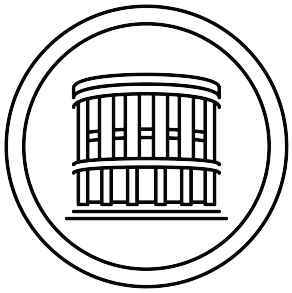
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ROBUSTNÁ OPTIMALIZÁCIA A JEJ VYUŽITIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2025 Karolína GRANCOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ROBUSTNÁ OPTIMALIZÁCIA A JEJ VYUŽITIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Bratislava 2025 **Karolína GRANCOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Karolína Grancová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Robustná optimalizácia a jej využitie
Robust optimization and applications

Anotácia: V praktických optimalizačných úlohách sa často objavuje neistota v hodnotách parametrov. Robustná optimalizácia je oblasť zaoberajúca sa práve takýmito typmi problémov a predstavuje alternatívny prístup k stochastickému programovaniu.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 11.01.2024

Dátum schválenia: 25.01.2024

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému "Robustná optimalizácia a jej využitie", vrátane všetkých jej príloh a obrázkov, som vypracovala samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použila v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie je v práci vhodným spôsobom označené.

Miesto a dátum: ..... Titul, meno a priezvisko: .....

Poďakovanie

Moje poďakovanie patrí vedúcej diplomovej práce Mgr. Jane Szolgayovej, PhD. za jej odbornú pomoc a usmerňovanie počas celej tvorby, vďaka ktorým sa mi podarilo napísať prácu v tejto podobe. Zároveň sa chcem poďakovať môjmu priateľovi za neustálu podporu a mojej rodine za povzbudivé slová.

Abstrakt v štátnom jazyku

GRANCOVÁ, Karolína: *Robustná optimalizácia a jej využitie* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2025, 69 s.

Diplomová práca sa zaoberá robustnou optimalizáciou, ktorá je efektívnym nástrojom na riešenie úloh za prítomnosti neistoty, bez potreby spoliehať sa na pravdepodobnostné predpoklady. Práca uvádza teoretické základy robustnej optimalizácie a predstavuje jej aplikáciu v oblasti optimalizácie finančných portfólií. Práca skúma, ako robustné modely dokážu chrániť riešenia pred najhoršími scenármi a porovnáva tradičné metódy s robustnými prístupmi v rôznych trhových podmienkach. Numerické analýzy ukazujú, že modely založené na princípoch robustnej optimalizácie prinášajú zvýšenú stabilitu a istotu najmä pri náhlej a neočakávanej zmene na trhu.

Kľúčové slová: robustná optimalizácia, neistota, finančné portfólio, množina neistoty

Abstract

GRANCOVÁ, Karolína: *Robust optimization and applications* [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2025, 69 p.

The diploma thesis deals with robust optimization, which is an effective tool for solving problems under uncertainty, without the need to rely on probabilistic assumptions. The thesis presents the theoretical foundations of robust optimization and introduces its application in the field of financial portfolio optimization. It examines how robust models can protect solutions against worst-case scenarios and compares traditional methods with robust approaches under various market conditions. Numerical analyses show that models based on the principles of robust optimization provide increased stability and certainty, particularly in the face of sudden and unexpected market changes.

Keywords: robust optimization, uncertainty, financial portfolio, uncertainty set

Obsah

Úvod **8**

1 Teoretické základy robustnej optimalizácie **10**

1.1 Historický vývoj robustnej optimalizácie 10

1.2 Vplyv neistoty na lineárne optimalizačné modely 11

1.3 Modelovanie neistoty v lineárnej optimalizačnej úlohe 12

1.4 Základné predpoklady robustných riešení 14

1.5 Robustná obmena 15

1.6 Výpočtová náročnosť robustnej obmeny 17

1.7 Množiny neistoty a pravdepodobnostné ohraničenia 22

2 Robustná optimalizácia a finančné portfóliá **27**

2.1 Historický vývoj robustnej optimalizácie portfólia 28

2.2 Mean-variance model a jeho robustná obmena 29

2.3 Množiny neistoty 31

2.4 Príprava vstupov do modelu 35

2.5 Portfólio s rebalansovaním 37

2.6 Príprava parametrov do modelu 38

2.7 Metriky pre analýzu portfólií 41

3 Výsledky a analýza výkonnosti portfólií **49**

3.1 Analýza stability váh portfólií 49

3.2 Numerická analýza metrík portfólií 50

3.3 Analýza citlivosti výsledkov vzhľadom na koeficient averzie 55

3.4 Testovanie portfólií počas finančnej krízy 2008 57

3.5 Záverečné zhrnutie výsledkov 60

Záver **62**

Zoznam použitej literatúry **65**

Príloha A **69**

Úvod

V dnešnom rýchlo sa meniacom a nepredvídateľnom svete sa schopnosť prijímať spoľahlivé rozhodnutia v prítomnosti neistoty stáva kľúčovou výzvou v mnohých oblastiach, od financií, inžinierstva až po logistiku. Ako prijímať tie najlepšie možné rozhodnutia, keď je budúcnosť nepredvídateľná? Táto diplomová práca sa zaoberá touto naliehavou otázkou prostredníctvom numerickej analýzy v oblasti robustnej optimalizácie.

Robustná optimalizácia ponúka presvedčivý prístup navrhnutý na riešenie optimalizačných problémov za prítomnosti neistoty bez nutnosti spoliehať sa na pravdepodobnostné predpoklady. Namiesto predpokladu dokonalého poznania budúcnosti sa sústredí na ochranu rozhodnutí voči najnepriaznivejším scenárom, čím zabezpečuje, že navrhnuté riešenia zostanú realizovateľné, spoľahlivé a efektívne bez ohľadu na neočakávané zmeny a nepredvídateľné okolnosti.

Cieľom tejto diplomovej práce je priblížiť koncept robustnej optimalizácie prostredníctvom prezentácie jej teoretických základov a praktickej aplikácie. Čitateľ si na jej základe vytvorí jasnú predstavu o jej kľúčových princípoch, ako môže byť použitá pri riešení reálneho problému a aké sú rozdiely medzi robustnými portfóliami v porovnaní s tradičnými prístupmi.

Kapitola 1 predstavuje stručné zhrnutie teoretických poznatkov z oblasti robustnej optimalizácie, ktoré sú relevantné v kontexte ďalších častí práce. Predstavíme prístupy ako neistotu začleniť do klasických lineárnych modelov pomocou množiny neistoty U. Čitateľ sa oboznámi so základnými pojmami, akými sú lineárna optimalizačná úloha s neistotou, robustne prípustné a robustne optimálne riešenie a robustná obmena. Takisto v kapitole načrtneme výpočtové výzvy spojené s takýmito prístupmi. V závere kapitoly naznačíme, prečo a ako v tomto rámci využiť náhodnosť – vytvoríme pravdepodobnostné ohraničenia a ukážeme, ako hľadať ich bezpečné aproximácie.

Kapitola 2 sa venuje formulácii modelov pre výpočet finančných portfólií, ktoré sú použité pri numerickej analýze v Kapitole 3. Predstavíme postup rolling horizon pre dynamické portfólio, navrhneme robustnú verziu klasického mean-variance modelu, popíšeme

použité množiny neistoty a parametre a nakoniec definujeme metriky, podľa ktorých budeme porovnávať správanie jednotlivých portfólií.

Kapitola 3 prináša porovnanie vlastností riešení modelov predstavených v Kapitole 2 v bežných aj krízových podmienkach. To nám umožní sledovať, ako portfóliá zvládajú premenlivé trhové scenáre. Spolu s analýzou citlivosti výsledkov na zmenu hodnoty koeficientu averzie voči riziku tak získame komplexnejší prehľad, ako robustné portfóliá reagujú na rôzne situácie a ako sa môžu zmeniť optimalizačné rozhodnutia v závislosti od rôznych špecifikácií modelu.

Na záver v **prílohe A** uvádzame podrobný popis kódu, ktorý sme vytvorili pre všetky výpočty a vizualizácie.

Tieto tri časti spolu vytvárajú ucelený rámec – od teórie cez implementáciu až po hodnotenie výsledkov. Naším cieľom je preskúmať, ako robustná optimalizácia dokáže riešiť problémy spojené s neistotou a zároveň identifikovať prípadné výzvy, ktoré s ňou môžu súvisieť. Týmto spôsobom poskytujeme rámec pre hlbšie pochopenie tejto problematiky a otvárame diskusiu o možnostiach jej vylepšenia.

1 Teoretické základy robustnej optimalizácie

Kým klasická lineárna optimalizácia predpokladá presné a nemenné vstupné dáta, v praxi sa často stretávame s neistotou zapríčinenou chybami v meraniach, vonkajšími vplyvmi či neúplnými dátami. Ignorovanie tejto neistoty môže viesť k riešeniam, ktoré sú v praxi nepoužiteľné, pretože strácajú svoju optimálnosť alebo dokonca prípustnosť pri zmene vstupných dát. Cieľom robustnej optimalizácie je riešiť tento problém tak, že namiesto jedného najpravdepodobnejšieho scenára zabezpečuje prípustnosť riešenia, ktoré je spoľahlivé a odolné voči všetkým možným odchýlkam dát v definovaných množinách neistoty.

V tejto kapitole predstavíme základné princípy robustnej optimalizácie, v kontexte ďalších častí práce. Teoretické základy budú podporené jednoduchými príkladmi, ktoré pomôžu lepšie pochopiť vysvetľovanú teóriu. Teoretický základ je spracovaný na základe knihy [10].

Najskôr sa v Podkapitole 1.1 pozrieme na historický prehľad vývoja tejto oblasti. V Podkapitole 1.2 uvedieme rozšírenie klasickej lineárnej optimalizácie o prvky neistoty a vysvetlíme, prečo je potrebné zohľadniť neistotu v optimalizačných modeloch. V Podkapitole 1.3 formálne definujeme lineárnu optimalizačnú úlohu s neistotou a predstavíme koncept množiny neistoty. Následne Podkapitola 1.4 objasňuje základné predpoklady robustných riešení a robustnú prípustnosť. Ďalej v Podkapitole 1.5 predstavíme pojem robustnej obmeny, jej ekvivalentný tvar a vlastnosti množiny neistoty U. Podkapitola 1.6 sa bude venovať výpočtovej náročnosti robustnej optimalizácie a ekvivalentným reprezentáciám ohraničení, ktoré umožňujú zredukovať výpočtovú náročnosť. V Podkapitole 1.7 zadefinujeme pojem pravdepodobnostného ohraničenia a predstavíme bezpečnú aproximáciu zabezpečujúcu výpočtovú zvládnuteľnosť úlohy.

1.1 Historický vývoj robustnej optimalizácie

Hoci koncept riešenia optimalizačných úloh s neistými dátami nie je nový, systematický výskum v oblasti robustnej optimalizácie sa rozbehol až v 70. rokoch 20. storočia. Pr-

vým významným príspevkom k tejto téme bol A. L. Soyster [1] (1973), ktorý predstavil metódu robustného lineárneho programovania. Počas nasledujúcich dvoch dekád sa tejto problematike venovalo len niekoľko autorov (napr. J. E. Falk (1976) [3], C. Singh (1982) [2]), čo odráža pomalší rozvoj v tejto oblasti.

Koniec 90. rokov priniesol výrazný príliv nových výsledkov, kedy sa robustná optimalizácia stala predmetom intenzívnejšieho výskumu v dvoch hlavných oblastiach a to v celočíselnom programovaní (Kouvelis a Yu [4]) a konvexnom programovaní (Ben-Tal a Nemirovski [5, 11], El Ghaoui et al. [6, 7]).

Od začiatku 21. storočia zažila robustná optimalizácia ďalší rozmach nielen v teórii, ale aj v praktických aplikáciách. Vývoj efektívnych algoritmov a znižovanie výpočtových nárokov umožnili nasadenie robustných metód v rôznych oblastiach: finančnom modelovaní, strojovom učení, inžinierskom plánovaní či riadení dodávateľských reťazcov. Pre komplexný prehľad vývoja a súčasného stavu odporúčame práce Ben-Tal et al. (2002, 2008) [8, 9].

1.2 Vplyv neistoty na lineárne optimalizačné modely

Hoci lineárna optimalizácia ponúka elegantné riešenia pre širokú škálu problémov, jej tradičný model sa opiera o predpoklad, že všetky vstupné dáta sú presné – čo v realite často neplatí. Jej deterministická verzia optimalizačnej úlohy má štandardný tvar:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^\top x + d \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

kde vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je vektorom rozhodovacích premenných, ktoré hľadáme, $c \in \mathbb{R}^n$ je vektorom koeficientov účelovej funkcie a $d \in \mathbb{R}$ je konštantou v účelovej funkcii. Matica A je maticou ohraničení s rozmermi $m \times n$ a vektor $b \in \mathbb{R}^m$ je vektorom pravých strán ohraničení.

V tejto formulácii predpokladáme, že všetky dáta (matica A, vektory b, c a konštanta d) sú známe a nemenné. Inými slovami predpokladáme, že ich hodnoty poznáme s absolútnou

presnosťou a že sa v čase nemenia. Vieme ich usporiadať do matice dát

$$D = \left[\begin{array}{c|c} c^\top & d \\ \hline A & b \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}. \tag{1.2.2}$$

V reálnom svete však takáto situácia takmer nikdy nenastáva. Vstupné dáta modelu sú často zaťažené neistotou, ktorá môže pochádzať z rôznych zdrojov:

- **Meracie nepresnosti** – Napríklad obsah lepku v pšenici sa môže líšiť medzi jednotlivými zrnami, aj keď len v malom rozsahu.
- **Chýbajúce alebo predpovedané dáta** – Mnohé optimalizačné úlohy vyžadujú dáta, ktoré nie sú v čase riešenia dostupné, napríklad budúci dopyt po produkte. Tieto hodnoty musia byť predikované, čo vždy prináša riziko chýb.
- **Dynamické zmeny v čase** – Dáta modelu môžu byť závislé od vonkajších faktorov, ktoré sa menia (napr. ceny surovín, výmenné kurzy, výrobné kapacity).

Aj keď sa môže zdať, že tieto odchýlky sú zanedbateľné, v skutočnosti môžu mať zásadný vplyv na výsledné riešenie. Napríklad v prípade výrobného plánovania môže malá chyba v odhade dostupných surovín viesť k neprípustnému riešeniu (nedostatok materiálu) alebo k suboptimálnemu riešeniu (zbytočne vysoké náklady). V dôsledku toho je potrebné rozšíriť klasickú lineárnu optimalizáciu tak, aby sa dokázala vyrovnať s neistotou v dátach a zabezpečila riešenie, ktoré zostane prípustné a dostatočne optimálne aj v najhorších prípadoch. Tento prístup vedie k robustnej optimalizácii, ktorá zavádza koncept množiny neistoty – množiny všetkých možných hodnôt, ktoré môžu dáta nadobudnúť.

V nasledujúcej podkapitole predstavíme formálnu definíciu lineárnej optimalizačnej úlohy s neistotou, koncept množiny neistoty a ukážeme, ako sa neistota dá matematicky modelovať.

1.3 Modelovanie neistoty v lineárnej optimalizačnej úlohe

Ak chceme pri úlohách s neistotou vo vstupných dátach pracovať systematicky, je potrebné rozšíriť klasickú lineárnu optimalizáciu tak, aby model explicitne zohľadňoval variabilitu

dát. Jedným z prístupov je predpokladať, že niektoré alebo všetky vstupné dáta nie sú fixné, ale môžu nadobúdať rôzne hodnoty v rámci určitej množiny. To vedie k formulácii lineárnej optimalizačnej úlohy s neistotou, ktorú budeme označovať ako LO_U.

1.3.1 Formálna definícia LO s neistotou

Uvažujme úlohu (1.2.1), kde matica dát D (1.2.2) môže obsahovať neistotu a teda ju nemôžeme považovať za fixnú. Namiesto jednej optimalizačnej úlohy tak riešime celú rodinu úloh tvaru (1.2.1), pričom každý možný scenár neistých dát predstavuje jednu z nich.

V tomto prípade môžeme optimalizačnú úlohu prepísať do tvaru, kde namiesto pevných hodnôt používame množinu neistoty U, ktorá obsahuje všetky možné realizácie dát:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^\top x + d \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \quad \forall (A, b, c, d) \in U \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Táto formulácia znamená, že hľadané riešenie musí byť prípustné pre všetky možné realizácie dát v množine neistoty U.

1.3.2 Parametrizácia množiny neistoty

Aby sme mohli efektívne pracovať s neistými dátami, zavádzame koncept množiny neistoty $U \subset \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$, ktorá obsahuje všetky prípustné hodnoty neistých dát. Táto množina sa často vyjadruje pomocou nominálnej hodnoty a príslušných odchýlok:

$$U = \left\{ D = D_0 + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l D_l : \zeta \in Z \subset \mathbb{R}^L \right\}, \tag{1.3.2}$$

kde D_0 predstavuje nominálne (očakávané) hodnoty matice dát D, D_l vopred definované matice určujúce smery neistoty (pozostávajú iba z núl a jednotiek), ζ je vektor odchýlok a Z je množina odchýlok všetkých prípustných hodnôt vektora ζ.

Množina neistoty U obsahuje všetky možné realizácie matice dát D, ktoré vznikajú posunutím nominálnej matice D_0 o odchýlky definované vektorom ζ. Konkrétne, jednotlivé

matice D_l, ktoré obsahujú len nuly a jednotky určujú miesta, kde môže neistota ovplyvniť dáta. Každá hodnota ζ_l udáva veľkosť tejto odchýlky v príslušných prvkoch matice D. Inými slovami, matica D vznikne pripočítaním váženého súčtu matíc D_l, kde váhy tvoria jednotlivé hodnoty ζ_l.

Táto reprezentácia umožňuje flexibilné modelovanie rôznych typov neistoty, pričom konkrétny výber množiny Z závisí od povahy neistých dát. Ak má množina odchýlok Z jednoduchý matematický tvar, je možné ju transformovať do štandardnej reprezentácie, čo uľahčuje výpočty a analýzu. Napríklad, elipsoidová množina neistoty môže byť ekvivalentne vyjadrená ako obraz Euklidovskej gule pomocou lineárnej transformácie.

1.4 Základné predpoklady robustných riešení

Aby sme mohli hovoriť o robustných riešeniach lineárnych optimalizačných úloh s neistotou, musíme najskôr stanoviť základné predpoklady, ktoré ich definujú. Keďže riešenie musí zostať prípustné pre všetky realizácie dát v množine neistoty U, je dôležité presne určiť podmienky, ktoré robustné riešenie musí spĺňať. V tejto podkapitole preto formulujeme tieto predpoklady a vysvetlíme, čo znamená byť robustne prípustný. Robustné riešenie úlohy s neistotou musí spĺňať tri základné predpoklady:

P1 Všetky rozhodovacie premenné x musia mať pevné hodnoty ešte predtým, než sa realizujú skutočné hodnoty neistých dát. To znamená, že riešenie sa stanovuje vopred a nezávisle od toho, aké dáta z množiny neistoty U sa nakoniec objavia.

P2 Riešenie musí byť platné len pre realizácie dát v rámci množiny neistoty U. Ak skutočné hodnoty dát prekročia túto množinu, za dôsledky už nenesieme zodpovednosť.

P3 Ak sú skutočné dáta v množine neistoty U, riešenie musí spĺňať všetky ohraničenia bez výnimky. Akékoľvek porušenie podmienok je neprípustné.

Tieto predpoklady zabezpečujú, že riešenie je pevné, spoľahlivé a platné pre všetky prípustné realizácie dát v množine neistoty U. Na ich základe teraz definujeme, čo znamená robustne prípustné riešenie LO_U.

Robustne prípustné riešenie LO_U je vektor $x \in \mathbb{R}^n$, ktorý spĺňa všetky realizácie ohraničení z množiny neistoty, čiže spĺňa

$$Ax \leq b, \forall (A, b, c, d) \in U.$$

Množina robustne prípustných riešení obsahuje všetky tieto vektory.

Každému robustne prípustnému riešeniu x prislúcha robustná hodnota $\hat{c}(x)$ ako suprémum účelovej funkcie cez všetky realizácie dát $A, b, c, d \in U$ pri danom robustne prípustnom riešení, čiže

$$\hat{c}(x) = \sup_{(A,b,c,d)\in U} c^\top x + d.$$

Po nájdení všetkých vhodných kandidátov na optimálne robustné riešenie LO_U môžeme pristúpiť k ďalšiemu kroku – nájdeniu optimálneho robustného riešenia. To znamená, že nestačí len zabezpečiť prípustnosť riešenia pre všetky realizácie neistých dát, ale zároveň chceme optimalizovať najhorší možný scenár. Tento prístup nás privádza k dôležitému pojmu robustnej obmeny, ktorá umožňuje efektívne formulovať robustnú optimalizačnú úlohu.

1.5 Robustná obmena

Optimalizačné úlohy s neistotou musia brať do úvahy všetky možné realizácie dát v množine neistoty U. Nestačí len nájsť riešenie, ktoré je prípustné pre všetky možné scenáre, ale je potrebné zabezpečiť to, že riešenie zostane čo najlepšie aj v najhoršom prípade. Preto zavádzame robustnú obmenu, ktorá preformuluje optimalizačnú úlohu tak, aby riešenie bolo odolné voči neistote. V podstate ide o najlepšie možné riešenie, ktoré je odolné voči variabilite dát a poskytuje spoľahlivý výsledok aj v nepriaznivých podmienkach.

Formálne je robustná obmena LO_U definovaná ako optimalizačná úloha, ktorá minimalizuje najhoršiu hodnotu účelovej funkcie pre všetky prípustné realizácie neistých dát:

$$\begin{array}{rrcl} \min\limits_{x} & \hat{c}(x) & = & \sup\limits_{(A,b,c,d)\in U} c^\top x + d \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b, \\ \forall & (A, b, c, d) & \in & U \end{array} \tag{1.5.1}$$

Riešenie tejto úlohy sa nazýva robustne optimálne riešenie, pričom výsledná optimálna hodnota účelovej funkcie sa označuje ako robustne optimálna hodnota.

Keďže robustná obmena vždy hľadá riešenie, ktoré obstojí aj v najhoršom scenári, jej riešenie býva výpočtovo náročnejšie než riešenie klasickej optimalizačnej úlohy. Preto je užitočné hľadať ekvivalentné formulácie, ktoré zjednodušia jej riešenie.

1.5.1 Ekvivalentný tvar robustnej obmeny

Na uľahčenie výpočtov sa robustná obmena často vyjadruje v ekvivalentnom tvare, ktorý umožňuje oddeliť neistotu od účelovej funkcie a pracovať s jej explicitnejšou reprezentáciou. V tomto preformulovaní sa minimalizuje premenná t, ktorá predstavuje najhoršiu možnú hodnotu účelovej funkcie. Takáto formulácia zjednodušuje optimalizačný problém a umožňuje efektívnejšie riešenie:

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x,t} & t & & \\ \text{s.t.} & c^\top x - t & \leq & -d, \\ & Ax & \leq & b, \\ \forall & (A,b,c,d) & \in & U \end{array} \tag{1.5.2}$$

V tejto podobe sa neistota vyskytuje už iba v ohraničeniach, čo znižuje výpočtovú náročnosť robustnej obmeny a robí ju matematicky prehľadnejšou. V nasledujúcich podkapitolách budeme pracovať s tvarom úlohy (1.5.2).

V deterministickej lineárnej optimalizačnej úlohe môžeme konštantu d v účelovej funkcii vynechať bez vplyvu na optimálne riešenie. Táto konštanta spôsobuje len posun hodnoty účelovej funkcie, ale nemení samotné riešenie úlohy. Pri LO_U je však situácia iná – ak konštanta d podlieha neistote, jej vynechanie by ovplyvnilo nielen hodnotu účelovej funkcie, ale aj optimálne riešenie. Preto ju v robustnej obmene musíme zohľadniť.

1.5.2 Množina neistoty v robustnej obmene

- V prípade robustnej obmeny s istou (bez neistoty) účelovou funkciou platí, že sa účelová funkcia nemení. Množina neistoty $U \subset \mathbb{R}^{(m+1)}$ sa skladá iba z náhodných

dát A, b. Preto stačí previesť iba neisté ohraničenia na ich robustné verzie $a_i^\top x \leq b_i$, $\forall [a_i, b_i] \in U_i$, kde U_i je projekcia množiny neistoty U na priestor dát i-teho ohraničenia $U_i = \{[a_i, b_i] : [A, b] \in U\}$.

Dôležitým pozorovaním je, že ak je riešenie robustne prípustné pre každé jednotlivé ohraničenie $a_i^\top x \leq b_i$ v množine U_i, zostane robustne prípustné aj v prípade, že množinu neistoty rozšírime na priamy súčin všetkých jej projekcií:

$$U' = U_1 \times \ldots \times U_m.$$

- Robustne prípustné riešenie pre U_i zostane robustné aj po nahradení množiny U_i jej konvexným obalom $\text{Conv}(U_i)$. To znamená, že ak sa množina neistoty nahradí jej konvexnou aproximáciou, robustná obmena zostane nezmenená a riešenie zostáva platné. Rovnako ak všetky projekcie U_i nahradíme ich uzavretými konvexnými obalmi a množinu neistoty U vytvoríme ako súčin týchto obalov, robustná obmena LO_U s účelovou funkciou bez neistoty sa nemení.

1.6 Výpočtová náročnosť robustnej obmeny

V tejto časti sa zameriame na výpočtovú náročnosť robustnej obmeny, ktorá je kľúčovým faktorom pri praktickej aplikácii robustnej optimalizácie. Keďže robustná obmena zahŕňa všetky možné realizácie dát v množine neistoty, jej riešenie môže byť výpočtovo náročné. Preto je potrebné hľadať ekvivalentné reprezentácie neistých lineárnych ohraničení, ktoré umožnia efektívnejšie výpočty.

Naším cieľom je previesť robustnú obmenu na optimalizačnú úlohu so systémom explicitných konvexných nerovností, čím zabezpečíme výpočtovú zvládnuteľnosť problému. Tieto ekvivalentné formulácie umožnia robustnej obmene zostať presnou, ale zároveň výpočtovo efektívnejšou.

V časti 1.6.1 predstavíme ekvivalentné reprezentácie ohraničení, ktoré umožňujú transformovať pôvodný optimalizačný problém do výpočtovo efektívnejšej podoby a v časti 1.6.2 uvedieme dva príklady transformácie lineárneho ohraničenia s neistotou na jeho výpočtovo zvládnuteľnú robustnú obmenu.

1.6.1 Ekvivalentné reprezentácie ohraničení

V robustnej optimalizácii sa často stretávame s polonekonečnými ohraničeniami, ktoré musia platiť pre všetky realizácie dát v množine neistoty. Tieto ohraničenia sú polonekonečné, pretože vyjadrujú nekonečne veľa obmedzení pre neisté dáta, ale len nad konečným počtom rozhodovacích premenných. Namiesto riešenia nekonečne veľkého systému podmienok preto hľadáme ekvivalentné konečné reprezentácie, ktoré umožnia pracovať s explicitnými konvexnými nerovnosťami.

Množina $X^+ \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^k_u$ [(1)] sa nazýva reprezentáciou množiny $X \subset \mathbb{R}^n_x$, ak jej projekcia na priestor premenných x je presne množina X, t.j. $x \in X$ práve vtedy, ak existuje $u \in \mathbb{R}^k_u$ také, že $(x, u) \in X^+$. V takom prípade vieme množinu X ekvivalentne zapísať ako:

$$X = \{x \,|\, \exists u : (x, u) \in X^+\}.$$

Systém ohraničení S^+ v premenných $x \in \mathbb{R}^n_x, u \in \mathbb{R}^k_u$ sa nazýva reprezentáciou systému ohraničení S v premenných $x \in \mathbb{R}^n_x$, ak množina prípustných riešení prvého systému reprezentuje množinu prípustných riešení druhého systému.

Na lepšie pochopenie tejto transformácie si uvedieme príklad. Na priestore $\mathbb{R}^n_x$ majme ohraničenie

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1.$$

Toto ohraničenie môžeme ekvivalentne vyjadriť dvoma spôsobmi. Priamy spôsob spočíva v jeho rozložení na sústavu lineárnych nerovností. V prípade, že $(n = 2)$ dostaneme:

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 - x_2 \leq 1, \quad -x_1 + x_2 \leq 1, \quad -x_1 - x_2 \leq 1.$$

Vo všeobecnosti v n-rozmernom priestore potrebujeme 2^n lineárnych ohraničení, aby sme presne vyjadrili podmienku s absolútnou hodnotou. Alternatívnym riešením je preformulovanie vyžadujúce si iba $2n + 1$ ohraničení zavedením pomocných premenných u_i, čím môžeme pôvodné ohraničenie nahradiť ekvivalentnou sústavou:

$$-u_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \leq 1.$$

[(1)] Značenie $X^+ \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^k_u$ znamená, že pre každý bod $(x, u) \in X^+$ platí, že zložka $x \in \mathbb{R}^n$ a zložka $u \in \mathbb{R}^k$.

Tento príklad ukazuje, aký veľký vplyv môže mať vhodná transformácia na výpočtovú náročnosť úlohy. Zavedením pomocných premenných sa počet ohraničení zmenšil exponenciálne (z 2^n) na lineárny počet $(2n+1)$, čo výrazne zjednodušuje riešenie optimalizačných problémov.

Podobný princíp môžeme aplikovať pri preformulovaní optimalizačných úloh. Uvažujme pôvodný optimalizačný problém vo forme:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \text{ spĺňa } S_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

a predpokladajme, že ho vieme prepísať do ekvivalentného vyjadrenia s pomocnými premennými $u_1, \ldots, u_m$:

$$\begin{aligned} \min_{x, u_1, \ldots, u_m} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & (x, u_i) \text{ spĺňa } S_i^+, \quad \forall i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Zložka x každého prípustného riešenia systému (1.6.2) je v takom prípade zároveň prípustným riešením systému (1.6.1) a zároveň zachováva rovnakú hodnotu účelovej funkcie. To znamená, že zložka x optimálneho riešenia nového systému je zároveň optimálnym riešením pôvodného systému. Ekvivalentná formulácia je však výpočtovo efektívnejšia, pretože vedie ku konečnému systému explicitných konvexných ohraničení, čím sa robustná obmena LO_U transformuje na výpočtovo zvládnuteľnú konvexnú úlohu.

V našom prípade pracujeme s robustnými obmenami tvaru (1.5.2) a preto sa zameriavame na lineárne ohraničenie, v ktorom sa dáta nachádzajú v množine neistoty U:

$$a^\top x \leq b;\ [a,b] \in U; \quad U = \left\{ [a,b] = [a^0, b^0] + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l [a^l, b^l] : \zeta \in Z \right\}. \tag{1.6.3}$$

Keďže množina neistoty U obsahuje nekonečne veľa možných realizácií, cieľom je nájsť ekvivalentnú, ale spočítateľnú reprezentáciu robustnej obmeny tohto neistého ohraničenia. Hľadáme formuláciu, ktorá bude explicitná a umožní efektívne riešenie robustnej optimalizačnej úlohy.

1.6.2 Prípady ekvivalentných reprezentácií ohraničení

Teraz si uvedieme dva príklady na transformáciu lineárneho ohraničenia s neistotou na jeho výpočtovo zvládnuteľnú robustnú obmenu, teda konečný systém explicitných konvexných ohraničení. Prvý príklad sa zaoberá prípadom, kde množina odchýlok Z má tvar elipsoidu. Druhý príklad rozširuje tento koncept na všeobecný prípad kónickej reprezentácie množiny odchýlok Z. Uvedieme formálne tvrdenie opisujúce všeobecný konečný systém explicitných konvexných ohraničení.

Jednoduchý prípad - *elipsoidová neistota*

Nech je daná neistota, pri ktorej množina odchýlok Z je elipsoid s polomerom Ω:

$$Z = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^L : \|\zeta\|_2 \leq \Omega\right\}.$$

V tomto prípade sa dá podľa [10] ohraničenie s neistotou tvaru (1.6.4) prepísať do ekvivalentného explicitného konvexného tvaru nasledovnými úpravami:

$$(a^0)^\top x + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l (a^l)^\top x \leq b^0 + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l b^l,\ \forall(\zeta : \|\zeta\|_2 \leq \Omega) \tag{1.6.4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{l=1}^{L} \zeta_l \left((a^l)^\top x - b^l\right) \leq b^0 - (a^0)^\top x,\ \forall(\zeta : \|\zeta\|_2 \leq \Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\max_{\|\zeta\|_2 \leq \Omega} \left(\sum_{l=1}^{L} \zeta_l \left((a^l)^\top x - b^l\right)\right) \leq b^0 - (a^0)^\top x$$

Ohraničenie platí pre všetky ζ spĺňajúce $\|\zeta\|_2 \leq \Omega$, čiže aj pre ζ s maximálnou hodnotou účelovej funkcie. Pomocou substitúcie $c^l = (a^l)^\top x - b^l$, $l = 1, \ldots, L$ môžeme účelovú funkciu prepísať do tvaru $\sum_{l=1}^{L} \zeta_l c^l \equiv \zeta^\top c$.

Použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti dostaneme odhad zhora pre skalárny súčin:

$$|\zeta^\top c| \leq \|\zeta\|_2 \|c\|_2 \leq \max_{\|\zeta\|_2 \leq \Omega} \|\zeta\|_2 \|c\|_2 = \Omega\|c\|_2 = \Omega\sqrt{\sum_{l=1}^{L} \left((a^l)^\top x - b^l\right)^2} \leq b^0 - (a^0)^\top x$$

Dosadením späť do ohraničenia dostávame ekvivalentné explicitné konvexné ohraničenie:

$$(a^0)^\top x + \Omega\sqrt{\sum_{l=1}^{L} \left((a^l)^\top x - b^l\right)^2} \leq b^0. \tag{1.6.5}$$

Dopracovali sme sa k reprezentácii neistého lineárneho ohraničenia (1.6.4) pomocou explicitného kvadratického ohraničenia (1.6.5), čo zaručuje jeho konvexnosť.

Všeobecný prípad *- kónická reprezentácia neistoty*

V predchádzajúcom príklade sme ukázali, ako možno ekvivalentne formulovať lineárne ohraničenie s elipsoidovou neistotou na explicitné konvexné ohraničenie. Tento prístup sa však dá rozšíriť aj na všeobecnejšie modely neistoty, kde množina odchýlok Z má kónickú reprezentáciu. Táto reprezentácia je obzvlášť užitočná pri analýze robustnej optimalizácie, pretože umožňuje efektívnejšie riešenie robustných úloh v širokom spektre aplikácií.

Nech množina odchýlok Z je definovaná ako:

$$Z = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^L : \exists u \in \mathbb{R}^K : P\zeta + Qu + p \in \mathbf{K}\right\}, \tag{1.6.6}$$

kde $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^N$ je uzavretý konvexný špicatý kužeľ s nenulovým vnútrom ($\operatorname{int}\mathbf{K} \neq \emptyset$). Matice P, Q a vektor p sú pevne dané. Ak kužeľ $\mathbf{K}$ nie je polyedrický, predpokladáme, že táto reprezentácia je striktne prípustná:

$$\exists \left(\bar{\zeta}, \bar{u}\right) : P\bar{\zeta} + Q\bar{u} + p \in \operatorname{int}\mathbf{K}. \tag{1.6.7}$$

Veta 1.1. *Nech je množina odchýlok Z daná predpisom* (1.6.6) *a platí* (1.6.7)*, ak kužeľ $\mathbf{K}$ nie je polyédrický. Potom možno polonekonečné ohraničenie* (1.6.3) *ekvivalentne vyjadriť pomocou systému kónických nerovností v premenných $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^N$:*

$$\begin{aligned} p^\top y + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ Q^\top y &= 0, \\ (P^\top y)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad l = 1, \ldots, L, \\ y &\in K_*, \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

kde $\mathbf{K}_* = \{y : y^\top z \geq 0 \, \forall z \in \mathbf{K}\}$ je duálny kužeľ ku $\mathbf{K}$.

Dôkaz tejto vety možno nájsť v [10].

Poznámka **1.1.1.** *Ak je kužeľ $\mathbf{K}$ priamym súčinom kužeľov $\mathbf{K}^1, \ldots, \mathbf{K}^{\mathrm{S}}$ s reprezentáciou* (1.6.6) *tvaru*

$$Z = \left\{\zeta : \exists u^1, \ldots, u^S : P_s\zeta + Q_s u^s + p_s \in \mathbf{K}^{\mathrm{s}}, \, s = 1, \ldots, S\right\},$$

potom je systém (1.6.8) *zmenený na systém kónických ohraničení v premenných* $x, y^1, \ldots, y^S$ *tvaru*

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{S} p_s^\top y^s + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ Q_s^\top y^s &= 0,\ s = 1, \ldots, S, \\ \sum_{s=1}^{S} (P_s^\top y^s)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad l = 1, \ldots, L, \\ y^s &\in K_*^s,\ s = 1, \ldots, S, \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

kde $\mathbf{K}_*^s$ *je duálny kužeľ ku* $\mathbf{K}^s$.

Dôsledok 1.2. *Nech neprázdna množina odchýlok* Z *v* (1.6.3) *s kónickou reprezentáciou* (1.6.6) *je:*

(i) polyédrická, kde kužeľ $\mathbf{K} = \mathbb{R}_+^N$ *alebo*

(ii) kónická kvadratická, kde kužeľ $\mathbf{L}^k = \mathbf{L}^{k_1} \times \ldots \times \mathbf{L}^{k_m}$ *je priamym súčinom Lorentzových kužeľov* $\mathbf{L}^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : x_k \geq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2} \right\}$ *alebo*

(iii) semidefinitná, kde kužeľ $\mathbf{K} = \mathbf{S}_+^k$ *je kladne semidefinitný.*

V prípadoch (ii), (iii) predpokladáme, že platí (1.6.7). *Potom robustná obmena s ohraničením* (1.6.3) *a množinou odchýlok* Z *môže byť ekvivalentne preformulovaná ako explicitný systém:*

- *lineárnych nerovností v prípade (i),*
- *kónických kvadratických nerovností v prípade (ii),*
- *lineárnych maticových nerovností v prípade (iii).*

Teoreticky je možné rozšíriť túto analýzu aj na nelineárne modely neistoty, avšak v tejto práci sa im bližšie nevenujeme.

1.7 Množiny neistoty a pravdepodobnostné ohraničenia

Doteraz sme pracovali s neistotou tak, že sme ju modelovali pomocou deterministickej množiny odchýlok bez toho, aby sme zohľadňovali jej pravdepodobnostnú povahu. Od-

chýlky ζ neboli náhodné, ale iba neznáme. Výhodou takéhoto prístupu je garancia 100%-nej prípustnosti riešenia – napríklad pri projektovaní mosta môžeme zaručiť úplnú bezpečnosť konštrukcie, ak sa neznáme dáta budú líšiť od nominálnych hodnôt najviac o 20%, no už pri 20,1% môže byť stabilita mosta narušená. Aby sme sa vyhli tomuto riziku, jednoducho rozšírime množinu odchýlok, aby pokryla väčší rozsah neistoty (napr. 30 %), čím získame robustný, no často nadmieru konzervatívny výsledok.

V praxi sa však často aj vyskytujú robustné prístupy založené na modelovaní neistoty využitím náhodnosti a pravdepodobnostných rozdelení. Stochastické prístupy zmierňujú konzervatívnosť viazanú len na fixné hranice, ale v praxi ťažko presne odhadnúť pravdepodobnostné rozdelenie odchýlok. Oveľa jednoduchšie je určiť jeho nosič, ktorý v tomto kontexte chápeme ako množinu neistoty. Navyše, ak chceme zvýšiť bezpečnosť mosta v prípade nejakého nepriaznivého scenára tak, ako v prípade robustnej optimalizácie, musíme kvôli súčtu celkovej pravdepodobnosti zároveň znížiť pravdepodobnosť ostatných udalostí. Tým oslabujeme ochranu voči menej očakávaným, no stále možným udalostiam a prerozdelenie pravdepodobností medzi všetkými prípadmi sa stáva výrazne zložitejším [10].

V tejto podkapitole uvedieme základné princípy robustnej optimalizácie pri pravdepodobnostných ohraničeniach. Aj keď v nasledujúcich častiach práce tento typ pravdepodobnostných ohraničení priamo nevyužívame, považujeme tento prístup za jeden zo základných pri tvorbe robustných modelov, a preto ho v krátkosti predstavíme.

1.7.1 Pravdepodobnostné ohraničenie

Uvažujme situácie, v ktorých neisté dáta majú známe pravdepodobnostné rozdelenie. Vtedy vieme definovať pravdepodobnostné ohraničenia a pracovať s nimi v optimalizačných úlohách, v ktorých neisté dáta sú náhodné premenné s daným známym pravdepodobnostným rozdelením $\mathbf{P}$.

Majme lineárne ohraničenie s neistotou tvaru

$$a^\top x \leq b, ; \quad [a, b] = [a^0, b^0] + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l [a^l, b^l],$$

kde vektor odchýlok ζ je teraz náhodný a riadi sa známym pravdepodobnostným rozdelením $\mathbf{P}$. Ideálne by robustne prípustné riešenie x spĺňalo nerovnosť s pravdepodobnosťou 1. Vzhľadom na stochastický charakter neistoty však pri tomto prístupe požadujeme, aby nerovnosť platila s pravdepodobnosťou najmenej $1 - \epsilon$, kde ϵ predstavuje vopred stanovenú malú toleranciu. Matematicky túto požiadavku zapíšeme ako tzv. pravdepodobnostné ohraničenie:

$$p(x) = P_{\zeta \sim \mathbf{P}} \left(\zeta : (a^0)^\top x + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l (a^l)^\top x > b^0 + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l b^l \right) \leq \epsilon, \tag{1.7.1}$$

kde $P_{\zeta \sim \mathbf{P}}$ je pravdepodobnosť daná rozdelením $\mathbf{P}$. Toto ohraničenie znamená, že riešenie x je prípustné, ak s pravdepodobnosťou aspoň $1 - \epsilon$ nerovnosť nebude porušená.

Ak v neistom optimalizačnom probléme nahradíme všetky neisté ohraničenia ich pravdepodobnostnými verziami, výsledná úloha už neobsahuje explicitnú neistotu. Pravdepodobnostné ohraničenia ju totiž transformujú na podmienky, ktoré musia byť splnené s určitou pravdepodobnosťou. Týmto spôsobom dostaneme deterministickú (pravdepodobnostne ohraničenú) optimalizačnú úlohu, v ktorej je neistota zachytená nepriamo – cez pravdepodobnostné požiadavky na riešenie.

1.7.2 Nejednoznačné pravdepodobnostné ohraničenie

V reálnych situáciách často nemáme úplnú znalosť o pravdepodobnostnom rozdelení náhodných odchýlok. Môžeme síce poznať napríklad strednú hodnotu alebo rozptyl, ale nepoznáme jeho presný tvar. V takýchto prípadoch namiesto jediného pravdepodobnostného rozdelenia berieme do úvahy triedu možných pravdepodobnostných rozdelení $\mathcal{P}$. To vedie k potrebe zaviesť tzv. nejednoznačné pravdepodobnostné ohraničenie, ktoré zohľadňuje neistotu v samotnom pravdepodobnostnom modeli:

$$\forall (\mathbf{P} \in \mathcal{P}) : P_{\zeta \sim \mathbf{P}} \left(\zeta : (a^0)^\top x + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l (a^l)^\top x > b^0 + \sum_{l=1}^{L} \zeta_l b^l \right) \leq \epsilon. \tag{1.7.2}$$

Táto rovnica vyjadruje, že pravdepodobnostné ohraničenie musí platiť pre všetky pravdepodobnostné rozdelenia P patriace do triedy $\mathcal{P}$, čím zabezpečíme robustnosť riešenia voči neistote v samotnom rozdelení.

1.7.3 Bezpečná aproximácia pravdepodobnostného ohraničenia

Hoci nejednoznačné pravdepodobnostné ohraničenia tvaru (1.7.2) poskytujú flexibilný spôsob modelovania, v praxi často vedú k výpočtovo neriešiteľným úlohám, keďže ich presný výpočet je náročný už pri jednoduchých pravdepodobnostných rozdeleniach a prípustná množina je často nekonvexná. Z tohto dôvodu sa namiesto nich používa ich bezpečná a výpočtová aproximácia.

Nech $\left\{[a^l, b^l]\right\}_{l=0}^{L}, P, \epsilon$ predstavujú dáta pravdepodobnostného ohraničenia (1.7.1) a nech S je systém konvexných ohraničení v premennených x a pomocných premenných v. Hovoríme, že S je bezpečná konvexná aproximácia pravdepodobnostného ohraničenia (1.7.1), ak každé prípustné riešenie (x, v) systému S zabezpečuje, že zložka x je prípustným riešením aj pre pôvodné pravdepodobnostné ohraničenie (1.7.1).

Tieto aproximácie umožňujú nahradiť pravdepodobnostné ohraničenie výpočtovo zvládnuteľným systémom konvexných obmedzení, pričom garantujú, že ak je riešenie prípustné pre aproximáciu, bude prípustné aj pre pôvodné pravdepodobnostné ohraničenie.

Takéto aproximácie budeme nazývať bezpečnými aproximáciami. V nasledujúcej časti uvedieme príklad tvorby takejto bezpečnej aproximácie podľa [10].

1.7.4 Príklad aproximácie pravdepodobnostného ohraničenia

Nech je vektor odchýlok ζ náhodný s neznámym pravdepodobnostným rozdelením, o ktorom vieme, že spĺňa určité základné vlastnosti. Naším cieľom je nájsť výpočtovo zvládnuteľnú bezpečnú aproximáciu pravdepodobnostného ohraničenia.

Predstavme si, že máme náhodné odchýlky ζ_l spĺňajúce nasledujúce vlastnosti:

$$E(\zeta_l) = 0, \quad |\zeta_l| \leq 1, \quad l = 1, \ldots, L, \quad \{\zeta_l\}_{l=1}^{L} \text{ sú nezávislé.} \tag{1.7.3}$$

Trieda pravdepodobnostných rozdelení $\mathcal{P}$ teda obsahuje všetky rozdelenia, ktoré spĺňajú uvedené vlastnosti. Neisté ohraničenie, ktoré chceme transformovať, môžeme zapísať vo

forme:

$$\eta = \sum_{l=1}^{L} \zeta_l \left((a^l)^\top x - b^l \right) \leq b^0 - (a^0)^\top x. \tag{1.7.4}$$

Vzhľadom na predpoklady (1.7.3) je η pri fixnom x náhodnou premennou s nulovou strednou hodnotou a smerodajnou odchýlkou:

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \left((a^l)^\top x - b^l \right)^2 E(\zeta_l^2)} \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \left((a^l)^\top x - b^l \right)^2}.$$

Keďže chceme, aby ohraničenie (1.7.4) platilo s pravdepodobnosťou aspoň $1-\epsilon$, využijeme fakt, že η len s malou pravdepodobnosťou prekročí Ω násobok svojej smerodajnej odchýlky. Takto získame parametrickú bezpečnú aproximáciu:

$$\Omega \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \zeta_l \left((a^l)^\top x - b^l \right)^2} \leq b^0 - (a^0)^\top x. \tag{1.7.5}$$

Táto nerovnosť zabezpečuje, že pôvodné pravdepodobnostné ohraničenie (1.7.4) bude splnené s požadovanou pravdepodobnosťou. Čím väčšia je Ω, tým menšia pravdepodobnosť, že η nesplní ohraničenie. Môžeme si všimnúť, že získaná bezpečná aproximácia má rovnaký tvar ako výsledná reprezentácia robustnej obmeny z jednoduchého príkladu (1.6.2), kde množina odchýlok Z bola modelovaná ako elipsoid:

$$Ball_\Omega = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^L : \|\zeta\|_2 \leq \Omega \right\}.$$

Teda každé prípustné riešenie tejto robustnej obmeny zároveň spĺňa pravdepodobnostné ohraničenie (1.7.4) s pravdepodobnosťou aspoň $1 - \epsilon$.

Ak by sme namiesto toho považovali odchýlky ζ_l za deterministické a spĺňajúce z (1.7.3) iba predpoklad $|\zeta_l| \leq 1$, $l = 1, \ldots, L$, množinu odchýlok Z by sme definovali ako hyperkocku:

$$Box_1 = \{\zeta : -1 \leq \zeta_l \leq 1,\, l = 1, \ldots, L\}.$$

K nej prislúchajúca robustná obmena je daná vzťahom:

$$\sum_{l=1}^{L} \left| \left((a^l)^\top x - b^l \right) \right| \leq b^0 - (a^0)^\top x \tag{1.7.6}$$

a každé jej prípustné riešenie spĺňa ohraničenie (1.7.4) s pravdepodobnosťou 1.

Získaná robustná obmena (1.7.5) zabezpečuje platnosť ohraničenia s pravdepodobnosťou $1 - \epsilon$, zatiaľ čo robustná obmena (1.7.6) garantuje 100%-nú istotu.

Je možné ukázať [10], že pri $\Omega \geq 7.44$ je spoľahlivosť oboch robustných obmien prakticky rovnaká. Navyše ak je dimenzia vektora odchýlok L veľká, množina $Ball_\Omega$ je neporovnateľne menšia oproti množine Box_1, čo vedie k menej konzervatívnemu riešeniu. To znamená, že aj pri menej obmedzujúcom modeli neistoty dokážeme zachovať vysokú mieru robustnosti.

1.8 Záver kapitoly

Táto kapitola nás oboznámila so základmi teórie robustnej optimalizácie, predstavila kľúčové pojmy, princípy tvorby robustnej obmeny a ukázala, ako sa vysporiadať s výzvami, ktoré prináša. Týmto sme získali jasný pohľad na základnú myšlienku robustnej optimalizácie. Po tomto teoretickom základe sa v nasledujúcich častiach práce zameriame na praktickú aplikáciu tohto prístupu, konkrétne na jeho využitie v oblasti finančných portfólií. Kapitola 2 uvedie tvorbu robustných modelov pre rôzne množiny neistoty, nastavenia parametrov modelov a definuje metriky, ktoré sa v Kapitole 3 použijú na vyhodnotenie výkonnosti vypočítaných portfólií.

2 Robustná optimalizácia a finančné portfóliá

V tejto kapitole predstavíme modely spolu s ich vstupnými dátami, ktoré budeme používať pri numerickej analýze v Kapitole 3. Modely sa venujú voľbe portfólia a okrem referenčného vychádzajú z princípov robustnej optimalizácie predstavených v Kapitole 1.

V Podkapitole 2.1 najprv stručne priblížime historický kontext robustnej optimalizácie v tejto oblasti aj s ohľadom na modely použité v tejto diplomovej práci. Následne v Podkapitole 2.2 predstavíme základný mean-variance model a ukážeme jeho robustnú obmenu. V Podkapitole 2.3 uvedieme množiny neistoty, s ktorými budeme pracovať. Po formulácii modelov sa v Podkapitole 2.4 zameriame na výber dát a spôsob odhadu vstupov a v Podkapitole 2.5 popíšeme výpočet váh portfólií pomocou rebalansovania. V Podkapitole 2.6 vysvetlíme voľbu parametrov pre jednotlivé množiny neistoty. V Podkapitole 2.7 definujeme metriky výkonnosti portfólií, ktoré následne analyzujeme v ďalšej kapitole.

2.1 Historický vývoj robustnej optimalizácie portfólia

Prvé koncepty robustnej optimalizácie v matematickom programovaní popísal už Soyster v roku 1973 [1]. V 90. rokoch Ben-Tal a Nemirovski významne posunuli túto oblasť zavedením elipsoidovej množiny neistoty a ukázali, že robustné verzie lineárnych a kvadratických problémov (vrátane Markowitzovho portfólia) sa dajú efektívne riešiť ako programy s kužeľovými obmedzeniami druhého rádu SOCP v čase porovnateľnom s tradičnými metódami [11, 12].

Na prelome tisícročí Goldfarb a Iyengar (2003) rozšírili elipsoidálne množiny neistôt o štruktúry vychádzajúce z faktorových modelov pre priemerné výnosy, faktorové zaťaženia aj reziduálne kovariancie a ukázali, že príslušné robustné problémy sa tiež redukujú na SOCP bez dramatického nárastu výpočtovej náročnosti. Taktiež sformulovali robustné verzie problémov optimálneho výberu portfólia na báze mean-variance, problému výberu portfólia s maximálnym Sharpeovým pomerom a problému výberu portfólia podľa VaR [13].

V roku 2004 Tütüncü a Koenig skúmali intervalové množiny neistôt pre očakávané výnosy a kovariancie a hľadali ich horné a dolné ohraničenia. Bohužiaľ, autori neuvádzajú, podľa čoho našli tieto ohraničenia. Robustné portfólio porovnávali s klasickým portfóliom bez neistoty pomocou efektívnych hraníc, ktoré počítali v prípade priaznivých a nepriaznivých podmienok pre portfólio [14].

Od roku 2010 aplikovali Ben-Tal a kol. prístupy z teórie konvexných rizikových mier na portfóliá, čím ďalej zlepšili ochranu proti riziku strát pri minimálnom dopade na celkovú výkonnosť [15].

Modely formulované v tejto kapitole z podstatnej časti vychádzajú z práce [18]. Autorky Kilianová a Trnovská v roku 2013 v nej opísali spôsob, akým previesť náročnú nelineárnu Hamilton-Jacobi-Bellmanovu rovnicu, ktorá modeluje problém stochastickej dynamickej optimalizácie portfólia cez Riccatiho transformáciu na jednoduchší tvar kvázi-lineárnej parciálnej diferenciálnej rovnice. Pri tomto prevode vznikla ako pomocný problém úloha kvadratického programovania, v ktorej sa optimalizuje výnos a riziko portfólia. Jej výsled-

kom sú optimálne váhy portfólia pri rôznych hodnotách koeficientu averzie voči riziku φ. Autorky sa ďalej zaoberali touto úlohou, ktorú rozšírili o pridanie rôznych druhov diskrétnych a konvexných kompaktných množín neistoty pre vstupné dáta kovariančnej matice a vektoru výnosov. Po tejto úprave skúmali jej správanie pri aplikovaní na reálne dáta.

V posledných rokoch sa oblasť robustnej optimalizácie portfólia dynamicky rozširuje o rôzne nové a sofistikované metódy, vedúce k neustálemu zdokonaľovaniu presnosti a robustnosti portfóliových modelov a k efektívnemu riešeniu zložitých problémov. Jedným z inovatívnych prístupov je využitie techník strojového učenia, ako v roku 2019 demonštrovali Perrin a Roncalli [16].

2.2 Mean-variance model a jeho robustná obmena

Pre účely našej aplikácie sme sa rozhodli využiť mean-variance model, ktorý bol prvýkrát formulovaný Harrym Markowitzom v roku 1952 [23] a priniesol revolučný pohľad na investovanie tým, že do úvahy berie nielen očakávaný výnos, ale aj mieru rizika, vyjadrenú pomocou variability výnosov. Cieľom modelu je nájsť také rozloženie investícií, ktoré maximalizuje výnos pri danej úrovni rizika, resp. minimalizuje riziko pri danom výnose.

Mean-variance model pre optimalizáciu portfólia s n aktívami je postavený na myšlienke, kde sa hľadá kompromis medzi maximalizáciou výnosu a minimalizáciou disperzie výnosov a je formulovaný nasledovne [19]:

$$\begin{aligned} \max_{w\in\mathbb{R}^n} \quad & w^\top\mu - \tfrac{\varphi}{2}w^\top\Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & w^\top\mathbf{1} = 1, \\ & w \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Model sa skladá z hľadaného vektoru váh $w \in \mathbb{R}^n$, ktorý každému z n aktív priradí určitú váhu, resp. podiel z celkovej investovanej sumy. Keďže chceme použiť celú investovanú sumu, model zahŕňa ohraničenie $w^\top\mathbf{1} = 1$, kde vektor $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ je vektorom samých jednotiek. Model neuvažuje krátke pozície, tzv. shorting, čo zabezpečuje ohraničenie váh zdola nulou. Zadaná matica $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kovariančná matica predstavujúca rozptyly a kovariancie mier výnosov jednotlivých akcií. Vektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ je vektorom očakávaných vý-

nosov jednotlivých aktív. Skalárny parameter φ predstavuje koeficient averzie voči riziku, ktorému sa viac venujeme v časti 2.6.4.

Tento model je deterministický, s parametrom φ a jeho vstupmi sú očakávané výnosy μ a kovariančná matica Σ. Vo všeobecnosti sa tieto vstupy odhadujú z historických dát a predpokladá sa, že odhady sú postačujúco presné.

V našej práci sa zameriavame na jeho robustnú obmenu (1.5), ktorá zohľadňuje neistotu vstupných dát – teda očakávaných výnosov a kovariančnej matice – odhadnutých z historických dát. Znamená to, že pri ostatných modeloch budeme požadovať, aby každý vektor váh okrem základných ohraničení spĺňal aj dodatočné podmienky vyplývajúce z definovanej množiny neistoty. Vďaka tomu získame modely, ktorých riešenie nie je prispôsobené len jednému konkrétnemu prípadu (t. j. jednému odhadu vstupov), ale berie do úvahy aj všetky možné realizácie, ktoré sa nachádzajú v rámci danej množiny neistoty. Niektoré z týchto realizácií predstavujú nepriaznivejšie scenáre – napríklad nižšie očakávané výnosy alebo väčšie výkyvy. Problém optimálnej skladby robustného portfólia v kontexte teórie predstavenej v Kapitole 1 zodpovedá úlohe nájsť také rozloženie váh, ktoré vedie k čo najlepšiemu výsledku aj v najhoršom možnom scenári z množiny neistoty.

Vo všeobecnosti robustná obmena úlohy (2.2.1) za prítomnosti neistoty ako očakávaných výnosov, tak aj kovariančnej matice nadobúda (1.5.1) tvar:

$$\begin{aligned} \max_{w\in\mathbb{R}^n} \min_{\mu\in\mathbf{U}_\mu,\Sigma\in\mathbf{U}_\Sigma} \quad & w^\top\mu - \tfrac{\varphi}{2} w^\top\Sigma w \\ \text{s.t.} \quad w^\top\mathbf{1} &= 1, \\ w &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

kde $\mathbf{U}_\mu$ je množina neistoty očakávaných výnosov a $\mathbf{U}_\Sigma$ je množina neistoty kovariančnej matice.

Úlohu (2.2.2) prevedieme na ekvivalentný tvar neobsahujúci neistotu v účelovej funkcii podľa (1.5.1):

$$\begin{aligned} \max_{w\in\mathbb{R}^n,\delta_1\in\mathbb{R},\delta_2\in\mathbb{R}_+} \quad & \delta_1 - \tfrac{\varphi}{2}\delta_2 \\ \text{s.t.} \quad & w^\top\mu - \delta_1 \geq 0, \mu \in \mathbf{U}_\mu \\ & -w^\top\Sigma w + \delta_2 \geq 0, \Sigma \in \mathbf{U}_\Sigma \\ & w^\top\mathbf{1} = 1, \\ & w \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Úlohy (2.2.2), resp. (2.2.3) predstavujú všeobecnú formuláciu modelov používaných v Kapitole 3, ktoré sa vzájomne líšia voľbou použitých množín neistoty, ktoré predstavíme v ďalšej časti. Vlastnosti úlohy samozrejme závisia práve od ich voľby, pre modely použité v tejto práci však vždy ide o konvexné úlohy.

2.3 Množiny neistoty

V tejto podkapitole si predstavíme štyri množiny neistoty, ktoré sme sa rozhodli použiť v našej aplikácii. Tieto množiny neistoty sú :

- množina neistoty pre kovariančnú maticu s pevnou diagonálou (2.3.1),
- množina neistoty očakávaných výnosov z časových úsekov (2.3.2),
- elipsoidová množina neistoty očakávaných výnosov (2.3.3),
- boxová množina neistoty očakávaných výnosov (2.3.4).

2.3.1 Neistota s pevnou diagonálou kovariančnej matice

Jedna z množín neistoty, ktorú sme sa rozhodli zakomponovať na základe článku [18], má tvar:

$$\mathbf{U}_\Sigma = \{\Sigma \mid \operatorname{diag}(\Sigma) = d^2 = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2), \Sigma \succeq 0\}. \tag{2.3.1}$$

Táto množina predstavuje kovariančné matice, ktoré sú kladne semidefinitné, pričom ich diagonálu d^2 poznáme. Diagonála d^2 je rovnaká ako diagonála kovariančnej matice odhadnutej z historických dát. Pri tejto množine neistoty vieme priamo z tvaru úlohy (2.2.2)

dostať formuláciu:

$$\begin{aligned} \max_{w\in\mathbb{R}^n} \quad & w^\top \mu - \tfrac{\varphi}{2} w^\top dd^\top w \\ \text{s.t.} \quad & w^\top \mathbf{1} = 1, \\ & w \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

kde $dd^\top$ je matica, ktorá je kladne semidefinitná, čo zaručuje nerovnosť

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : v^\top dd^\top v = ||d^\top v||_2^2 \geq 0.$$

Táto matica $dd^\top$ má zároveň diagonálu rovnakú ako vektor d^2.

Formuláciu (2.3.2) sme dostali využitím poznatku, že práve matica $dd^\top$ predstavuje najhorší možný scenár z množiny neistoty.Vysvetlíme v skratke, prečo tomu tak je. Výraz $\min_{\Sigma\in\mathbf{U}_\Sigma} -\frac{\varphi}{2} w^T \Sigma w$ z účelovej funkcie úlohy (2.2.2) pre množinu neistoty (2.3.1) viem ekvivalentne prepísať ako

$$\min_{\Sigma\in\mathbf{U}_\Sigma} -\frac{\varphi}{2} w^T \Sigma w = \min_{\Sigma\in\mathbf{U}_\Sigma} -\frac{\varphi}{2} \sum_{i\neq j}^{n} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Keďže neuvažujeme krátke pozície, tento výraz nadobúda minimum práve vtedy, keď sú jednotlivé korelačné koeficienty rovné jednej. Pozrime sa teraz na tvar matice $dd^\top$:

$$dd^\top = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \cdots & \sigma_1\sigma_n \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1\sigma_n & \sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že práve tento prípad zodpovedá situácii, kde korelácia medzi ľubovoľnými dvoma akciami X_i a X_j je rovná:

$$\rho_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{\sigma_i \sigma_j} = 1.$$

To znamená, že pri množine neistoty danej (2.3.1) je najhorším scenárom práve prípad, kde sú všetky akcie dokonale korelované a bežný prínos diverzifikácie vypadáva, pretože všetky aktíva sa hýbu synchronizovane.

2.3.2 Neistota očakávaných výnosov z časových úsekov

Ďalšia množina neistoty z článku [18], ktorú sme sa rozhodli zakomponovať do robustnej optimalizácie vychádza z prístupu, kde historické dáta o dĺžke N obchodovacích dní rozdelíme na k rovnako dlhých časových úsekov, pričom každý úsek pokrýva rovnaký počet obchodovacích dní. Pre každý z týchto úsekov vypočítame očakávaný denný výnos portfólia, čo nám poskytne k rôznych vektorov očakávaného výnosu. Tieto vektory následne tvoria diskrétnu množinu neistoty pre očakávané výnosy akcií. Kovariančná matica výnosov je v tomto modeli fixná a odhadnutá z historických dát. Keďže množina neistoty je diskrétna, formulácia robustnej obmeny je v tomto prípade priamočiara. Robustná optimalizácia s touto množinou neistoty má nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} \max_{w\in\mathbb{R}^n,\delta_1\in\mathbb{R}_+} \quad & \delta_1 - \tfrac{\varphi}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & w^\top \mu_i - \delta_1 \;\geq\; 0, \quad i = 1,\ldots,k, \\ & w^\top \mathbf{1} \;=\; 1, \\ & w \;\geq\; 0, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

kde μ_i reprezentujú očakávané výnosy z jednotlivých časových úsekov a Σ je kovariančná matica, ktorá zostáva pevná.

Táto úloha hľadá váhy w zohľadňujúce najhorší možný scenár z množiny neistoty k rôznych vektorov očakávaných výnosov. Tento prístup umožňuje lepšie zachytiť variabilitu očakávaných výnosov v čase a zohľadniť rôzne historické scenáre výnosov, ktoré mohli nastať. Výsledkom je robustnejší model optimalizácie, ktorý je menej citlivý na zmeny vo výnosoch jednotlivých aktív v rôznych časových obdobiach.

2.3.3 Elipsoidová neistota očakávaných výnosov

V časti (1.6.2) sme sa zaoberali robustnou optimalizáciou v prípade, keď odchýlky ζ pochádzali z elipsoidovej množiny neistoty $Z = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^L : \|\zeta\|_2 \leq \Omega\right\}$. Úpravami sme sa dopracovali ku konvexnému ohraničeniu (1.6.5). Teraz sa budeme zaoberať aplikáciou týchto úprav na problematiku optimalizácie portfólia opäť na základe článku [18]. Podobne ako v (1.6.2), aj tu predpokladáme, že neistota v očakávanom výnose je reprezentovaná

elipsoidovou množinou. Táto množina je definovaná ako:

$$\mathbf{U}_\mu = \left\{ \mu \mid (\mu - \mu_0)^\top \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) \leq \gamma \right\}, \tag{2.3.4}$$

alebo ekvivalentne podľa [18]:

$$\mathbf{U}_\mu = \left\{ \mu_0 + \sqrt{\gamma} L u \mid \|u\|_2 \leq 1 \right\},$$

kde μ_0 je očakávaný výnos odhadnutý z historických dát, Σ je kovariančná matica tiež odhadnutá z historických dát, a L je matica, pre ktorú platí $LL^\top = \Sigma$. Veľkosť množiny je určená parametrom $\sqrt{\gamma}$, ktorý môže byť v našej optimalizácii rôzne nastavený. Robustná optimalizácia pre túto množinu neistoty je formulovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} \max_{w \in \mathbb{R}^n, \delta_1 \in \mathbb{R}_+} \quad & \delta_1 - \tfrac{\varphi}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & \mu^\top w \geq \delta_1, \quad \mu \in \mathbf{U}_\mu, \\ & w^\top \mathbf{1} = 1, \\ & w \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Podobne ako v (1.6.2), kde sme aplikovali Cauchy-Schwarzovu nerovnosť na ohraničenie robustnej optimalizácie, môžeme aj v tomto prípade využiť rovnaký prístup na úpravu podmienky $-\mu^\top w \leq -\delta_1$, čím získame ekvivalentný tvar formulácie pre najhorší možný scenár [22]:

$$-\mu^\top w = (-\mu_0 + \sqrt{\gamma} L u)^\top w = -\mu_0^\top w + \sqrt{\gamma} u^\top L^\top w \leq -\mu_0^\top w + \sqrt{\gamma} \|u\|_2 \|L^\top w\|_2,$$

kde okrajový prípad nastáva pre $\|u\|_2 = 1$, teda:

$$-\mu^\top w = -\mu_0^\top w + \sqrt{\gamma} u^\top L^\top w \leq -\mu_0^\top w + \sqrt{\gamma} \|L^\top w\|_2.$$

Týmto spôsobom dostaneme ekvivalentný tvar robustnej optimalizácie, ktorý vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \max_{w \in \mathbb{R}^n, \delta_1 \in \mathbb{R}_+} \quad & \delta_1 - \tfrac{\varphi}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & \mu_0^\top w - \sqrt{\gamma} \|L^\top w\|_2 - \delta_1 \geq 0, \\ & w^\top \mathbf{1} = 1, \\ & w \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

V tejto úlohe je $\sqrt{\gamma}$ parameter, ktorý škáluje veľkosť elipsoidu a môže byť nastavený na rôzne hodnoty pri optimalizácii. My sa voľbe jeho hodnoty bližšie venujeme v (2.6.2).

2.3.4 Boxová neistota očakávaných výnosov

Boxová množina neistoty, ktorú sme prebrali z článku [27], modeluje neistotu očakávaných výnosov μ okolo nominálnych hodnôt μ_0, ktoré sú odhadnuté z historických dát. Kovariančnú maticu rovnako odhadujeme z historických dát. Každý výnos μ_i sa môže od svojej nominálnej hodnoty μ_{0i} odchýliť najviac o $100 \cdot \beta\%$. Boxovú množinu neistoty definujeme nasledovne:

$$\mathbf{U}_\mu = \{\mu \mid |\mu_i - \mu_{0i}| \leq \beta|\mu_{0i}|,\ \forall i\}\,.$$

V rámci tejto množiny neistoty najhorší možný scenár nastáva vtedy, keď každá zložka μ_i nadobúda svoju minimálnu možnú hodnotu:

$$\mu_i = \mu_{0i} - \beta|\mu_{0i}|.$$

Optimalizačná úloha pre najhorší možný scenár očakávaných výnosov má potom nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} \max_{w\in\mathbb{R}^n,\delta_1\geq 0} \quad & \delta_1 - \tfrac{\varphi}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & (\mu_0 - \beta|\mu_0|)^\top w - \delta_1 \ \geq\ 0, \\ & w^\top \mathbf{1} \ =\ 1, \\ & w \ \geq\ 0. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Parameter β môžeme nastavovať rôzne, podobne ako parameter $\sqrt{\gamma}$ v prípade elipsoidovej množiny neistoty. My sa voľbe jeho hodnoty bližšie venujeme v (2.6.3).

2.4 Príprava vstupov do modelu

V numerickej časti v Kapitole 3 budeme pracovať s vybranými akciami z akciového indexu S&P 500, ktorý zahŕňa 500 najväčších spoločností obchodovaných na burzách v USA. Z tohto indexu sme zvolili tridsať popredných akcií (k dátumu 14.10.2024), ktoré sú uvedené v Tabuľke 1.

Na zber a spracovanie dát sme použili programovacie prostredie R Studio. Údaje boli stiahnuté za časové obdobie od 07.10.2021 do 11.10.2024, čo predstavuje dostatočne dlhé

1	AAPL	7	AVGO	13	UNH	19	COST	25	ORCL
2	CSCO	8	BRK.B	14	XOM	20	JNJ	26	CRM
3	MSFT	9	WFC	15	V	21	WMT	27	MRK
4	AMZN	10	LLY	16	MA	22	ABBV	28	AMD
5	META	11	JPM	17	HD	23	NFLX	29	KO
6	GOOGL	12	TSLA	18	PG	24	BAC	30	CVX

Tabuľka 1: Zoznam tridsiatich popredných akcií indexu S&P 500 ku dňu 14.10.2024.

obdobie na analyzovanie vývoja firiem a poskytuje množstvo relevantných údajov. Aj keď sme pracovali výhradne s americkými akciami, overili sme si, že všetky vybrané akcie boli obchodované v rovnaké dni. Po tomto overení sme vytvorili maticu denných "adjusted close" cien (zohľadňujúcich dividendy a ďalšie faktory) s rozmermi 757×30, kde 757 predstavuje počet obchodovacích dní. Z týchto dát sme následne vypočítali maticu denných výnosov, ktorej rozmery sú 756×30. Rovnako sme zistili denný výnos amerického bezrizikového 5-ročného dlhopisu k dátumu 10.10.2023 [21], keď sme začali testovať správanie portfólií. Tento dátum sme si zvolili, pretože hodnota bezrizikovej úrokovej sadzby bola rovnaká počas celého obdobia testovania. Takto simulujeme situáciu, v ktorej ak by sme sa rozhodli investovať do tejto bezrizikovej sadzby namiesto do portfólia, mali by sme po celý čas rovnaký výnos z tohto dlhopisu.

V uvedených modeloch odhadujeme vstupy – teda kovariančnú maticu $\Sigma \in \mathbb{R}^{30\times30}$ a vektor očakávaných výnosov $\mu \in \mathbb{R}^{30}$ – na základe historických dát. Denné výnosy akcií sú usporiadané v matici $X \in \mathbb{R}^{N\times30}$, kde každý stĺpec X^i reprezentuje výnosy jednej akcie počas sledovaného obdobia dĺžky N. Vektor očakávaných výnosov odhadujeme pomocou výberového priemeru ako

$$\mu_i = \mathbb{E}(X^i), \quad i = 1, \ldots, 30,$$

a kovariančnú maticu pomocou výberovej kovariancie:

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X^i, X^j), \quad i, j = 1, \ldots, 30.$$

Odhadnutá matica Σ je symetrická a priamo z definície výberového odhadu kovariancie kladne semidefinitná, čo zaručuje dobre definovanú mieru rizika portfólia a vhodné vlastnosti pre optimalizačný model.

2.5 Portfólio s rebalansovaním

Pre porovnanie výkonnosti portfólií postupujeme podľa prístupu opísaného v prácach [17], [25]. Používame metódu nazývanú *rolling horizon*, pri ktorej sa portfólio optimalizuje na základe dát z pevne stanoveného časového okna (tzv. horizontu), ktorý sa pravidelne posúva dopredu. Tento prístup je známy ako jednostupňová optimalizácia s opakovaným rebalansovaním. V nasledujúcom texte podrobnejšie vysvetlíme, ako túto metódu implementujeme na našich dátach.

Ako už bolo spomenuté, na výpočet používame dáta pokrývajúce obdobie necelých troch rokov, čo zodpovedá približne 756 obchodovacím dňom (jeden rok predstavuje 252 obchodovacích dní). Na začiatku výpočtu máme k dispozícii horizont prvých dvoch rokov denných výnosov $X \in \mathbb{R}^{504\times 30}$, teda 504 dní (prvé tréningové obdobie), slúžiaci na výpočet prvých vstupov μ a Σ, množín neistoty a váh pre klasické aj robustné portfóliá. Po uplynutí jedného mesiaca (21 obchodovacích dní) rebalansujeme portfólio pridaním dát za najnovší mesiac a súčasným vylúčením dát za najstarší mesiac, podobne ako v práci [25]. Na tejto novej aktualizovanej sade dát opätovne prepočítame vstupy, množiny neistoty a váhy všetkých portfólií, aby reflektovali aktuálne trhové podmienky. Rebalansovanie opakujeme jedenásťkrát, pričom používame prvých jedenásť mesiacov dát z tretieho roka, teda 231 obchodovacích dní. Pre každé portfólio takto získame dokopy sadu dvanástich váh.

Tretí rok dát využívame aj na testovanie výkonnosti portfólií, pričom každé testovacie obdobie $t = 1, \ldots, 12$ predstavovalo jeden mesiac (21 obchodovacích dní). To znamená, že váhy portfólia P vypočítané v tréningovom období t testujeme na mesiaci dát nasledujúcom po tomto tréningovom období. Všetky váhy sú testované počas nasledujúceho mesiaca po ich výpočte a potom zo získaných výsledkov dokopy vyhodnocujeme celkovú výkonnosť portfólia počas tretieho roka.

2.6 Príprava parametrov do modelu

V tejto podkapitole sa budeme bližšie venovať tomu, ako nastaviť jednotlivé parametre v modeloch, konkrétne sa pozrieme na to, koľko časových úsekov v množine neistoty (2.3.2) si zvolíme a akej dĺžky budú. Potom sa presunieme k voľbe parametrov množín neistoty $\sqrt{\gamma}$ a β a koeficientu averzie voči riziku φ.

2.6.1 Počet časových úsekov

V rámci jedného rebalančného obdobia pracujeme s historickými dátami v dĺžke dvoch rokov (504 obchodovacích dní). Tieto dni rozdelíme na 24 rovnako dlhých časových úsekov v dĺžke 21 obchodovacích dní (približne jeden mesiac dát), z ktorých odhadujeme výnosy. Takto diskrétna množina neistoty očakávaných výnosov z časových úsekov bude obsahovať 24 vektorov očakávaných výnosov.

2.6.2 Parameter $\sqrt{\gamma}$

Pre odvodenie hodnoty parametra $\sqrt{\gamma}$ nám napadlo pracovať s intervalom spoľahlivosti výberového priemeru. Uvažujme, že akcie sú závislé náhodné premenné, kde n je počet akcií a m je počet dní (dĺžka dátového obdobia) a ktoré pochádzajú z normálneho viacrozmerného rozdelenia. V tomto prípade vieme vypočítať pre všetky akcie vektor výberového priemeru z matice denných výnosov $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kde jedna zložka vektora sa počíta ako

$$\bar{X_j} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{ij}, \forall j = 1, \ldots, n$$

a výberovú kovariančnú maticu ako

$$S = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^\top.$$

Pre výberový priemer by sme teraz chceli určiť 95% interval spoľahlivosti, [26]. Ten je založený na Hotellingovej T^2 štatistike a je daný nerovnosťou

$$(\bar{X} - \mu)^\top S^{-1}(\bar{X} - \mu) \leq \frac{n}{(m-n)} F_{n,m-n,\alpha}. \tag{2.6.1}$$

Tvar štatistiky na ľavej strane nerovnosti (2.6.1) je ekvivalentný tvaru elipsoidu v množine neistoty (2.3.4), pretože $\bar{X} = \mu_0$. Preto parameter $\sqrt{\gamma}$ stanovíme na základe pravej strany nerovnosti (2.6.1). V našom prípade máme $n = 30$ akcií a $m = 504$ dní. Pravá strana sa preto upraví na

$$\sqrt{\frac{30 \cdot F_{30,504-30,0.05}}{504 - 30}},$$

kde F je hodnota z F-rozdelenia s 30 a 474 stupňami voľnosti na 5% hladine významnosti. Po výpočte tejto hodnoty dostávame približne 0.3064. Táto hodnota predstavuje škálovací parameter elipsoidu, ktorý je odvodený z intervalu spoľahlivosti.

Na základe toho môžeme pôvodnú formu $\mu_0 + \sqrt{\gamma}Lu$ pre elipsoid upraviť na

$$\mu_0 + 0.3064 \cdot Lu,$$

čím získame interval spoľahlivosti pre dáta, ak by sme predpokladali, že ide o náhodné premenné z normálneho rozdelenia. Aj keď predpokladáme, že naše údaje nie sú náhodné, ale neznáme a patria do nejakej množiny neistoty, tento spôsob odvodzovania nám poskytuje odhad tvaru množiny neistoty a škálovacieho parametra $\sqrt{\gamma}$. Je dôležité zdôrazniť, že hodnota parametra $\sqrt{\gamma}$ závisí výhradne od počtu dní historických dát a počtu akcií, ktoré zostávajú medzi jednotlivými rebalančnými obdobiami rovnaké. Preto odvodená hodnota $\sqrt{\gamma} = 0.3064$ ostáva počas všetkých rebalančných období konštantná.

2.6.3 Parameter β

V rámci analýzy sme sa rozhodli testovať parameter β v dvoch rôznych nastaveniach, ktoré nám umožňujú porovnať správanie portfólií pri odlišných prístupoch k definovaniu veľkosti boxovej množiny neistoty.

Prvým z nich je konštantná hodnota $\beta = 1$, čo znamená, že maximálna prípustná odchýlka očakávaného výnosu každej akcie bude v každom rebalančnom období rovná 100 % jej očakávaného výnosu. Inými slovami, najhorší možný scenár v rámci tejto množiny neistoty nastáva vtedy, keď všetky očakávané výnosy poklesnú presne o svoju hodnotu.

Pre prípadné porovnanie boxovej a elipsidovej množiny neistoty je však výhodné formulovať aj takú voľbu parametru β, kde sú výsledné množiny neistoty veľkostne porovnateľné.

Rozhodli sme sa preto ako druhú alternatívu nastaviť parameter β tak, aby objem boxovej množiny neistoty zodpovedal objemu elipsoidu s parametrom $\sqrt{\gamma}$ voleným podľa (2.6.2). Je však dôležité poznamenať, že rovnosť objemov ešte nezaručuje ich podobnosť, keďže prienik množín môže byť veľmi malý a navyše sa môže v čase meniť. Napriek tomu považujeme rovnosť objemov za rozumné kritérium, ktoré umožňuje férové porovnanie modelov.

Najprv si uvedieme vzorce pre výpočet objemu oboch množín. Objem elipsoidovej množiny neistoty je daný vzťahom [43, 44]:

$$V_E = \frac{2}{n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}(\sqrt{\gamma})^n \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i},$$

kde $\sqrt{\gamma}$ je škálovací parameter elipsoidu a λ_i predstavuje i-tu vlastnú hodnotu matice Σ.

Objem boxovej množiny neistoty je daný vzťahom:

$$V_B = 2^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} |\mu_{0i}|.$$

Z požiadavky rovnosti objemov týchto množín vyplýva, že parameter β musí spĺňať:

$$\beta = \left(\frac{\frac{2}{n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}(\sqrt{\gamma})^n \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}}{2^n \prod_{i=1}^{n}|\mu_{0i}|} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Takto odvodeným parametrom β zabezpečíme, že objemy oboch množín budú rovnaké. Na rozdiel od parametra $\sqrt{\gamma}$, ktorý zostáva počas všetkých rebalančných období fixný, hodnota parametra β sa v každom období aktualizuje v závislosti od objemu elipsoidu a aktuálnych očakávaných výnosov.

2.6.4 Koeficient averzie voči riziku φ

Koeficient averzie voči riziku môžeme interpretovať ako mieru ochoty investora vymieňať riziko za výnos. Investor s vyššou averziou voči riziku vyžaduje väčšiu kompenzáciu vo forme vyššieho výnosu, aby dosiahol rovnakú úroveň spokojnosti ako investor s nižšou averziou [35]. Hodnota koeficientu averzie voči riziku v odbornej literatúre sa často pohybuje v rôznych rozmedziach ([36], [37], [38], [39] a [40]). Výsledky uvedené v Kapitole 3 sú

počítané pre hodnotu koeficientu averzie voči riziku $\varphi = 10$. Túto hodnotu si volíme ako hornú hranicu bežne používaného rozsahu, pretože reprezentuje investora s veľmi vysokou averziou voči riziku, ktorého cieľom je primárne minimalizovať volatilitu portfólia, a to aj za cenu nižších očakávaných výnosov. Neskôr v časti 3.3 používame aj iné voľby hodnoty tohto koeficientu.

2.7 Metriky pre analýzu portfólií

Po definovaní spôsobov výpočtu a použitých množín neistoty pre optimalizáciu portfólií prechádzame k definovaniu metrík, ktoré sme sa rozhodli použiť na komplexné hodnotenie výkonnosti portfólií z rôznych hľadísk. Najprv predstavíme základné metriky výkonnosti:

- očakávaný nadvýnos (2.7.1),
- volatilita (2.7.2),
- Sharpeov pomer (2.7.3),

ktoré poskytujú prehľad o celkovej návratnosti a riziku portfólia. Následne sa zameriame na stabilitu portfólií cez analýzu distribúcie váh a mieru obchodnej aktivity pomocou metrík:

- boxploty (2.7.4),
- turnover (2.7.5).

Ďalej budeme sledovať vývoj kumulatívneho kapitálu, na základe ktorého zhodnotíme rast investovaného kapitálu (2.7.6). Hoci vývoj kumulatívneho kapitálu odhaľuje celkový rast investície, pre komplexné hodnotenie portfólia je dôležité venovať pozornosť aj rizikovým aspektom, najmä extrémnym prepadom. Preto prechádzame k metrikám, ktoré sa zameriavajú na negatívne výkony:

- Maximum drawdown (MDD) (2.7.7),
- Ulcer index (UI) (2.7.7),
- Sortinov pomer (2.7.8),
- podmienená hodnota v riziku (CVaR) (2.7.9).

2.7.1 Očakávaný nadvýnos

Priemerný nadvýnos portfólia P odráža návratnosť, ktorú dosiahlo portfólio počas sledovaného obdobia, pričom zohľadňuje vážený priemer nadvýnosov jednotlivých aktív v porovnaní s benchmarkom, ako je bezriziková investícia (v našom prípade americký bezrizikový 5-ročný dlhopis z 2.4). Tento nadvýnos poskytuje prehľad o dlhodobom výkone portfólia v porovnaní s výkonom bezrizikovej investície.

Nadvýnos portfólia za testovacie obdobie $t+1$ sme vypočítali tak, že sme najprv určili kumulatívny nadvýnos každej akcie $\tilde{r}^k_{t+1}, \forall k = 1, \ldots, 30$, čo viedlo k vektoru nadvýnosov akcií $\tilde{r}_{t+1} = (\tilde{r}^1_{t+1}, \ldots, \tilde{r}^{30}_{t+1})$. Následne sme tento vektor vynásobili váhami portfólia z tréningového obdobia t, čím sme získali celkový nadvýnos portfólia za dané testovacie obdobie $\tilde{r}^P_{t+1} = (w^P_t)^\top \tilde{r}_{t+1}$ [41].

Po získaní jednotlivých nadvýnosov portfólia $\tilde{r}^P_{t+1}, \forall t = 1, \ldots, 12$ sme vypočítali priemerný mesačný nadvýnos nasledovne [17]:

$$\hat{\mu}_{\text{mesačný}} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} (w^P_t)^\top \tilde{r}_{t+1} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} \tilde{r}^P_{t+1}$$

Keďže nadvýnosy boli počítané na mesačnej báze (z výnosov za 21 dní), pre účely porovnania sme ich anualizovali. Ročný nadvýnos sme vypočítali pomocou zloženého úročenia:

$$\hat{\mu}_{\text{ročný}} = (1 + \hat{\mu}_{\text{mesačný}})^{12} - 1.$$

2.7.2 Volatilita

Dôležitým doplnkom k nadvýnosu je volatilita, ktorá meria mieru rizika spojeného s kolísaním nadvýnosov portfólia. Vyššia volatilita signalizuje väčšiu neistotu a kolísanie v budúcich nadvýnosoch [41].

Mesačná volatilita portfólia bola určená pomocou štandardnej odchýlky mesačných nadvýnosov [17]:

$$\hat{\sigma}_{\text{mesačná}} = \sqrt{\frac{1}{12-1} \sum_{t=1}^{12} \left((w^P_t)^\top \tilde{r}_{t+1} - \hat{\mu}_{\text{mesačný}} \right)^2}$$

Mesačnú volatilitu sme taktiež anualizovali na ročnú volatilitu odhadnutú vzťahom:

$$\hat{\sigma}_{\text{ročná}} = \hat{\sigma}_{\text{mesačná}} \cdot \sqrt{12}.$$

2.7.3 Sharpeov pomer

Na lepšie pochopenie vzťahu medzi nadvýnosom a rizikom slúži Sharpeov pomer (Sharpe ratio), ktorý vyjadruje, koľko nadvýnosu portfólio prináša na jednotku rizika. Vyššia hodnota Sharpeovho pomeru znamená efektívnejšie riadenie rizika, pričom hodnoty nad 1 sa považujú za dobré, nad 2 za veľmi dobré a nad 3 za výnimočné [41]. Klasický Sharpeov pomer však stráca interpretovateľnosť pri zápornom nadvýnose, pretože mení svoj význam. V takom prípade je vhodnejšie použiť jeho modifikovanú verziu, ktorá zostáva konzistentná aj pri záporných hodnotách nadvýnosu.

Modifikovaný ročný Sharpeov pomer je definovaný nasledovne [20]:

$$SR = \frac{\hat{\mu}_{\text{ročný}}}{\left(\hat{\sigma}_{\text{ročná}}\right)^{\frac{\hat{\mu}_{\text{ročný}}}{\left|\hat{\mu}_{\text{ročný}}\right|}}}.$$

Táto úprava zabezpečuje, že pomer ostáva zmysluplný aj v prípade záporného nadvýnosu, pričom pri nezápornom nadvýnose je totožný s klasickým Sharpeovým pomerom.

2.7.4 Stabilita váh portfólií

Stabilitu váh jednotlivých portfólií v Kapitole 3 sledujeme pomocou boxplotov (Obr. 1), ktoré zobrazujú distribúciu váh akcií počas dvanástich rebalančných období. Prostredníctvom týchto grafov môžeme pozorovať, do koľkých akcií jednotlivé portfóliá investovali, avšak nevieme z nich určiť, v ktorom období boli konkrétne akcie zahrnuté do portfólia. Na x-osi sú uvedené čísla akcií, ktoré aspoň v jednom z rebalančných období dosiahli váhu väčšiu ako zvolená prahová hodnota 10^{-5} (váhy s nižšou hodnotou sme považovali za nulové váhy). Každá z týchto akcií má teda zobrazený svoj vlastný boxplot. Na y-osi sú zachytené váhy akcií v rozsahu od 0 do 1.

Každý boxplot poskytuje prehľad o rozložení váh konkrétnej akcie v portfóliu. Šírka boxu zodpovedá intervalu medzi 25% a 75% percentilom, čiže predstavuje oblasť, v ktorej sa nachádza stredných 50% všetkých váh príslušnej akcie. Čiary (tzv. fúzy), ktoré vychádzajú z boxov, zobrazujú rozpätie zostávajúcich váh, pričom zachytávajú rozsah hodnôt od minimálnej po maximálnu hodnotu, ktorá ešte nie je považovaná za extrémnu. Červené krížiky označujú extrémne váhy (outliery), teda hodnoty, ktoré výrazne vybočujú z bežného rozloženia a nachádzajú sa mimo rozsah fúzov.

Stabilita portfólia je vizuálne reprezentovaná kompaktnosťou boxov a dĺžkou fúzov. Stabilnejšie portfólio má boxy užšie a fúzy kratšie, čo naznačuje menšiu variabilitu váh jednotlivých aktív počas sledovaného obdobia. Naopak, širšie boxy, dlhšie fúzy a prítomnosť extrémnych hodnôt indikujú väčšiu nestabilitu a výraznejšie zmeny vo váhach portfólia v čase.

2.7.5 Turnover

Turnover sa dá interpretovať ako miera obchodnej aktivity v portfóliu a vyjadruje nákladovú efektívnosť portfólia. Konkrétne turnover meria, koľko z portfólia je potrebné predať alebo kúpiť, aby sa získalo nové želané rozloženie váh po rebalansovaní. Vysoký turnover naznačuje, že portfólio si vyžaduje časté alebo rozsiahle zmeny, zatiaľ čo nízky turnover znamená, že portfólio si vyžaduje menej úprav.

Nasledujúca definícia turnoveru sa môže interpretovať ako priemerné percento majetku, s ktorým sa obchoduje v každom období [24]:

$$\text{Turnover} = \frac{1}{11} \sum_{t=1}^{11} \sum_{j=1}^{30} \left| w_{j,t+1}^{k} - w_{j,t+}^{k} \right|,$$

kde $w_{j,t+1}^{k}$ je váha j-tej akcie z portfólia k po rebalansovaní v čase $t+1$ a $w_{j,t+}^{k}$ je váha j-tej akcie z portfólia k pred rebalansovaním v čase $t+1$. Čo sú ale váhy v čase $t+1$ pred rebalansovaním?

Váhy pred rebalansovaním $w_{j,t+}^{k}$ odrážajú, ako sa menia váhy jednotlivých aktív v portfóliu bez nášho zásahu — to znamená, ako sa mení zloženie portfólia od posledného rebalansovania po nasledujúce rebalansovanie len v dôsledku zmien cien na trhu. Tieto váhy vieme

vypočítať ako:

$$w^k_{j,t+} = \frac{w_{j,t} \cdot r_{j,t+1}}{\sum_{i=1}^{N} w^k_{i,t} \cdot r_{i,t+1}},$$

kde $r_{j,t+1}$ je hrubý výnos j-tej akcie a počíta sa ako podiel ceny akcie v čase $t+1$ a v čase t. Tieto váhy sú úmerné tomu, ako sa jednotlivé akcie zmenili v porovnaní s ostatnými akciami v portfóliu. Keď máme vypočítané váhy pred rebalansovaním $w^k_{j,t+}$, môžeme porovnať tieto váhy s cieľovými váhami po rebalansovaní $w^k_{j,t+1}$ a vypočítať turnover.

Turnover by sme mali vnímať ako indikátor obchodnej aktivity, nie priamo stability váh portfólia charakterizovanej rozdielom medzi váhami portfólia v čase t a $t+1$ (teda $w_{t+1} - w_t$), lebo zahŕňa okrem variability váh aj ďalšie faktory, ako napríklad to, že ceny aktív sa menia, a tým pádom sa mení aj zloženie portfólia [24].

Pri interpretácii výsledkov je dôležité si uvedomiť, že robustnosť portfólia automaticky neimplikuje nižší turnover. Hoci cieľom robustnej optimalizácie je nachádzať riešenia menej citlivé na neistotu vstupných parametrov, v praxi môže robustné portfólio meniť svoje váhy výrazne – najmä v prípadoch, keď takéto zmeny predstavujú racionálnu reakciu na nepriaznivé trhové podmienky. Vyšší turnover tak môže byť aj dôkazom, že portfólio dokázalo pružne prispôsobiť svoje zloženie s cieľom minimalizovať riziko alebo maximalizovať dlhodobý výnos.

2.7.6 Vývoj kumulatívneho kapitálu portfólií

Po analýze numerických metrík a váh jednotlivých portfólií sa v tejto časti zameriavame na celkový rast kapitálu investora pri použití rôznych investičných stratégií. Cieľom je graficky ukázať, ako sa v čase menila hodnota investície v robustných portfóliách v porovnaní s klasickým mean-variance (MV) portfóliom (2.2.1). Tento prístup umožňuje identifikovať, ktoré portfóliá dokázali lepšie zvládnuť trhové výkyvy a ktoré portfóliá stratégia robustnej optimalizácie nasmerovala k stabilnejšiemu rastu kapitálu.

Pre každé rebalančné obdobie definujeme kumulatívny kapitál robustného portfólia W^r_t pomocou vzorca [13]:

$$W^r_{t+1} = \prod_{k=21(t-1)+1}^{21t} (1 + r_k)^\top w^r_t \cdot W^r_t,$$

kde $t = 1, \ldots, 12$, w_t^r predstavuje váhy robustného portfólia v období t a r_k vektor denných výnosov portfólia za nasledujúcich 21 dní. Analogický vzorec platí pre klasické MV portfólio s váhami w_t^{mv} a hodnotou kapitálu W_t^{mv}. Týmto spôsobom sledujeme, ako sa vyvíjal absolútny kapitál v priebehu všetkých rebalančných období, ak sme na začiatku investovali počiatočný kapitál W_1^r, resp. W_1^{mv}.

2.7.7 Maximum drawdown a Ulcer index

V predchádzajúcej analýze sme sa zamerali na vývoj kumulatívneho kapitálu jednotlivých portfólií. Okrem sledovania celkového rastu kapitálu je však dôležité vyhodnotiť aj riziko výrazných prepadov. Na tento účel využívame metriku maximum drawdown (MDD) a Ulcer index (UI).

2.7.7.1 Maximum drawdown (MDD)

Maximum drawdown (MDD) patrí k najčastejšie používaným ukazovateľom pri hodnotení rizika veľkých poklesov. Nech W_t označuje hodnotu kapitálu portfólia v čase t. Relatívny pokles (drawdown) nazveme

$$d(t) = \frac{\text{peak}_t - W_t}{\text{peak}_t},$$

kde peak_t je najvyššia hodnota kapitálu pred najväčším poklesom na hodnotu W_t do času t. Relatívny pokles určuje veľkosť najväčšieho poklesu do daného času. Maximálny pokles potom definujeme ako

$$\text{MDD} = \max_{1 \le t \le 12} d(t),$$

kde celkový počet pozorovaní je 12. MDD tak predstavuje najväčší zo všetkých čiastkových drawdownov v sledovanom období. V praxi vyjadruje, aký najväčší prepad portfólia nastal od historického maxima dosiahnutého v danom sledovanom období a tým poskytuje dôležitý pohľad na najnepriaznivejšie správanie portfólia z hľadiska rizika. Čím vyššiu hodnotu nadobúda MDD, tým väčší prepad nastal. Formálna definícia a teoretické pozadie tejto metriky sú podrobne rozpracované napríklad v [28, 29].

2.7.7.2 Ulcer index (UI)

Uvedenú veličinu $d(t)$ môžeme využiť aj pri výpočte tzv. Ulcer indexu (UI), ktorý zohľadňuje všetky prepadové obdobia. Ak kapitál portfólia často klesá pod svoje historické maximum, prípadne je dlhší čas v drawdowne, UI nadobúda vyššie hodnoty. Môže tak doplniť informáciu o jednorazovej hĺbke prepadu (MDD) a poskytnúť prehľad o celkovej zápornosti výkonnosti. Formálne ho definujeme:

$$\mathrm{UI} = \sqrt{\frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}\Big(d(t)\Big)^2}.$$

Ak kapitál portfólia opakovane klesá pod svoje historické maximum (t. j. väčšina $d(t)$ je nezanedbateľná), UI nadobúda vyššie hodnoty. Definícia a interpretácia tejto metriky sú popísané napríklad v [30, 31].

2.7.8 Sortinov pomer

Na rozdiel od klasického Sharpeovho pomeru, ktorý pri meraní rizika penalizuje všetky odchýlky nadvýnosov od priemeru bez ohľadu na ich smer, Sortinov pomer sa zameriava výlučne na tzv. "downside volatilitu" – v našom prípade iba na tie nadvýnosy, ktoré sú záporné. Tento prístup lepšie vystihuje skutočné riziko z pohľadu investora, keďže volatilita spôsobená nadpriemerne vysokými nadvýnosmi nie je nežiaduca a teda by nemala byť penalizovaná [42]. Pre investorov citlivých na poklesy môže byť Sortinov pomer obzvlášť dôležitým indikátorom.

Sortinov pomer môžeme formálne definovať v ročne vyjadrenej podobe ako

$$\text{Sortinov pomer} = \frac{r_{\text{ročný}} - r_{\text{cieľový}}}{\sigma_{\text{záporný,ročný}}},$$

kde $r_{\text{ročný}}$ predstavuje ročný výnos portfólia, $r_{\text{cieľový}}$ je cieľový výnos (v našom prípade bezrizikový dlhopis) a $\sigma_{\text{záporný,ročný}}$ označuje ročnú "downside" volatilitu. Táto "downside" odchýlka zahŕňa len záporné nadvýnosy. Výhodou Sortinovho pomeru je teda schopnosť efektívnejšie rozlíšiť, či zvýšená volatilita portfólia pochádza predovšetkým z nežiaducich poklesov alebo naopak, či ide o výkyvy smerom nahor, ktoré sú pre investora pozitívne. Optimálnou hodnotou Sortinovho pomeru sú vyššie čísla, pričom vyššia hodnota znamená

lepší pomer výnosu k nežiaducemu riziku poklesov. Uvedenú definíciu sme prevzali zo zdroja [34].

Pri záporných hodnotách Sortinovho pomeru sa hodnota bližšia nule môže objaviť buď v dôsledku vyššieho očakávaného nadvýnosu (pozitívny vplyv) alebo v dôsledku zvýšenej downside volatility (negatívny vplyv). Preto nemožno jednoznačne povedať, či je portfólio so záporným pomerom bližším nule lepšie alebo horšie.

2.7.9 Podmienená hodnota v riziku (CVaR)

Poslednou sledovanou metrikou v Kapitole 3 bude podmienená hodnota v riziku CVaR (Conditional Value at Risk). Táto miera rizika zachytáva očakávanú hodnotu (priemernú veľkosť) strát v tých najnepriaznivejších prípadoch, keď strata presiahne úroveň Value at Risk (VaR) pri pevne stanovenej hladine. Hodnota VaR pritom predstavuje maximálnu očakávanú stratu pri určitej hladine spoľahlivosti [33]. CVaR je preto užitočným ukazovateľom rizikovosti.

Na výpočet CVaR sme v našej analýze využili denné výnosy portfólia počas sledovaného obdobia. Konkrétne sme vypočítali priemernú hodnotu najhorších 5 % denných výnosov, čo zodpovedá 95%-nej hladine spoľahlivosti. Matematicky definujeme CVaR ako

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = \mathbb{E}[r_{\text{denné}} | r_{\text{denné}} \leq \mathrm{VaR}_\alpha],$$

kde $\alpha = 95\%$, $r_{\text{denné}}$ sú dennými výnosmi portfólia a VaR_α je hodnotou VaR na danej hladine spoľahlivosti. Definícia CVaR, ktorú sme prevzali zo zdroja [32] uvádza nerovnosť v opačnom tvare, keďže pracuje so stratami ako kladnými hodnotami, zatiaľ čo v našom prípade používame výnosy a preto záporné hodnoty predstavujú straty (záporné výnosy). Obe definície sú však matematicky ekvivalentné. Optimálnou hodnotou CVaR sú vyššie čísla (bližšie k nule), pretože to znamená, že očakávané extrémne straty sú nižšie. Naopak, nižšie (viac záporné) hodnoty CVaR indikujú vyššie riziko väčších strát.

3 Výsledky a analýza výkonnosti portfólií

Na základe množín neistoty a zvolenej sady metrík pre hodnotenie portfólií predstavených v Kapitole 2 prechádzame k dôkladnej analýze výsledkov, ktoré boli získané pri nastavení koeficientu averzie voči riziku na hodnotu $\varphi = 10$. Modely sú implementované v MATLABe (verzia R2017a) s využitím CVX (verzia 2.2) pre formuláciu a riešenie konvexných optimalizačných úloh.

V prvej časti tejto kapitoly sa najprv zameriame na vizuálnu interpretáciu prostredníctvom boxplotov 3.1, ktoré ilustrujú stabilitu portfóliových váh a umožňujú identifikovať charakteristické štruktúry jednotlivých modelov. Následne v Podkapitole 3.2 predstavíme súhrnnú tabuľku s numerickými hodnotami metrík predstavených v častiach 2.7.1 – 2.7.3, 2.7.5 a 2.7.7 – 2.7.9, doplnenú o priebeh kumulatívneho kapitálu s vyznačeným MDD. Výsledky sú následne podrobne okomentované a vyhodnotené. V Podkapitole 3.3 sledujeme citlivosť výsledkov na zmenu koeficientu averzie voči riziku a v Podkapitole 3.4 testujeme modely na dátach z finančnej krízy. V závere v časti 3.5 sumarizujeme celkovú výkonnosť jednotlivých portfólií a naznačíme možné smerovania ďalšieho rozvoja aplikácie.

3.1 Analýza stability váh portfólií

V tejto časti hodnotíme konzistenciu rozloženia váh pomocou boxplotov na Obr. 1. Medzi analyzovanými modelmi je zahrnuté referenčné portfólio `MV` 2.2.1, portfólio `Diagonal`, ktoré vychádza z neistoty v kovariančnej matici 2.3.1 a portfóliá `Rolling`, `Ellipsoid`, `Box_Volume` a `Box_Const`, ktoré pracujú s neistotou v očakávaných výnosoch (2.3.2, 2.3.3, 2.3.4). Pri portfóliu `Box_Volume` je parameter β nastavený tak, aby elipsoidová a boxová množina neistoty mali rovnaký objem, zatiaľ čo v portfóliu `Box_Const` je parameter β pevne určený hodnotou 1.

Model `Diagonal` sa javí ako najstabilnejší, keďže vykazuje najmenší rozsah zmien váh s najväčším rozsahom fúzov 6,47% pre akciu 10, no jeho investičná stratégia je zameraná iba na tri akcie (s číslami 10, 21 a 27), čo vieme pozorovať na Obr. 4, ktorý však bližšie

popíšeme v neskoršej časti kapitoly. Portfólio `Ellipsoid` sa javí ako druhé najstabilnejšie s najväčším rozsahom fúzov 21,16% pre akciu 27. Taktiež vidno, že toto portfólio investovalo do veľmi veľkého počtu akcií za dané obdobie. Naopak, model `Box_Volume` zaznamenáva prudké zmeny, kde maximálny rozsah fúzov 82,37% dosahuje akcia 20, pričom viacerí outliery indikujú príležitostné investície do ďalších akcií. Portfóliá `Box_Const` (25,04% pre akciu 20), `Rolling` (25,09% pre akciu 27) a `MV` (28,63% pre akciu 14) vykazujú porovnateľné maximálne rozsahy. Z týchto pozorovaní možno usúdiť, že medzi skúmanými modelmi predstavuje `Diagonal` najstabilnejšiu voľbu, zatiaľ čo `Box_Volume` vykazuje výraznú nestabilitu.

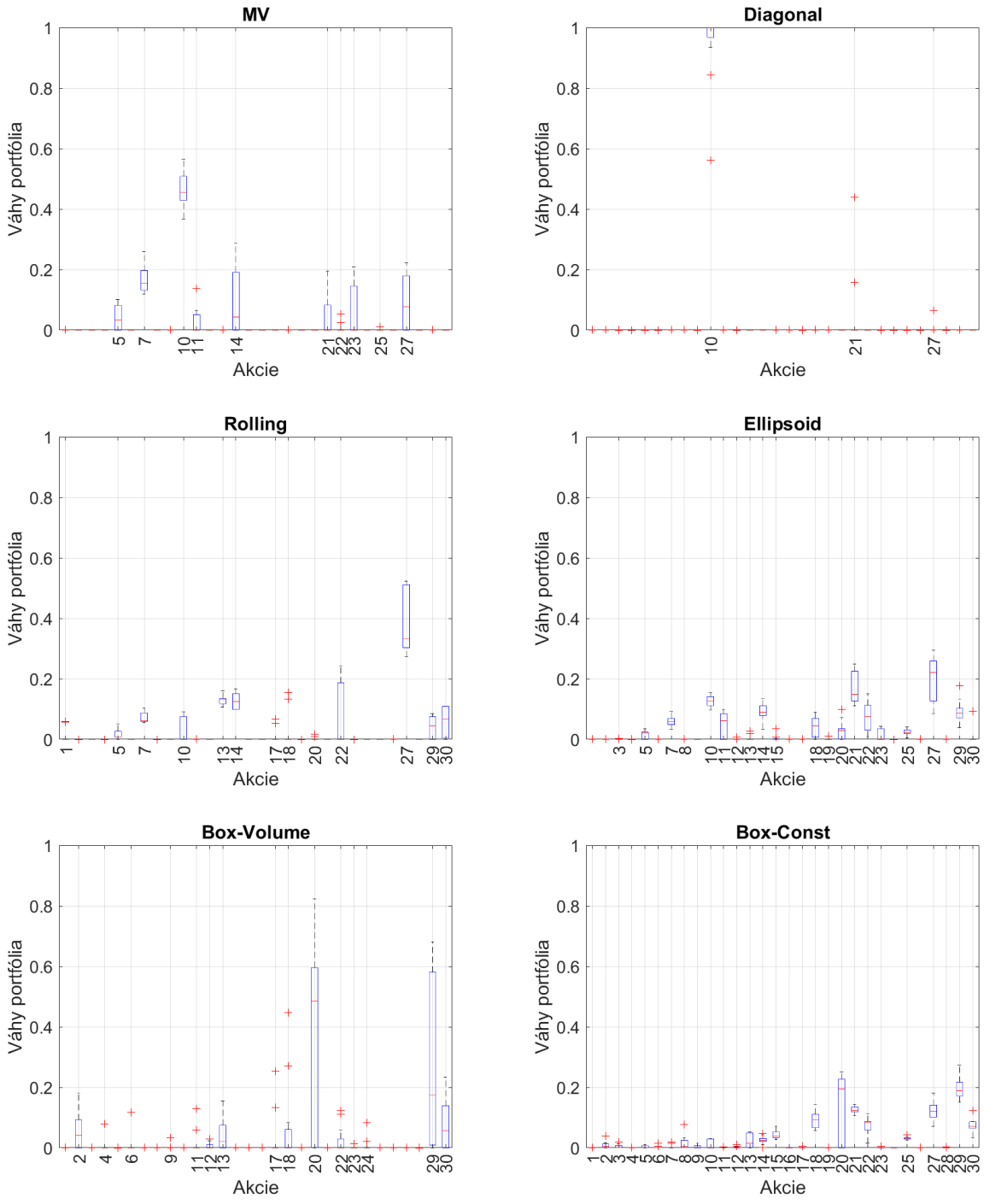
3.2 Numerická analýza metrík portfólií

V nasledujúcej časti sa sústredíme na kvantitatívne hodnotenie výkonnosti portfólií. Tabuľka na Obr. 2 v riadkoch sumarizuje hodnoty jednotlivých metrík pre portfólio `MV` nachádzajúce sa v prvom stĺpci a za ním nasledujúce robustné portfóliá `Diagonal`, `Rolling`, `Ellipsoid`, `Box_Volume` a `Box_Const`. Pre každú metriku sú zelenými obdĺžnikmi zvýraznené najlepšie hodnoty a červenými obdĺžnikmi najhoršie hodnoty, čo umožňuje určiť, ktorý prístup vynikal alebo naopak zaostával v danej metrike.

Pri očakávanom nadvýnose referenčné portfólio `Diagonal` dosahuje najvyššiu hodnotu (59,86%), nasledované modelom `MV` (46,64%). Naopak, portfólio `Box_Const` eviduje najnižší očakávaný nadvýnos (16,95%). Čo sa týka volatility, portfólio `Diagonal` vykazuje najvyššiu hodnotu (24,27%), zatiaľ čo robustné portfóliá s neistotou v očakávaných výnosoch dosahujú oveľa nižšie úrovne – najnižšia je pre `Box_Const` (8,35%).

Pre lepšie posúdenie efektívnosti jednotlivých portfólií z hľadiska pomeru výnosu k riziku je vhodné analyzovať Sharpeov aj Sortinov pomer. V oboch prípadoch portfólio `Box_Volume` dosahuje najnižšie hodnoty (1,73 resp. 2,49). Na druhej strane portfólio `Rolling` vykazuje najvyššie hodnoty oboch pomerov (2,97, resp. 3,99), čo naznačuje, že tento model najlepšie vyvažuje dosiahnutý nadvýnos voči rizikovým prepadom. Portfólio `MV` prekonalo v týchto pomeroch robustné portfóliá `Diagonal`, `Box_Volume` a `Box_Const`.

Analýza turnoveru poskytuje prehľad o očakávaných transakčných nákladoch. Najnižšiu



Obr. 1: Boxploty váh portfólií.

hodnotu turnoveru zaznamenáva portfólio `Diagonal` (10,08%), čo poukazuje na malú frekvenciu a rozsah zmien váh. Vysvetlením môže byť to, že portfólio investovalo celý kapitál po celú dobu takmer vždy iba do akcie 10 a k zmenám došlo iba trikrát za celé obdobie rebalansovania (Obr. 4). Naproti tomu najvyšší turnover má portfólio `Box_Volume` (až 76,58%), čo signalizuje nadmerné preskupovanie a tým pádom oveľa vyššie transakčné

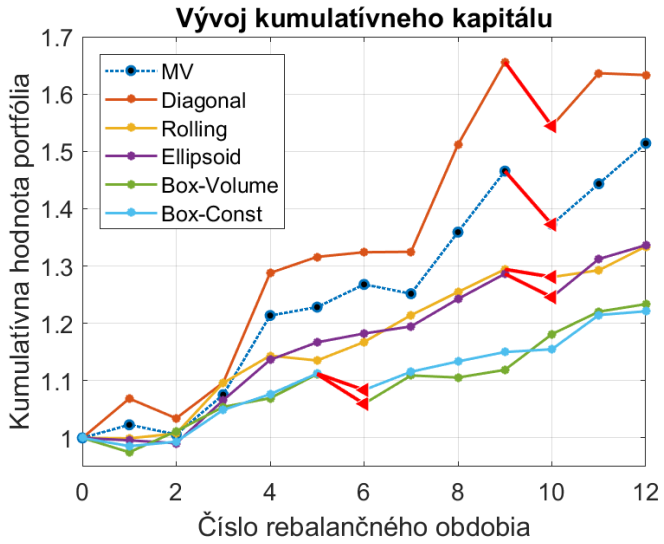
	MV	Diagonal	Rolling	Ellipsoid	Box_Volume	Box_Const
Nadvýnos (%)	46.64	59.86	27.87	28.26	18.38	16.95
Volatilita (%)	18.06	24.27	9.38	10.8	10.62	8.35
Sharpeov pomer	2.58	2.47	2.97	2.62	1.73	2.03
Sortinov pomer	3.5	3.25	3.99	3.94	2.49	2.67
Turnover (%)	29.81	10.08	19.58	26.82	76.58	24.06
MDD (%)	6.35	6.75	1.05	3.18	4.64	2.59
UI (%)	1.9	2.14	0.36	0.92	1.47	0.84
CVaR (%)	-2.72	-3.8	-1.44	-1.5	-1.5	-1.24

Obr. 2: Výsledné hodnoty metrík analyzovaných portfólií pre $\varphi = 10$.

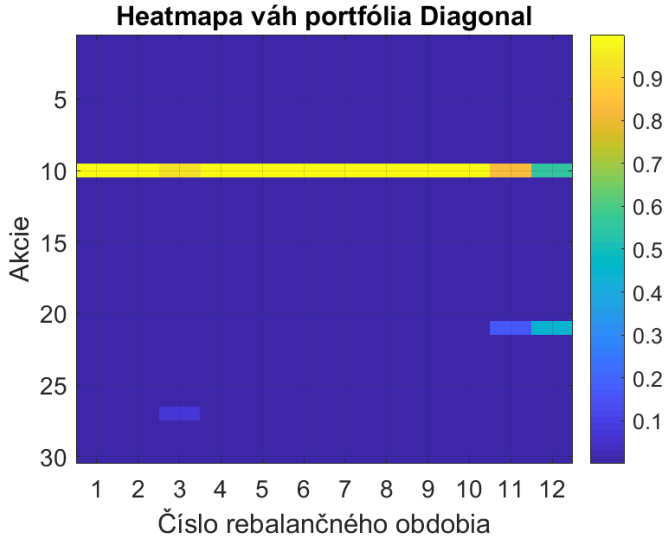
náklady v porovnaní s ostatnými portfóliami. Toto správanie sa dá pozorovať aj na veľkom počte outlierov v boxplotoch tohto portfólia (Obr. 1).

Teraz sa zameriame na analýzu vývoja kumulatívneho kapitálu, ktorý poskytuje obraz o správaní portfólií počas celej sledovanej periódy. Obr. 3 zobrazuje priebeh kumulatívneho kapitálu všetkých analyzovaných portfólií. Z grafu je zrejmé, že referenčné portfólio `Diagonal` na konci obdobia dosiahlo najvyššiu konečnú hodnotu kapitálu. Naproti tomu ostatné robustné portfóliá vykazujú stabilnejší rast s menšími výkyvmi, čo koreluje s ich nižším očakávaným nadvýnosom, ale zároveň s nižším rizikom. Na rozdiel od ostatných modelov dynamiku portfólia `Diagonal` charakterizuje výrazné kolísanie, čo možno pripísať jeho stratégii investovať skoro vždy celý kapitál do jedinej akcie (Obr. 4). Takéto cielené investovanie umožňuje portfóliu maximalizovať rozdiel očakávaného výnosu a rizika v danom období, keďže sa zameriava na akciu s najvýhodnejším rozdielom medzi týmito dvoma ukazovateľmi, no pri skoro úplnom vylúčení diverzifikácie. Avšak tento prístup je zároveň mimoriadne citlivý na vývoj danej akcie, čo vedie k prudkým poklesom a zvýšenej volatilite, ako potvrdzujú aj numerické výsledky. Zároveň v prípade nepriaznivej situácie na trhu táto stratégia môže mať veľmi zlé následky. Týmto zhrnutím sa prejavuje základný kompromis medzi stabilitou a potenciálom dosahovania vysokého nadvýnosu – zatiaľ čo portfólio `Diagonal` nasledované portfóliom `MV` v konečnom dôsledku akumulovalo najvyšší kapitál, zvyšné robustné prístupy zabezpečili hladší a predvídateľnejší vývoj.

Ďalším dôležitým ukazovateľom je maximálny pokles (MDD), ktorý je v grafe na Obr. 3 vyznačený červenými šípkami. Z grafu aj tabuľky vyplýva, že portfólio `Diagonal` zaznamenalo najhlbší pokles (6,75%) a referenčné portfólio `MV` dosahuje druhý najväčší pokles



Obr. 3: Vývoj kumulatívneho kapitálu jednotlivých portfólií pre $\varphi = 10$. Červené šípky zobrazujú MDD pre všetky portfóliá.



Obr. 4: Heatmapa pre váhy portfólia `Diagonal`.

(6,35%). Ostatné robustné portfóliá nadobúdajú výrazne nižšie hodnoty MDD, kde najnižší MDD eviduje portfólio `Rolling` (1,05%), čo poukazuje na jeho schopnosť minimalizovať straty. Rovnako aj Ulcer index, ktorý súčasne zohľadňuje hĺbku aj trvanie prepadov dosahuje najvyššiu hodnotu pri `Diagonal` (2,14%), druhú najvyššiu hodnotu dosahuje portfólio `MV` a najnižšiu pri `Rolling` (0,36%). Tieto výsledky naznačujú, že robustné prístupy s výnimkou modelu `Diagonal` dokážu efektívnejšie kontrolovať rizikové výkyvy a zabezpečiť rýchlejšie zotavenie kapitálu.

Analýza CVaR poskytuje dobrý indikátor o výkone portfólií v extrémnych scenároch. Portfólio `Diagonal` vykazuje najnepriaznivejšiu hodnotu CVaR (-3,8%), čo potvrdzuje jeho vysokú náchylnosť k extrémnym stratám. Naopak, portfólio `Box_Const` dosahuje najlepšie hodnoty (-1,24%), čo svedčí o jeho stabilnejšom správaní v nepriaznivých trhových podmienkach. Referenčné portfólio `MV` má v tejto metrike horší výsledok, než ostatné robustné modely (s výnimkou `Diagonal`).

Zhrnutím analýzy výsledkov možno konštatovať, že model `Rolling` predstavuje najstabilnejší prístup z hľadiska minimálnych prepadov (MDD a UI) a zároveň dosahuje najvyšší Sharpeov pomer a Sortinov pomer, čím dosahuje najlepšie hodnoty v najväčšom počte metrík. Portfólio `Box_Const` exceluje v najnižšej volatilite a najlepšej hodnote CVaR, aj keď jeho nadvýnos je najnižší. Referenčné portfólio `MV` spolu s `Ellipsoid` nenadobúda najlepšiu ani najhoršiu hodnotu v žiadnej metrike. Všetky robustné portfóliá okrem modelu `Diagonal` ukazujú v porovnaní s klasickým mean-variance prístupom lepšie výsledky metrík volatility, MDD, UI a CVaR, čím naznačujú nižšie riziko veľkých poklesov a väčšiu stabilitu, aj keď nadobúdajú nižší nadvýnos. Vďaka nízkemu nadvýnosu portfóliá `Box_Volume` a `Box_Const` nedokážu ponúknuť lepšie hodnoty Sharpeovho a Sortinovho pomeru.

Do nasledujúcich analýz výsledkov sme sa rozhodli nezahrnúť portfólio `Diagonal`, ktoré aj napriek vynikajúcim výsledkom v oblasti nadvýnosu a turnoveru považujeme za nevhodnú voľbu. Hoci tento model dosahuje vysoký nadvýnos, jeho výsledky v metrikách zameraných na analyzovanie prepadov s výnimkou Sortinovho pomeru sú najhoršie. Tento model takmer úplne zanedbáva diverzifikáciu, čo považujeme za kľúčový faktor, prečo portfólio `Diagonal` nevyhovuje našim kritériám a neospravedlňuje svoju prítomnosť v ďalších porovnaniach. V následných analýzach sa portfólio `Diagonal` prejavilo ešte horšími výsledkami a preto sa budeme zameriavať na prístupy, ktoré by mohli ponúknuť lepšiu alternatívu k štandardnému `MV` modelu.

3.3 Analýza citlivosti výsledkov vzhľadom na koeficient averzie

Doterajšie výsledky uvedené v tejto kapitole boli vypočítané pre hodnotu koeficientu averzie voči riziku $\varphi = 10$. Táto hodnota predstavuje investora s veľmi vysokou averziou voči riziku.

V tejto časti práce skúmame, ako reagujú výsledky našich optimalizačných modelov na zmenu úrovní averzie voči riziku. Konkrétne sa pozeráme na prípad $\varphi = 5$, ktorý predstavuje investora s vyváženým prístupom medzi liberálnym a konzervatívnym správaním a na prípad $\varphi = 1$, reprezentujúci liberálneho investora. Cieľom tejto analýzy je preskúmať, ako zmena tohto parametra ovplyvňuje výkonnosť a stabilitu jednotlivých portfólií a zároveň tak poskytnúť komplexnejší pohľad na robustnosť získaných výsledkov. Súhrnné výsledky metrík jednotlivých portfólií sú na Obr. 5.

	MV	Rolling	Ellipsoid	Box_Volume	Box_Const
Nadvýnos (%)	51.4	29.52	29.87	22.06	16.9
Volatilita (%)	21.72	10.48	11.62	11.63	8.33
Sharpeov pomer	2.37	2.82	2.57	1.9	2.03
Sortinov pomer	3.31	4.17	3.95	2.88	2.66
Turnover (%)	26.48	19.23	27.87	92.9	24.58
MDD (%)	7.19	1.05	3.8	4.46	2.59
UI (%)	2.35	0.38	1.08	1.48	0.84
CVaR (%)	-3.13	-1.46	-1.57	-1.56	-1.24
Nadvýnos (%)	46.91	28.62	31.18	42.41	16.26
Volatilita (%)	24.7	10.39	12.15	10.74	8.22
Sharpeov pomer	1.9	2.76	2.57	3.95	1.98
Sortinov pomer	2.58	4.03	3.96	4.97	2.56
Turnover (%)	61.94	19.78	27.73	158.67	31.22
MDD (%)	7.75	0.9	4.04	1.1	2.57
UI (%)	2.97	0.32	1.14	0.39	0.83
CVaR (%)	-3.85	-1.46	-1.62	-1.7	-1.24

Obr. 5: Výsledné hodnoty metrík pre analyzované portfóliá s $\varphi = 5$ (hore) a $\varphi = 1$ (dole).

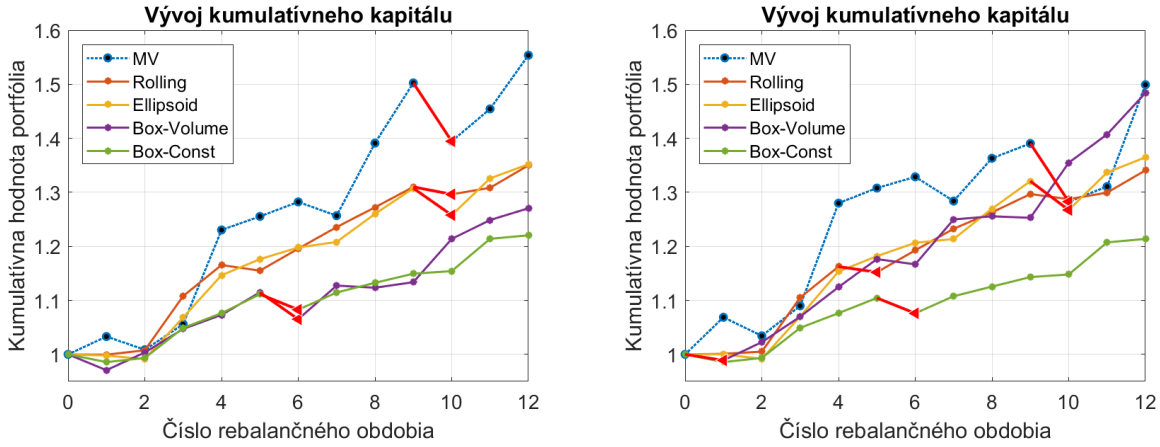
Pre analýzu stability portfóliových váh poskytujeme v tejto časti už iba slovný popis zmien, ktoré nastali pri zmene koeficientu averzie voči riziku. Portfólio `Ellipsoid` si aj naďalej zachováva svoju stabilitu – jeho maximálny rozsah fúzov sa zvýšil iba o 2%.

Podobne aj portfólio `Box_Const`, ktorého rozsah fúzov sa prakticky nezvýšil (nárast iba o 0,01%). Portfólio `Rolling` vykazuje pomerne malú citlivosť, keďže jeho maximálny rozsah fúzov narástol len o 8%. Naopak, portfóliá `Diagonal` a `Box_Volume` zostávajú extrémne nestabilné, keďže ich maximálny rozsah fúzov teraz dosahuje úroveň 100%. Zaujímavým prípadom je portfólio `MV`, u ktorého sa najprv maximálny rozsah zvýšil na 40,87%, avšak pri $\varphi = 1$ dosahuje úplnú hodnotu 100%. Tieto pozorovania potvrdzujú, že len portfóliá `Ellipsoid` a `Box_Const` vykazujú najnižšiu citlivosť na zmenu averzie v prípade stability váhového rozloženia.

Pokiaľ ide o ostatné ukazovatele, portfólio `Rolling` preukazuje iba malé zmeny a naďalej dosahuje najlepšie výsledky z hľadiska počtu metrík. Na druhej strane portfólio `MV` začína preukazovať výraznejšiu reakciu na zmenu averzie – jediná metrika, v ktorej stále vedie, je jeho očakávaný nadvýnos. Tento posun naznačuje, že model `MV` už nekladie dostatočnú penalizáciu na riziko a preto sa nebojí výraznejšieho preskupovania váh, čo vedie k silnejším prepadom a väčšej volatilite. Portfólio `Box_Const` si zachovalo takmer nezmenené hodnoty očakávaného nadvýnosu, volatility, Sharpeovho pomeru, MDD, UI a CVaR. Portfólio po celý čas vedie v najnižšej volatilite a najlepšom CVaR.

Portfólio `Ellipsoid` reaguje na zmenu averzie len nenápadne – okrem malého nárastu očakávaného nadvýnosu, volatility a CVaR sú hodnoty Sharpeovho a Sortinovho pomeru a turnoveru v podstate takmer rovnaké, hoci MDD a Ulcer index zaznamenali mierny rast. Zaujímavým prípadom je portfólio `Box_Volume`, ktoré si výrazne polepšilo očakávaný nadvýnos a v prípade $\varphi = 1$ dosahuje najlepšie výsledky v Sharpeovom a Sortinovom pomere a zároveň si výrazne znížilo hodnoty MDD a UI. Na druhej strane, prudký nárast turnoveru portfólia `Box_Volume` poukazuje na zvýšené transakčné náklady, ktoré môžu negatívne ovplyvniť jeho celkovú efektivitu. Síce objemy množín neistoty pre tieto dve portfóliá sú rovnaké, portfóliá reagovali odlišne na zmenšené hodnoty koeficientu averzie voči riziku φ. Zatiaľ čo portfólio `Ellipsoid` zaznamenalo väčšie zmeny iba v zhoršených hodnotách metrík MDD, UI a CVaR, portfóliu `Box_Volume` sa hodnoty nadvýnosu, Sharpeovho a Sortinovho pomeru, MDD a UI výrazne zlepšili. Portfólio `Box_Volume` reagovalo oveľa citlivejšie na zmenu φ v porovnaní s portfóliom `Ellipsoid`, pričom hodnoty metrík MDD a UI portfólií sa zmenili opačným smerom.

Ako vidno aj z grafov kumulatívneho vývoja kapitálu na Obr. 6, robustné portfóliá majú výrazne plynulejší priebeh a menšiu kolísavosť oproti klasickému mean-variance portfóliu.



Obr. 6: Vývoj kumulatívneho kapitálu pre $\varphi = 5$ (vľavo) a $\varphi = 1$ (vpravo). Červené šípky zobrazujú MDD portfólií.

Čo si môžeme odniesť ako pozorovanie z tejto analýzy citlivosti na zmenu φ je to, že čím liberálnejší je investor, tým klasické mean-variance portfólio dosahuje nižší Sharpeov a Sortinov pomer. Nadvýnos portfólia síce rastie, no jeho volatilita rastie výraznejšie. Takisto portfólio dosahuje väčšie prepady a kolísavosť. Naopak, robustné portfóliá si polepšujú v pomeroch, pretože ich volatilita sa nemení, no ich nadvýnos sa zvyšuje. Takisto ich prepady a kolísavosť sa zachovávajú, či dokonca znižujú.

3.4 Testovanie portfólií počas finančnej krízy 2008

V tejto časti ukážeme, ako vyzerajú výstupy modelov počas výrazne nepriaznivých trhových podmienok. Na tento účel sme si zvolili obdobie finančnej krízy z rokov 2007–2009, ktorej kulminačným bodom bol krach investičnej banky Lehman Brothers dňa 15. septembra 2008, čo spustilo lavínu globálnych trhových prepadov. Pre našu analýzu používame dáta z obdobia od 26. mája 2006 do 29. mája 2009 (opäť 757 obchodovacích dní). Posledný rok tohto obdobia slúži ako testovacie krízové obdobie, v ktorom overujeme, či robustné portfóliá dokážu lepšie reagovať na extrémne trhové výkyvy v porovnaní s klasickým `MV`

portfóliom (2.5). Zároveň sme prispôsobili zloženie portfólia tak, aby odrážalo najvýznamnejšie spoločnosti v indexe S&P 500 počas sledovaného obdobia a aktualizovali sme aj hodnotu denného výnosu amerického bezrizikového 5-ročného dlhopisu.

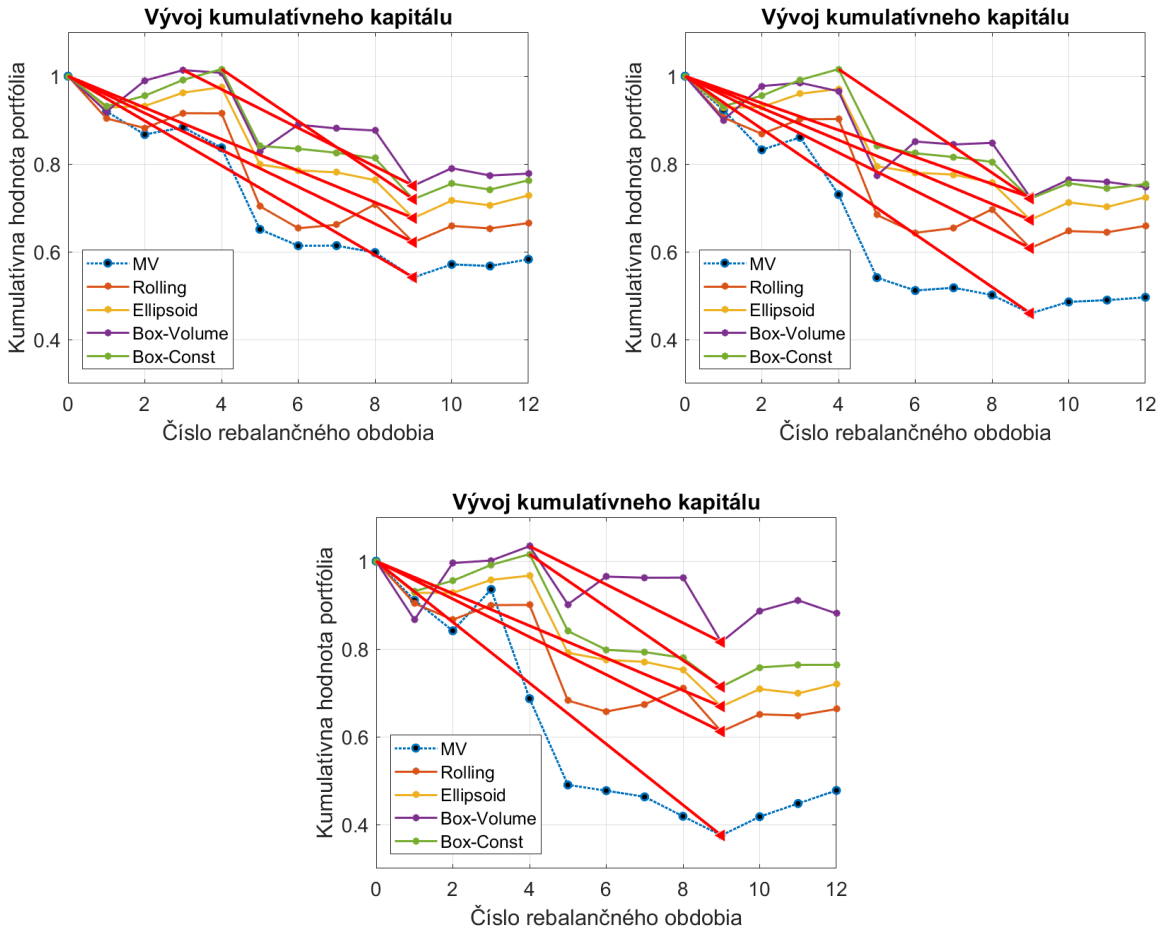
Čo sa týka stability váh, opäť poskytujeme v tejto časti už iba slovný popis zmien, ktoré nastali pri zmene koeficientu averzie voči riziku. Najväčší rozsah fúzov zaznamenáva portfólio `Box_Volume` (66,82 %), nasledované portfóliom `MV` (58,6 %). Portfólio `Rolling` dosahuje zmenu 25,83 %, `Box_Const` iba 9,34 % a najstabilnejším sa javí `Ellipsoid` s minimálnou zmenou 2,08 % a najkompaktnejšími boxplotmi počas celého obdobia.

	MV	Rolling	Ellipsoid	Box_Volume	Box_Const
Nadvýnos (%)	-41.74	-32.56	-27.6	-21.88	-24.24
Volatilita (%)	25.18	30.08	23.45	27.6	23.14
Sharpeov pomer	-0.11	-0.1	-0.06	-0.06	-0.06
Turnover (%)	53.93	43.76	26.72	122.55	44.16
MDD (%)	45.85	37.83	32.34	25.98	29.17
UI (%)	32.83	26.85	20.53	15.61	18.18
CVaR (%)	-4.61	-5.18	-4.16	-4.39	-4.15

	MV	Rolling	Ellipsoid	Box_Volume	Box_Const
Nadvýnos (%)	-49.45	-33	-28.03	-24.26	-25.25
Volatilita (%)	30.94	30.99	23.38	30.79	22.33
Sharpeov pomer	-0.15	-0.1	-0.07	-0.07	-0.06
Turnover (%)	60.29	45.74	28.33	145.18	49.56
MDD (%)	54.04	39.19	32.74	27.62	29.04
UI (%)	40.45	27.81	20.88	17.24	18.44
CVaR (%)	-5.11	-5.31	-4.17	-4.92	-4.19

	MV	Rolling	Ellipsoid	Box_Volume	Box_Const
Nadvýnos (%)	-48.3	-32.54	-28.42	-10.61	-24.31
Volatilita (%)	45.66	31.12	23.3	32.03	22.38
Sharpeov pomer	-0.22	-0.1	-0.07	-0.03	-0.05
Turnover (%)	71.6	46.45	30.31	170.78	52.7
MDD (%)	62.49	38.8	33.11	21.12	29.75
UI (%)	44.74	27.25	21.22	10.73	18.84
CVaR (%)	-7.55	-5.42	-4.17	-5.7	-4.31

Obr. 7: Výsledné hodnoty metrík počas krízy pre $\varphi = 10$ (hore), $\varphi = 5$ (v strede) a $\varphi = 1$ (dole).



Obr. 8: Vývoj kumulatívneho kapitálu počas krízy pre $\varphi = 10$ (vľavo hore), $\varphi = 5$ (vpravo hore) a $\varphi = 1$ (v strede dole). Červené šípky zobrazujú MDD portfólií.

Súhrnné výsledky metrík jednotlivých portfólií pre všetky zvolené hodnoty koeficientu φ sú uvedené v tabuľke na Obr. 7. Ako môžeme v tabuľke vidieť, Sortinov pomer sa tu už nenachádza, keďže jeho záporné hodnoty v kríze strácajú interpretačný význam. Portfólio `MV` dosahuje najnižší očakávaný nadvýnos a počas krízy patrí k najstratovejším. Jeho volatilita, Sharpeov pomer, MDD a UI sa pri znižovaní averzie voči riziku výrazne zhoršujú, zatiaľ čo robustné portfóliá vykazujú v týchto metrikách len malé zmeny. Hodnoty MDD a UI sú pri `MV` konzistentne vyššie než pri robustných portfóliách, zatiaľ čo najnižšie hodnoty dosahuje počas celého obdobia portfólio `Box_Volume`. Toto portfólio však zároveň vykazuje extrémne vysoký turnover, čo poukazuje na výrazné preskupovanie váh a s tým súvisiace transakčné náklady. Naopak, najnižší turnover má portfólio `Ellipsoid`. Portfólio `Rolling` vykazuje pri hodnotách $\varphi = 10$ a $\varphi = 5$ najvyššiu volatilitu a CVaR, no pri

$\varphi = 1$ sa situácia mení a najhoršie hodnoty nadobúda portfólio `MV`. Na Obr. 8 môžeme opäť sledovať vývoj kumulatívneho kapitálu a hodnoty MDD pre jednotlivé portfóliá.

Portfólio `MV` dosahuje počas celého obdobia najnepriaznivejšie hodnoty vo väčšine metrík, čo naznačuje jeho najhoršiu odolnosť voči krízovému vývoju. Naopak, robustné portfóliá sa s nepriaznivými podmienkami vyrovnávajú podstatne lepšie. Toto správanie je v súlade s ich očakávanou úlohou a potvrdzuje sa aj na základe výsledkov analyzovaných metrík.

3.5 Záverečné zhrnutie výsledkov

V normálnych trhových podmienkach dosiahlo referenčné portfólio `MV` najvyšší očakávaný nadvýnos v porovnaní s ostatnými robustnými modelmi (okrem `Diagonal`). Avšak robustné modely (okrem `Diagonal`) vykazovali výrazne lepšie hodnoty metrík MDD, UI a CVaR, čo malo za následok pokles nadvýnosu. Portfólio `Diagonal` prinieslo najvyšší nadvýnos, ale zároveň aj najhoršie hodnoty volatility a rizikových metrík a najpodstatnejšie je to, že takmer vôbec nediverzifikovalo, čo viedlo k jeho vylúčeniu z ďalších analýz. Pri nižších hodnotách averzie ($\varphi = 5, 1$) si robustné prístupy udržali nízke hodnoty rizikových metrík, zatiaľ čo portfólio `MV` vykazovalo rastúcu volatilitu, MDD a zhoršujúci sa Sharpeov a Sortinov pomer. Tieto výsledky ukazujú, že aj keď robustné portfóliá nemusia dosahovať najvyšší nadvýnos, pri riadení rizika a predchádzaní stratám dosahujú lepšie výsledky ako tradičný `MV` model.

Počas finančnej krízy dosiahli robustné portfóliá výrazne lepšie výsledky ako portfólio `MV`. Vykázali nižšie hodnoty MDD a UI, ako aj vyšší Sharpeov pomer, pričom `MV` bolo konzistentne najzraniteľnejšie voči extrémnym trhovým výkyvom. Portfólio `MV` dosiahlo pri všetkých úrovniach φ najnižší nadvýnos. To ukazuje silu robustného prístupu, ktorý sa počas krízy osvedčil, pretože dokázal minimalizovať straty a ochrániť portfólio pred veľkými výkyvmi.

Jediným nejasným prvkom bol extrémne vysoký turnover a veľká nestabilita portfólia `Box-Volume`. Je možné, že aj keď mala táto množina neistoty rovnaký objem ako elipsoidová množina portfólia `Ellipsoid`, jej orientácia mohla spôsobiť nežiadúcu volatilitu. Preto je otázne, či toto portfólio je skutočne vhodnou voľbou.

Celkovo robustné prístupy (okrem `Diagonal`) vykazujú konzistentne hladší vývoj kapitálu, nižšiu volatilitu a lepšiu kontrolu extrémnych strát v porovnaní s klasickým `MV`. To považujeme za základnú výhodu robustného prístupu – za cenu nižšieho nadvýnosu poskytuje lepšiu kontrolu nad prepadmi a stabilnejší vývoj.

Záver

Diplomová práca sa zaoberala oblasťou robustnej optimalizácie a jej aplikácie v úlohách s prítomnosťou neistoty. V práci sme objasnili teoretické základy robustnej optimalizácie a poukázali na jej využitie v oblasti finančných portfólií. Naším cieľom bolo preukázať to, že robustná optimalizácia môže slúžiť ako efektívny nástroj pri rozhodovaní v nepredvídateľnom prostredí, kde neistota ovplyvňuje vstupy a výsledky optimalizačných úloh.

V **Kapitole 1** sme sa venovali teoretickým základom robustnej optimalizácie. Uviedli sme príklady nepriaznivých vplyvov neistoty v dátach a postupne sme zaviedli nástroje robustnej optimalizácie na integrovanie neistoty do tradičných optimalizačných modelov. Okrem definovania základných pojmov, akými sú lineárne optimalizačné úlohy s neistotou, množina neistoty, robustné riešenia a robustná obmena sme sa zaoberali aj výpočtovou náročnosťou robustných riešení, čo poukazuje na praktické výzvy pri implementácii týchto metód. Neskôr sme sa zamerali na využitie stochastiky na zníženie konzervatívnosti robustných riešení a to pomocou náhodných, no ohraničených odchýlok v dátach na tvorbu pravdepodobnostných ohraničení. V uvedenom príklade robustná obmena založená na pravdepodobnostnom ohraničení dosahuje takmer rovnakú spoľahlivosť ako jej deterministická verzia a zároveň vedie k menej konzervatívnemu riešeniu, čo ukazuje, že tieto ohraničenia dokážu znížiť konzervatívnosť riešenia bez kompromisu na spoľahlivosti. Tento teoretický základ poskytol pevný základ pre aplikáciu robustnej optimalizácie v oblasti finančných portfólií, ktorej sme sa venovali v nasledujúcich kapitolách.

Kapitola 2 predstavila praktickú aplikáciu robustnej optimalizácie v oblasti finančných portfólií. Naším cieľom bolo analyzovať, ako môže robustná optimalizácia pomôcť pri výbere akcií a tvorbe portfólií, ktoré sú odolné voči zmenám na finančných trhoch. V tejto kapitole sme použili metódu rolling horizon na aktualizáciu rozhodnutí v dynamickom prostredí trhov a zaviedli sme rôzne množiny neistoty pre kovariančnú maticu a očakávané výnosy. Okrem toho sme definovali parametre modelov a predstavili metriky na hodnotenie výkonnosti portfólií. Práve tieto metriky nám umožnili odhaliť konkrétne oblasti, v ktorých robustné portfóliá dosahujú lepšie výsledky a ponúkajú výhodnejšiu alternatívu k tradičným prístupom.

Kapitola 3 uzatvára prácu a prezentuje výsledky zvolených modelov v kontexte metrík vybraných v Kapitole 2. V tejto kapitole sme porovnali správanie robustných portfólií s tradičným prístupom a analyzovali sme, ako robustnosť ovplyvňuje stabilitu a výkonnosť portfólia v prítomnosti neistoty. Skúmali sme výsledky v normálnych trhových podmienkach, ako aj počas krízového obdobia. Okrem toho sme analyzovali citlivosť výsledkov pri rôznych nastaveniach koeficientu averzie voči riziku. Výsledky ukázali, že robustné portfóliá reagovali takmer vždy lepšie na dynamiku trhu, boli stabilnejšie, menej volatilné a citlivé na trhové šoky a priniesli hladší vývoj kapitálu. Taktiež sme preukázali, že nie všetky robustné modely sú rovnako efektívne a výber vhodného modelu má zásadný vplyv na výkonnosť portfólia. Z testovaných robustných portfólií sa ako najvyváženejšie javia portfóliá `Ellipsoid` a `Box_Const`. Portfólio `Ellipsoid` síce nevyniklo v žiadnej individuálnej metrike v normálnych trhových podmienkach, no ani raz nenadobudlo najhoršiu hodnotu. Portfólio `Box_Const` zasa preukázalo vysokú odolnosť počas krízového obdobia. Naproti tomu portfólio `Rolling` excelovalo práve v normálnych trhových podmienkach.

Najväčší prínos práce spočíva v systematickom hodnotení robustných portfólií využitím komplexného súboru metrík predstavených v Kapitole 2, ktoré poskytujú viaceré, vzájomne sa dopĺňajúce pohľady na ich správanie. Spolu s testovaním portfólií nielen v normálnych, ale aj v krízových trhových podmienkach sme dokázali vyhodnotiť pridanú hodnotu robustných riešení, čo predstavuje istú odpoveď na otázku, ako presne merať robustnosť. Zároveň prepojenie už existujúcich robustných modelov s analýzou správania portfólií pomocou metrík v rôznych scenároch prináša hlbší a komplexnejší pohľad do výkonnosti a vlastností jednotlivých modelov.

Výzvou zostáva, ako presne kvantifikovať pridanú hodnotu robustných portfólií oproti klasickým riešeniam. V práci sme navrhli využiť metriky z Kapitoly 2 a testovanie počas krízového obdobia, no zaujímavým krokom by bolo vytvoriť špeciálny ukazovateľ, ktorý by priamo meral robustnosť portfólií. Ďalšiu pozornosť a podrobnejšiu analýzu by si zaslúžili zaujímavé rozdiely medzi elipsoidovou a boxovou množinou neistoty s porovnateľnými objemami. V budúcnosti by sme mohli prácu rozšíriť o aplikácie robustnej optimalizácie na zložitejšie typy množín neistoty, ktoré by zahŕňali napríklad pravdepodobnostné ohraničenia alebo viacfaktorové modely neistoty, čo by nielen posunulo schopnosť modelov

reagovať na zložitejšie výzvy, ale taktiež by zlepšilo ich aplikovateľnosť a robustnosť.

Práca poskytuje dobrý prehľad o základoch robustnej optimalizácie, jej teoretické princípy, aplikácie v oblasti finančných portfólií a implementáciu v konkrétnych scenároch. Na základe našich analýzy môžeme konštatovať, že robustné prístupy prinášajú praktické výhody v podmienkach neistoty a nestability, čo ich robí silným nástrojom pre optimálne rozhodovanie v nepredvídateľných trhových podmienkach.

Zoznam použitej literatúry

[1] Soyster, A. L.: *Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming*, Operations Research, 21(5), 1973, s. 1154–1157.

[2] Singh, C.: *Convex programming with set-inclusive constraints and its applications to generalized linear and fractional programming*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 38, 1982, s. 33–42.

[3] Falk, J. E.: *Exact solutions of inexact linear programs*, Operations Research, 24(4), 1976, s. 783–787.

[4] Kouvelis, P., Yu, G.: *Robust Discrete Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

[5] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: *Robust truss topology design via semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 7(4), 1997, s. 991–1016.

[6] El Ghaoui, L., Lebret, H.: *Robust solutions to least-squares problems with uncertain data*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 18(4), 1997, s. 1035–1064.

[7] El Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H.: *Robust solutions to uncertain semidefinite programs*, SIAM Journal on Optimization, 9(1), 1998, s. 33–52.

[8] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: *Robust Optimization — methodology and applications*, Mathematical Programming, Series B, 92, 2002, s. 453–480.

[9] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: *Selected topics in robust convex optimization*, Mathematical Programming, Series B, 112(1), 2008 s. 125–158.

[10] Ben-Tal, A., Ghaoui, L. E., Nemirovski, A.: *Robust Optimization*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, 2009.

[11] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: *Robust Convex Optimization*, Mathematics of Operations Research, 23, 1998, s. 769–805.

[12] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: *Robust Solutions of Uncertain Linear Programs*, Operations Research Letters, 25(1), 1999, s. 1–13.

[13] Goldfarb, D., Iyengar, G.: *Robust Portfolio Selection Problems*, Mathematics of Operations Research, 28(1), 2003, s. 1–38.

[14] Tütüncü, R. H., Koenig, M.: *Robust Asset Allocation*, Annals of Operations Research, 132, 2004, s. 157–187.

[15] Ben-Tal, A., Bertsimas, D., Brown, D.: *A Soft Robust Model for Optimization Under Ambiguity*, Operations Research, 58(5), 2010, s. 1220–1234.

[16] Perrin, S., Roncalli, T.: *Machine Learning Optimization Algorithms & Portfolio Allocation*, jún 2019, dostupné na: http://thierry-roncalli.com/download/Machine_Learning_Optimization.pdf (prístup 09.09.2024).

[17] DeMiguel, V., Nogales, F. J.: *Portfolio selection with robust estimation*, Operations Research, vol. 57, no. 3, 2009, s. 560–577.

[18] Kilianová, S., Trnovská, M.: *Robust portfolio optimization via solution to the Hamilton–Jacobi–Bellman equation*, Comenius University in Bratislava, 29.11.2013.

[19] Sharpe, W. F.: *Portfolio Theory and Capital Markets*, New York: McGraw-Hill, jún 1970.

[20] Israelsen, C.: *A refinement to the Sharpe ratio and information ratio*, Journal of Asset Management, Vol. 5, No. 6, 2005, s. 423–427.

[21] FRED Economic Data: *5-Year Treasury Constant Maturity Rate*. Federal Reserve Bank of St. Louis, dostupné na: https://fred.stlouisfed.org/series/DGS5 (prístup 10.01.2025).

[22] Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*, Electrical Engineering Department, UC Los Angeles, Tutorial lectures, 18th Machine Learning Summer School, 13-14.09.2011, dostupné na: https://xiesaining.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/09/mlss2011_vandenberghe_convex.pdf (prístup 15.02.2025), s. 44.

[23] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, vol. 7, no. 1, 1952, s. 77–91.

[24] DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R.: *Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?*, The Review of Financial Studies, vol. 22, no. 5, Oxford University Press, 2009, s. 1929.

[25] Supandi, E. D., Rosadi, D.: *An Empirical Comparison Between Robust Estimation and Robust Optimization to Mean-Variance Portfolio*, Journal of Modern Applied Statistical Methods, vol. 16, 2017, s. 589–611.

[26] Härdle, W., Simar, L.: *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Springer, Berlin-Heidelberg, vol. 10, 2007, s. 187–188.

[27] Kim, S. J., Boyd, S.: *Robust Efficient Frontier Analysis with a Separable Uncertainty Model*, Technical report, Department of Electrical Engineering, Stanford University, 2007, s. 24.

[28] Chekhlov, A., Uryasev, S., Zabarankin, M.: *Portfolio optimization with drawdown constraints*, Supply Chain and Finance, World Scientific, 2004, s. 209–228.

[29] Pedersen, C. S., Rudholm-Alfvin, T.: *Selecting a risk-adjusted shareholder performance measure*, Journal of Asset Management, 4(3), 2003, s. 152–172.

[30] Martin, P. G., McCann, B. B.: *The Investor's Guide to Fidelity Funds*, ilustrované vydanie, John Wiley & Sons, Inc, 1989, 288 s.

[31] Kumaran, S.: *Drawdown risk in mutual fund's performance*, Journal of Finance and Investment Analysis, SCIENPRESS Ltd, 2(2), 2013, s. 89–106.

[32] Kisiala, J.: *Conditional value-at-risk: Theory and applications*, arXiv preprint arXiv:1511.00140, 2015.

[33] Rockafellar, R. T., Uryasev, S.: *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking & Finance, vol. 26, no. 7, 2002s. 1443–1471.

[34] Rollinger, T. N., Hoffman, S. T.: *Sortino: a 'sharper' ratio*, Chicago, Illinois: Red Rock Capital, 2013, s. 3–8.

[35] Hrnčiřík, M.: *Využití metod teorie portfolia pro sestavení oborového portfolia s potenciálem budoucího růstu*, Diplomová práca, Masarykova univerzita, Brno, 2021.

[36] Brav, A., Constantinides, G. M., Geczy, C. C.: *Asset pricing with heterogeneous consumers and limited participation: Empirical evidence*, Journal of Political Economy, vol. 110, no. 4, 2002, s. 793–824.

[37] Mankiw, N. G., Zeldes, S. P.: *The consumption of stockholders and nonstockholders*, Journal of Financial Economics, vol. 29, no. 1, 1991, s. 97–112.

[38] Kaplow, L.: *The value of a statistical life and the coefficient of relative risk aversion*, Journal of Risk and Uncertainty, vol. 31, 2005, s. 23–34.

[39] Kandel, S., Stambaugh, R. F.: *Asset returns and intertemporal preferences*, Journal of Monetary Economics, vol. 27, no. 1, 1991, s. 39–71.

[40] Chetty, R.: *A new method of estimating risk aversion*, American Economic Review, vol. 96, no. 5, 2006, s. 1821–1834.

[41] Horáček, Š.: *Hodnotenie výkonnosti portfólia*, Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2010.

[42] Le Sourd, V.: *Performance measurement for traditional investment*, Financial Analysts Journal, Vol. 58, No. 4, 2007, s. 36–52.

[43] Jorgensen, M.: *Volumes of n-dimensional spheres and ellipsoids*, 2014.

[44] Wilson, A John: *Volume of n-dimensional ellipsoid*, Sciencia Acta Xaveriana, vol. 1, no. 1, 2010, s. 101–6.

[45] *Zdrojový kód*, dostupné na: https://github.com/Kejdza11/Zdrojovy-kod-k-diplomovej-praci.git (prístup 24.04.2025).

Príloha A

V tejto prílohe je uvedený popis zdrojového kódu priloženého v zdroji [45].

- `main_script` : Hlavný skript pre rebalansovanie portfólií a spúšťanie ostatných skriptov.
- `input_params` : Parametre a vstupy potrebné na spustenie kódu.
- `rolling_mean_uncertainty` : Výpočet množiny neistoty očakávaných výnosov z časových úsekov.
- `mean_variance_optimization` : Klasický mean-variance model.
- `robust_diagonal_uncertainty_optimization` : Robustný model s neistotou kovariančnej matice s pevnou diagonálou.
- `robust_rolling_mean_optimization` : Robustný model s neistotou očakávaných výnosov z časových úsekov.
- `robust_ellipsoid_uncertainty_optimization` : Robustný model s elipsoidovou neistotou očakávaných výnosov.
- `robust_box_uncertainty_optimization` : Robustný model s boxovou neistotou očakávaných výnosov a meniacou sa β.
- `robust_box_const_uncertainty_optimization` : Robustný model s boxovou neistotou očakávaných výnosov a konštantnou β.
- `calculate_portfolio_return_turnover` : Výpočet výnosov, nadvýnosov a váh v čase $t + 1$ pred rebalansovaním.
- `calculate_metrics` : Výpočet ročného nadvýnosu, volatility, Sharpeovho pomeru, turnoveru a Sortinovho pomeru.
- `Comparison_portfolio_performance` : Výpočet kumulatívneho kapitálu.
- `calculate_max_drawdown` : Výpočet maximum drawdownu (MDD) a Ulcer indexu (UI).
- `calculate_CVaR` : Výpočet Conditional Value-at-Risk (CVaR).
- `Boxplot_Weights` : Vykreslenie boxplotov váh portfólia.
- `graphical_outcomes` : Vykreslenie heatmapy, boxplotov a kumulatívneho kapitálu.
- `Tables_of_metrics_results` : Tabuľky s numerickými výsledkami metrík.