kým klasické modely určili 5 efektívnych bánk. *Relačné modely* s variabilnými výnosmi identifikovali 5 (resp. 4 zo vstupného a výstupného modelu) efektívnych bánk, pričom z klasických modelov dostávame až 10 efektívnych bánk. Rovnako platí, že efektivity neefektívnych bánk nadobúdajú vo všetkých prípadoch väčšie hodnoty pri klasických black-boxových modeloch.

	VRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Banka č.	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)
2	0.8128 (7.)	0.8585 (14.)	0.9329 (6.)	0.9329 (13.)	0.9329 (7.)	0.9351 (15.)	0.9281 (7.)	0.9327 (15.)
3	0.7110 (10.)	0.8086 (17.)	0.8248 (8.)	0.8519 (18.)	0.8852 (8.)	0.9132 (18.)	0.8765 (8.)	0.9089 (18.)
4	0.6650 (16.)	0.8061 (18.)	0.8109 (11.)	0.9052 (15.)	0.8720 (12.)	0.9317 (17.)	0.8610 (12.)	0.9283 (17.)
5	0.8991 (5.)	**1** (5,5.)	0.9311 (7.)	**1** (5,5.)	0.9584 (6.)	**1** (5,5.)	0.9573 (6.)	**1** (5,5.)
6	0.4585 (26.)	0.6919 (21.)	0.8108 (12.)	0.8409 (19.)	0.8108 (20.)	0.8807 (19.)	0.7667 (20.)	0.8695 (19.)
7	0.4145 (27.)	0.6050 (26.)	0.6481 (20.)	0.7310 (24.)	0.7431 (21.)	0.8276 (24.)	0.6942 (22.)	0.8089 (24.)
8	0.6694 (15.)	0.8569 (15.)	0.8246 (9.)	0.8981 (17.)	0.8804 (11.)	0.9389 (14.)	0.8706 (11.)	0.9367 (14.)
9	0.5741 (20.)	0.9178 (11.)	0.8122 (10.)	0.9495 (11.)	0.8619 (13.)	0.9683 (11.)	0.8476 (13.)	0.9677 (11.)
10	0.4913 (25.)	0.5691 (28.)	0.4108 (30.)	0.5098 (30.)	0.5910 (30.)	0.7260 (29.)	0.5325 (30.)	0.6956 (29.)
11	0.3650 (30.)	0.5756 (27.)	0.5974 (25.)	0.7084 (26.)	0.6905 (27.)	0.8071 (27.)	0.6194 (27.)	0.7828 (27.)
12	0.5308 (23.)	0.8214 (16.)	0.7613 (18.)	0.8999 (16.)	0.8202 (18.)	0.9343 (16.)	0.7943 (19.)	0.9315 (16.)
13	0.3754 (29.)	0.6329 (23.)	0.6334 (21.)	0.7561 (22.)	0.7168 (25.)	0.8359 (22.)	0.6636 (26.)	0.8180 (22.)
14	0.3761 (28.)	0.5075 (30.)	0.5711 (27.)	0.6655 (28.)	0.6646 (28.)	0.7649 (28.)	0.5835 (28.)	0.7288 (28.)
15	0.6791 (13.)	**1** (5,5.)	0.7806 (15.)	**1** (5,5.)	0.8548 (14.)	**1** (5,5.)	0.8422 (14.)	**1** (5,5.)
16	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)
17	0.6921 (12.)	**1** (5,5.)	0.7795 (16.)	**1** (5,5.)	0.8543 (15.)	**1** (5,5.)	0.8402 (15.)	**1** (5,5.)
18	0.8309 (6.)	**1** (5,5.)	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)
19	0.6011 (17.)	0.8701 (13.)	0.7925 (14.)	0.9378 (12.)	0.8528 (16.)	0.9574 (12.)	0.8370 (16.)	0.9561 (12.)
20	0.5911 (18.)	0.7520 (20.)	0.6083 (23.)	0.7847 (20.)	0.7375 (22.)	0.8694 (20.)	0.7087 (21.)	0.8597 (20.)
21	0.5512 (22.)	0.6642 (22.)	0.5998 (24.)	0.7395 (23.)	0.7240 (23.)	0.8315 (23.)	0.6787 (25.)	0.8152 (23.)
22	0.5572 (21.)	0.6173 (25.)	0.5594 (28.)	0.6840 (27.)	0.7144 (26.)	0.8095 (26.)	0.6807 (24.)	0.7890 (26.)
23	0.5028 (24.)	0.5423 (29.)	0.4190 (29.)	0.5183 (29.)	0.5997 (29.)	0.6440 (30.)	0.5435 (29.)	0.5862 (30.)
24	0.8043 (8.)	**1** (5,5.)	0.7686 (17.)	**1** (5,5.)	0.8822 (9.)	**1** (5,5.)	0.8764 (9.)	**1** (5,5.)
25	0.7743 (9.)	**1** (5,5.)	0.8043 (13.)	**1** (5,5.)	0.8809 (10.)	**1** (5,5.)	0.8729 (10.)	**1** (5,5.)
26	0.5802 (19.)	0.6293 (24.)	0.5870 (26.)	0.7235 (25.)	0.7236 (24.)	0.8233 (25.)	0.6890 (23.)	0.8052 (25.)
27	0.6738 (14.)	0.8799 (12.)	0.7355 (19.)	0.9269 (14.)	0.8399 (17.)	0.9522 (13.)	0.8253 (17.)	0.9507 (13.)
28	0.7094 (11.)	0.7538 (19.)	0.6271 (22.)	0.7779 (21.)	0.8141 (19.)	0.8620 (21.)	0.8006 (18.)	0.8504 (21.)
29	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)
30	**1** (2,5.)	**1** (5,5.)	0.9653 (5.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)	**1** (3.)	**1** (5,5.)

Tabuľka 27: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých amerických komerčných bánk získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS

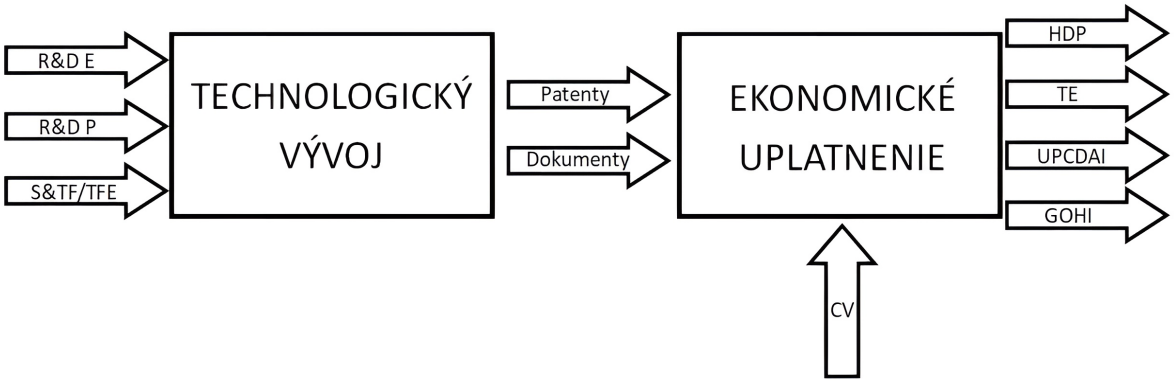
Jednotlivé ranky *Relačných* a klasických modelov sa od seba veľmi nelíšia, najväčší rozdiel (11 a 12 miest) je pri CRS medzi rankami bánk č. 12 a 23 a pri VRS medzi rankami banky č. 15, prípadne banky č. 17.

Spomínali sme, že *Relačný model* vyhodnotí útvar ako efektívny len vtedy, ak sú efek-

tívne všetky jeho divízie. Z tohto dôvodu na základe porovnania s klasickými modelmi môžeme povedať, že *Relačný model* presnejšie vyhodnocuje efektivity bánk, a zároveň dáva podobné výsledky pri neefektívnych bankách ako klasické modely.

4.2 Všeobecná dvojstupňová sieťová DEA bez spätnej väzby

V práci [33], Li a spol. analyzovali proces regionálneho výskumu a vývoja (R&D) v 30 čínskych regiónoch, ktorý pozostáva z 2 sub-procesov: vývoja technológie a ekonomického uplatnenia [11]. Z uvedenej práce sme čerpali výlučne len empirické dáta, ktoré sme následne analyzovali pomocou nami navrhovaných modelov. Grafickú reprezentáciu R&D procesu uvádzame na nasledovnom obrázku:



Obr. 16: Schéma procesu regionálneho výskumu a vývoja
(Zdroj: *vlastné spracovanie podľa [33]*)

V prvej fáze, v procese technologického vývoja, porovnávame 3 vstupy, konkrétne náklady na výskum a vývoj (značíme R&D E), zamestnanci na výskum a vývoj (značíme R&D P) a podiel regionálnych fondov vedy a techniky na celkových regionálnych finančných nákladoch (značíme S&TF/TFE), s 2 výstupmi, ktoré predstavujú počet patentov a dokumentov. Tieto považujeme v našom R&D procese za medziprodukty, ktoré spolu so zmluvnou cenou (značíme CV) tvoria vstupy do druhej fázy, do procesu ekonomického uplatnenia. Táto druhá fáza vlastne transformuje technologický vývoj na ekonomický prínos produkciou konečných výstupov, pod ktorými rozumieme tieto komplexné ekonomické indexy: HDP, celkový export (TE), disponibilný ročný príjem miest na obyvateľa

[11] Na analýzu dát používali dvojstupňový centralizovaný a nekooperatívny model s CRS.

(UPCDAI), ktorý odráža životnú úroveň ľudí a hrubý výstup high-tech priemyslu (GOHI) vystihujúci stav tohto priemyslu.

Oproti našej schéme na **Obr. 14** z predchádzajúcej kapitoly, nemáme vonkajšie výstupy $\mathbf{Y^1}$ prvej fázy, preto spomínané modely použijeme v upravenom tvare, ktorý vyhovuje našim dátam. Teda ide o verziu všeobecného dvojstupňového sieťového modelu bez spätnej väzby, kde $\mathbf{Y^1} = 0$. Zároveň možno pozorovať, že $\mathbf{X^1}$ pozostáva z 3 typov vonkajších vstupov a $\mathbf{X^2}$ iba z 1 typu, preto je nevyhnutné upraviť ich štruktúru tak, aby mali zhodné rozmery. Teda $\mathbf{X^2}$ doplníme nulami tak, aby rozmerovo zodpovedal $\mathbf{X^1}$.

Tabuľka 38 z **Prílohy B** poskytuje údaje o vyššie uvedenom systéme, ktoré sú odvodené z "China statistical yearbook, 2009" a "China science and technology statistical yearbook, 2009".

Rovnakým spôsobom ako v prípade amerických komerčných bánk sme aj tieto dáta pred použitím normalizovali, pričom tieto hodnoty uvádzame v **Tabuľke 39** v **Prílohe B**.

4.2.1 Kumulatívny nezávislý model R&D procesu

Aby model $(KNZ - g)$ (3.4) z predchádzajúcej kapitoly vyhovoval našim dátam, odstránime z neho ohraničenie (3.4.3) a aplikujeme ho na naše normalizované dáta. Výsledné hodnoty efektivít oboch fáz, ich aritmetické priemery $\boldsymbol{\theta}^*$ a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pre jednotlivé regióny uvádzame v **Tabuľke 28** (s CRS) a v **Tabuľkách 29, 30** (s VRS). V zátvorkách zapisujeme ranky (poradie) jednotlivých regiónov podľa príslušných efektivít. Pri modeloch s CRS sú v prípade efektivít jednotlivých fáz a klasických modelov znázornené len pri vstupných modeloch, keďže pri ostatných typoch modelov sú identické.

Vo všetkých 8 tvaroch *Kumulatívneho nezávislého modelu* sme dostali 4 regióny, ktoré sú efektívne v oboch fázach, presnejšie regióny č. 8, 10, 27 a 30.

Modely s konštantnými výnosmi z rozsahu vyhodnotili, okrem týchto 4 regiónov, ďalších 8 regiónov efektívnych iba v prvej fáze (regióny č. 1, 2, 3, 7, 15, 23, 24, 25) a ďalších 7 regiónov efektívnych iba v druhej fáze (regióny č. 6, 9, 16, 17, 20, 28, 29).

Pri variabilných výnosoch z rozsahu dostávame celkovo 8 regiónov efektívnych v oboch fázach, k spomenutým 4 pribudli regióny č. 3, 9, 16 a 20. V prvej fáze, oproti CRS, modely

navyše vyhodnocujú región č. 12 ako efektívny. Efektívnych regiónov iba v druhej fáze je 8, konkrétne regióny č. 4, 6, 11, 17, 21, 26, 28 a 29.

	CRS															
	I				O				HDF				DDF			
Región č.	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{CCR}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{CCR}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{HDF}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{DDF}_{klasický}$
1	**1** (6,5.)	0.1598 (30.)	0.5799 (27.)	0.3574 (30.)	**1**	0.1598	0.5799	0.3574	**1**	0.3998	0.6999 (30.)	0.5979	**1**	0.2756	0.6378 (30.)	0.5266
2	**1** (6,5.)	0.2483 (29.)	0.6242 (23.)	0.7813 (20.)	**1**	0.2483	0.6242	0.7813	**1**	0.4983	0.7492 (26.)	0.8839	**1**	0.3979	0.6989 (26.)	0.8772
3	**1** (6,5.)	0.5728 (17.)	0.7864 (11.)	0.8229 (19.)	**1**	0.5728	0.7864	0.8229	**1**	0.7569	0.8784 (12.)	0.9071	**1**	0.7284	0.8642 (12.)	0.9028
4	0.7427 (20.)	0.5707 (18.)	0.6567 (20.)	0.6443 (27.)	0.7427	0.5707	0.6567	0.6443	0.8618	0.7554	0.8086 (18.)	0.8027	0.8524	0.7267	0.7895 (18.)	0.7837
5	0.6695 (24.)	0.3887 (22.)	0.5291 (30.)	0.5290 (29.)	0.6695	0.3887	0.5291	0.5290	0.8182	0.6234	0.7208 (29.)	0.7273	0.8020	0.5598	0.6809 (29.)	0.6919
6	0.5667 (26.)	**1** (6.)	0.7834 (12.)	**1** (8.)	0.5667	**1**	0.7834	**1**	0.7528	**1**	0.8764 (13.)	**1**	0.7235	**1**	0.8617 (13.)	**1**
7	**1** (6,5.)	0.3128 (26.)	0.6564 (21.)	0.9001 (18.)	**1**	0.3128	0.6564	0.9001	**1**	0.5593	0.7797 (22.)	0.9487	**1**	0.4766	0.7383 (22.)	0.9474
8	**1** (6,5.)	**1** (6.)	**1** (2,5.)	**1** (8.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**
9	0.9404 (13.)	**1** (6.)	0.9702 (5.)	**1** (8.)	0.9404	**1**	0.9702	**1**	0.9697	**1**	0.9849 (5.)	**1**	0.9693	**1**	0.9846 (5.)	**1**
10	**1** (6,5.)	**1** (6.)	**1** (2,5.)	**1** (8.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**
11	0.8889 (18.)	0.8339 (14.)	0.8614 (8.)	**1** (8.)	0.8889	0.8339	0.8614	**1**	0.9428	0.9132	0.9280 (8.)	**1**	0.9412	0.9094	0.9253 (8.)	**1**
12	0.9330 (14.)	0.2699 (27.)	0.6015 (26.)	0.7382 (23.)	0.9330	0.2699	0.6015	0.7382	0.9659	0.5195	0.7427 (27.)	0.8592	0.9654	0.4251	0.6952 (27.)	0.8494
13	0.8505 (19.)	0.7347 (15.)	0.7926 (10.)	**1** (8.)	0.8505	0.7347	0.7926	**1**	0.9222	0.8572	0.8897 (10.)	**1**	0.9192	0.8471	0.8831 (9.)	**1**
14	0.9061 (17.)	0.3363 (25.)	0.6212 (24.)	0.7157 (25.)	0.9061	0.3363	0.6212	0.7157	0.9519	0.5799	0.7659 (23.)	0.8460	0.9507	0.5033	0.7270 (24.)	0.8343
15	**1** (6,5.)	0.3770 (23.)	0.6885 (18.)	0.7455 (21.)	**1**	0.3770	0.6885	0.7455	**1**	0.6140	0.8070 (19.)	0.8634	**1**	0.5475	0.7738 (19.)	0.8542
16	0.9222 (15.)	**1** (6.)	0.9611 (6.)	**1** (8.)	0.9222	**1**	0.9611	**1**	0.9603	**1**	0.9802 (6.)	**1**	0.9595	**1**	0.9798 (6.)	**1**
17	0.5650 (27.)	**1** (6.)	0.7825 (13.)	**1** (8.)	0.5650	**1**	0.7825	**1**	0.7517	**1**	0.8758 (14.)	**1**	0.7220	**1**	0.8610 (14.)	**1**
18	0.7157 (21.)	0.5168 (20.)	0.6162 (25.)	0.6936 (26.)	0.7157	0.5168	0.6162	0.6936	0.8460	0.7189	0.7824 (21.)	0.8328	0.8343	0.6814	0.7578 (21.)	0.8190
19	0.6969 (23.)	0.3742 (24.)	0.5356 (29.)	0.5843 (28.)	0.6969	0.3742	0.5356	0.5843	0.8348	0.6117	0.7233 (28.)	0.7644	0.8214	0.5446	0.6830 (28.)	0.7376
20	0.4576 (28.)	**1** (6.)	0.7288 (16.)	**1** (8.)	0.4576	**1**	0.7288	**1**	0.6765	**1**	0.8382 (16.)	**1**	0.6279	**1**	0.8140 (16.)	**1**
21	0.7099 (22.)	0.8491 (13.)	0.7795 (14.)	**1** (8.)	0.7099	0.8491	0.7795	**1**	0.8426	0.9214	0.8820 (11.)	**1**	0.8304	0.9184	0.8744 (11.)	**1**
22	0.5863 (25.)	0.5693 (19.)	0.5778 (28.)	0.7423 (22.)	0.5863	0.5693	0.5778	0.7423	0.7657	0.7545	0.7601 (24.)	0.8615	0.7392	0.7255	0.7324 (23.)	0.8521
23	**1** (6,5.)	0.2511 (28.)	0.6256 (22.)	0.7289 (24.)	**1**	0.2511	0.6256	0.7289	**1**	0.5011	0.7506 (25.)	0.8537	**1**	0.4015	0.7007 (25.)	0.8432
24	**1** (6,5.)	0.4816 (21.)	0.7408 (15.)	**1** (8.)	**1**	0.4816	0.7408	**1**	**1**	0.6940	0.8470 (15.)	**1**	**1**	0.6501	0.8251 (15.)	**1**
25	**1** (6,5.)	0.6140 (16.)	0.8070 (9.)	0.9951 (17.)	**1**	0.6140	0.8070	0.9951	**1**	0.7836	0.8918 (9.)	0.9975	**1**	0.7608	0.8804 (10.)	0.9975
26	0.9111 (16.)	0.9542 (12.)	0.9326 (7.)	0.9968 (16.)	0.9111	0.9542	0.9326	0.9968	0.9545	0.9768	0.9657 (7.)	0.9984	0.9535	0.9766	0.9650 (7.)	0.9984
27	**1** (6,5.)	**1** (6.)	**1** (2,5.)	**1** (8.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**
28	0.3596 (30.)	**1** (6.)	0.6798 (19.)	**1** (8.)	0.3596	**1**	0.6798	**1**	0.5996	**1**	0.7998 (20.)	**1**	0.5289	**1**	0.7645 (20.)	**1**
29	0.4294 (29.)	**1** (6.)	0.7147 (17.)	**1** (8.)	0.4294	**1**	0.7147	**1**	0.6553	**1**	0.8277 (17.)	**1**	0.6008	**1**	0.8004 (17.)	**1**
30	**1** (6,5.)	**1** (6.)	**1** (2,5.)	**1** (8.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**	**1**	**1**	**1** (2,5.)	**1**

Tabuľka 28: Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri CRS pre jednotlivé regióny Číny získané pomocou *Kumulatívneho nezávislého modelu*

Pri pohľade na aritmetické priemery efektivít jednotlivých fáz a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov v **Tabuľke 28** je zjavné, že sú totožné len v prípade 4 efektívnych regiónov č. 8, 10, 27 a 30. Pri ostatných regiónoch sú rozdielne, pričom okrem 2-3 prípadov sú väčšie hodnoty klasických black-boxových modelov. Tieto navyše vyhodnocujú ďalších 11 regiónov ako efektívnych, a to regióny č. 6, 9, 11, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 28 a 29. Môžeme teda povedať, že z klasických modelov dostávame nadhodnotené hodnoty efektivít. Dôkazom je aj to, že regióny č. 11, 13 a 21 nie sú efektívne ani v jednej fáze, ale klasické modely ich vyhodnotili ako efektívne.

Ranky z aritmetických priemerov efektivít jednotlivých fáz a klasických black-boxových modelov sa veľmi nelíšia, najväčší rozdiel je u regiónov č. 25 a 26, a to o 9 až 12 miest, čo je spôsobené celkovo nižšími hodnotami priemerných efektivít zo sieťového *Kumulatívneho*

nezávislého modelu.

	VRS							
	I				O			
Región č.	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*BCC}_{klasický}$
1	**1** (8,5.)	0.5268 (21.)	0.7634 (20.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.9272 (18.)	0.9636 (9.)	**1** (11.)
2	**1** (8,5.)	0.2799 (28.)	0.6400 (25.)	0.7813 (24.)	**1** (8,5.)	0.8037 (20.)	0.9019 (14.)	0.9370 (22.)
3	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
4	0.7553 (26.)	**1** (8,5.)	0.8776 (15.)	**1** (11.)	0.7430 (22.)	**1** (8,5.)	0.8715 (17.)	**1** (11.)
5	0.6770 (29.)	0.3946 (26.)	0.5358 (30.)	0.5648 (30.)	0.6967 (27.)	0.7588 (23.)	0.7278 (28.)	0.7667 (30.)
6	0.6313 (30.)	**1** (8,5.)	0.8156 (17.)	**1** (11.)	0.5768 (29.)	**1** (8,5.)	0.7884 (25.)	**1** (11.)
7	**1** (8,5.)	0.3228 (27.)	0.6614 (23.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.7396 (26.)	0.8698 (19.)	**1** (11.)
8	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
9	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
10	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
11	0.8896 (22.)	**1** (8,5.)	0.9448 (13.)	**1** (11.)	0.8943 (19.)	**1** (8,5.)	0.9472 (11.)	**1** (11.)
12	**1** (8,5.)	0.2707 (29.)	0.6353 (27.)	0.8273 (22.)	**1** (8,5.)	0.6329 (30.)	0.8165 (24.)	0.7763 (29.)
13	0.8636 (23.)	0.9330 (17.)	0.8983 (14.)	**1** (11.)	0.8605 (20.)	0.9732 (17.)	0.9168 (13.)	**1** (11.)
14	0.9076 (20.)	0.3969 (25.)	0.6523 (24.)	0.7203 (27.)	0.9291 (17.)	0.7387 (27.)	0.8339 (23.)	0.8704 (24.)
15	**1** (8,5.)	0.4184 (24.)	0.7092 (21.)	0.7495 (25.)	**1** (8,5.)	0.7526 (24.)	0.8763 (16.)	0.8893 (23.)
16	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
17	0.9499 (18.)	**1** (8,5.)	0.9750 (10.)	**1** (11.)	0.7247 (26.)	**1** (8,5.)	0.8623 (20.)	**1** (11.)
18	0.7611 (25.)	0.5175 (22.)	0.6393 (26.)	0.7193 (28.)	0.7270 (25.)	0.7452 (25.)	0.7361 (27.)	0.8195 (28.)
19	0.7002 (28.)	0.4621 (23.)	0.5812 (29.)	0.5919 (29.)	0.7343 (24.)	0.7882 (22.)	0.7613 (26.)	0.8266 (27.)
20	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
21	0.7123 (27.)	**1** (8,5.)	0.8561 (16.)	**1** (11.)	0.7689 (21.)	**1** (8,5.)	0.8844 (15.)	**1** (11.)
22	0.7955 (24.)	0.5697 (19.)	0.6826 (22.)	0.7815 (23.)	0.5866 (28.)	0.7903 (21.)	0.6885 (30.)	0.8471 (26.)
23	**1** (8,5.)	0.2536 (30.)	0.6268 (28.)	0.7414 (26.)	**1** (8,5.)	0.6890 (29.)	0.8445 (22.)	0.8575 (25.)
24	**1** (8,5.)	0.5428 (20.)	0.7714 (19.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.7230 (28.)	0.8615 (21.)	**1** (11.)
25	**1** (8,5.)	0.6141 (18.)	0.8070 (18.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.8627 (19.)	0.9314 (12.)	**1** (11.)
26	0.9242 (19.)	**1** (8,5.)	0.9621 (11.)	**1** (11.)	0.9217 (18.)	**1** (8,5.)	0.9609 (10.)	**1** (11.)
27	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
28	0.8962 (21.)	**1** (8,5.)	0.9481 (12.)	**1** (11.)	0.4232 (30.)	**1** (8,5.)	0.7116 (29.)	**1** (11.)
29	0.9662 (17.)	**1** (8,5.)	0.9831 (9.)	**1** (11.)	0.7413 (23.)	**1** (8,5.)	0.8706 (18.)	**1** (11.)
30	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)

Tabuľka 29: Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé regióny Číny získané pomocou vstupného a výstupného *Kumulatívneho nezávislého modelu*

Modely s VRS, ktorých výsledky sú zobrazené v **Tabuľkách 29** a **30**, vykazujú identické hodnoty priemerných efektivít fáz a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov opäť len pre 8 efektívnych regiónov z *Kumulatívneho nezávislého modelu*. Pre zvyšné regióny nadobúdajú odlišné hodnoty, pričom pri vstupnom, HDF a DDF tvare sú vždy väčšie optimálne hodnoty black-boxových modelov. V prípade výstupného tvaru dosahuje región č. 12 o 4 stotiny vyššiu hodnotu $\boldsymbol{\theta^*}$ než $\theta^{*BCC}_{klasický}$. Pre všetky ostatné regióny platí to isté tvrdenie ako pri zvyšných 3 tvaroch *Kumulatívneho nezávislého modelu*.

Klasické modely s VRS, okrem spomínaných 8 efektívnych regiónov z *Kumulatívneho nezávislého modelu*, považujú ďalších 13 regiónov za efektívne. Preto vďaka sieťovému *Kumulatívnemu nezávislému modelu* môžeme podrobnejšie nahliadnuť na celý proces a presnejšie vyhodnotiť efektivitu. Napíklad v prípade regiónu č. 13, ktorý nám nevyšiel

ako efektívny ani v jednej fáze, zatiaľ čo podľa klasických black-boxových modelov je efektívny. Priemerné efektivity fáz $\boldsymbol{\theta^*}$ pre tento región sa pri všetkých 4 tvaroch modelu s VRS pohybujú v intervale $0.89 - 0.96$, teda vykazuje veľmi dobrú výkonnosť, ale stále ho podľa sieťového *Kumulatívneho nezávislého modelu* nemôžeme považovať za efektívny.

Rozdiely v rankoch sú pri spoločných neefektívnych regiónoch minimálne. Najvýraznejšie rozdiely pozorujeme pri regiónoch, ktoré nie sú efektívne podľa sieťového modelu, no klasické modely ich vyhodnocujú ako efektívne. Ide predovšetkým o regióny č. 7 a 24.

	VRS							
	HDF				**DDF**			
Región č.	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^{1*}	θ^{2*}	$\boldsymbol{\theta^*} = \frac{\theta^{1*}+\theta^{2*}}{2}$	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	**1** (8,5.)	0.9272 (18.)	0.9636 (13.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.9215 (18.)	0.9607 (13.)	**1** (11.)
2	**1** (8,5.)	0.8359 (21.)	0.9179 (19.)	0.9494 (22.)	**1** (8,5.)	0.8112 (21.)	0.9056 (19.)	0.9473 (22.)
3	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
4	0.8642 (24.)	**1** (8,5.)	0.9321 (17.)	**1** (11.)	0.8555 (24.)	**1** (8,5.)	0.9277 (17.)	**1** (11.)
5	0.8222 (29.)	0.7978 (23.)	0.8100 (30.)	0.8158 (30.)	0.8062 (29.)	0.7590 (23.)	0.7826 (30.)	0.7867 (30.)
6	0.7597 (30.)	**1** (8,5.)	0.8799 (22.)	**1** (11.)	0.7375 (30.)	**1** (8,5.)	0.8688 (21.)	**1** (11.)
7	**1** (8,5.)	0.7571 (28.)	0.8786 (23.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.6960 (28.)	0.8480 (23.)	**1** (11.)
8	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
9	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
10	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
11	0.9445 (21.)	**1** (8,5.)	0.9722 (12.)	**1** (11.)	0.9429 (21.)	**1** (8,5.)	0.9714 (12.)	**1** (11.)
12	**1** (8,5.)	0.6726 (30.)	0.8363 (26.)	0.8703 (27.)	**1** (8,5.)	0.5695 (30.)	0.7848 (29.)	0.8660 (26.)
13	0.9229 (22.)	0.9807 (17.)	0.9518 (14.)	**1** (11.)	0.9201 (22.)	0.9805 (17.)	0.9503 (14.)	**1** (11.)
14	0.9545 (19.)	0.7765 (27.)	0.8655 (24.)	0.9005 (24.)	0.9533 (19.)	0.7320 (26.)	0.8426 (24.)	0.8933 (24.)
15	**1** (8,5.)	0.7770 (26.)	0.8885 (21.)	0.9136 (23.)	**1** (8,5.)	0.7318 (27.)	0.8659 (22.)	0.9075 (23.)
16	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
17	0.9503 (20.)	**1** (8,5.)	0.9752 (11.)	**1** (11.)	0.9500 (20.)	**1** (8,5.)	0.9750 (11.)	**1** (11.)
18	0.8461 (26.)	0.7904 (24.)	0.8183 (29.)	0.8561 (29.)	0.8355 (26.)	0.7543 (24.)	0.7949 (28.)	0.8410 (29.)
19	0.8425 (27.)	0.8121 (22.)	0.8273 (28.)	0.8695 (28.)	0.8292 (28.)	0.7759 (22.)	0.8026 (27.)	0.8561 (28.)
20	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
21	0.8597 (25.)	**1** (8,5.)	0.9298 (18.)	**1** (11.)	0.8488 (25.)	**1** (8,5.)	0.9244 (18.)	**1** (11.)
22	0.8359 (28.)	0.8363 (20.)	0.8361 (27.)	0.8768 (26.)	0.8304 (27.)	0.8139 (20.)	0.8221 (25.)	0.8637 (27.)
23	**1** (8,5.)	0.7130 (29.)	0.8565 (25.)	0.8878 (25.)	**1** (8,5.)	0.6142 (29.)	0.8071 (26.)	0.8785 (25.)
24	**1** (8,5.)	0.7804 (25.)	0.8902 (20.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.7501 (25.)	0.8750 (20.)	**1** (11.)
25	**1** (8,5.)	0.8838 (19.)	0.9419 (16.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	0.8724 (19.)	0.9362 (16.)	**1** (11.)
26	0.9607 (18.)	**1** (8,5.)	0.9804 (10.)	**1** (11.)	0.9600 (18.)	**1** (8,5.)	0.9800 (10.)	**1** (11.)
27	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)
28	0.8962 (23.)	**1** (8,5.)	0.9481 (15.)	**1** (11.)	0.8962 (23.)	**1** (8,5.)	0.9481 (15.)	**1** (11.)
29	0.9677 (17.)	**1** (8,5.)	0.9838 (9.)	**1** (11.)	0.9676 (17.)	**1** (8,5.)	0.9838 (9.)	**1** (11.)
30	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (8,5.)	**1** (4,5.)	**1** (11.)

Tabuľka 30: Optimálne hodnoty efektivít oboch fáz, ich spriemerované hodnoty a optimálne hodnoty klasických black-boxových modelov pri VRS pre jednotlivé regióny Číny získané pomocou HDF a DDF *Kumulatívneho nezávislého modelu*

4.2.2 Prepojený model R&D procesu

Model (3.5) z predchádzajúcej kapitoly upravíme tak, aby vyhovoval našej schéme na **Obr. 16**, a teda odstránime ohraničenie (3.5.3). Po aplikácií na normalizované dáta dostávame hodnoty efektivít zapísané v **Tabuľkách 31** a **32**. V zátvorkách opäť uvádzame ranky jednotlivých regiónov z daného modelu. Pre klasické black-boxové modely s CRS sú

zobrazené len pri vstupnom modeli, pretože pri zvyšných klasických modeloch je poradie regiónov identické.

Všetkých 8 tvarov modelu klasifikuje regióny č. 6, 8, 9, 10, 16, 17, 20, 27, 28, 29 a 30 ako efektívne, pričom pri VRS sú efektívne aj regióny č. 3, 4, 11, 21 a 16.

Pri konštantných výnosoch z rozsahu, okrem výstupných tvarov modelu, vyhodnocujú ostatné tvary za efektívne 8 regiónov, a to regióny č. 1, 2, 3, 7, 15, 23, 24, 25.

Pri variabilných výnosoch z rozsahu určujú všetky tvary okrem výstupného tvaru *Prepojeného modelu* tiež 8 efektívnych regiónov (regióny č. 1, 2, 7, 12, 15, 23, 24 a 25).

	CRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Región č.	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	**1** (10.)	0.3574 (30.)	0.1598 (30.)	0.3574	**1** (10.)	0.5979	**1** (10.)	0.5266
2	**1** (10.)	0.7813 (20.)	0.2483 (29.)	0.7813	**1** (10.)	0.8839	**1** (10.)	0.8772
3	**1** (10.)	0.8229 (19.)	0.5728 (17.)	0.8229	**1** (10.)	0.9071	**1** (10.)	0.9028
4	0.7427 (26.)	0.6443 (27.)	0.5707 (18.)	0.6443	0.7427 (26.)	0.8027	0.7427 (26.)	0.7837
5	0.6695 (29.)	0.5290 (29.)	0.3887 (22.)	0.5290	0.6695 (30.)	0.7273	0.6695 (29.)	0.6919
6	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
7	**1** (10.)	0.9001 (18.)	0.3128 (26.)	0.9001	**1** (10.)	0.9487	**1** (10.)	0.9474
8	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
9	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
10	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
11	0.8889 (23.)	**1** (8.)	0.8339 (14.)	**1**	0.8889 (24.)	**1**	0.8889 (24.)	**1**
12	0.9330 (20.)	0.7382 (23.)	0.2699 (27.)	0.7382	0.9330 (21.)	0.8592	0.9330 (21.)	0.8494
13	0.8505 (24.)	**1** (8.)	0.7347 (15.)	**1**	0.8505 (25.)	**1**	0.8505 (25.)	**1**
14	0.9061 (22.)	0.7157 (25.)	0.3363 (25.)	0.7157	0.9061 (22.)	0.8460	0.9061 (22.)	0.8343
15	**1** (10.)	0.7455 (21.)	0.3770 (23.)	0.7455	**1** (10.)	0.8634	**1** (10.)	0.8542
16	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
17	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
18	0.7157 (27.)	0.6936 (26.)	0.5168 (20.)	0.6936	0.7157 (27.)	0.8328	0.7157 (27.)	0.8190
19	0.6969 (28.)	0.5843 (28.)	0.3742 (24.)	0.5843	0.6969 (29.)	0.7644	0.6969 (28.)	0.7376
20	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
21	0.7614 (25.)	**1** (8.)	0.8491 (13.)	**1**	0.9040 (23.)	**1**	0.8981 (23.)	**1**
22	0.5863 (30.)	0.7423 (22.)	0.5693 (19.)	0.7423	0.7027 (28.)	0.8615	0.6435 (30.)	0.8521
23	**1** (10.)	0.7289 (24.)	0.2511 (28.)	0.7289	**1** (10.)	0.8537	**1** (10.)	0.8432
24	**1** (10.)	**1** (8.)	0.4816 (21.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
25	**1** (10.)	0.9951 (17.)	0.6140 (16.)	0.9951	**1** (10.)	0.9975	**1** (10.)	0.9975
26	0.9322 (21.)	0.9968 (16.)	0.9542 (12.)	0.9968	0.9724 (20.)	0.9984	0.9719 (20.)	0.9984
27	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
28	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
29	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**
30	**1** (10.)	**1** (8.)	**1** (6.)	**1**	**1** (10.)	**1**	**1** (10.)	**1**

Tabuľka 31: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS

Pri porovnaní výsledkov *Prepojeného modelu* s klasickými black-boxovými modelmi nie je viditeľná jednotná interpretácia.

Vstupné, HDF a DDF tvary *Prepojeného modelu* identifikujú pri oboch výnosoch z rozsahu väčší počet efektívnych regiónov než klasické black-boxové modely.

Pri vstupných modeloch je väčšina optimálnych hodnôt *Prepojeného modelu* θ^* väčšia

ako optimálne hodnoty ich klasických ekvivalentov. Výstupné *Prepojené modely* ako jediné určujú menej efektívnych regiónov ako klasické modely, pričom optimálne hodnoty klasických výstupných black-boxových modelov $\theta^{*CCR}_{klasický}$ a $\theta^{*BCC}_{klasický}$ sú vo všetkých prípadoch väčšie ako θ^*. Výnimkou sú regióny, ktoré sú efektívne aj z výstupných *Prepojených modelov* aj z klasických výstupných modelov. Pri HDF a DDF tvaroch *Prepojeného modelu* je v polovici prípadov väčšia hodnota θ^* a v polovici prípadov zase optimálna hodnota black-boxových modelov $\theta^{*HDF}_{klasický}$, resp. $\theta^{*DDF}_{klasický}$.

	VRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Región č.	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	**1** (12,5.)	**1** (11.)	0.9272 (18.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
2	**1** (12,5.)	0.7813 (24.)	0.8037 (20.)	0.9370 (22.)	**1** (12,5.)	0.9494 (22.)	**1** (12,5.)	0.9473 (22.)
3	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
4	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
5	0.6770 (30.)	0.5648 (30.)	0.7588 (23.)	0.7667 (30.)	0.7588 (30.)	0.8158 (30.)	0.6822 (30.)	0.7867 (30.)
6	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
7	**1** (12,5.)	**1** (11.)	0.7396 (26.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
8	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
9	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
10	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
11	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
12	**1** (12,5.)	0.8273 (22.)	0.6329 (30.)	0.7763 (29.)	**1** (12,5.)	0.8703 (27.)	**1** (12,5.)	0.8660 (26.)
13	0.9330 (25.)	**1** (11.)	0.9732 (17.)	**1** (11.)	0.9807 (25.)	**1** (11.)	0.9805 (25.)	**1** (11.)
14	0.9076 (26.)	0.7203 (27.)	0.7387 (27.)	0.8704 (24.)	0.9076 (26.)	0.9005 (24.)	0.9076 (26.)	0.8933 (24.)
15	**1** (12,5.)	0.7495 (25.)	0.7526 (24.)	0.8893 (23.)	**1** (12,5.)	0.9136 (23.)	**1** (12,5.)	0.9075 (23.)
16	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
17	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
18	0.7611 (28.)	0.7193 (28.)	0.7452 (25.)	0.8195 (28.)	0.7777 (29.)	0.8561 (29.)	0.7611 (28.)	0.8410 (29.)
19	0.7002 (29.)	0.5919 (29.)	0.7882 (22.)	0.8266 (27.)	0.7882 (28.)	0.8695 (28.)	0.7313 (29.)	0.8561 (28.)
20	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
21	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
22	0.7955 (27.)	0.7815 (23.)	0.7903 (21.)	0.8471 (26.)	0.8217 (27.)	0.8768 (26.)	0.7955 (27.)	0.8637 (27.)
23	**1** (12,5.)	0.7414 (26.)	0.6890 (29.)	0.8575 (25.)	**1** (12,5.)	0.8878 (25.)	**1** (12,5.)	0.8785 (25.)
24	**1** (12,5.)	**1** (11.)	0.7230 (28.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
25	**1** (12,5.)	**1** (11.)	0.8627 (19.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
26	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
27	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
28	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
29	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)
30	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (8,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)	**1** (12,5.)	**1** (11.)

Tabuľka 32: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Prepojeného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS

Rovnako môžeme pozorovať veľké rozdiely medzi rankami, najmä pri regiónoch, ktoré sú z jedného modelu vyhodnotené ako efektívne a z jeho ekvivalentu ako neefektívne. Napríklad v **Tabuľke 32** prideľuje výstupný *Prepojený model* regiónu č. 23 podobný nízky rank ako klasický black-boxový model, ale vstupný, HDF a DDF tvar *Prepojeného modelu* mu priraďujú najvyšší rank. Opačný prípad je pri regióne č. 13, ktorému klasické modely udeľujú najvyšší rank, od ktorého sa príliš nelíši rank z výstupného *Prepojeného*

modelu. Avšak vstupný, HDF a DDF tvar *Prepojeného modelu* prideľujú tomuto regiónu jeden z najnižších rankov.

Keďže *Prepojený model* vo väčšine svojich tvarov identifikuje vyšší počet efektívnych regiónov v porovnaní s klasickými black-boxovými modelmi, javí sa ako nevhodný nástroj na analýzu našich dát. Výsledky, ktoré poskytuje, sú totiž ešte výraznejšie nadhodnotené než tie, ktoré poskytujú samotné klasické modely, ktoré už samy o sebe majú tendenciu nadhodnocovať efektivitu a viesť k zavádzajúcim výsledkom.

4.2.3 Relačný model R&D procesu

Ako posledný upravíme model (3.6) tak, že odstránime $\mathbf{Y^1}$ a $\mathbf{y_o^1}$ z ohraničenia (3.6.3) a následne ho použijeme pre naše normalizované údaje. Výsledky uvádzame v **Tabuľkách 33** a **34**. Ranky uvádzané v zátvorkách sú pri CRS vypísané iba pri vstupných modeloch, pretože sú pre zvyšné tvary rovnaké.

	CRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Región č.	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*CCR}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	0.1598 (30.)	0.3574 (30.)	0.1598	0.3574	0.3998	0.5979	0.2756	0.5266
2	0.2383 (24.)	0.7813 (20.)	0.2383	0.7813	0.4881	0.8839	0.3848	0.8772
3	0.4802 (10.)	0.8229 (19.)	0.4802	0.8229	0.6930	0.9071	0.6488	0.9028
4	0.3863 (18.)	0.6443 (27.)	0.3863	0.6443	0.6215	0.8027	0.5573	0.7837
5	0.2099 (27.)	0.5290 (29.)	0.2099	0.5290	0.4581	0.7273	0.3469	0.6919
6	0.5638 (5.)	**1** (8.)	0.5638	**1**	0.7509	**1**	0.7211	**1**
7	0.1933 (28.)	0.9001 (18.)	0.1933	0.9001	0.4397	0.9487	0.3240	0.9474
8	**1** (1.)	**1** (8.)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
9	0.5408 (7.)	**1** (8.)	0.5408	**1**	0.7354	**1**	0.7020	**1**
10	0.7991 (3.)	**1** (8.)	0.7991	**1**	0.8939	**1**	0.8883	**1**
11	0.4199 (15.)	**1** (8.)	0.4199	**1**	0.6480	**1**	0.5915	**1**
12	0.2356 (25.)	0.7382 (23.)	0.2356	0.7382	0.4853	0.8592	0.3813	0.8494
13	0.3811 (19.)	**1** (8.)	0.3811	**1**	0.6173	**1**	0.5519	**1**
14	0.2580 (22.)	0.7157 (25.)	0.2580	0.7157	0.5079	0.8460	0.4102	0.8343
15	0.2650 (21.)	0.7455 (21.)	0.2650	0.7455	0.5148	0.8634	0.4190	0.8542
16	0.9222 (2.)	**1** (8.)	0.9222	**1**	0.9603	**1**	0.9595	**1**
17	0.4500 (11.)	**1** (8.)	0.4500	**1**	0.6708	**1**	0.6207	**1**
18	0.3103 (20.)	0.6936 (26.)	0.3103	0.6936	0.5571	0.8328	0.4737	0.8190
19	0.2403 (23.)	0.5843 (28.)	0.2403	0.5843	0.4902	0.7644	0.3875	0.7376
20	0.3957 (17.)	**1** (8.)	0.3957	**1**	0.6291	**1**	0.5671	**1**
21	0.5441 (6.)	**1** (8.)	0.5441	**1**	0.7376	**1**	0.7047	**1**
22	0.2340 (26.)	0.7423 (22.)	0.2340	0.7423	0.4837	0.8615	0.3793	0.8521
23	0.1905 (29.)	0.7289 (24.)	0.1905	0.7289	0.4364	0.8537	0.3200	0.8432
24	0.4471 (12.)	**1** (8.)	0.4471	**1**	0.6687	**1**	0.6180	**1**
25	0.4267 (14.)	0.9951 (17.)	0.4267	0.9951	0.6532	0.9975	0.5981	0.9975
26	0.5239 (8.)	0.9968 (16.)	0.5239	0.9968	0.7238	0.9984	0.6875	0.9984
27	0.5018 (9.)	**1** (8.)	0.5018	**1**	0.7084	**1**	0.6683	**1**
28	0.4134 (16.)	**1** (8.)	0.4134	**1**	0.6430	**1**	0.5850	**1**
29	0.4446 (13.)	**1** (8.)	0.4446	**1**	0.6668	**1**	0.6155	**1**
30	0.7643 (4.)	**1** (8.)	0.7643	**1**	0.8742	**1**	0.8664	**1**

Tabuľka 33: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri CRS

Vidíme, že všetky tvary tohto modelu pri oboch výnosoch z rozsahu klasifikujú ako efektívny iba región č. 8 a pri variabilných výnosoch z rozsahu dávajú všetky 4 tvary modelu navyše ďalšie 4 efektívne regióny, a to konkrétne regióny č. 3, 10, 16 a 20. Navyše pri VRS určujú modely, okrem výstupného tvaru, za efektívne aj regióny č. 7 a 24.

	VRS							
	I		**O**		**HDF**		**DDF**	
Región č.	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*BCC}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*HDF}_{klasický}$	θ^*	$\theta^{*DDF}_{klasický}$
1	0.5371 (28.)	**1** (11.)	0.9272 (11.)	**1** (11.)	0.9272 (15.)	**1** (11.)	0.9215 (15.)	**1** (11.)
2	0.6784 (23.)	0.7813 (24.)	0.7853 (19.)	0.9370 (22.)	0.8273 (22.)	0.9494 (22.)	0.8104 (22.)	0.9473 (22.)
3	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (3.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
4	0.7790 (17.)	**1** (11.)	0.9598 (9.)	**1** (11.)	0.9658 (11.)	**1** (11.)	0.9648 (11.)	**1** (11.)
5	0.4796 (29.)	0.5648 (30.)	0.6670 (28.)	0.7667 (30.)	0.7104 (30.)	0.8158 (30.)	0.6353 (30.)	0.7867 (30.)
6	0.6313 (26.)	**1** (11.)	0.9357 (10.)	**1** (11.)	0.9429 (14.)	**1** (11.)	0.9399 (14.)	**1** (11.)
7	**1** (4.)	**1** (11.)	0.7396 (21.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
8	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (3.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
9	0.9043 (11.)	**1** (11.)	0.8004 (17.)	**1** (11.)	0.9105 (16.)	**1** (11.)	0.9100 (16.)	**1** (11.)
10	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (3.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
11	0.8125 (15.)	**1** (11.)	0.8481 (14.)	**1** (11.)	0.9049 (18.)	**1** (11.)	0.9002 (18.)	**1** (11.)
12	0.7620 (19.)	0.8273 (22.)	0.6199 (30.)	0.7763 (29.)	0.7625 (25.)	0.8703 (27.)	0.7622 (23.)	0.8660 (26.)
13	0.7723 (18.)	**1** (11.)	0.8078 (16.)	**1** (11.)	0.8826 (21.)	**1** (11.)	0.8755 (21.)	**1** (11.)
14	0.6649 (24.)	0.7203 (27.)	0.6778 (26.)	0.8704 (24.)	0.7436 (28.)	0.9005 (24.)	0.6988 (28.)	0.8933 (24.)
15	0.6067 (27.)	0.7495 (25.)	0.7330 (22.)	0.8893 (23.)	0.7832 (23.)	0.9136 (23.)	0.7519 (25.)	0.9075 (23.)
16	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (3.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
17	0.9499 (9.)	**1** (11.)	0.7835 (20.)	**1** (11.)	0.9499 (12,5.)	**1** (11.)	0.9499 (12.)	**1** (11.)
18	0.6353 (25.)	0.7193 (28.)	0.7030 (25.)	0.8195 (28.)	0.7507 (26.)	0.8561 (29.)	0.7121 (27.)	0.8410 (29.)
19	0.4280 (30.)	0.5919 (29.)	0.6759 (27.)	0.8266 (27.)	0.7470 (27.)	0.8695 (28.)	0.6924 (29.)	0.8561 (28.)
20	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (3.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
21	0.7123 (22.)	**1** (11.)	0.9629 (8.)	**1** (11.)	0.9667 (10.)	**1** (11.)	0.9657 (10.)	**1** (11.)
22	0.7225 (20.)	0.7815 (23.)	0.7047 (24.)	0.8471 (26.)	0.7821 (24.)	0.8768 (26.)	0.7541 (24.)	0.8637 (27.)
23	0.7138 (21.)	0.7414 (26.)	0.6570 (29.)	0.8575 (25.)	0.7165 (29.)	0.8878 (25.)	0.7138 (26.)	0.8785 (25.)
24	**1** (4.)	**1** (11.)	0.7230 (23.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)	**1** (4.)	**1** (11.)
25	0.8758 (14.)	**1** (11.)	0.8393 (15.)	**1** (11.)	0.8999 (19.)	**1** (11.)	0.8947 (19.)	**1** (11.)
26	0.9242 (10.)	**1** (11.)	0.9903 (6.)	**1** (11.)	0.9911 (8.)	**1** (11.)	0.9910 (8.)	**1** (11.)
27	0.7796 (16.)	**1** (11.)	0.8669 (13.)	**1** (11.)	0.8948 (20.)	**1** (11.)	0.8863 (20.)	**1** (11.)
28	0.8962 (12.)	**1** (11.)	0.9137 (12.)	**1** (11.)	0.9499 (12,5.)	**1** (11.)	0.9484 (13.)	**1** (11.)
29	0.9662 (8.)	**1** (11.)	0.9803 (7.)	**1** (11.)	0.9851 (9.)	**1** (11.)	0.9849 (9.)	**1** (11.)
30	0.8802 (13.)	**1** (11.)	0.7894 (18.)	**1** (11.)	0.9094 (17.)	**1** (11.)	0.9073 (17.)	**1** (11.)

Tabuľka 34: Porovnanie optimálnych hodnôt efektivít jednotlivých regiónov Číny získané pomocou *Relačného modelu* a optimálnych hodnôt klasických black-boxových modelov pri VRS

V rámci porovnania s klasickými black-boxovými modelmi sa potvrdzuje naše predchádzajúce zistenie, že *Relačné modely* identifikujú menší počet efektívnych regiónov a zároveň priraďujú nižšie efektivity neefektívnym regiónom v porovnaní s optimálnymi hodnotami klasických black-boxových modelov. Pri CRS *Relačné modely* identifikujú iba jeden efektívny región, pričom klasické modely až 15 efektívnych regiónov. Modely s VRS považujú za efektívnych 7 regiónov (resp. 5 regiónov z výstupného modelu), kým z klasických modelov máme až 21 efektívnych regiónov.

Dospeli sme k záveru, že *Relačné modely* najprísnejšie vyhodnocujú efektivitu pre jednotlivé regióny, pričom ich výsledky považujeme za najviac dôveryhodné.

Záver

Hlavným cieľom našej diplomovej práce bolo oboznámiť čitateľa s pomerne novou metódou dvojstupňovej sieťovej obálkovej analýzy dát, ktorá umožňuje hodnotiť efektívnosť viacstupňových systémov so štruktúrovanými dátami podľa jednotlivých divízií. Porovnali sme ju s klasickými modelmi, ktoré zanedbávajú vnútornú štrúktúru útvarov, v dôsledku čoho produkujú skreslené výsledky. Práca sa bližšie sústredila na definovanie teoretických základov a odvodenie niektorých modelov sieťovej a dvojstupňovej sieťovej DEA, ako aj na jej aplikáciu na konkrétnych dátach.

V prvej kapitole sme uviedli základnú teóriu, symboliku a modely z oblasti DEA. Vychádzali sme pritom zo skrípt [19]. Táto kapitola slúžila ako úvod k lepšiemu pochopeniu teórie, na ktorej je postavená sieťová DEA.

Druhá kapitola sa sústredila na sieťovú DEA, kde sme rozšírili základný koncept o analýzu systémov, ktoré zahŕňajú viacstupňové procesy. Vychádzajúc z práce [29] sme prezentovali symboliku a 3 typy modelov používané pri hodnotení efektívnosti jednotlivých fáz procesu a ich vzájomných vzťahov. *Kumulatívny nezávislý*, *Prepojený* a *Relačný model* sme najprv uviedli vo vstupnom tvare, ktorý je v literatúre najviac využívaný. Následne sme pre ne odvodili všeobecné schémy, podľa ktorých sme neskôr používali aj výstupné, HDF a DDF tvary týchto modelov. Taktiež sme uviedli tabuľku s prehľadom empirických štúdií, ktoré sa zaoberajú popísanými 3 typmi modelov.

V tretej kapitole sme sa podrobnejšie venovali dvojstupňovej sieťovej DEA, kde sme na dvoch vlastných príkladoch ukázali mechanizmus fungovania jednotlivých modelov z druhej kapitoly. Najprv sme sa v prvom príklade zamerali na základnú dvojstupňovú sieťovú DEA, v ktorej sa vonkajšie vstupy nachádzajú iba v prvej fáze. Jej výstupy následne predstavujú vstupy do druhej fázy, ktorá ako jediná produkuje vonkajšie výstupy. Ďalej sme predstavili všeobecnú dvojstupňovú sieťovú DEA, pričom jednou z jej verzií je aj spomenutá základná dvojstupňová sieťová DEA. V poslednej časti tejto kapitoly sme na druhom príklade demonštrovali modely pre ďalšiu z jej verzií, a to pre všeobecnú dvojstupňovú sieťovú DEA bez spätnej väzby.

Posledná kapitola sa venovala praktickým aplikáciám dvoch verzií dvojstupňovej sieťovej DEA na reálnych dátach. Na naprogramovanie našich 3 typov modelov v 4 rôznych verziách sme využili program MATLAB. Výsledky sme spracovali do prehľadných tabuliek

a porovnali s výsledkami z klasických black-boxových modelov. Analýza oboch dátových súborov ukázala, že *Relačné modely* spolu s *Kumulatívnymi nezávislými modelmi* hodnotia efektivitu útvarov prísnejšie ako klasické modely, pretože prihliadajú na ich vnútornú štruktúru. V dôsledku toho identifikujú menší počet efektívnych útvarov ako klasické modely. Výsledky získané z týchto sieťových modelov preto považujeme za vecnejšie a dôveryhodnejšie. Na druhej strane, *Prepojené modely* vo väčšine prípadov identifikovali vyšší počet efektívnych útvarov než klasické modely. Výnimkou bol len výstupný tvar modelu, ktorý ako jediný v oboch dátových sadách vykazoval nižší počet efektívnych útvarov pri oboch výnosoch z rozsahu. Z teoretického hľadiska by však aj tento model mal byť rovnako prísny ako ostatné dva sieťové modely. Na základe toho možno konštatovať, že tento typ sieťového modelu nie je vhodným nástrojom pre naše dáta s takýmito jednoduchými sieťovými štruktúrami. V prípade použitia paralelnej alebo kombinovanej štruktúry – namiesto nami aplikovanej sériovej – by mohol tento model priniesť relevantnejšie a metodicky hodnotnejšie výsledky.

Hlavným prínosom našej diplomovej práce je prehľadné spracovanie problematiky a systematický súhrn poznatkov z oblasti dvojstupňovej sieťovej DEA. Vzhľadom na to, že dostupná literatúra je v tejto oblasti veľmi rozmanitá, obsahuje množstvo prístupov a poskytuje široký priestor pre ďalšie modifikácie modelov, považujeme za prínos najmä snahu o zjednotenie teoretických poznatkov sieťovej a dvojstupňovej sieťovej DEA do uceleného a zrozumiteľného rámca. Prínosom práce je aj využitie iných typov modelov, než aké sú najčastejšie uplatňované v odbornej literatúre zaoberajúcej sa touto problematikou, ako aj ich aplikácia na ilustračných príkladoch, ktoré prispievajú k lepšiemu pochopeniu témy. Umožnilo nám to demonštrovať ich správanie a rozdiely v porovnaní s klasickými prístupmi. Do budúcna sa ponúka možnosť rozšírenia práce o podrobnejšie analýzy s využitím iných typov modelov, prípadne o modifikácie nami predstavených modelov a ich následné porovnanie s výsledkami tejto práce.

Zoznam použitej literatúry

[1] Akther, S., Fukuyama, H., Weber, W.L.: *Estimating two-stage slacks-based inefficiency: An application to Bangladesh banking*, OMEGA, 41, 2013, 88–96

[2] Amirteimoori, A.: *A DEA two-stage decision process with shared resources*, Central European Journal of Operational Research, 21, 2013, 141–151

[3] Avkiran, N. K., McCrystal, A.: *Sensitivity analysis of network DEA: NSBM versus NRAM*, Applied Mathematics and Computation, 218, 2012, 11226–11239

[4] Bencová, T.: *Analýza efektívnosti poľnohospodárskych podnikov s odvetvovou štruktúrou s využitím sieťovej DEA*, dizertačná práca, Fakulta ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity, Nitra, 2016

[5] Cook, W. D., Hababou, M., Tuenter, H. J. H.: *Multicompetent efficiency measurement and shared inputs in data envelopment analysis: An application to scales and service performance in bank branches*, Journal of Productivity Analysis, 14, 2000, 209–224

[6] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000

[7] Černý, A., Halická, M., Trnovská, M.: *A unified approach to radial, hyperbolic, and directional efficiency measurement in data envelopment analysis*, arXiv preprint arXiv:2210.03687 (2022)

[8] DEA zone: A comprehensive website on Data Envelopment Analysis, dostupné na internete (19.10.2024):

http://deazone.com/

[9] Du, J., Liang, L., Chen, Y., Cook, W., Zhu, J.: *A bargaining game model for measuring performance of the two-stage network structures*, European Journal of Operational Research, 210, 2010, 390–397

[10] Färe, R., Grosskopf, S.: *Network DEA*, Socio-Economic Planning Sciences 34(1), 2000, 35-49

[11] Färe, R., Grosskopf, S.: *Efficiency and productivity in rich and poor countries*, in: B.S. Jensen, K. Wong (Eds.), Dynamics, Economic Growth and International Trade, in: Studies in International Economics, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1997

[12] Färe, R., Grosskopf, S., Lee, W. F.: *Property rights and profitability*, in: R. Färe, S. Grosskopf (Eds.), New Directions: Efficiency and Productivity, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004, 56–77

[13] Färe, R., Margaritis, D., Rouse, P., Roshdi, I.: *Estimating the Hyperbolic Distance Function: A Directional Distance Function Approach*, European Journal of Operational Research, 2016

[14] Färe, R., Whittaker, G.: *An intermediate input model of dairy production using complex survey data*, Journal of Agricultural Economics, 46, 1995, 201–213

[15] Fukuyama, H., Matousek, R.: *Efficiency of Turkish banking: Two-stage network system. Variable returns to scale model*, Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 21, 2011, 75–91

[16] Fukuyama, H., Mirdehghan, S. M.: *Identifying the efficient status in network DEA*, European Journal of Operational Research, 220, 2012, 85–92

[17] Fukuyama, H., Weber, W. L.: *A slacks-based inefficiency measure for a two-stage system with bad outputs*, OMEGA, 38, 2010, 398–409

[18] Goceljaková, V.: *Obálková analýza dát pre hodnotenie udržateľnosti*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2020

[19] Halická, M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (19.10.2024):

http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/DEAskripta.pdf

[20] Halkos, G. E., Tzeremes, N. G., Kourtzidis, S. A.: *A unified classification of two-stage DEA models*, Surveys in Operations Research and Management Science, 19, 2014, 1–16

[21] Holod, D., Lewis, H. F.: *Resolving the deposit dilemma: A new DEA bank efficiency model*, Journal of Banking & Finance, 35, 2011, 2801–2810

[22] Chen, Ch., Zhu, J., Yu, J. -Y., Noori, H.: *A new methodology for evaluating sustainable product design performance with two-stage network data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research, 221, 2012, 348–359

[23] Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., Zhu, J.: *Additive efficiency decomposition in two-stage DEA*, European Journal of Operational Research, 196, 2009, 1170–1176

[24] Chen, Y., Liang, L., Yang, F., Zhu, J.: *Evaluation of information technology investment: a data envelopment analysis approach*, Computers & Operations Research, 33, 2006, 1368–1379

[25] Jaenicke, E. C.: *Testing for intermediate outputs in dynamic models: Accounting for soil capital in rotational crop production and productivity measures*, Journal of Productivity Analysis, 14, 2000, 247–266

[26] Kao, Ch.: *Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model*, European Journal of Operational Research, 192, 2009, 949-962

[27] Kao, Ch.: *Efficiency measurement for parallel production systems*, European Journal of Operational Research, 196, 2009, 1107–1112

[28] Kao, Ch.: *Network data envelopment analysis: A review*, European Journal of Operational Research, 239, 2014, 1–16

[29] Kao, Ch.: *Network Data Envelopment Analysis, Foundations and Extensions*, International Series in Operations Research & Management Science 240 (Chapter 9, 10, 11), Springer International Publishing Switzerland, 2017, 177-258

[30] Kao, Ch., Hwang, S. -H.: *Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan*, European Journal of Operational Research, 185, 2008, 418–429

[31] Kao, Ch., Hwang, S. -H.: *Efficiency measurements for network systems: IT impact of firm performance*, Decision Support Systems, 48, 2010, 437–446

[32] Kao, Ch., Lin, P. -H.: *Efficiency of parallel production systems with fuzzy data*, Fuzzy Sets and Systems, 198, 2012, 83–98

[33] Li, Y., Chen, Y., Liang, L., Xie, J.: *DEA models for extended two-stage network structures*, Data Envelopment Analysis, International Series in Operations Research & Management Science 208 (Chapter 12), Springer Science+Business Media New York, 2014, 261–284

[34] Liang, L., Cook, W., Zhu, J.: *DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition*, Naval Research Logistics, 55, 2008, 643–653

[35] Liang, L., Li, Z.-Q., Cook, W. D., Zhu, J.: *Data envelopment analysis efficiency in two-stage networks with feedback*, IIE Transactions, 43, 2011, 309–322

[36] Ličková, A.: *Možnosti aplikácie Network DEA v hodnotení výkonnosti poľnohospodárskych podnikov*, diplomová práca, Fakulta ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity, Nitra, 2012

[37] Lo, S.-F.: *Performance evaluation for sustainable business: a profitability and marketability framework*, Corporate Social Responsibility and Environmental Management, 17(6), 2010, 311–319

[38] Lozano, S.: *Scale and cost efficiency analysis of network processes*, Expert Systems with Applications, 38, 2011, 6612–6617

[39] Lozano, S., Gutierrez, E., Moreno, P.: *Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs*, Applied Mathematical Modelling, 37, 2013, 1665–1676

[40] Löthgren, M., Tambour, M.: *Productivity and customer satisfaction in Swedish pharmacies: A DEA network model*, European Journal of Operational Research, 115, 1999, 449–458

[41] Lu, W. M., Wang, W. K., Hung, S. W., Lu, E. T.: *The effects of corporate governance on airline performance: Production and marketing efficiency perspectives*, Transportation Research, Part E, 48, 2012, 529–544

[42] Luo, X. M.: *Evaluating the profitability and marketability efficiency of large banks: An application of data envelopment analysis*, Journal of Business Research, 56, 2003, 627–635

[43] Matthews, K.: *Risk management and managerial efficiency in Chinese banks: A network DEA framework*, Omega, 41, 2013, 207–215

[44] Moreno, P., Lozano, S., Gutiérrez, E.: *Dynamic performance analysis of US wireline telecommunication companies*, Telecommunications Policy, 37, 2013, 469–482

[45] Narasimhan, R., Talluri, S., Das, A.: *Exploring flexibility and execution competencies of manufacturing firms*, Journal of Operations Management, 22, 2004, 91–106

[46] Nemoto, J., Goto, M.: *Measuring of dynamic efficiency in production: An application of data envelopment analysis to Japanese electric utilities*, Journal of Productivity Analysis, 19, 2003, 191–210

[47] Premachandra, I. M., Zhu, J., Watson, J., Galagedera, D. U. A.: *Best-performing US mutual funds families from 1993 to 2008: Evidence from a novel two-stage DEA model for efficiency decomposition*, Journal of Banking & Finance. 36, 2012, 3302–3317

[48] Seiford, L. M., Zhu, J.: *Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks*, Management Science, 45, 1999, 1270–1288

[49] Sexton, T. R., Lewis, H. F.: *Two-stage DEA: An application to Major League Baseball*, Journal of Productivity Analysis, 2003, 19, 227–249

[50] Tone, K., Tsutsui, M.: *Network DEA: A slacks-based measure approach*, European Journal of Operational Research 197, 2009, 243-252

[51] Tsolas, I. E.: *Modeling bank branch profitability and effectiveness by means of DEA*, International Journal of Productivity and Performance Management, 59, 2010, 432–451

[52] Tsolas, I. E.: *Relative profitability and stock market performance of listed commercial banks on the Athens exchange: a non-parametric approach*, IMA Journal of Management Mathematics, 22, 2011, 323–342

[53] Von Geymueller, P.: *Static versus dynamic DEA in electrisity regulation: the case of US transmission system operators*, Central European Journal of Operational Research, 17, 2009, 397–413

[54] Yang, Z.: *A two-stage DEA model to evaluate the overall performance of Canadian life and health insurance companies*, Mathematical and Computer Modelling, 43, 2006, 910–919

[55] Zha, Y., Liang, L.: *Two-stage cooperation model with input freely distributed among the stages*, European Journal of Operational Research, 205, 2010, 332–338

[56] Zhou, Z., Sun, L., Yang, W., Liu, W., Ma, C.: *A bargaining game model for efficiency decomposition in the centralized model of two-stage systems*, Computers & Industrial Engineering, 64, 2013, 103–108

[57] Zhu, J.: *Airlines performance via two-stage network DEA approach*, Journal of CENTRUM Cathedra, 4, 2011, 260–269

Príloha A: Ďalšie empirické štúdie s inými typmi sieťových modelov

Typ použitého sieťového DEA modelu	Autor	Aplikácia	Zdroj
Modely založené na teórii hier	Du a spol.	bankový sektor/neživotné poisťovne	[9]
	Chen a spol.	udržateľný výkon vozidiel	[22]
	Li a spol.	regionálny výskum a vývoj v Číne	[33]
	Liang a spol.	bankový sektor	[34]
	Zha a Liang	bankový sektor	[55]
	Zhou a spol	bankový sektor	[56]
	Zhu	letecké spoločnosti	[57]
Modely využívajúce SBM	Akther a spol.	bankový sektor	[1]
	Avkiran a McCrystal	bankový sektor	[3]
	Fukuyama a Mirdehghan	elektrotechnické spoločnosti	[16]
	Fukuyama a Weber	bankový sektor	[17]
	Kao	lesy	[27]
	Kao a Lin	katedry na univerzitách	[32]
	Matthews	bankový sektor	[43]
Dynamické modely	Färe a Grosskopf	alokácia investícií v APEC krajinách	[11]
	Jaenicke	poľnohospodárske podniky	[25]
	Nemoto a Goto	elektrárne	[46]
	Moreno a spol.	telekomunikačné spoločnosti	[44]
	Von Geymueller	spoločnosti poskytujúce elektrinu	[53]
Modely so spoločnou technológiou	Amirteimoori	výroba automobilov	[2]
	Cook a spol.	bankový sektor	[5]
	Chen a spol.	bankový sektor	[24]
	Löthgren a Tambour	farmaceutické spoločnosti	[40]

Tabuľka 35: Prehľad iných typov modelov v empirických štúdiách

Príloha B: Doplňujúce tabuľky k aplikáciám na reálnych dátach

B.1 Americké komerčné banky

	VSTUPY X			MEDZIPRODUKTY Z	VÝSTUPY Y		
Banka č.	**Zamestnanci**	**Aktíva**	**Kapitál**	**Zisky**	**Trhová hodnota**	**Zisk na akciu**	**Návratnosť**
1	85 300	256 853	19 581	3 464	33 221.7	7.21	66.1
2	95 288	232 446	20 222	2 664	27 148.6	6.49	69.4
3	58 322	187 298	12 801	1 950	20 295.9	7.13	59.7
4	39 078	182 926	11 912	1 805	16 971.3	6.73	70.5
5	15 600	184 879	10 451	1 296	15 003.5	6.42	49.4
6	33 365	121 173	9 134	1 165	12 616.4	5.76	82.4
7	35 328	122 002	8 450	1 150	12 351.1	3.45	50
8	44 536	131 879.9	9 043.1	1 430.2	16 815	5.04	39.9
9	46 900	90 454	8 197.5	1 277.9	14 807.4	2.91	54.9
10	14 000	104 000	5 000	215	5 252.4	2.03	28.3
11	30 800	84 432.2	6 364.8	610	10 428.7	1.57	31.8
12	45 404	72 134.4	5 312.1	956	12 268.6	2.76	45.5
13	26 757	73 404	5 768	408.1	9 938.2	1.19	61.4
14	28 905	66 339.1	5 152.5	825	8 671.2	3.45	51.6
15	17 881	47 397	3 751	541	5 310.1	4.55	84.7
16	19 700	50 316	4 055	1 032	11 342.5	20.37	52.8
17	15 850	53 685	5 223	914	10 101.5	4.57	69.9
18	27 200	58 071	4 154	885.1	12 138	11.02	108.5
19	24 300	40 129	4 106	691	7 476.7	4.5	83.8
20	15 996	44 981.3	3 773.8	602.5	7 623.6	3.5	46.9
21	19 415	46 471.5	4 269.6	565.5	7 922.5	4.94	46.9
22	20 175	41 553.5	3 272.2	533.3	5 774.9	5.3	59
23	20 767	36 199	2 921	465.1	4 912.2	3.03	33.9
24	13 231	33 874	2 725	568.1	8 304	4.19	54.3
25	13 500	35 469.9	2 607.7	413.4	4 537	3.54	71.7
26	17 023	33 703.8	2 928.1	418.8	4 997	3.25	57.3
27	14 081	31 794.3	2 617	329	4 865.1	2.09	66.8
28	13 598	29 620.6	2 379.4	452.2	5 788	3.22	52
29	4 900	43 881.6	3 007.8	288.6	3 218	4.66	41.1
30	11 171	13 228.9	1 265.1	353.1	6 543.3	1.54	60.7

Tabuľka 36: Údaje o amerických komerčných bankách

	VSTUPY X			MEDZIPRODUKTY Z	VÝSTUPY Y		
Banka č.	**Zamestnanci**	**Aktíva**	**Kapitál**	**Zisky**	**Trhová hodnota**	**Zisk na akciu**	**Návratnosť**
1	0.8952	1.0000	0.9683	1.0000	1.0000	0.3540	0.6092
2	1.0000	0.9050	1.0000	0.7691	0.8172	0.3186	0.6396
3	0.6121	0.7292	0.6330	0.5629	0.6109	0.3500	0.5502
4	0.4101	0.7122	0.5891	0.5211	0.5108	0.3304	0.6498
5	0.1637	0.7198	0.5168	0.3741	0.4516	0.3152	0.4553
6	0.3501	0.4718	0.4517	0.3363	0.3798	0.2828	0.7594
7	0.3707	0.4750	0.4179	0.3320	0.3718	0.1694	0.4608
8	0.4674	0.5134	0.4472	0.4129	0.5061	0.2474	0.3677
9	0.4922	0.3522	0.4054	0.3689	0.4457	0.1429	0.5060
10	0.1469	0.4049	0.2473	0.0621	0.1581	0.0997	0.2608
11	0.3232	0.3287	0.3147	0.1761	0.3139	0.0771	0.2931
12	0.4765	0.2808	0.2627	0.2760	0.3693	0.1355	0.4194
13	0.2808	0.2858	0.2852	0.1178	0.2991	0.0584	0.5659
14	0.3033	0.2583	0.2548	0.2382	0.2610	0.1694	0.4756
15	0.1877	0.1845	0.1855	0.1562	0.1598	0.2234	0.7806
16	0.2067	0.1959	0.2005	0.2979	0.3414	1.0000	0.4866
17	0.1663	0.2090	0.2583	0.2639	0.3041	0.2243	0.6442
18	0.2855	0.2261	0.2054	0.2555	0.3654	0.5410	1.0000
19	0.2550	0.1562	0.2030	0.1995	0.2251	0.2209	0.7724
20	0.1679	0.1751	0.1866	0.1739	0.2295	0.1718	0.4323
21	0.2038	0.1809	0.2111	0.1633	0.2385	0.2425	0.4323
22	0.2117	0.1618	0.1618	0.1540	0.1738	0.2602	0.5438
23	0.2179	0.1409	0.1444	0.1343	0.1479	0.1487	0.3124
24	0.1389	0.1319	0.1348	0.1640	0.2500	0.2057	0.5005
25	0.1417	0.1381	0.1290	0.1193	0.1366	0.1738	0.6608
26	0.1786	0.1312	0.1448	0.1209	0.1504	0.1595	0.5281
27	0.1478	0.1238	0.1294	0.0950	0.1464	0.1026	0.6157
28	0.1427	0.1153	0.1177	0.1305	0.1742	0.1581	0.4793
29	0.0514	0.1708	0.1487	0.0833	0.0969	0.2288	0.3788
30	0.1172	0.0515	0.0626	0.1019	0.1970	0.0756	0.5594

Tabuľka 37: Normalizované dáta amerických komerčných bánk

B.2 Regióny Číny

	VSTUPY X[1]			VSTUPY X[2]	MEDZIPRODUKTY Z		VÝSTUPY Y[2]			
Región č.	**R&D E**	**R&D P**	**S&TF/TFE**	**CV**	**Patenty**	**Dokumenty**	**HDP**	**TE**	**UPCDAI**	**GOHI**
1	668.6351	10.3479	5.4458	1 236.245	9 157	65 951	12 153.03	483.7932	26 738.48	2 757.14
2	79.4599	2.0067	1.2038	38.3158	834	13 737	6 530.01	42.8007	15 748.67	352.84
3	423.3774	6.4616	7.2019	435.4108	5 997	32 733	15 046.45	1 417.9603	28 837.78	5 557.45
4	178.4661	2.8783	3.0237	105.4611	1 889	12 472	7 521.85	298.9272	21 402.01	1 901.07
5	135.9535	3.0165	1.7026	35.6174	795	13 699	10 062.82	88.8649	14 085.74	460.31
6	135.3819	2.2789	1.9755	23.2594	824	9 075	12 236.53	533.1911	19 576.83	1 972.01
7	37.2612	1.2745	0.8171	35.6287	227	7 856	3 387.56	7.3551	11 929.78	67.39
8	652.982	12.9768	3.8876	170.985	11 355	35 773	39 482.56	3 589.5489	21 574.72	17 161.94
9	26.4134	0.7733	1.04	1.7806	322	4 946	3 912.68	13.5661	12 862.53	293.64
10	5.7806	0.1758	1.2491	0.5556	84	2 726	1 654.21	13.0863	13 750.85	54.75
11	134.8446	3.8808	1.1258	17.2112	691	17 970	17 235.48	156.889	14 718.25	629.17
12	109.1704	3.702	1.0629	48.855	1 142	14 553	8 587	100.8213	12 565.98	311.4
13	174.7599	4.7996	1.2223	26.3046	1 129	21 188	19 480.46	73.4538	14 371.56	953.23
14	213.449	5.1212	1.2115	77.0329	1 478	25 268	12 961.1	99.788	14 367.48	1 039.52
15	153.4995	3.4959	1.3398	44.0432	1 752	21 042	13 059.69	54.9203	15 084.31	648.75
16	701.9529	10.6783	2.9129	108.2184	5 322	47 441	34 457.3	1 991.9919	20 551.72	13 015.35
17	75.8936	1.8352	0.8578	9.7893	386	6 811	7 655.18	73.6849	14 021.54	755.65
18	81.3602	2.6088	1.2831	19.7598	719	8 987	7 278.75	31.2494	14 006.27	537.66
19	232.3687	5.4395	2.1431	119.7095	1 993	20 801	15 212.49	334.1493	15 761.38	1 313.84
20	7.5938	0.3001	0.9821	8.4967	35	1 240	1 081.27	2.5188	12 691.85	19.22
21	519.592	8.333	1.9243	71.9391	2 865	26 941	33 896.65	794.9071	17 811.04	4 555.71
22	80.8563	2.5262	1.1274	16.2068	603	6 757	7 358.31	28.3746	13 996.55	196.47
23	189.5063	4.2347	1.1314	69.8074	1 342	26 403	8 169.8	39.8815	14 128.76	717.04
24	214.459	4.8786	0.7976	54.5977	1 596	22 568	14 151.28	141.6945	13 839.4	1 766.76
25	37.2304	1.2205	0.9729	10.2469	476	7 101	6 169.75	45.1325	14 423.93	147.17
26	398.8367	5.9084	3.7426	56.4581	4 818	25 638	22 990.35	1 330.1295	24 610.81	2 672.09
27	47.2028	1.5699	1.1144	1.7662	326	9 982	7 759.16	83.7537	15 451.48	273.67
28	52.0726	1.2706	0.9376	14.7652	178	3 214	9 740.25	23.1548	15 849.19	236.61
29	10.4422	0.3395	1.0181	0.8982	52	1 365	1 353.31	7.4293	14 024.7	32.89
30	21.8043	0.8268	1.1983	1.2078	120	5 688	4 277.05	109.3456	12 257.52	23.74

Tabuľka 38: Údaje o regiónoch v Číne

	VSTUPY X¹			VSTUPY X²	MEDZIPRODUKTY Z		VÝSTUPY Y²			
Región č.	**R&D E**	**R&D P**	**S&TF/TFE**	**CV**	**Patenty**	**Dokumenty**	**HDP**	**TE**	**UPCDAI**	**GOHI**
1	0.9525	0.7974	0.7562	1.0000	0.8064	1.0000	0.3078	0.1348	0.9272	0.1607
2	0.1132	0.1546	0.1672	0.0310	0.0734	0.2083	0.1654	0.0119	0.5461	0.0206
3	0.6031	0.4979	1.0000	0.3522	0.5281	0.4963	0.3811	0.3950	1.0000	0.3238
4	0.2542	0.2218	0.4198	0.0853	0.1664	0.1891	0.1905	0.0833	0.7422	0.1108
5	0.1937	0.2325	0.2364	0.0288	0.0700	0.2077	0.2549	0.0248	0.4884	0.0268
6	0.1929	0.1756	0.2743	0.0188	0.0726	0.1376	0.3099	0.1485	0.6789	0.1149
7	0.0531	0.0982	0.1135	0.0288	0.0200	0.1191	0.0858	0.0020	0.4137	0.0039
8	0.9302	1.0000	0.5398	0.1383	1.0000	0.5424	1.0000	1.0000	0.7481	1.0000
9	0.0376	0.0596	0.1444	0.0014	0.0284	0.0750	0.0991	0.0038	0.4460	0.0171
10	0.0082	0.0135	0.1734	0.0004	0.0074	0.0413	0.0419	0.0036	0.4768	0.0032
11	0.1921	0.2991	0.1563	0.0139	0.0609	0.2725	0.4365	0.0437	0.5104	0.0367
12	0.1555	0.2853	0.1476	0.0395	0.1006	0.2207	0.2175	0.0281	0.4357	0.0181
13	0.2490	0.3699	0.1697	0.0213	0.0994	0.3213	0.4934	0.0205	0.4984	0.0555
14	0.3041	0.3946	0.1682	0.0623	0.1302	0.3831	0.3283	0.0278	0.4982	0.0606
15	0.2187	0.2694	0.1860	0.0356	0.1543	0.3191	0.3308	0.0153	0.5231	0.0378
16	1.0000	0.8229	0.4045	0.0875	0.4687	0.7193	0.8727	0.5549	0.7127	0.7584
17	0.1081	0.1414	0.1191	0.0079	0.0340	0.1033	0.1939	0.0205	0.4862	0.0440
18	0.1159	0.2010	0.1782	0.0160	0.0633	0.1363	0.1844	0.0087	0.4857	0.0313
19	0.3310	0.4192	0.2976	0.0968	0.1755	0.3154	0.3853	0.0931	0.5466	0.0766
20	0.0108	0.0231	0.1364	0.0069	0.0031	0.0188	0.0274	0.0007	0.4401	0.0011
21	0.7402	0.6421	0.2672	0.0582	0.2523	0.4085	0.8585	0.2215	0.6176	0.2655
22	0.1152	0.1947	0.1565	0.0131	0.0531	0.1025	0.1864	0.0079	0.4854	0.0114
23	0.2700	0.3263	0.1571	0.0565	0.1182	0.4003	0.2069	0.0111	0.4899	0.0418
24	0.3055	0.3759	0.1107	0.0442	0.1406	0.3422	0.3584	0.0395	0.4799	0.1029
25	0.0530	0.0941	0.1351	0.0083	0.0419	0.1077	0.1563	0.0126	0.5002	0.0086
26	0.5682	0.4553	0.5197	0.0457	0.4243	0.3887	0.5823	0.3706	0.8534	0.1557
27	0.0672	0.1210	0.1547	0.0014	0.0287	0.1514	0.1965	0.0233	0.5358	0.0159
28	0.0742	0.0979	0.1302	0.0119	0.0157	0.0487	0.2467	0.0065	0.5496	0.0138
29	0.0149	0.0262	0.1414	0.0007	0.0046	0.0207	0.0343	0.0021	0.4863	0.0019
30	0.0311	0.0637	0.1664	0.0010	0.0106	0.0862	0.1083	0.0305	0.4251	0.0014

Tabuľka 39: Normalizované dáta regiónov v Číne

Príloha C: Zdrojové kódy

C.1 CRS

C.1.1 ZÁKLADNÁ DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ DEA

INDEPENDENT:

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
    lambda2_optimal] = independent_CRS(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta1_optimal = zeros(n,1);
    theta2_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2
            minimize(theta1 + theta2)
            subject to
                X * l1 <= theta1 * X(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Z * l2 <= theta2 * Z(:,i);
                Y * l2 >= Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta1_optimal(i) = theta1;
        theta2_optimal(i) = theta2;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
    lambda2_optimal] = independent_CRS_O(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta1_optimal = zeros(n,1);
    theta2_optimal = zeros(n,1);
    psi1_optimal = zeros(n,1);
    psi2_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2 p1 p2
            minimize(theta1 + theta2)
            subject to
                X * l1 <= X(:,i);
                Z * l1 >= p1 * Z(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y * l2 >= p2 * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta1 1; 1 p1] >=0;
                [theta2 1; 1 p2] >=0;
        cvx_end
        theta1_optimal(i) = theta1;
        theta2_optimal(i) = theta2;
        psi1_optimal(i) = p1;
        psi2_optimal(i) = p2;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
```

```
   lambda2_optimal] = independent_CRS_HDF(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta1_optimal = zeros(n,1);
    theta2_optimal = zeros(n,1);
    psi1_optimal = zeros(n,1);
    psi2_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2 p1 p2
            minimize(theta1 + theta2)
            subject to
                X * l1 <= theta1 * X(:,i);
                Z * l1 >= p1 * Z(:,i);
                Z * l2 <= theta2 * Z(:,i);
                Y * l2 >= p2 * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta1 1; 1 p1] >=0;
                [theta2 1; 1 p2] >=0;
        cvx_end
        theta1_optimal(i) = theta1;
        theta2_optimal(i) = theta2;
        psi1_optimal(i) = p1;
        psi2_optimal(i) = p2;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
   lambda2_optimal] = independent_CRS_DDF(X,Z,Y)
```

```
2
3     n = size(X, 2);  % pocet DMU
4     % Inicializacia premennych:
5     theta1_optimal = zeros(n,1);
6     theta2_optimal = zeros(n,1);
7     lambda1_optimal = zeros(n,n);
8     lambda2_optimal = zeros(n,n);
9     % Ohranicenie:
10    lb = zeros(n,1);
11    for i = 1:n
12        cvx_begin quiet
13            cvx_precision high
14            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2
15            minimize(theta1 + theta2)
16            subject to
17                X * l1 <= theta1 * X(:,i);
18                Z * l1 >= (2 - theta1) * Z(:,i);
19                Z * l2 <= theta2 * Z(:,i);
20                Y * l2 >= (2 - theta2) * Y(:,i);
21                l1 >= lb;
22                l2 >= lb;
23        cvx_end
24        theta1_optimal(i) = theta1;
25        theta2_optimal(i) = theta2;
26        lambda1_optimal(:,i) = l1;
27        lambda2_optimal(:,i) = l2;
28    end
29 end
```

CONNECTED:

```
1  function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
       connected_CRS(X,Z,Y)
2
3     n = size(X, 2);  % pocet DMU
4     % Inicializacia premennych:
5     theta_optimal = zeros(n,1);
6     lambda1_optimal = zeros(n,n);
7     lambda2_optimal = zeros(n,n);
```

```
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X * l1 <= theta * X(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y * l2 >= Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
   connected_CRS_O(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
```

```
                X * l1 <= X(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y * l2 >= p * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    connected_CRS_HDF(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
                X * l1 <= theta * X(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y * l2 >= p * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
```

```
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    connected_CRS_DDF(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X * l1 <= theta * X(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y * l2 >= (2 - theta) * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

RELATIONAL:

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    relational_CRS(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X * l1 <= theta * X(:,i);
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y * l2 >= Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    relational_CRS_O(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
```

```
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
       cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
                X * l1 <= X(:,i);
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y * l2 >= p * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
   relational_CRS_HDF(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
```

```
            subject to
                X * l1 <= theta * X(:,i);
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y * l2 >= p * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    relational_CRS_DDF(X,Z,Y)

    n = size(X, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X * l1 <= theta * X(:,i);
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y * l2 >= (2 - theta) * Y(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
```

```
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

C.1.2 VŠEOBECNÁ DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ DEA BEZ SPÄTNEJ VÄZBY

INDEPENDENT:

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
    lambda2_optimal] = independent_CRS_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta1_optimal = zeros(n,1);
    theta2_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2
            minimize(theta1 + theta2)
            subject to
                X1 * l1 <= theta1 * X1(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Y1 * l1 >= Y1(:,i);
                X2 * l2 <= theta2 * X2(:,i);
                Z * l2 <= theta2 * Z(:,i);
                Y2 * l2 >= Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta1_optimal(i) = theta1;
        theta2_optimal(i) = theta2;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
```

```
    end
end
```

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
    lambda2_optimal] = independent_CRS_O_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta1_optimal = zeros(n,1);
    theta2_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohrancenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) p1 p2
            maximize(p1 + p2)
            subject to
                X1 * l1 <= X1(:,i);
                Z * l1 >= p1 * Z(:,i);
                Y1 * l1 >= p1 * Y1(:,i);
                X2 * l2 <= X2(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y2 * l2 >= p2 * Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta1_optimal(i) = 1/p1;
        theta2_optimal(i) = 1/p2;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
    lambda2_optimal] = independent_CRS_HDF_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

```

```
    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta1_optimal = zeros(n,1);
    theta2_optimal = zeros(n,1);
    psi1_optimal = zeros(n,1);
    psi2_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2 p1 p2
            minimize(theta1 + theta2)
            subject to
                X1 * l1 <= theta1 * X1(:,i);
                Z * l1 >= p1 * Z(:,i);
                Y1 * l1 >= p1 * Y1(:,i);
                X2 * l2 <= theta2 * X2(:,i);
                Z * l2 <= theta2 * Z(:,i);
                Y2 * l2 >= p2 * Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta1 1; 1 p1] >=0;
                [theta2 1; 1 p2] >=0;
        cvx_end
        theta1_optimal(i) = theta1;
        theta2_optimal(i) = theta2;
        psi1_optimal(i) = p1;
        psi2_optimal(i) = p2;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta1_optimal, theta2_optimal, lambda1_optimal,
   lambda2_optimal] = independent_CRS_DDF_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)
```

```
2
3     n = size(X1, 2);  % pocet DMU
4     % Inicializacia premennych:
5     theta1_optimal = zeros(n,1);
6     theta2_optimal = zeros(n,1);
7     lambda1_optimal = zeros(n,n);
8     lambda2_optimal = zeros(n,n);
9     % Ohranicenie:
10    lb = zeros(n,1);
11    for i = 1:n
12        cvx_begin quiet
13            cvx_precision high
14            variables l1(n) l2(n) theta1 theta2
15            minimize(theta1 + theta2)
16            subject to
17                X1 * l1 <= theta1 * X1(:,i);
18                Z * l1 >= (2 - theta1) * Z(:,i);
19                Y1 * l1 >= (2 - theta1) * Y1(:,i);
20                X2 * l2 <= theta2 * X2(:,i);
21                Z * l2 <= theta2 * Z(:,i);
22                Y2 * l2 >= (2 - theta2) * Y2(:,i);
23                l1 >= lb;
24                l2 >= lb;
25        cvx_end
26        theta1_optimal(i) = theta1;
27        theta2_optimal(i) = theta2;
28        lambda1_optimal(:,i) = l1;
29        lambda2_optimal(:,i) = l2;
30    end
31 end
```

CONNECTED:

```
1  function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
       connected_CRS_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)
2
3     n = size(X1, 2);  % pocet DMU
4     % Inicializacia premennych:
5     theta_optimal = zeros(n,1);
```

```
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 <= theta * X1(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Y1 * l1 >= Y1(:,i);
                X2 * l2 <= theta * X2(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y2 * l2 >= Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
   connected_CRS_O_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
```

```
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 <= X1(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Y1 * l1 >= p * Y1(:,i);
                X2 * l2 <= X2(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y2 * l2 >= p * Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    connected_CRS_HDF_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
```

```
                X1 * l1 <= theta * X1(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Y1 * l1 >= p * Y1(:,i);
                X2 * l2 <= theta * X2(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
                Y2 * l2 >= p * Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    connected_CRS_DDF_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 <= theta * X1(:,i);
                Z * l1 >= Z(:,i);
                Y1 * l1 >= (2 - theta) * Y1(:,i);
                X2 * l2 <= theta * X2(:,i);
                Z * l2 <= Z(:,i);
```

```
                Y2 * l2 >= (2 - theta) * Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

RELATIONAL:

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    relational_CRS_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 + X2 * l2 <= theta * (X1(:,i) + X2(:,i));
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y1 * l1 + Y2 * l2 >= Y1(:,i) + Y2(:,i);
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    relational_CRS_O_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 + X2 * l2 <= X1(:,i) + X2(:,i);
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y1 * l1 + Y2 * l2 >= p * (Y1(:,i) + Y2(:,i));
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
    relational_CRS_HDF_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    psi_optimal = zeros(n,1);
```

```
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet sdp
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta p
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 + X2 * l2 <= theta * (X1(:,i) + X2(:,i));
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y1 * l1 + Y2 * l2 >= p * (Y1(:,i) + Y2(:,i));
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
                [theta 1; 1 p] >=0;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        psi_optimal(i) = p;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

```
function [theta_optimal, lambda1_optimal, lambda2_optimal] =
   relational_CRS_DDF_g(X1,X2,Z,Y1,Y2)

    n = size(X1, 2);  % pocet DMU
    % Inicializacia premennych:
    theta_optimal = zeros(n,1);
    lambda1_optimal = zeros(n,n);
    lambda2_optimal = zeros(n,n);
    % Ohranicenie:
    lb = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        cvx_begin quiet
            cvx_precision high
            variables l1(n) l2(n) theta
```

```
            minimize(theta)
            subject to
                X1 * l1 + X2 * l2 <= theta * (X1(:,i) + X2(:,i));
                Z * l1 >= Z * l2;
                Y1 * l1 + Y2 * l2 >= (2 - theta) * (Y1(:,i) + Y2(:,i));
                l1 >= lb;
                l2 >= lb;
        cvx_end
        theta_optimal(i) = theta;
        lambda1_optimal(:,i) = l1;
        lambda2_optimal(:,i) = l2;
    end
end
```

C.2 VRS

C.2.1 ZÁKLADNÁ AJ VŠEOBECNÁ DVOJSTUPŇOVÁ SIEŤOVÁ DEA BEZ SPÄTNEJ VÄZBY

Všetky modely sú rovnaké ako pri CRS, iba v cvx_begin pribudnú ohraničenia:

```
sum(l1) == 1;
sum(l2) == 1;
```