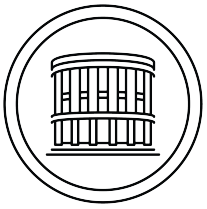
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELY EKONOMICKÉHO RASTU ZA PRÍTOMNOSTI NEISTOTY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2025 Bc. Martin SISKA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MODELY EKONOMICKÉHO RASTU ZA PRÍTOMNOSTI NEISTOTY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	1113 Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Bratislava 2025 **Bc. Martin Siska**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martin Siska
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Modely ekonomického rastu za prítomnosti neistoty
Economic growth models and stochasticity

Anotácia: Neoklasické modely ekonomického rastu (Solow, Ramsey) boli formulované ako deterministické. Rozšírenie týchto modelov rastu o prvok neistoty je prirodzenou snahou o ich zreálnenie. Stochastické vplyvy možno do modelov zaviesť rôznymi spôsobmi, od čoho sa aj ďalej odvíja voľba metód na ich následné riešenie.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 11.01.2024

Dátum schválenia: 25.01.2024

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „Stochastické modely rastu za prítomnosti neistoty“, vrátane všetkých obrázkov, som vypracoval samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použil v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie sa vzťahuje výlučne na formálnu úpravu textu, preto v práci ďalej nie sú osobitne označené.

Poďakovanie Touto cestou by som sa rád poďakoval najmä vedúcej mojej diplomovej práce Mgr. Jane Szolgayovej, PhD. za ochotu, čas, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní práce.

Abstrakt

SISKA, Martin: Modely ekonomického rastu za prítomnosti neistoty. [Diplomová práca] – Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky – Školiteľ: Mgr. Jana Szolgayová, PhD. Bratislava: UK, 2025, 56 s.

Cieľom tejto práce je predstaviť teoretické základy deterministických a stochastických modelov ekonomického rastu, analyzovať ich vlastnosti a aplikovať ich na reálne dáta vybraných krajín. V teoretickej časti predstavujeme deterministický Ramseyho model, ktorý sa zameriava na optimálny pomer spotreby a úspor na maximalizáciu blahobytu, a stochastický Brock-Mirmanov model, ktorý zahŕňa neočakávané šoky v produkcii. Na základe vybraných makroekonomických údajov sme oba modely kalibrovali a numericky analyzovali ich schopnosť predikcie ekonomického rastu.

Kľúčové slová: ekonomický rast, Ramseyho model, Brock-Mirmanov model, deterministické modely, stochastické modely, optimálne riadenie

Abstract

SISKA, Martin: Economic growth models and stochasticity. [Diploma thesis] – Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics – Supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD. Bratislava: UK, 2025, 56 pp.

The aim of this thesis is to present the theoretical foundations of deterministic and stochastic economic growth models, analyze their properties, and apply them to real data from selected countries. In the theoretical part, we introduce the deterministic Ramsey model, which focuses on the optimal balance between consumption and savings to maximize welfare, and the stochastic Brock-Mirman model, which incorporates unexpected production shocks. Based on selected macroeconomic data, we calibrated both models and conducted a numerical analysis of their ability to predict economic growth.

Keywords: economic growth, Ramsey model, Brock-Mirman model, deterministic models, stochastic models, optimal control

Obsah

Úvod **9**

1 Ramsyeho model **11**

1.1 Odvodenie Ramsyeho modelu 11

1.2 Riešenie Ramseyho modelu 15

1.3 Analýza fázového portrétu 17

2 Brock-Mirmanov model **19**

2.1 Odvodenie Brock-Mirmanovho modelu v diskrétnom čase 21

2.1.1 Analytický príklad riešenia Brock-Mirmanovho modelu 24

2.1.2 Kvázi-stacionárny stav v Brock-Mirmanovom modeli 26

2.2 Numerické riešenie pomocou iterácie hodnotovej funkcie 28

2.2.1 Diskretizácia stochastického šoku pomocou Tauchenovho algoritmu 28

2.2.2 Iteračný algoritmus a konvergencia hodnotovej funkcie 29

3 Výber vstupných dát, funkcie užitočnosti a produkčnej funkcie **30**

3.1 Výber vstupných dát 30

3.2 Funkcia užitočnosti 33

3.3 Produkčná funkcia 34

3.4 Zhrnutie vstupov 34

4 Tvorba modelov pre vybrané krajiny **35**

4.1 Kalibrácia Ramseyho modelu 35

4.1.1 Ramseyho model pre Slovensko 37

4.1.2 Ramseyho model pre Česko 41

4.1.3 Ramseyho model pre Dánsko 44

4.2 Analýza pomocou Brock-mirmanovho modelu 46

4.2.1 Brock-Mirmanov model pre Slovensko 47

4.2.2 Brock-Mirmanov model pre Česko 48

4.2.3 Brock-Mirmanov model pre Dánsko 49

4.3 Zhrnutie modelov 50

Záver **52**

Zoznam použitej literatúry **54**

Úvod

Ekonomický rast a jeho zabezpečenie sú kľúčovými témami moderných ekonomických teórií. Modely ekonomického rastu sa zvyčajne delia na exogénne (Harrod-Domarov a Solowov model) a endogénne modely (Ramseyho model). Exogénne modely vychádzajú z predpokladu, že rast je poháňaný vonkajšími faktormi, najmä technologickým pokrokom, ktorý nie je ovplyvnený rozhodnutiami ekonomických agentov. Endogénne modely naopak predpokladajú, že rozhodovanie samotných agentov môže byť hnacím motorom rastu.

Z iného hľadiska možno modely rozdeliť na deterministické (Ramseyho model) a stochastické (Brock-Mirmanov model) – na tomto rozdelení je založený aj prístup zvolený v tejto práci. Deterministické modely vychádzajú z predpokladu, že ekonomické procesy prebiehajú deterministicky, bez akýchkoľvek náhodných výkyvov. Tieto však v realite narážajú na isté obmedzenia, ktorými sú reálne udalosti – hospodárske krízy, technologické skoky či iné neočakávané šoky – ktoré sú bežnou súčasťou ekonomiky. Spomínané výkyvy sú zohľadňované v stochastických modeloch, ktoré boli vyvinuté s cieľom zreálniť výpočty, do ktorých je zahrnutý prvok neistoty.

Cieľom diplomovej práce je popísať stochastické rozšírenie ekonomických modelov rastu a ukázať, ako toto rozšírenie v praxi dokáže zlepšiť rastový model na vybraných krajinách.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Kapitola 1 približuje teoretické základy Ramseyho modelu ekonomického rastu. Ide o základný deterministický model, ktorý formulujeme ako úlohu optimálneho riadenia. V tomto modeli sa analyzujú optimálne trajektórie spotreby a kapitálu vďaka maximalizácii užitočnosti domácností.

Kapitola 2 rozširuje Ramseyho model o stochastické šoky, pričom ide o verziu v diskrétnom čase. Predstavujeme Brock-Mirmanov model, ktorý je rozšírením Ramseyho modelu a umožňuje modelovať ekonomiku, ktorej vývoj produktivity je ovplyvnený náhodnými šokmi. Týmto rozšírením sa dostávame k novému rámcu, v ktorom vieme analyzovať optimálne rozhodnutia domácností za prítomnosti neistoty. Ukazujeme riešenie modelu pomocou Bellmanovej rovnice a diskretizácie náhodných šokov pomocou Tauchenovho algoritmu. Keďže problematike stochasticity v ekonomických modeloch rastu sa venovalo značné množstvo autorov, kapitola obsahuje teoretický literárny rámec, z ktorého práca vychádza.

V Kapitole 3 sa zaoberáme určením vstupných dát do modelu a vhodným výberom funkcie užitočnosti a produkčnej funkcie. Využívame historické makroekonomické údaje – výdavkové účty krajín, dáta o počte zamestnancov, mzdách a kapitále krajín.

Kapitola 4 sa zaoberá kalibráciou vybraných parametrov z dát pozorovateľných počas tréningového obdobia a riešením kalibrovaných modelov pre vybrané krajiny (Slovensko, Česko, Dánsko), a to ako na tréningovom, tak i testovacom časovom období. Dáta, ktoré sa vo webových databázach nenachádzali, odhadujeme pomocou chybovosti modelu na tréningovom horizonte a výsledky modelov uvádzame spolu s príslušnými grafmi. Porovnanie výsledku deterministického a stochastického modelu nám umožní priamo pozorovať, akú pridanú vysvetľovaciu schopnosť má zavedenie neistoty. V tejto kapitole ukazujeme, aký benefit má pridanie stochastického prvku do rastových modelov.

1 Ramsyeho model

V tejto kapitole predstavíme Ramseyho model, ktorý predstavuje významný míľnik v teórii ekonomického rastu. Prvýkrát bol formulovaný britským ekonómom Frankom Ramseyom v jeho práci „A Mathematical Theory of Saving“ [14] z roku 1928, kde sa zameriaval na optimalizáciu spotreby v priebehu času.

Ramseyho model predpokladá, že ekonomické rozhodnutia agentov sú kľúčové pre dlhodobý rast. Zameranie na optimálne rozhodovanie o spotrebe a úsporách ukazuje, ako jednotlivci prispievajú k rastu kapitálu a zmene v pracovnej sile. Model sa snaží určiť rovnováhu, ku ktorej ekonomika konverguje, pričom zohľadňuje rast populácie a technologický pokrok.

V nasledujúcich sekciách podrobne odvodíme Ramseyho model ako úlohu optimálneho riadenia, kde cieľom je nájsť optimálnu trajektóriu dynamických premenných (spotreba a kapitál)a preskúmame jeho základné predpoklady a charakteristiky. Tento prístup zahŕňa definovanie podmienok optimálneho riadenia, ktoré vedú k dosiahnutiu rovnovážneho stavu. Budeme sa zameriavať na analýzu rôznych typov rovnováh, ktoré môžu vzniknúť v závislosti od počiatočných podmienok a parametrov modelu. Tento prístup nám umožní vizualizovať správanie ekonomiky prostredníctvom fázového portrétu, na ktorom môžeme sledovať rôzne trajektórie ekonomických agentov, ako aj vývoj kapitálu a spotreby v čase. Našou hlavnou úlohou bude identifikovať optimálnu trajektóriu, resp. manifoldu, ktorá vedie k rovnovážnemu stavu. S odvodenými optimálnymi trajektóriami budeme pracovať v Kapitole 4 pri kalibrácii vybraných parametrov do Ramseyho modelu. V reálnom svete považujeme za túto manifoldu optimálny pomer budovania kapitálu v štáte a spotreby obyvateľstva. Vďaka tejto manifolde vieme dosahovať čo najväčší blahobyt, keďže maximalizujeme úžitok obyvateľstva po celý čas s ohľadom na správne budovania kapitálu. Pri teoretickom spracovaní Ramseyho modelu vychádzame z prác [1, 6, 7, 9, 10, 13, 14].

1.1 Odvodenie Ramsyeho modelu

V tejto časti predstavíme formuláciu Ramseyho modelu ako úlohy optimálneho riadenia. Tento krok je potrebný pre následnú analýzu jeho vývoja a nájdenie optimálnej trajektórie, ktorá vedie k dlhodobému rovnovážnemu stavu ekonomiky.

Prvým predpokladom je, že Ramseyho model pracuje s uzavretou ekonomikou, v ktorej predpokladá, že výsledný produkt Y je tvorený pomocou produkčnej funkcie $F(K, L)$, ktorá je tvorená kapitálom K a prácou L, to znamená:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \tag{1}$$

V uzavretej ekonomike existujú dve hlavné možnosti, ako nakladať s výsledným produktom: prvou je jeho spotreba C, teda použitie na uspokojenie aktuálnych potrieb, a druhou sú úspory S, ktoré môžeme v uzavretej ekonomike iba investovať na podporu budúceho rastu, preto platia nasledujúce vzťahy:

$$I(t) = S(t),$$
$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

Keďže máme uzavretú ekonomiku, tieto investície spätne navyšujú množstvo kapitálu v ekonomike. Zároveň sa však časť kapitálu aj opotrebuje (amortizuje). Mieru amortizácie budeme značiť δ a zmenu kapitálu nám bude vyjadrovať:

$$\dot{K} = I(t) - \delta K(t).$$

O produkčnej funkcií F predpokladáme, že je spojitá dvakrát differencovateľná funkcia v premenných K a L spĺňajúca nasledujúce vzťahy:

$$\frac{dF}{dK} > 0, \qquad \frac{d^2F}{dK^2} < 0, \tag{2}$$
$$\frac{dF}{dL} > 0, \qquad \frac{d^2F}{dL^2} < 0. \tag{3}$$

Z týchto vzťahov vieme, že produkčná funkcia F je rastúca a konkávna v oboch premenných, z toho vyplýva, že so zvyšujúcim sa kapitálom a prácou náš výsledný produkt síce rastie, ale stále pomalšie. Ďalej predpokladáme, že z nulových vstupov nemôžeme vyrobiť žiadny produkt, a zároveň je nutná participácia oboch vstupov to znamená $F(K, 0) = F(0, L) = 0$.

Navyše musí nutne platiť aj predpoklad konštantných výnosov z rozsahu, čiže $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ pre každé kladné λ. Hovoríme, že funkcia F je homogénna funkcia prvého stupňa.

Ďalším dôležitým predpokladom sú Inadove podmienky[1]:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{dF}{dK} = 0, \qquad \lim_{K\to 0} \frac{dF}{dK} = \infty, \qquad \text{pre } \forall L > 0. \tag{4}$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{dF}{dL} = 0, \qquad \lim_{L\to 0} \frac{dF}{dL} = \infty \qquad \text{pre } \forall K > 0. \tag{5}$$

V deterministickom modeli predpokladáme konštantný prírastok práce. Konštantu, ktorá bude popisovať prírastok pracovnej sily budeme označovať n. Potom platí:

$$\dot{L} = nL \tag{6}$$

Ramsyeho model budeme formulovať ako úlohu optimálneho riadenia. Na to bude potrebné si zadefinovať účelovú funkciu, stavovú premennú a príslušné ohraničenia.

V účelovej funkcii budeme maximalizovať celkový diskontovaný úžitok obyvateľstva zo spotreby na nekonečnom horizonte. Preto je nevyhnutné určiť úžitkovú funkciu $U(C)$, ktorá predstavuje úžitok celej populácie

Označme spotrebu na jednotku pracovnej sily $c = \frac{C}{L}$. Pri predpoklade, že každý člen v ekonomike sa správa rovnako, môžme definovať funkciu užitočnosti $U(c)$, ktorá predstavuje mieru úžitku pre jednotku pracovnej sily. O tejto funkcii predpokladáme, že je striktne rastúca, konkávna a dvakrát diferencovateľná. Zároveň predpokladáme, že funkcia $U(c)$ spĺňa Inadove podmienky:

$$\lim_{c\to 0^+} U'(c) = \infty,$$

$$\lim_{c\to\infty} U'(c) = 0.$$

Účelovú funkciu na spojitom časovom období vieme zapísať nasledovne:

$$\int_0^\infty e^{-rt} U(c(t))dt, \tag{7}$$

kde r predstavuje diskontný faktor.

Stavovú premennú vytvoríme pomocou podielu premenných K a L. Určíme tak množstvo vynaloženého kapitálu na jednotku pracovnej sily. Novú premennú budeme označovať k a nazývame ju efektívna kapitálová vybavenosť a vieme ju vyjadriť ako

$$k = \frac{K}{L},$$

[1]Inadove podmienky sú dôležité pre stabilitu modelu a pomáhajú nám zreálniť model. Zabezpečujú, že v dlhodobom horizonte sa nebude kapitál a práca akumulovať do nekonečna. Zároveň, ak bude kapitálu alebo práce nedostatok (blízky nule), bude hraničný produkt maximálny.

Produkčnú funkciu, ktorá bude popisovať výsledný produkt na jednotku pracovnej sily označíme $f(k)$. Využitím vlastnosti konštantných výnosov z rozsahu funkcie $F(K, L)$ dostávame:

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = F(k, 1).$$

Z tohto vzťahu nutne vyplýva:

$$f(0) = F(0, 1) = 0.$$

Vďaka predpokladom (2) a (3), ktoré sme využili pri definovaní produkčnej funkcie $F(K, L)$ vyplýva:

$$f'(k) > 0 \quad k \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$
$$f''(k) < 0 \quad k \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

To znamená, že funkcia f je rastúca a konkávna na celom obore hodnôt $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Rovnako tak spĺňa nová produkčná funkcia aj Inadove podmienky, ktoré vieme odvodiť nasledovne:

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \tag{8}$$
$$\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0. \tag{9}$$

V optimálnom riadení budeme potrebovať vedieť, ako sa v čase mení stavová premenná – efektívna kapitálová vybavenosť. Zmenu tejto stavovej premennej, respektíve vývoj kapitálu na jednotku pracovnej sily, vieme vyjadriť pomocou:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} = \frac{I - \delta K}{L} - nk = f(k) - (\delta + n)k - c.$$

Ohraničení, s ktorými budeme rátať v Ramseyho modeli, môže byť niekoľko. Vyplývajú z toho, že funkcia f je definovaná len pre $k \geq 0$ a zároveň funkcia $U(c)$ je definovaná len pre $c > 0$. Ohraničení, s ktorými budeme rátať v Ramseyho modeli, môže byť niekoľko. Vychádzajú z toho, že funkcia f je definovaná len pre $k \geq 0$ a funkcia $U(c)$ len pre $c > 0$. Z praktického hľadiska (a kvôli riešiteľnosti modelu) sa často používa ohraničenie v tvare $0 < c(t) \leq f(k(t))$, ktoré zabezpečuje obmedzenosť spotreby aj nezápornosť kapitálu. Deterministický Ramseyho model môžeme ako úlohu optimálneho riadenia pri tomto ohraničení zapísať v tvare:

$$\begin{aligned}
&\max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-rt} U(c(t))dt, \\
&\quad \dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t), \\
&\quad k(0) = k_0 > 0, \\
&\quad 0 < c(t) \leq f(k(t)).
\end{aligned} \tag{10}$$

1.2 Riešenie Ramseyho modelu

V tejto časti ukážeme, ako nájsť riešenie Ramseyho modelu (10). Zistíme, že také riešenie existuje a nájsť ho budeme vedieť pomocou analýzy fázového portrétu. V literatúre je možné sa stretnúť s viacerými formuláciami Ramseyho modelu, my ukazujeme riešenie podľa [1], v ktorom autor pracuje s modelom v tvare:

$$\begin{aligned}
&\max_{[k(t),c(t)]_{t=0}^\infty} \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} u(c(t))dt, \\
&\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t), \\
&k(0) = k_0 > 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Oproti formulácii (10) odvodenej v časti 1.1 Acemoglu pre zjednodušenie nepoužíva ohraničenie na spotrebu c. Rovnako tak si všimnime, že namiesto klasického diskontného faktora r, používa Acemoglu $\rho - n$. Predpokladá, že miera diskontu závisí aj od veľkosti populácie v budúcnosti.

Predpoklady na funkciu f a u ostávajú rovnaké ako v predchádzajúcej kapitole. Riešenie budeme hľadať za pomoci current-value (okamžitej hodnoty) Hamiltoniánu funkcie:

$$\hat{H}(k, c, \mu) = u(c(t)) + \mu(t) \left[f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) \right]. \tag{12}$$

Ďalej Acemoglu využíva vetu 7.13 (maximum principle for discounted infinite-horizon problems), pomocou ktorej odvádza nutné podmienky optimálneho riadenia pre úlohu (11). Na základe tejto vety formuluje podmienky prvej derivácie Hamiltoniánu podľa kapitálu a práce, ako aj transverzálnu podmienku, ktoré musia byť splnené pre každú optimálnu trajektóriu:

$$\hat{H}_k(k, c, \mu) = (\rho - n)\mu(t) - \dot{\mu}(t), \tag{13}$$

$$\hat{H}_c(k, c, \mu) = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{t \to \infty} \exp(-(\rho - n)t)\mu(t)k(t) = 0. \tag{15}$$

Využitím Hamiltoniánu (12) a úpravou podmienok optimality (13) a (14) dostávame diferenciálnu rovnicu pre vývoj adjungovanej premennej $\mu(t)$:

$$\dot{\mu}(t) = \mu(t)\left[f'(k(t)) - \delta - \rho\right]. \tag{16}$$

Riešením tejto rovnice je:

$$\mu(t) = \mu(0)\exp\left(-\int_0^t \left(f'(k(s)) - \delta - \rho\right) ds\right).$$

Využitím derivácií Hamiltoliánu (12) a rovnice (16) pri čase $t = 0$ dostávame $\mu(0) = u'(c(0))$. Keďže úžitková funkcia je z predpokladov striktne konkávna, platí $u'(c(0)) > 0$ a teda aj $\mu(0) > 0$.

Diferenciálnu rovnicu pre vývoj spotreby vieme vyjadriť z rovnice pre adjungovanú premennú (16) dosadením vzťahu $\mu(t) = u'(c(t))$, respektíve $\dot{\mu}(t) = u'(c(t))c'(t)$. Spolu so stavovou rovnicou z úlohy (11) dostávame systém dvoch diferenciálnych rovníc pre Ramseyho model:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= f(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t), \\ \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \frac{1}{\epsilon_u(c(t))}\left(f'(k(t)) - \delta - \rho\right), \end{aligned} \tag{17}$$

kde $\epsilon_u(c(t))$ prestavuje elasticitu úžitku a je daný vzťahom:

$$\epsilon_u(c(t)) \equiv -\frac{u''(c(t))}{u'(c(t))} \cdot c(t).$$

Teraz sa zameriame na definíciu stacionárneho bodu systému. V optimálnej úlohe pre Ramseyho model existuje rovnovážny stav, ktorý ak systém raz dosiahne, ostane v ňom po nekonečne dlhú dobu. Znamená to, že v rovnovážnom stave sa efektívna kapitálová vybavenosť a spotreba nemení:

$$\dot{c}(t) = 0, \tag{18}$$

$$\dot{k}(t) = 0. \tag{19}$$

Použitím rovníc (17), (18) a (19) dostávame sústavu rovníc pre rovnovážny stav:

$$\begin{aligned} f'(k^*(t)) &= (\delta + \rho), \\ c^*(t) &= f(k^*(t)) - (n+\delta)k^*(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Definovaním CRRA úžitkovej funkcie a Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie v Kapitole 3 dostávame sústavu dvoch diferenciálnych rovníc, ktoré nás pri vhodne zvolenom vstupe $c(0)$ dostanú do stabilného bodu:

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{21}$$

$$c^* = A(k^*)^\alpha - (\delta + n)k^*. \tag{22}$$

Dynamický systém definovaný rovnicami (17) spolu s rovnovážnym bodom charakterizovaným rovnicami (20) určuje jedinečnú trajektóriu, ktorá vedie k dlhodobej rovnováhe modelu. Toto riešenie zároveň spĺňa podmienky optimality odvodené z Hamiltoniánu (12) a podmienku transverzality (15), čím predstavuje optimum Ramseyho modelu.

Acemoglu vo svojom diele ukazuje, že túto trajektóriu možno interpretovať aj ako výsledok kompetitívnej rovnováhy medzi reprezentatívnou domácnosťou a firmami v decentralizovanej ekonomike. Ak trhová úroková miera zodpovedá marginálnemu produktu kapitálu zníženému o mieru amortizácie a domácnosti sa rozhodujú optimálne vzhľadom na svoje rozpočtové obmedzenia, ich rozhodnutia sa zosúladia s rozhodnutiami plánovača.

Z tohto dôvodu môžeme riešenie Ramseyho modelu považovať za decentralizovateľné a rovnovážny bod za pareto optimálny. V nasledujúcej časti ukážeme správanie systému pri rôznych počiatočných podmienkach a bližšie preskúmame trajektórie smerujúce k tejto rovnováhe pomocou analýzy fázového portrétu.

1.3 Analýza fázového portrétu

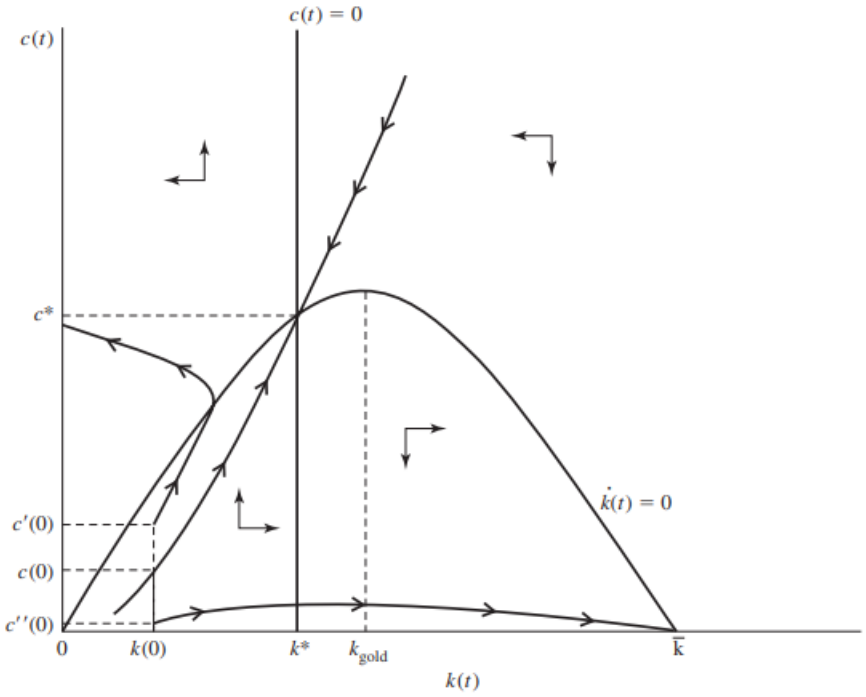
V tejto časti predstavíme analýzu fázového portrétu systému (17), ktorý nám umožní sledovať trajektórie vývoja kapitálu a spotreby pri rôznych počiatočných bodoch.

Okrem systému (17) pri analýze budeme pracovať s počiatočnou podmienkou $k(0) > 0$ a okrajovou podmienkou, ktorú sme dostali z rovníc (15) a (16):

$$\lim_{t\to\infty} \left(k(t) \exp\left(-\int_0^t (f'(k(s)) - \delta - n)\, ds\right)\right) = 0. \tag{23}$$

V neoklasickom modeli rastu existuje jedinečná rovnováha, ktorá je reprezentovaná jednorozmernou optimálnou trajektóriou (resp. manifoldou) $k - c$ kombinácií, ktorá konverguje k rovnovážnemu stavu (20). Fázový portrét je tvorený pomocou dvoch izoklín. Prvá izoklína vzniká na mieste, kde $\dot{c} = 0$ a druhá izoklína, ktorá vyzerá ako inverzno

U-tvarovaná krivka, vzniká na mieste kde $\dot{k} = 0$. Spojením týchto dvoch kriviek sa určuje rovnovážny stav k^*, c^*, ktorý predstavuje dlhodobú rovnováhu modelu. Optimálna trajektória je tá, ktorá sa dostane do tohto bodu. Tento fázový portrét je ilustrovaný na obrázku 1.



Obr. 1: Fázový portrét pre Ramseyho model [1])

Ak začneme s počiatočným kapitálovo-pracovným pomerom $k(0)$ a počiatočnou hodnotou spotreby $c(0)$, ktorá sa nachádza na manifolde, trajektória tejto dynamiky konverguje k jedinečnej rovnováhe (k^*, c^*). Tento proces ukazuje, že pre akýkoľvek počiatočný stav $k(0) > 0$, existuje príslušný počiatočný stav $c(0)$ a trajektória, ktorá bude po tejto manifolde konvergovať k rovnovážnemu stavu.

Vďaka tomu, že rovnovážny stav je pareto optimálny, vieme povedať, že tento rovnovážny stav je zároveň aj jedinečný a neexistuje žiadny iný rovnovážny stav. To znamená, že trajektória, ktorá začína v bode $k(0)$ a $c(0)$ a spĺňa (17) a (23) a konverguje ku k^* a c^* je jedinou optimálnou trajektóriou. V prípade, že $k(0) < k^*$, tak k aj c v čase rastie, až kým nedosiahne hodnotu k^* a c^*. V prípade, že $k(0) > k^*$, tak k aj c v čase klesá, až kým nedosiahne hodnotu k^* a c^*.

To, že existuje len jedna optimálna trajektória môžeme dokázať vylúčením ostatných trajektórií. Ak by sme totiž začínali pod optimálnou manifoldou so spotrebou $c''(0) < c(0)$,

to znamená že $c''(0)$ by sa nenachádzalo na optimálnej trajektórií, spotreba by po určitom čase klesla na 0 a kapitálová vybavenosť by konvergovala k bodu $\overline{k} > k^*$. Z vlastností funkcie f, ktorá je rastúca a konkávna na celom definičnom obore a z rovnice transverzality (23) vyplýva:

$$f'(\overline{k}) < f'(k^*),$$
$$f'(\overline{k}) \leq (n + \delta).$$

Kvôli tejto nerovnosti už neplatí silnejšia podmienka transverzality (23), pretože:

$$\lim_{t\to\infty} \left(\overline{k}(t) \exp\left(- \int_0^t \left(f'(\overline{k}(s)) - \delta - n \right) ds \right) \right) > 0.$$

Tým pádom trajektórie, ktoré sa nachádzajú pod optimálnou manifoldou, nemôžu byť tiež optimálnymi trajektóriami.

V prípade, že volíme spotrebu nad optimálnou trajektóriou, t.j. $c'(0) > c(0)$, kapitál v určitom čase klesne na 0 pri nezápornej spotrebe. Táto skutočnosť porušuje počiatočné podmienky a predpoklady modelu, preto táto trajektória nemôže byť optimálna. Znamená to, že existuje len jedna optimálna trajektória.

V numerickej časti v Podkapitole 4.1, v ktorej sa budeme venovať numerickej analýze Ramseyho modelu, budeme predstavené riešenie využívať pri kalibrácii modelu. Budeme hľadať optimálnu trajektóriu na základe rovníc (17), pomocou ktorých dokážeme simulovať trajektórie vývoja kapitálu a spotreby. Na určenie stabilného bodu využijeme po definovaní konkrétnej funkcie užitočnosti a produkčnej funkcie sústavu rovníc (20).

2 Brock-Mirmanov model

Základy stochastického modelovania ekonomického rastu v rámci neoklasickej teórie položili Brock a Mirman (1972) vo svojej priekopníckej práci „Optimal Economic Growth and Uncertainity: The Discounted Case“ [4]. Autori zaviedli model sociálneho plánovača, ktorý sa ohľadom budúcich produktivít rozhoduje v prostredí s neistotou. Novinkou oproti Ramseyho modelu formulovanému v kapitole 1 bola prítomnosť stochastického šoku v produkčnej funkcii, čím sa z modelu stal Markovov rozhodovací proces. Brock a Mirman ukázali, že optimálnu politiku alokácie spotreby a investícií pomocou Bellmanovej rovnice

je možné definovať aj v prostredí, ktoré podlieha náhodným výkyvom a ich prístup sa stal základom pre ďalší vývoj kvantitatívnych dynamických stochastických modelov.

Na formuláciu sociálneho plánovača v prostredí s náhodnými šokmi sa v časti venovanej stochastickým modelom rastu zameral Acemoglu [1]. Bellmanovu rovnicu odvodil ako centrálny nástroj na riešenie dynamických optimalizačných problémov. Pre špeciálny prípad logaritmickej užitočnosti a Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie ukazuje analytické riešenie už spomínaného Brock-Mirmanovho modelu pomocou tipovacej metódy.

Praktickej implementácii týchto modelov sa venujú Adda a Cooper (2003), ktorí sa v knihe „Dynamics Economics: Quantitative Methods and Applications"[2], zamerali na kvantitatívne metódy riešenia dynamických ekonomických modelov a detailne sa venujú numerickému riešeniu Bellmanovej rovnice pomocou diskretizácie stavového priestoru, vďaka čomu uvádzajú, ako bude vyzerať kvázi-stacionárny bod. Dôležitým prínosom Heera a Maußnera [8], bola zasa podrobná diskusia o aproximácii stochastických šokov pomocou Tauchenovho algoritmu, čo umožňuje verné zachytenie dynamiky exogénneho procesu v diskrétnom priestore. Ich práca bola zameraná na numerické riešenie Ramseyho modelu, na ktorého stochastickú verziu sa vo svojom článku zameriavali aj Mitra a Roy [12], analyzovali, či je politika odvedená z Eulerovej rovnice (tzv. Ramsey-Euler policy) skutočne optimálnym riešením problému sociálneho plánovača. Ukázali, že aj v stochastickom prostredí s náhodnými produkčnými šokmi môže byť za určitých predpokladov Eulerova rovnica postačujúcou podmienkou optimálnosti.

Medzi štúdie vychádzajúce z Ramseyho modelu ďalej patrí štúdia Amilona a Bermina s názvom „Welfare Effects of Controlling Labor Supply: An Application of the Stochastic Ramsey Model" [3]. Autori skúmali vplyv exogénne kontrolovanej pracovnej sily na blahobyt v rámci stochastického Ramseyho modelu. Modelovali situáciu, kde vláda stanovuje mieru rastu pracovnej sily ako politickú premennú. Ich výsledky ukázali, že intervencie na trhu práce môžu mať významné blahobytné efekty a zároveň demonštrovali praktické využitie stochastického Ramseyho modelu pri hodnotení verejných politík.

Na samotnú štruktúru stochastického šoku v súvislosti s rôznymi formami stochastických rozšírení klasického Ramseyho modelu a ich dôsledky pre dynamiku optimálneho rastu sa vo svojej práci sústredil Sladký [15], ktorý porovnával modely so šokom v produkcii a v technologickej úrovni. Analyzoval, ako jednotlivé typy šokov ovplyvňujú dlhodobé

správanie modelu, rovnovážne rozdelenie stavových premenných a stabilitu dynamického systému. Práca tiež upozornila na metodologické výzvy spojené s diskretizáciou a simuláciou modelov, čím poskytla praktické usmernenia pre ich numerickú implementáciu.

Doposiaľ uvádzané štúdie vychádzali zo základov položených v modeli Brocka a Mirmana, alternatívnymi modelmi s významným prínosom do teórie stochastických modelov sú však aj modely reálnych hospodárskych cyklov (RBC), ktoré vyvinuli Kydland a Prescott [11] v 80. rokoch. Na rozdiel od Brock-Mirmanovho modelu, ktorý sa sústreďuje na reakcie domácností na šoky, RBC modely sa zameriavajú na exogénne technologické šoky, ktoré ovplyvňujú produktivitu a hospodársku aktivitu. Tieto šoky, ako sú technologické inovácie alebo nepredvídané zmeny dopytu, vedú k cyklickým výkyvom v ekonomike, ako sú expanzie a recesie. RBC prístup tvrdí, že tieto výkyvy môžu byť vysvetlené práve technologickými zmenami, ktoré sú exogénne, a preto sa ekonomika po týchto šokoch vždy vráti do rovnováhy. Tento model kladie dôraz na optimalizáciu rozhodnutí ekonomických agentov, ktoré reagujú na tieto šoky cez svoju spotrebu, investície a pracovnú silu. RBC modely poskytujú nástroj na analýzu hospodárskych cyklov a hodnotenie vplyvu politík, ktoré môžu stabilizovať ekonomiku počas týchto výkyvov, pričom sa stále predpokladá, že ekonomika sa nakoniec vracia do dlhodobej rovnováhy.

Cieľom tejto kapitoly je predstaviť výpočtové metódy stochastickej verzie Ramseyho modelu, ktorý zohľadňuje exogénne stochastické šoky v produkcii a následne nájsť taký model, ktorý čo najlepšie pokryje výkyvy v produkcii ekonomiky. V Podkapitole 2.1 odvodíme Brock-Mirmanov model v diskrétnom čase. Najskôr predstavíme analytické riešenie v prípade logaritmickej užitočnosti a 100 % amortizácie kapitálu, čím sa priblížime ku klasickému príkladu podľa Acemoglua [1]. Odvodenie kvázi-stacionárneho riešenia podľa Addu a Coopera [2] popisujeme v časti 2.1.2. Numerické riešenie stochastického modelu pomocou iterácie hodnotovej funkcie a diskretizácie priestoru šokov v Podkapitole 2.2 sme sa rozhodli riešiť podľa Heera a Maußnera [8]. Model budeme kalibrovať a riešiť pre reálne dáta v časti 4.2.

2.1 Odvodenie Brock-Mirmanovho modelu v diskrétnom čase

Odvodenie Brock-Mirmanovho modelu vypracujeme podľa literatúry [1].

Brock–Mirmanov model vychádza z Ramseyho modelu, pričom viaceré jeho základné

predpoklady ostávajú zachované. Zásadný rozdiel však spočíva v tom, že Brock–Mirmanov model je formulovaný v diskrétnom čase a navyše zavádza stochastický prvok do produkčnej funkcie vo forme náhodného šoku produktivity $z(t)$. Produkčnú funkciu môžeme zapísať v tvare:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), z(t)). \tag{24}$$

Ako sme už uviedli, pre Brock-Mirmanov model platia rovnaké predpoklady, a to znamená, že budeme rátať s produkčnou funkciou a výsledným produktom na jednotku pracovnej sily. Dostávame vzťah:

$$y(t) = f(k(t), z(t)). \tag{25}$$

O stochastickom prvku $z(t)$ predpokladáme, že je realizáciou Markovovho reťazca s konečným stavovým priestorom $Z \equiv \{z_1, \ldots, z_N\}$, kde platí $z_1 < z_2 < \ldots < z_N$. Vyššie hodnoty z_i reprezentujú vyššiu produktivitu, pričom predpokladáme, že pre $i > j$ a ľubovoľné $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ platí $f(k, z_i) > f(k, z_j)$. Tento predpoklad zaručuje, že vyššia realizácia šoku vedie k vyššej produkcii pri danom kapitálovo-pracovnom pomere.

Brock-Mirmannov model je definovaný ako diskrétna úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} &\max_{\{c(t)\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)) \right), \\ &\qquad k(t+1) = f(k(t), z(t)) + (1 - n - \delta)k(t) - c(t), \\ &\qquad \text{kde } k(0) > 0 \text{ je dané.} \end{aligned} \tag{26}$$

V deterministickom modeli používame diskontný faktor $\beta = \frac{1}{1+\rho-n}$, E_0 predstavuje očakávaný úžitok súčasnej i budúcej spotreby.

V stochastických dynamických modeloch, ako je Brock–Mirmanov model, sa optimálne rozhodovanie formuluje pomocou hodnotovej funkcie $V(k, z)$, ktorá vyjadruje maximálnu dosiahnuteľnú hodnotu očakávaného diskontovaného úžitku, ak sa ekonomika nachádza v stave (k, z). Táto funkcia reprezentuje riešenie úlohy optimálneho riadenia v diskrétnom čase. Na základe vyššie odvodených predpokladov sa uplatňujú tri základné podmienky optimálneho riadenia: Bellmanova rovnosť, ktorá predstavuje nutnú aj postačujúcu podmienku optimálneho riadenia, Eulerova rovnica, ktorá je nutnou podmienkou medzičasovej optimality a transverzálna podmienka, ktorá je nutnou podmienkou a zabezpečuje, že sa

kapitál v nekonečnom horizonte nebude hromadiť neefektívne. Tieto podmienky budú v ďalšom texte postupne rozvedené.

Budúcu kapitálovú vybavenosť označíme k' a budúci stochastický šok z'. Hodnotová funkcia pre náš systém bude mať tvar:

$$V(k,z) = \max_{k' \in [0, f(k,z)+(1-\delta)k]} \Big(u\left(f(k,z) + (1-n-\delta)k - k'\right) + \beta \mathbb{E}\left[V(k',z')|z\right] \Big), \tag{27}$$

kde $\mathbb{E}[V(k',z')|z]$ je očakávaná hodnota budúcej funkcie hodnoty, ktorá závisí od rozhodnutia k' a stochastického šoku z' a súčasná spotreba je určená ako:

$$c = f(k,z) + (1-n-\delta)k - k'. \tag{28}$$

Vo vyššie definovanom probléme stochastického rastu je funkcia hodnoty $V(k,z)$ striktne rastúca v oboch argumentoch, striktne konkávna v k a spojito diferencovateľná pre $k > 0$. Existuje jednoznačná rozhodovacia funkcia $\pi(k,z)$, pre ktorú platí:

$$k(t+1) = \pi(k(t), z(t)). \tag{29}$$

Optimálna rozhodovacia funkcia $\pi(k,z)$ je striktne rastúca v oboch argumentoch. Za predpokladu dostatočnej hladkosti hodnotovej funkcie, môžeme Bellmanovu rovnicu derivovať podľa stavovej premennej. Tým získavame Eulerovu rovnicu, ktorá predstavuje nutnú podmienku optimálneho medzičasového rozhodovania. Vyjadruje rovnováhu medzi marginálnym úžitkom zo spotreby dnes a očakávaným marginálnym úžitkom v budúcnosti. Tento vzťah opisuje optimálne správanie spotreby v čase v podmienkach neistoty. Definujme optimálnu spotrebu ako $\pi_c(k,z) = f(k,z) + (1-\delta)k - \pi(k,z)$. Potom Eulerova rovnica nadobúda tvar:

$$u'\left(\pi_c(k,z)\right) = \beta \mathbb{E}\left[\left(f'\left(\pi(k,z),z'\right) + 1 - n\delta\right) u'\left(\pi_c(\pi(k,z),z')\right)|z\right]. \tag{30}$$

Ďalšou nutnou podmienkou pre optimálne riadenie je transverzálna podmienka. Táto podmienka nevyplýva priamo z Bellmanovej rovnice, ale z požiadavky, aby sa kapitál v dlhodobom horizonte neakumuloval neoptimálne — teda aby domácnosti nezanechávali bohatstvo, ktoré už nemá žiaden vplyv na úžitok. V našom modeli má transverzálna podmienka tvar:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\beta^t (f'(k(t),z(t)) + 1 - n - \delta) u'(c(t)) k(t) \mid z(0)\right] = 0. \tag{31}$$

Kapitálová zásoba v čase $t+1$ je daná rozhodovacou funkciou (29), ktorá určuje optimálnu reakciu na daný stav $(k(t), z(t))$. Keďže exogénna premenná $z(t)$ sleduje Markovov proces a rozhodovanie závisí len od aktuálneho stavu, dvojica $(k(t), z(t))$ tvorí markovovský proces. Za predpokladu, že $z(t)$ je Markovov reťazec s nedegenerovaným rozdelením, premenná $k(t)$ nekonverguje ku konštantnej hodnote, ale k invariantnému limitnému rozdeleniu. V prípade malého počtu stavov $z(t)$ bude rozdelenie kapitálu oscilovať okolo konkrétnej hodnoty, môžeme teda hovoriť o kvázi-stacionárnom stave. Vo všeobecnosti však nemôžeme očakávať konvergenciu k jednej hodnote kapitálu ako v deterministickom prípade [1].

2.1.1 Analytický príklad riešenia Brock-Mirmanovho modelu

Vo všeobecnej formulácii neexistuje analytické riešenie Brock-Mirmanovho modelu. Za istých zjednodušujúcich predpokladov však analytické riešenie možno nájsť. Jeden z takých prípadov ukážeme v tejto podkapitole, ktorá je spracovaná podľa [1].

Predpokladajme, že kapitál sa každé obdobie úplne znehodnotí, teda $\delta = 1$. Kapitál sa neprenáša medzi obdobiami a nový kapitál vzniká výhradne investíciou v danom období. Zároveň predpokladajme, že nárast pracovnej sily je nulový, teda $n = 0$. Ďalej uvažujme špecifický tvar funkcie pre užitočnosť: $u(c) = \ln c$ a produkčej funkcie: $f(k, z) = zk^{\alpha}$, kde $0 < \alpha < 1$, diskontný faktor: $\beta \in (0, 1)$. Rozpočtové obmedzenie sa potom zjednoduší a úlohu optimálneho riadenia (26) dostane do tvaru:

$$\begin{aligned} &\max_{\{c(t)\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)) \right), \\ &\qquad k(t+1) = f(k(t), z(t)) - c(t), \\ &\qquad \text{kde } k(0) > 0 \text{ je dané,} \end{aligned} \tag{32}$$

pričom spotreba je:

$$c(t) = f(k(t), z(t)) - k(t+1).$$

Príslušná hodnotová funkcia, Eulerova rovnia a podmienka transverzality majú tvar:

$$V(k,z) = \max_{k'} \left\{ \ln(zk^\alpha - k') + \beta \mathbb{E}\left[V(k',z') \mid z \right] \right\}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{zk^\alpha - k'} = \beta\, \mathbb{E}\left[\frac{\alpha z'(k')^{\alpha-1}}{z'(k')^\alpha - k''} \mid z \right], \tag{34}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\beta^t \frac{k(t)}{c(t)} \cdot \alpha z(t) k(t)^{\alpha-1} \right] = 0. \tag{35}$$

Ďalej autor používa metódu tipovania a overovania, podľa štruktúry problému odhadol tvar rozhodovacej funkcie ako:

$$\pi(k,z) = Bzk^\alpha, \tag{36}$$

kde B je konštanta, ktorú určíme. Potom je spotreba:

$$c = zk^\alpha - \pi(k,z) = (1-B)zk^\alpha.$$

Dosadíme do Eulerovej rovnice (34):

$$u'(c) = \beta \mathbb{E}\left[f'(\pi(k,z),z') u'(c') \mid z \right].$$

Pre naše funkcie dostávame:

$$\frac{1}{(1-B)zk^\alpha} = \beta \mathbb{E}\left[\frac{\alpha z'(Bzk^\alpha)^{\alpha-1}}{(1-B)z'(Bzk^\alpha)^\alpha} \right].$$

Po úpravách a skrátení rovnakých členov ostáva:

$$\frac{1}{(1-B)} = \beta\alpha \frac{1}{B(1-B)} \Rightarrow B = \alpha\beta.$$

Teda optimálna rozhodovacia funkcia kapitálu je:

$$\pi(k,z) = \alpha\beta zk^\alpha,$$

a spotreba je:

$$c = (1-\alpha\beta)zk^\alpha.$$

Tento špeciálny prípad umožňuje vyriešiť model v uzavretom tvare bez potreby numerickej aproximácie. Výsledná politická funkcia ukazuje, že optimálna úspora je konštantný podiel z vyprodukovaného produktu a tento podiel závisí len od parametrov α a β. Zaujímavosťou je, že výsledok je identický s deterministickým Ramseyho modelom s rovnakými parametrami bez stochastického šoku, čo znamená, že stochastický prvok v tomto prípade nemení tvar optimálnej politiky. V reálnom svete však 100 % depreciácia kapitálu neexistuje a preto budeme potrebovať model riešiť numericky.

2.1.2 Kvázi-stacionárny stav v Brock-Mirmanovom modeli

Brock-Mirmanov model nemá konkrétny stacionárny stav, jeho hodnoty oscilujú okolo tzv. kvázi-stacionárneho stavu. Tento bod vieme pre konkrétne tvary stochastického šoku, produkčnej funkcie a funkcie užitočnosti nájsť pomocou fixácie stochastického šoku. Postupovať budeme v súlade s literatúrou [2], ktorá sa tejto problematike venuje v kapitole 5.

Uvažujme Brock-Mirmanov model (26) pre CRRA funkciu užitočnosti a Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu. Tieto tvary funkcií budeme neskôr používať v numerickej analýze v Kapitole 4. Pri riešení Brock-Mirmanovho modelu (26) použijeme Lagrangovu funkciu. [2] Model potom vyzerá nasledovne:

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta},$$

za podmienok:

$$k_{t+1} = Az_t k_t^{\alpha} + (1-\delta-n)k_t - c_t,$$
$$k(0) \geq 0 \text{ je dané.}$$

V modeli predpokladáme, že produktivitný šok z_t sleduje logaritmický AR(1) proces, t. j.:

$$\log z_{t+1} = \rho_z \log z_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\varepsilon^2\right), \tag{37}$$

kde ε_t je biely šum, ktorý je v čase nezávislý a normálne rozdelený so strednou hodnotou $-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2$ a rozptylom σ_ε^2. Tento tvar zabezpečuje, že proces z_t je log-normálne rozdelený so strednou hodnotou rovnou jednej, t. j. $\mathbb{E}[z_t] = 1$. Tento predpoklad umožňuje nájdenie kvázi-stacionárneho riešenia.

Autori kvázi-stacionárny bod hľadajú pomocou podmienok prvého rádu pre Lagrangeovu funkciu, ktorá pre túto úlohu má tvar:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda_t \left[Az_t k_t^{\alpha} + (1-\delta-n)k_t - c_t - k_{t+1} \right] \right).$$

[2] Použitiu týchto funkcií sa budeme bližšie venovať v kapitole 3 pri kalibrácií modelov

Podmienky prvého rádu sú tvaru:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t c_t^{-\theta} - \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta^t c_t^{-\theta} = \lambda_t, \tag{38}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \mathbb{E}_t \left[\lambda_{t+1} \left(\alpha A z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + (1 - \delta - n) \right) \right] = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = A z_t k_t^{\alpha} + (1 - \delta - n) k_t - c_t - k_{t+1} = 0. \tag{40}$$

Spojením rovníc (38) a (39) a následnými úpravami dostávame:

$$1 = \beta \, \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\theta} \left(\alpha A z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + (1 - \delta - n) \right) \right]. \tag{41}$$

Stacionárny stav odvodíme pomocou rovníc (40) a (41). Pre stacionárny stav je známe, že hodnoty k a c sa v čase nemenia a teda platí $k_{t+1} = k_t = k^*$ a $c_{t+1} = c_t = c^*$. Zároveň platí $\mathbb{E}(z_t) = 1$. Tým pádom sa nám nasledujúce rovnice zjednodušia na:

$$A k^{*\alpha} + (1 - \delta - n) k^* - c^* - k^* = A k^{*\alpha} - (\delta + n) k^* - c^* = 0, \tag{42}$$

$$1 = \beta \left[\left(\frac{c^*}{c^*} \right)^{-\theta} \left(\alpha A k^{*\alpha-1} + (1 - \delta - n) \right) \right] = \beta \left(\alpha A k^{*\alpha-1} + (1 - \delta - n) \right). \tag{43}$$

Z rovnice (43) vieme vyjadriť optimálnu kapitálovú vybavenosť:

$$k^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta - n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dosadením do rovnice (42) dostávame rovnicu pre $c*$:

$$c^* = A \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta - n)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\delta + n) \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta - n)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Je dôležité poznamenať, že nájdené riešenie je len kvázi-optimálne a výsledné hodnoty budú oscilovať okolo týchto bodov.

Pri rovnakej produkčnej funkcii, funkcii užitočnosti a tvare maximalizačnej úlohy by v deterministickom prípade stacionárny stav bol v bodoch:

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$c^* = A (k^*)^{\alpha} - (\delta + n) k^*.$$

Vo všeobecnosti riešime diskontáciu v spojitom prípade pomocou konštanty ρ, zatiaľ čo v diskrétnom prípade vystupuje konštanta β. Pre tieto konštanty platí vzťah: $\beta = \frac{1}{1+\rho-n}$.

Dosadením β do vzorcov pre deterministický prípad dostávame rovnaké equilibrium ako v stochastickom prípade. V tomto prípade však ide iba o kvázi-equilibrium. Brock-Mirmanov model sa v dlhodobom horizonte bude blížť a oscilovať okolo tejto hodnoty. Numerické riešenie ukážeme v Podkapitole 4.2.

2.2 Numerické riešenie pomocou iterácie hodnotovej funkcie

Na numerické riešenie stochastického Ramseyho modelu využívame prístup založený na iterácii hodnotovej funkcie, ktorý je štandardným nástrojom v oblasti dynamického programovania. Postup vychádza z práce „Value Function Iteration as a Solution Method for the Ramsey Model“ [8] od autorov Heer a Maußner, ktorí riešia Bellmanovu rovnicu diskretizáciou stavového priestoru a aproximáciou stochastických šokov pomocou Tauchenovho algoritmu. Model je formulovaný ako úloha optimálneho riadenia (26) s príslušnou hodnotovou funkciou:

$$V(k,z) = \max_{k'} \left\{ u(c) + \beta \sum_{z'} \Pi(z,z') \cdot V(k',z') \right\}, \tag{44}$$

kde $c = zf(k)+(1-\delta-n)k-k'$, β je faktor diskontovania, z je stochastický šok modelovaný ako markovovský proces a Π je prechodová matica pravdepodobností.

Diskretizujeme priestor kapitálu $k \in \{k_1, \ldots, k_{n_k}\}$ a stavov šoku $z \in \{z_1, \ldots, z_{n_z}\}$. Pre každý bod mriežky vypočítavame hodnotu funkcie $V(k_i, z_j)$ iteratívne, pričom v každom kroku volíme takú hodnotu budúceho kapitálu k', ktorá maximalizuje očakávanú sumu úžitku.

Pre takto diskretizovaný proces dostávame prechodovú maticu Π, kde platí $\Pi_{ij} = \mathbb{P}(z_{t+1} = z_j \mid z_t = z_i)$. Matica má tvar:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{1n_z} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \ldots & \Pi_{2n_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{n_z1} & \Pi_{n_z2} & \ldots & \Pi_{n_zn_z} \end{pmatrix}$$

2.2.1 Diskretizácia stochastického šoku pomocou Tauchenovho algoritmu

V numerickom riešení B-M v časti 4.2 budeme na modelovanie stochastických šokov používať AR(1) proces. A pre vytvorenie jeho diskretizovanej verzie používame Tauchenov

algoritmus, publikovaný v článku: „Finite state Markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions“ [27], ktorý vytvára konečnú množinu stavov $z_1, \ldots, z_{n_z}$ a príslušnú prechodovú maticu Π. Na aproximáciu spojitého AR(1) procesu pre šok produktivity:

$$\log z_{t+1} = \rho_z \log z_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2). \tag{45}$$

Tento algoritmus zaručuje, že diskretizovaný markovovský proces dobre aproximuje vlastnosti pôvodného AR(1) procesu. Z toho vyplýva, že stochastický šok z_t je z log-normálneho rozdelenia a jeho štandardná odchýlka je $\sigma_z = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1-\rho_z^2}}$. [27]

2.2.2 Iteračný algoritmus a konvergencia hodnotovej funkcie

Keď poznáme prechodovú maticu Π, vieme riešiť Bellmanovu rovnicu pomocou iterácie hodnotovej funkcie ekvivalentne s prácou. [8]

Na začiatku zvolíme počiatočný odhad hodnotovej funkcie $V^{(0)}(k, z)$.[3] V každom kroku n potom vypočítame novú hodnotovú funkciu $V^{(n+1)}$ podľa vzťahu:

$$V^{(n+1)}(k, z) = \max_{k' \in \mathcal{K}} \left\{ u(c) + \beta \sum_{z' \in \mathcal{Z}} \Pi(z, z') \cdot V^{(n)}(k', z') \right\}. \tag{46}$$

Pre každý bod v diskretizovanom priestore (k, z) optimalizujeme voľbu budúceho kapitálu k' a zapisujeme maximálnu dosiahnuteľnú hodnotu do novej iterácie funkcie $V^{(n+1)}$.

Tento proces opakujeme, kým nie sú odchýlky medzi jednotlivými iteráciami dostatočne malé. Kritérium konvergencie je dané:

$$\max_{k,z} \left| V^{(n+1)}(k, z) - V^{(n)}(k, z) \right| < \epsilon, \tag{47}$$

kde $\epsilon > 0$ je vopred stanovená tolerancia. Po dosiahnutí tejto podmienky považujeme výslednú hodnotovú funkciu za aproximáciu optimálnej hodnoty funkcie v danom modeli.

Optimálnu voľbu budúceho kapitálu a spotreby určujeme z podmienok:

$$k' = \arg\max_{k' \in \mathcal{K}} \left\{ u(c) + \beta \sum_{z'} \Pi(z, z') V(k', z') \right\},$$
$$c = f(k, z) + (1 - \delta - n)k - k'.$$

Na základe týchto rovníc môžeme generovať časové trajektórie premenných a analyzovať dynamické vlastnosti modelu. Tejto časti sa budeme venovať v Podkapitole 4.2.

[3] Napríklad ako nulovú funkciu alebo ako logaritmus spotreby pre počiatočné hodnoty.

3 Výber vstupných dát, funkcie užitočnosti a produkčnej funkcie

Táto kapitola sa zameriava na identifikáciu vstupných parametrov a údajov pre numerickú analýzu modelov v Kapitole 4, pričom budeme využívať modely z Kapitol 1 a 2.

V úvode tejto kapitoly sa sústredíme na identifikáciu relevantných vstupných premenných modelu, špecifikujeme požadované dáta a určíme ich zdrojové databázy. Parametre, ktoré nie sú voľne dostupné na internete alebo sa nedajú jednoznačne kvantifikovať použijeme na kalibráciu modelu a ich hodnoty budeme odhadovať podľa chybovosti modelu oproti realite.

V časti 3.2 si zvolíme tvar a parametre funkcie užitočnosti a v časti 3.3 produkčnej funkcie.

3.1 Výber vstupných dát

Modely predstavené v Kapitolách 4.1 a 4.2 pracujú s nasledujúcimi vstupmi:

- y – hrubý domáci produkt na jednotku pracovnej sily,
- k – efektívna kapitálová vybavenosť,
- n – nárast pracovnej sily,
- c – spotreba domácností na jednotku pracovnej sily,
- δ – amortizácia majetku,
- ρ – diskontný faktor.

K odhadu týchto vstupov potrebujeme nájsť dáta, ktoré do modelu nebudú vstupovať priamo, ale využijú sa na tvorbu vyššie spomenutých vstupov:

- Y – hrubý domáci produkt,
- K – kapitál,
- L – pracovná sila,

- C – spotreba domácností,
- I – investície domácností,
- G – vládne výdavky,
- NX – čistý export.

Vychádzame z výdavkového prístupu k výpočtu hrubého domáceho produktu, ktorý je daný vzťahom:

$$Y = C + I + G + NX.$$

Jedným zo základných predpokladov Ramyseho modelu je uzavretosť ekonomiky. Z toho dôvodu budeme za investície domácností považovať aj investície zo zahraničia, čistý export spolu s tvorbou hrubého kapitálu (investície domácností) tak bude tvoriť celkové investície I.

Vládne výdavky G v Ramseyho modeli takisto nie sú definované. Spotrebu C teda vypočítame ako konečnú spotrebu celej SR, to znamená, že sem budeme započítavať konečnú spotrebu domácností, konečnú spotrebu neziskových inštitúcií slúžiacich domácnostiam a konečnú spotrebu verejnej správy.

Údaje o hrubom domácom produkte (Y) čerpáme z databázy „Gross domestic product at market prices“ [17], ktorá obsahuje ročné údaje za obdobie 1993 až 2023. Informácie o spotrebe domácností (C) vychádzajú z databázy „Final consumption expenditure of households and non-profit institutions serving households“ [18], zatiaľ čo údaje o verejnej spotrebe (G) pochádzajú z databázy „Final consumption expenditure of general government“ [19]. Investície domácností (I) sú prevzaté z databázy „Gross fixed capital formation (investments)“ [20]. Štatistiky o čistom exporte tovarov a služieb (NX) sú k dispozícii v databáze „Goods and services, imports and exports“ [21]. Dáta staršie ako z roku 2013 sme prevzali z databáz Štatistických úradov sledovaných krajín [5, 16, 26]

Ďalším vstupom do Ramseyho modelu je práca. Tú budeme v kontexte modelu chápať ako počet odpracovaných hodín za daný rok v danej krajine, podobne ako je v práci [6]. Počet priemerne odpracovaných hodín zamestnancom danej krajiny za týždeň sa nachádza v databáze Eurostatu s názvom „Hours worked per week of full-time employment“

[23]. Dáta o počte zamestnancov sa nachádzali rovnako na Eurostate v databáze s názvom „Employment, domestic concept - Total“ [22]. Preškálovaním údajov z týchto dvoch databáz získavame údaj o počte odpracovaných hodín za rok.

Do oboch rastových modelov nevstupuje pracovná sila ako taká, vstupuje sem jej nárast oproti minulému roku. Keďže oba modely pracujú s konštantným rastom pracovnej sily (6), premennú n určíme ako priemer nárastov pracovnej sily na T-ročnom období. Ekvivalentne vyjadríme pomocou:

$$n(t) = \frac{L(t+1) - L(t)}{L(t)}$$

$$n = \frac{1}{T} \sum_{1}^{T} n(t)$$

Ďalšou premennou, ktorú potrebujeme odhadnúť je celkový kapitál K. Keďže v makroekonomických štatistikách nie je pojem kapitálu jednoznačne definovaný, je potrebné odhadnúť tento kapitál čo najpresnejšie a najreálnejšie z dostupných zdrojov. V rámci tejto práce využívame údaje z databázy Eurostatu „Capital stocks by sector and detailed asset type“ [24], ktorá poskytuje odhadované hodnoty kapitálových zásob v členení podľa sektorov a typov aktív. Vzhľadom na to, že Ramseyho model pracuje s kapitálom celej ekonomiky, rozhodli sme sa zahrnúť kapitál zo všetkých sektorov.[4] Je dôležité si uvedomiť, že zahrnutie kapitálu všetkých sektorov môže spôsobiť započítanie takých aktív, ktoré nemajú vplyv na tvorbu HDP. Napriek tomu považujeme tento prístup za najvhodnejší vzhľadom na teoretické predpoklady modelu a dostupnosti dát. Údaje o efektívnej kapitálovej vybavenosti k následne získame ako podiel kapitálu a práce.

Do Ramseyho modelu priamo vstupuje aj amortizácia kapitálu, ktorá hovorí, koľko % z kapitálu sa znehodnotí a tým pádom sa nepoužije na ďalšiu reprodukciu. Keďže v literatúre sa používajú rôzne hodnoty v rozmedzí $\delta \in [0.04, 0.11]$, [3, 6, 8], využívame obdobné hodnoty pre tento parameter na kalibráciu modelu, ktorej sa venujeme v časti 4.

Podobne postupujeme pri diskontnom faktore, ktorý nám hovorí o miere, akou si obyvatelia krajiny cenia súčasnú spotrebu oproti budúcej. V literatúre sa bežne používajú hodnoty v rozmedzí $\rho \in [0, 0.10]$. [3, 8]

[4]Medzi tieto sektory patria: nefinančné korporácie, finančné korporácie, verejnú správu, domácnosti a neziskové inštitúcie slúžiace domácnostiam

3.2 Funkcia užitočnosti

V numerickej analýze v Kapitole 4 pracujeme s funkciou užitočnosti s konštantnou relatívnou averziou voči riziku (CRRA), ktorá je často využívanou pri aplikáciách Ramseyho modelu (viď [6, 12]).

CRRA úžitková funkcia má tvar:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}, & \text{ak } \theta \neq 1, \\ \log(c), & \text{ak } \theta = 1. \end{cases}$$

Kľúčovým parametrom tejto funkcie je θ, ktorý predstavuje koeficient relatívnej averzie voči riziku. Čím vyššia je hodnota θ, tým menej je domácnosť ochotná riskovať, čo sa prejavuje v jej preferencii stabilnej spotreby v čase a menšej ochote investovať do kapitálu. V prípade, že $\theta = 1$, hovoríme o rizikovo averznej domácnosti. Naopak pri nízkej hodnote θ sú domácnosti ochotné výrazne meniť spotrebu v každom čase. Pri vysokých hodnotách θ sa spotreba mení veľmi pomaly, pretože domácnosť uprednostňuje hladký vývoj úžitku v čase. Tento parameter má priamy vplyv na rozhodovanie domácnosti o medzičasovej spotrebe, pretože priamo vstupuje do funkcie elasticity úžitku domácnosti:

$$\epsilon_u(c(t)) = -\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)}.$$

Prvá a druhá derivácie funkcie užitočnosti majú tvar:

$$u'(c) = c^{-\theta}, \quad u''(c) = -\theta \cdot c^{-\theta-1}.$$

Po následnom dosadení do funkcie elasticity úžitku dostávame:

$$\epsilon_u(c(t)) = -\frac{-\theta \cdot c^{-\theta-1} \cdot c}{c^{-\theta}} = \theta.$$

Z toho vyplýva, že elasticita funkcie užitočnosti je konštantná a rovná sa práve parametru θ. Táto voľba úžitkovej funkcie sa premieta aj do diferenciálnych rovníc Ramseyho modelu. Zmení sa rovnica pre vývoj spotreby domácností:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left(f'(k(t)) - \delta - \rho\right). \tag{48}$$

Z rovnice (48) jasne vyplýva, že rast spotreby je pozitívny vtedy, keď je hraničný výnos z kapitálu vyšší ako subjektívna diskontná miera domácnosti. Parameter θ tak nielenže

ovplyvňuje preferencie domácnosti, ale aj to, ako citlivo spotreba reaguje na ekonomické podmienky.

Keďže pre konkrétnu hodnotu tohto parametra nemáme žiadne priame referencie z literatúry, využívame ho (podobne ako ρ a δ) pri kalibrácii modelu v Kapitole 4.

3.3 Produkčná funkcia

Najčastejšie sa v literatúre používa Cobb-Douglasova produkčná funkcia v tvare:

$$f(k) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

V našom prípade, kedy rátame s efektívnou kapitálovou vybavenosťou na jednotku pracovnej sily, uvažujeme funkciu:

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \tag{49}$$

kde A predstavuje úrovňovú konštantu. V našej práci ju odhadujeme pomocou

$$A^* = \arg\min_{A} \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - Ak_t^{\alpha}\right)^2.$$

Hodnota α hovorí o pomere medzi kapitálom a prácou na jednotku produktu. V našom modeli α hovorí o tom, koľko eur a odpracovaných hodín je potrebných na produkciu jedného eura hrubého domáceho produktu.

Pri odhade α postupujeme podľa práce „Neoclassical and Keynesian View on a Growth of Economy of SR“ [6]. Pri výpočte parametra α v nej autor vychádza z predpokladu, že hodnota $1 - \alpha$ je rovná podielu odmien zamestnancov na celkovom HDP. Konštantu α teda vieme odhadúť pre každú krajinu vďaka databáze Eurostatu: „Compensation of employees“ [25], keďže v tejto databáze sa nachádzajú údaje o odmenách zamestnancov samostatne pre každú európsku krajinu.

3.4 Zhrnutie vstupov

V tejto kapitole sme priblížili, ktoré vstupy budeme voliť z voľne dostupných dát a ktoré dáta budeme odhadovať a kalibrovať podľa chybovosti modelu. Pre prehľadnosť uvádzame tieto skutočnosti v Tabuľke 1.

Vstup do modelu	Typ odhadu	Zdroj dát/Metóda
y	Z dát	Eurostat [17]
k	Z dát	Eurostat[22, 24]
n	Z dát	Eurostat [22, 23]
c	Z dát	Eurostat [18]
α	Z dát	Eurostat [25]
A	Z dát	Odhad na základe historických dát [17, 22, 24]
δ	Kalibrácia	Odhad na základe chybovosti modelu
ρ	Kalibrácia	Odhad na základe chybovosti modelu
θ	Kalibrácia	Odhad na základe chybovosti modelu

Tabuľka 1: Premenné a ich odhad v rámci kalibrácie modelu.

4 Tvorba modelov pre vybrané krajiny

V tejto kapitole sa venujeme numerickej analýze modelov formulovaných v častiach 1 a 2.

Údaje máme k dispozícii na 20-ročnom intervale, ktorý si rozdelíme na trénovaciu a testovaciu časť pomerom 13:7. Údaje za prvých 13 rokov využijeme na kalibráciu chýbajúcich parametrov tak, aby vývoj riešenia Ramseyho modelu bol čo najbližšie pozorovaným ukazovateľom (Podkapitola 4.1). Kľúčová premenná bude HDP, ale dôležité bude aj správanie sa spotreby a kapitálu, ktoré by malo zodpovedať optimálnej trajektórii z teórie Ramseyho modelu. Údaje počas testovacieho obdobia využijeme pri vizualizácii, nakoľko vývoj modelu naďalej zodpovedá skutočnému vývoju HDP, kapitálu a spotreby (Podkapitoly 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3).

Následne parametre kalibrované v Podkapitole 4.1 využijeme ako vstupy Brock-Mirmanovho modelu, a pomocou simulácií ukážeme, v akom rozsahu možno vývoj kapítálu a spotreby očakávať pri vývoji danom Brock Mirmanovým modelom. Zaujíma nás, či 95 % pásmo spoľahlivosti dokáže pokryť správanie sa ekonomiky v čase.

4.1 Kalibrácia Ramseyho modelu

Ramseyho model okrem vstupov určených na základe historických údajov v Kapitole 3.1 potrebuje vstupy:

- δ - amortizácia,
- ρ - diskontný faktor,
- θ - koeficient relatívnej averzie k riziku.

Premenné $A, n, \alpha, k(0), c(0)$ sme pre vybrané krajiny odvodili v súlade s Kapitolou 3. Diskontný faktor, koeficient relatívnej averzie k riziku a amortizáciu, pre ktoré sme v literatúre našli rozsah používaných hodnôt, odhadujeme tak, aby chybovosť medzi Ramseyho modelom a reálnymi dátami bola čo najmenšia. V svetovej literatúre sa bežne používajú rôzne hodnoty pre tieto premenné, pomocou ktorých určíme prípustné intervaly pre dané parametre:

$$I_\rho \in [0.02, 0.08], \quad I_\delta \in [0.02, 0.1], \quad I_\theta \in [0.5, 4]. \tag{50}$$

Označme k_r, y_r, c_r skutočné dáta pre kapitálovú vybavenosť, HDP na jednotku pracovnej sily a spotrebu domácností na jednotku pracovnej sily určené na základe Podkapitoly 3.1. Kalibráciu parametrov vykonáme nasledujúcim spôsobom. Pre každú prípustnú kombináciu parametrov ρ, δ, a θ z množín I_ρ, I_δ, a I_θ (viď (50)):

1. Pomocou numerického riešenia Ramseyho modelu určíme $c_r(0)$ tak, aby trajektória daná systémom diferenciálnych rovníc (17) pre vývoj riešení Ramseyho modelu s počiatočnými podmienkami $c(0) = c_0$ a $k(0) = k_0$ konvergovala k pevnému bodu [5] (20) a aby navyše platilo $|c_0^R - c_0| < 0.02$.

2. Určíme odchýlku skutočných údajov $k_r(t)$,$c_r(t)$, $y_r(t)$ a výsledkov Ramseyho modelu (pre dané c_0^R) $k(t)$, $c(t)$, $y(t)$, ktorú počítame ako:

$$\begin{aligned} k_{ch} &= \frac{|k(t) - k_r(t)|}{k_r(t)}, \\ c_{ch} &= \frac{|c(t) - c_r(t)|}{c_r(t)}, \\ y_{ch} &= \frac{|y(t) - y_r(t)|}{y_r(t)}. \end{aligned} \tag{51}$$

[5] Snažíme o maximalizáciu spojitej úlohy na nekonečnom horizonte. Numericky túto podmienku implementujeme tak, že numerické riešenia okrajového systému (17) do 1000 rokov skonvergujú, čo je implementované podmienkami: $\frac{k(t)-k^*}{k^*} < 1e-6 \wedge \frac{c(t)-c^*}{c^*} < 1e-2$.

Následne volíme také parametre ρ, θ a δ, pri ktorých je dosiahnutá odchýlka najnižšia.

Hodnoty parametrov teda nájdeme ako riešenia optimalizačnej úlohy, ktorú riešime numericky diskretizáciou prípustných intervalov pre jednotlivé parametre:[6]

$$\begin{aligned}
&\min_{\rho,\delta,\theta,c(0)} \sum_{t=1}^{12} w_k k_{ch} + w_c c_{ch} + w_y y_{ch}, \\
&\quad c(t+1) = \frac{c(t)}{\theta}\left(\alpha A k^{\alpha-1}(t) - \delta - \rho\right) + c(t), \\
&\quad k(t+1) = Ak^{\alpha}(t)(1-n+\delta)k(t) - c(t), \\
&\quad \exists i \in [1,1000], \text{ pre ktoré platí } \quad \frac{k(i)-k^*}{k^*} < 10^{-6} \quad \text{a} \quad \frac{c(i)-c^*}{c^*} < 10^{-2}, \\
&\quad \rho \in I_\rho,\ \delta \in I_\delta,\ \theta \in I_\theta,\ c(0) \in I_{c_0},\ k(0) \text{ je dané.}
\end{aligned}$$

Premenné w_k, w_c a w_y predstavujú váhy relatívnych chybovostí modelu, pričom platí $w_k + w_c + w_y = 1$. Tieto váhy si volíme sami, pričom využívať budeme prevažne pomer váh $w_k = \frac{1}{3}$, $w_c = \frac{1}{3}$, $w_y = \frac{1}{3}$.

Model, ktorý bude mať na tomto období najmenšiu chybovosť, považujeme za najlepší a budeme s ním pracovať v Podapitole 4.2, kde pridáme stochastický šok.

4.1.1 Ramseyho model pre Slovensko

Ako prvý zostavíme Ramseyho model pre Slovensko. Reálne hodnoty pre Slovensko uvádzame v Tabuľke 2.

Pevné vstupy do modelu sú uvedené v tabuľke 2 doplnené o:

$$\alpha = 0.633, \quad A = 1.1, \quad n = 0.012.$$

Najmenšiu relatívnu celkovú chybovosť, ako aj najmenšiu relatívnu chybovosť pri kapitále a spotrebe dosiahol model s parametrami $\rho = 0.08$, $\theta = 2$, $\delta = 0.02$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 7.2876$. Naopak najnižšiu relatívnu chybovosť HDP dosiahol model s parametrami $\rho = 0.025$, $\theta = 3.75$, $\delta = 0.02$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 7.2420$. Prehľad týchto dvoch modelov uvádzame v Tabuľke 3.

Na Obrázku 2 sú zobrazené trajektórie pre vývoj kapitálu, spotreby, HDP na jednotku pracovnej sily a fázový portrét. Z grafov na Obrázku 2 môžeme vidieť kvalitatívne správanie sa Modelu 1 (najmenšia relatívna celková chybovosť), ktoré zodpovedá skutočnej

[6] V Matlabovskom kóde používame pre ρ krok 0.005, pre θ krok 0.25 a pre δ krok 0.005

Rok	k_r	y_r	c_r
2004	36.1061	9.9164	7.3320
2005	37.3129	10.6149	7.7350
2006	40.0730	11.4564	8.3821
2007	47.3995	12.5409	8.8820
2008	54.7589	13.1804	9.5904
2009	57.3575	12.6687	10.0234
2010	58.1867	13.8759	10.4857
2011	58.6415	14.4756	10.6220
2012	58.7895	14.8123	10.9132
2013	59.2704	14.9943	10.9506
2014	58.7815	15.1599	11.0813
2015	58.8584	15.5150	11.2112
2016	58.5203	15.3247	11.2782
2017	59.8848	15.7085	11.8103
2018	61.5230	16.4568	12.2896
2019	64.2535	17.1228	13.0086
2020	67.5035	17.4350	13.7232
2021	71.8415	19.1045	14.8406
2022	82.2062	20.3519	16.8432
2023	80.5016	22.6631	17.9289

Tabuľka 2: Skutočné hodnoty kapitálu, HDP a spotreby na jednotku pracovnej sily pre Slovensko (2004 — 2023)

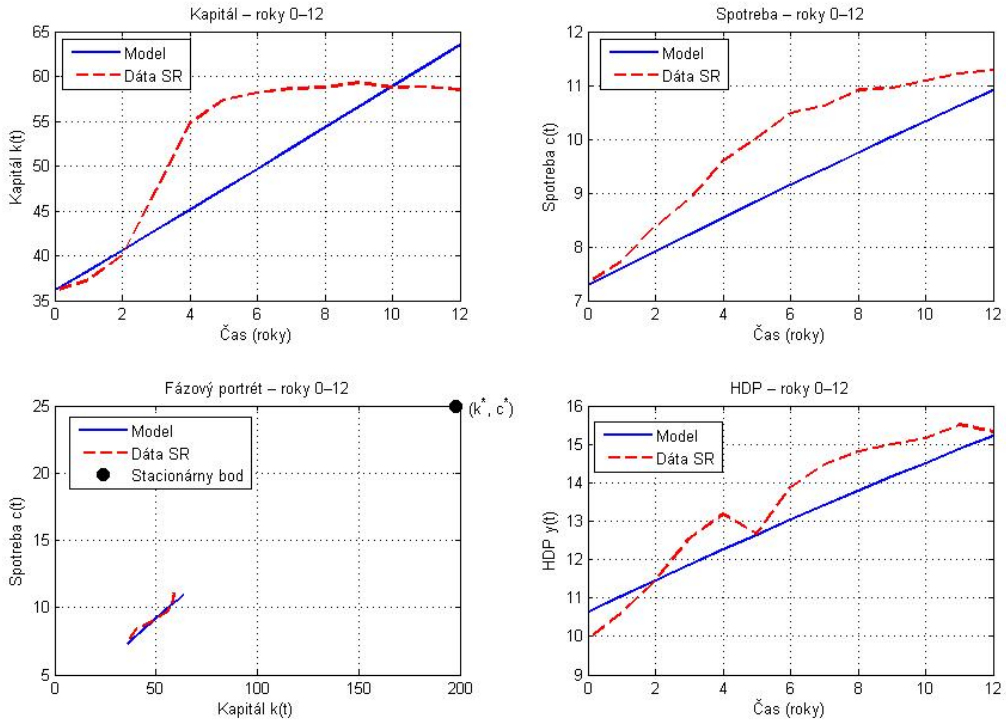
ekonomike. Vidíme, že model podhodnocuje reálne hodnoty. Celkovo je ale model schopný zachytiť približný rozsah sledovaných ukazovateľov.

Kvalitatívne správanie sa Modelu 2 (najmenšia chybovosť HDP) ilustrujeme na Obrázku 3. Hoci to na fázovom portréte (kvôli príliš veľkému stacionárnemu bodu) nie je viditeľné, správanie sa spotreby aj kapitálu je menej presné ako v Modeli 1. Graf pre porovnanie HDP je však výrazne presnejší.

Z uvedených obrázkov a relatívnych chýb za obdobie prvého 13-ročného obdobia mô-

Parameter / Miera chyby	Model 1	Model 2
ρ	0.08	0.025
θ	2.0	3.75
δ	0.02	0.02
$c(0)$	7.2876	7.2420
Relatívna chyba kapitálu	8.29 %	8.73 %
Relatívna chyba spotreby	7.98 %	10.02 %
Relatívna chyba HDP	4.32 %	3.25 %
Celková chyba (relatívna)	6.86 %	7.33 %

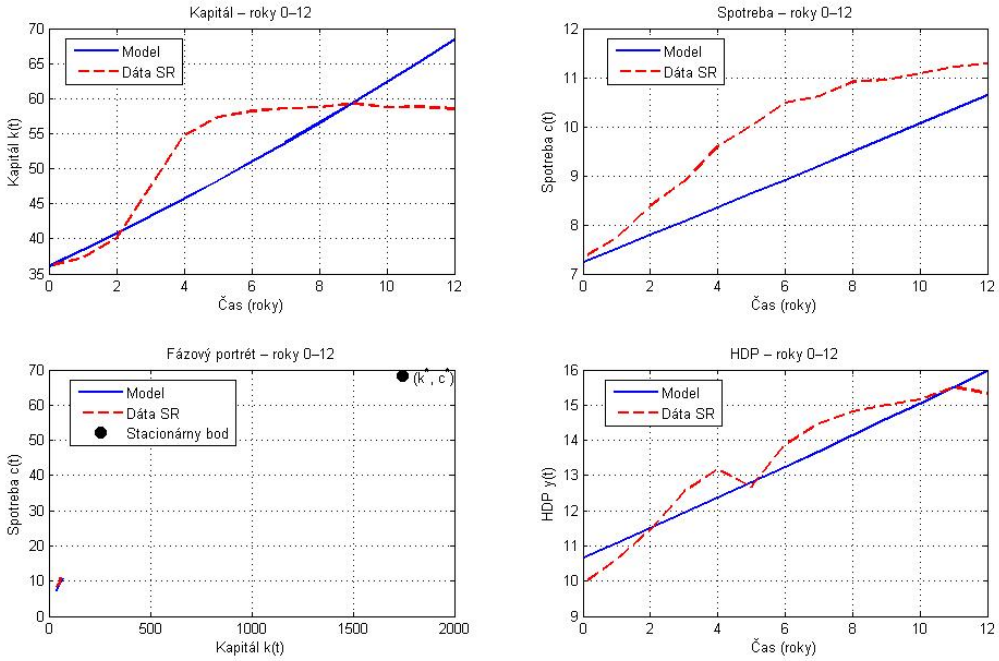
Tabuľka 3: Porovnanie najlepšej kombinácie parametrov (Model 1: najmenšia relatívna celková chybovosť, Model 2: najmenšia chybovosť HDP) pre Slovensko



Obr. 2: Ramseyho Model 1 pre Slovensko (najmenšia celková chybovosť) 2004 – 2016

žeme predbežne usudzovať, že Model 1 (celková relatívna chybovosť) presnejšie opisuje správanie sa reálnej ekonomiky Slovenska.

Pri záverečnom porovnaní modelov však vychádzame z údajov za testovacie obdo-



Obr. 3: Ramseyho Model 2 pre Slovensko (najmenšia chybovosť HDP) 2004 – 2016

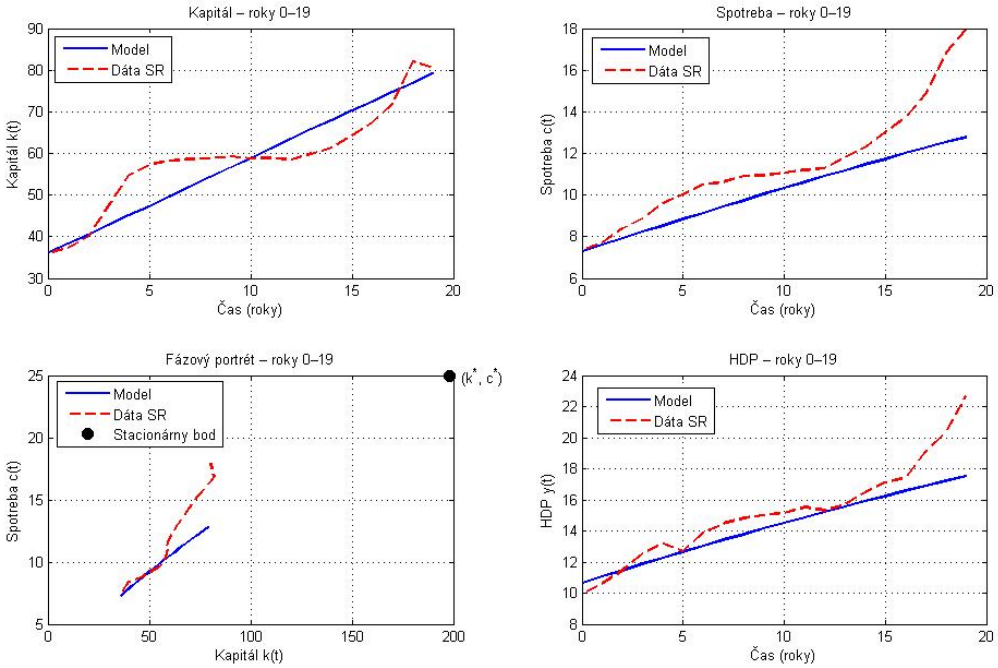
bie 2017 – 2023. V Tabuľke 4 uvádzame relatívnu chybovosť jednotlivých premenných v období 2017 – 2023. Pri výbere vhodnejšieho modelu nám poslúžia aj Obrázky 4 a 5, zobrazujúce porovnania skutočných a teoretických hodnôt kapitálovej vybavenosti, spotreby, HDP počas oboch období pre oba modely.

Premenná	**Model 1**	**Model 2**
HDP (y)	9.18 %	5.41 %
Kapitál (k)	7.05 %	17.67 %
Spotreba (c)	15.16 %	16.45 %
Celková	10.46 %	13.17 %

Tabuľka 4: Porovnanie relatívnych chýb Modelov 1 a 2 (Slovensko) za roky 2017 — 2023

Z Tabuľky 4 vidíme, že pre testovacie obdobie presnejšie predikuje kapitál a spotrebu Model 1 a HDP Model 2. Hoci sa snažíme čo najlepšie odhadovať HDP krajín, máme za to, že takto odskočený kapitál by skôr či neskôr znamenal aj výraznejšie chyby v HDP. Zároveň rozdiel medzi chybovosťou kapitálu je výrazne väčší ako rozdiel medzi chybovosťou HDP. Preto budeme pri analýze Brock-Mirmanovho modelu v Podkapitole 4.2 pracovať s

parametrami z Modelu 1 (najmenšia relatívna chybovosť). Z hľadiska fázového portrétu je pozitívne, že oba modely zaradili Slovensko do správneho kvadrantu (vľavo dole od stacionárneho bodu). Modely správne určili, že spotreba aj kapitál Slovenska majú rastúci trend a blížia sa k optimálnemu bodu.



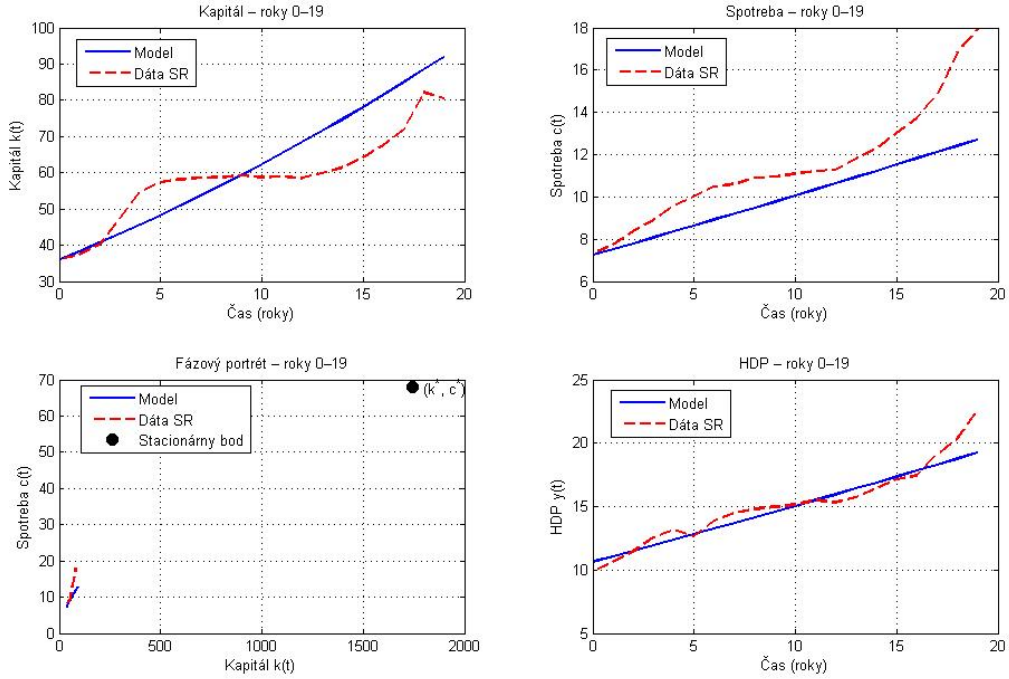
Obr. 4: Ramseyho Model 1 pre Slovensko (najmenšia celková chybovosť) 2004 – 2023

4.1.2 Ramseyho model pre Česko

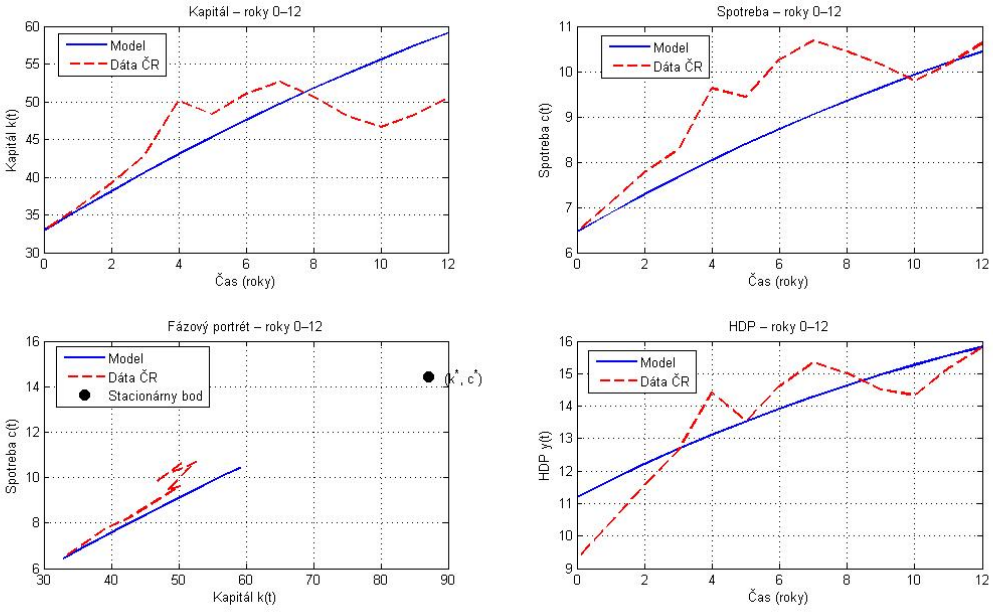
Ako druhý zostavíme Ramseyho model pre Českú republiku. Postupujeme rovnakým spôsobom ako pri numerickej analýze pre Slovensko v Podkapitole 4.1.1, to znamená, že tak ako v predošlom prípade, ideme modelovať trajektórie kapitálu, spotreby a HDP ekonomiky Česka, pre rôzne hodnoty parametrov θ, ρ a δ. Pevné vstupy do modelu sú:

$$\alpha = 0.591, \quad A = 1.42, \quad n = 0.008,$$
$$k(0) = 32.928, \qquad c(0) \in (6.33, 6.59).$$

Najmenšiu relatívnu celkovú chybovosť dosiahol model s parametrami $\rho = 0.08$, $\theta = 1$, $\delta = 0.055$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 6.4583$. Uvedené trajektórie sa nachádzajú na Obrázku 6.



Obr. 5: Ramseyho Model 2 pre Slovensko (najmenšia chybovosť HDP) 2004 – 2023

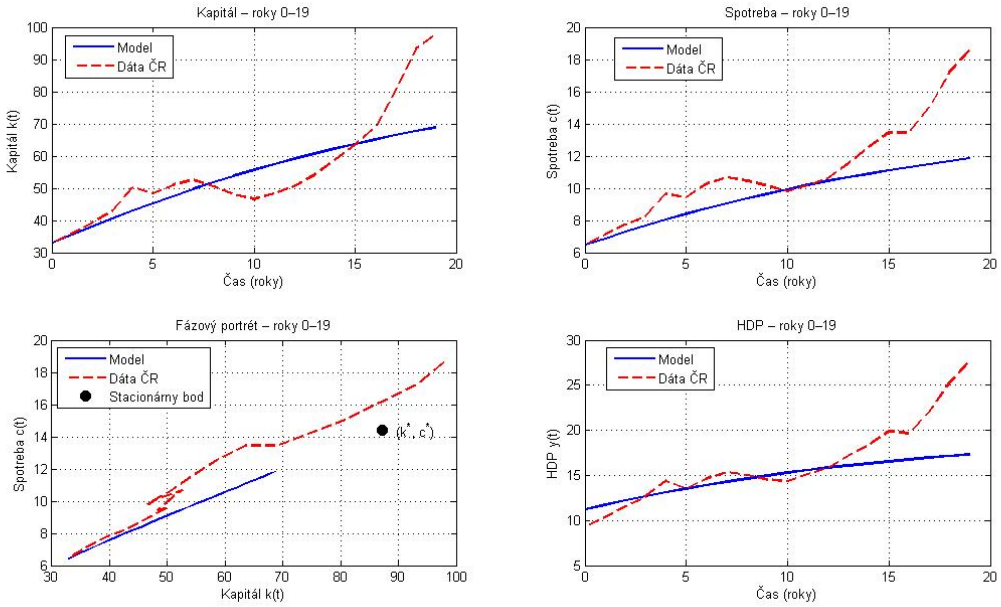


Obr. 6: Ramseyho Model 3 pre Česko (najmenšia celková chybovosť) 2004 – 2016

Z Obrázku 6 pozorujeme, že model dobre zachytáva vývoj jednotlivých premenných na prvom 13-ročnom horizonte, na ktorom dosahuje priaznivé výsledky aj z hľadiska chybovosti a trajektórie spotreby a kapitálu, ktorá zodpovedá teórii. Stabilný bod pre

českú ekonomiku sa nachádza vpravo hore a preto kapitál aj spotreba rastú.

Model si vykreslíme aj pre celý 20-ročný horizont. Z Obrázku 7 pozorujeme vychýlenosť všetkých hodnôt. Fázový portrét nezodpovedá realite, pretože podľa skutočnosti česká ekonomika neustále rastie vpravo hore od stabilného bodu.



Obr. 7: Ramseyho Model 3 pre Česko (najmenšia celková chybovosť) 2004 – 2023

Chybovosť modelu na testovacom horizonte dosahuje vysoké hodnoty, čo zachytáva tabuľka 5.

Premenná	**Model 3 (2004 - 2016)**	**Model 3 (2017 - 2023)**
HDP (y)	4.51 %	20.21 %
Kapitál (k)	7.78 %	14.09 %
Spotreba (c)	9.27 %	20.81 %
Celková	7.19 %	18.37 %

Tabuľka 5: Porovnanie relatívnych chýb Modelu 3 (Česko) za roky 2004 — 2016 a 2017 — 2023

Model 3, ktorý sme kalibrovali na českú ekonomiku, nepriniesol požadované výsledky. Dôvodom je kvalitatívna zmena v trende jednotlivých ekonomických ukazovateľov, ktorá koincidovala so začiatkom testovacieho obdobia.

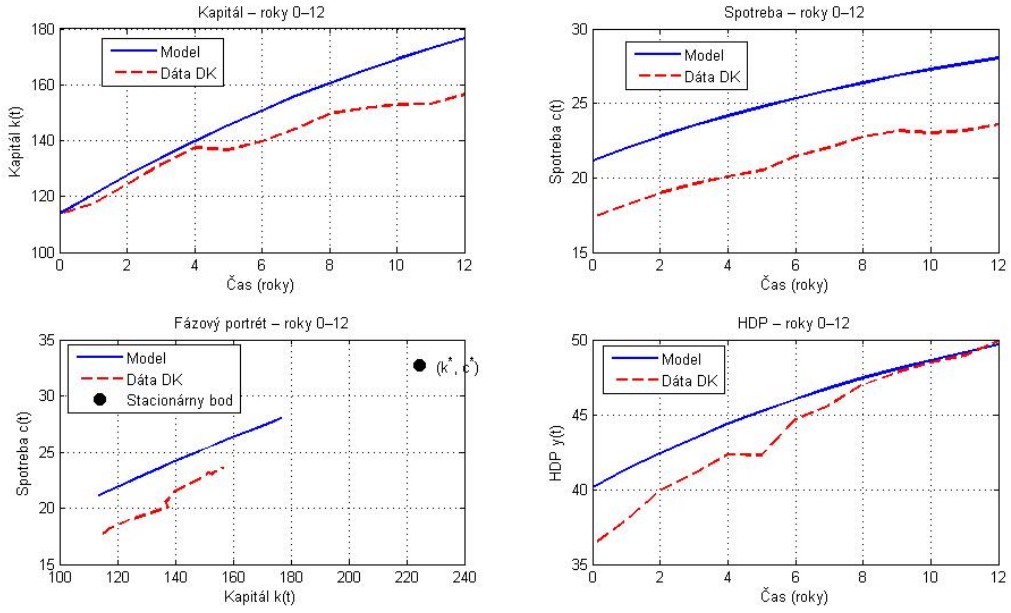
4.1.3 Ramseyho model pre Dánsko

Tretím modelom v poradí bude Ramseyho model pre Dánsko. Túto krajinu sme vybrali preto, že na rozdiel od Česka a Slovenska predstavuje ekonomiku, ktorú za obe sledované obdobia nezaznamenala žiadne prudké výkyvy ani zmeny v trende sledovaných ekonomických ukazovateľov. Na základe výsledkov z predchádzajúcich častí preto predpokladáme, že pre takúto krajinu sa bude modelovaná trajektória najviac približovať skutočným hodnotám.

Uplatníme rovnaký postup ako v predchádzajúcich Podkapitolách 4.1.1 a 4.1.2. Vstupy, ktoré budeme používať sú:

$$\alpha = 0.483, \quad A = 4.08, \quad n = 0.0027,$$
$$k(0) = 113.658, \qquad c(0) \in (17.01, 17.71).$$

Pre zvolené parametre sa nám nepodarilo nájsť optimálny model. Skúsili sme preto zrušiť podmienku počiatočnej spotreby a snažili sa nájsť optimálny model, ktorý sme napokon dokázali zostaviť. Najmenšiu relatívnu celkovú chybovosť dosiahol model s parametrami $\rho = 0.02$, $\theta = 1.25$, $\delta = 0.1$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 21.17$. Trajektórie pre prvé 13-ročné obdobie príslušného modelu sú uvedené na Obrázku 8.

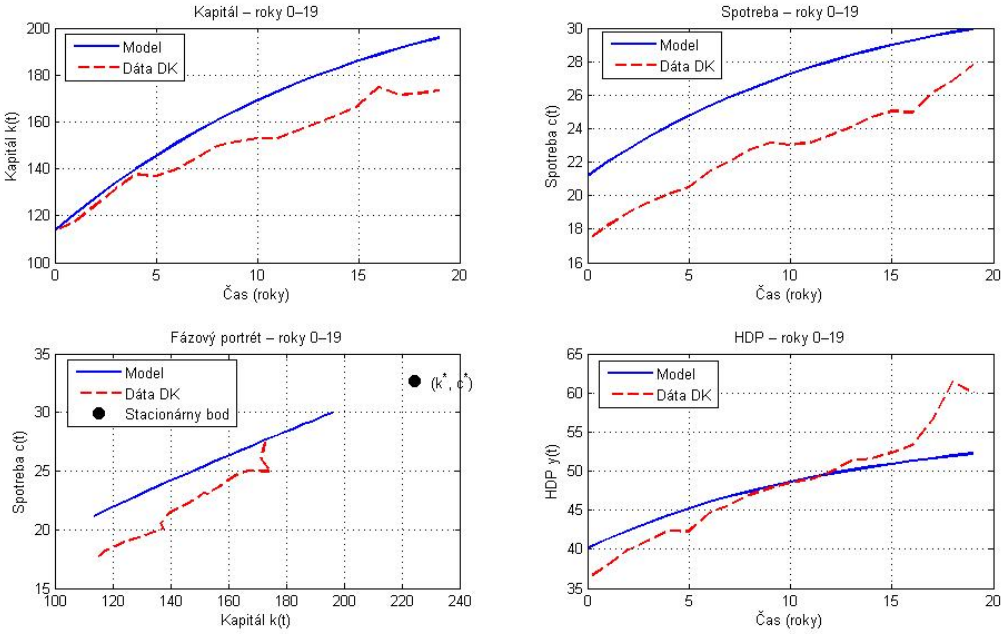


Obr. 8: Ramseyho Model 4 pre Dánsko (najmenšia celková chybovosť) 2004 – 2016

Z Obrázku 8 možno vyčítať, že model solídne popisuje vývoj jednotlivých premenných

na prvom 13-ročnom horizonte. Hodnoty kapitálu a spotreby sú síce vyššie ako v skutočnosti, kvantitatívne však fázový portrét zodpovedá realite. Ekonomika Dánska stále rastie a blíži sa ku stabilnému bodu.

Odchýlka kapitálu sa bude výraznejšie rozchádzať na 20-ročnom horizonte, ale spotreba si drží rovnaký nárast ako realita. HDP sa nachádza v dostatočnej blízkosti s reálnou ekonomikou. Fázový portrét hodnotíme ako rovnako vhodný, pričom opäť popisuje reálny vývoj. Ilustrujeme na Obrázku 9.



Obr. 9: Ramseyho Model 4 pre Dánsko (najmenšia celková chybovosť) 2004 – 2023

Skutočnosti, ktoré sme poznamenali vyššie doplníme pre lepšie pochopenie aj o chybovosť modelu v Tabuľke 6.

Premenná	**Roky 2004 – 2016**	**Roky 2017 – 2023**
HDP (y)	3.42 %	6.86%
Kapitál (k)	7.02 %	11.72 %
Spotreba (c)	18.83 %	13.99 %
Celková	9.76 %	10.86%

Tabuľka 6: Relatívne Chyby pre Model 4 (Dánsko) v rokoch 2004–2023.

Konštatujeme, že Model 4, ktorý sme kalibrovali na Dánsko, priniesol uspokojivé vý-

sledky a do určitej miery zodpovedá realite. Pripisujeme to skutočnosti, že spotreba a kapitál Dánska rástli po celý čas takmer konštantne, takéto krajiny dokáže Ramseyho model vďaka jeho predpokladom uspokojivo modelovať. Pri porovnaní teoretického a skutočného priebehu však pozorujeme odchýlky. V nasledujúcej časti sa zameriame na to, na koľko sú pozorované odchýlky v rozmedzí, ktoré by bolo vysvetliteľné šokmi v produkčnej funkcii, ktoré sú súčasťou Brock-Mirmanovho modelu.

4.2 Analýza pomocou Brock-mirmanovho modelu

V tejto časti sa zameriame na rozšírenie predchádzajúceho deterministického Ramseyho modelu o stochastické prvky tak, ako uvádzame v Kapitole 2. Hlavným cieľom bude skúmanie správania sa ekonomiky v prítomnosti náhodných šokov ovplyvňujúcich technologickú úroveň produkčnej funkcie. V rámci modelu predpokladáme, že ekonomické subjekty (krajiny) sa rozhodujú optimálne aj v prostredí neistoty a vyberajú si úroveň spotreby a investícií tak, aby maximalizovali očakávaný úžitok v čase.

Na rozdiel od deterministického prípadu tento model riešime pomocou Bellmanovej rovnice podľa postupu popísaného v Podkapitole 2.2.

Vstupy do modelu budú rovnaké ako v deterministickom modeli, pričom parametre, ktoré sme odhadovali pomocou kalibrácie, použijeme pre stochastický model. Do modelu pridáme pomocou Tauchenovho algoritmu stochastické šoky,[7] ktoré budú z log-normálneho rozdelenia. Štandardnú odchýlku σ_z, odhadneme na základe údajov o reálnom HDP a HDP vytvorenom produkčnou funkciou počas testovacieho 13-ročného obdobia. Vstupom do numerického riešenia modelu bude následne prechodová matica diskrétnej verzie procesu vypočítaná podľa Podkapitoly 2.2.

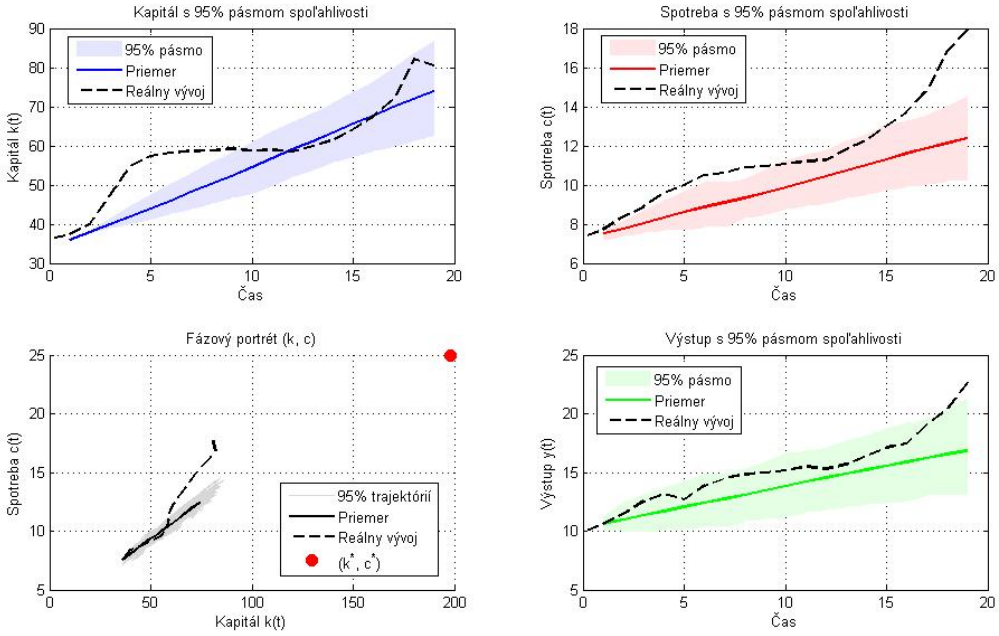
Po iteratívnom výpočte hodnotovej funkcie a získaní optimálnej spätnej väzby pristúpime k simuláciám trajektórií. Vytvoríme 1000 trajektórií vývoja ekonomiky počiatočným stavom daným hodnotami z roku 2004 s rôznymi realizáciami šokov. Z takto získaných výsledkov vypočítame priemerný vývoj HDP, kapitálu a spotreby, ako aj 95 % pásma spoľahlivosti, ktoré vizualizujú, v akom pásme sa bude nachádzať 95 % trajektórií vychádzajúcich z daného počiatočného stavu.

[7] Diskretizovaný priestor bude obsahovať 1000 hodnôt kapitálovej vybavenosti k a 15 hodnôt náhodných šokov z.

Na záver porovnáme priemernú trajektóriu modelu s reálnym vývojom HDP, kapitálu a spotreby. Zároveň pomocou pásiem spoľahlivosti overíme, nakoľko pozorované odchýlky medzi teoretickými a reálnymi hodnotami veľkosťou zodpovedajú odchýlkam, ktoré by sme mohli očakávať z dôvodu šokov v produkčnej funkcii.

4.2.1 Brock-Mirmanov model pre Slovensko

Ekonomiku Slovenska pomocou Brock-Mirmanovho modelu budeme modelovať so vstupmi Modelu 1 z časti 4.1.1 s pridaným stochastickým šokom z_t, ktorý je z log-normálneho rozdelenia a pre ktorý platí $\sigma_{z_t} = 0.0526$. Pre takýto model vypočítame maticu $V(k, z)$ a následne vykonáme 1000 simulácii s rôznymi náhodnými šokmi. Priemernú trajektóriu ako aj 95 % pásmo spoľahlivosti ilustrujeme na Obrázku 10.



Obr. 10: Brock-Mirmanov model pre Slovensko 2004 – 2023

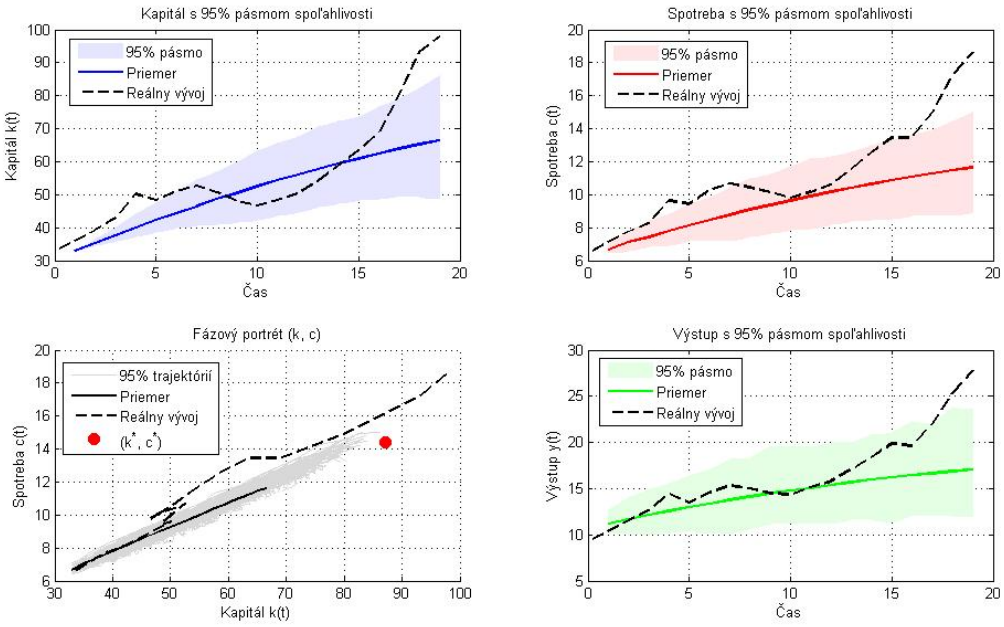
Z Obrázku 10 vieme povedať, že 95 % pásmo spoľahlivosti pokrylo vývoj kapitálu len pre testovacie obdobie. Začiatok sledovaného obdobia je odchýlený od reality. Výraznejší odskok zaznamenala spotreba, ktorá sa značne líši od našich simulovaných hodnôt, dôsledkom čoho ani fázový portrét nezodpovedá realite. Domnievame sa, že odskoky sú spôsobené zásadnou zmenou v trende spotreby medzi kalibračným a testovacím obdobím. Takýto signifikantný rast nepokryli ani pozitívne naklonené technologické šoky. HDP Slo-

venska sa nachádza v hraniciach pásma spoľahlivosti pre takmer všetky obdobia.

Rozšírenie modelu o stochastický prvok sčasti pomohlo reálnejšie simulovať slovenskú ekonomiku. Takýto model dokáže zachytiť rast hrubého domáceho produktu v 95 % pásme spoľahlivosti. Je však dôležité poznamenať, že spotreba sa na konci obdobia výrazne líšila od reality.

4.2.2 Brock-Mirmanov model pre Česko

Českú ekonomiku simulujeme rovnako ako tú slovenskú – pomocou Brock-Mirmanovho modelu. Vstupy do Modelu 3 budú ekvivalentné vstupom z časti 4.1.2. Pridáme však stochastický šok z_t, ktorý je z log-normálneho rozdelenia a pre ktorý platí $\sigma_{z_t} = 0.0771$. Pre takýto model vypočítame maticu $V(k, z)$ a následne vykonáme 1000 simulácii s rôznymi náhodnými šokmi. Priemernú trajektóriu ako aj 95 % pásmo spoľahlivosti ilustrujeme na Obrázku 11.



Obr. 11: Brock-Mirmanov model pre Česko 2004 – 2023

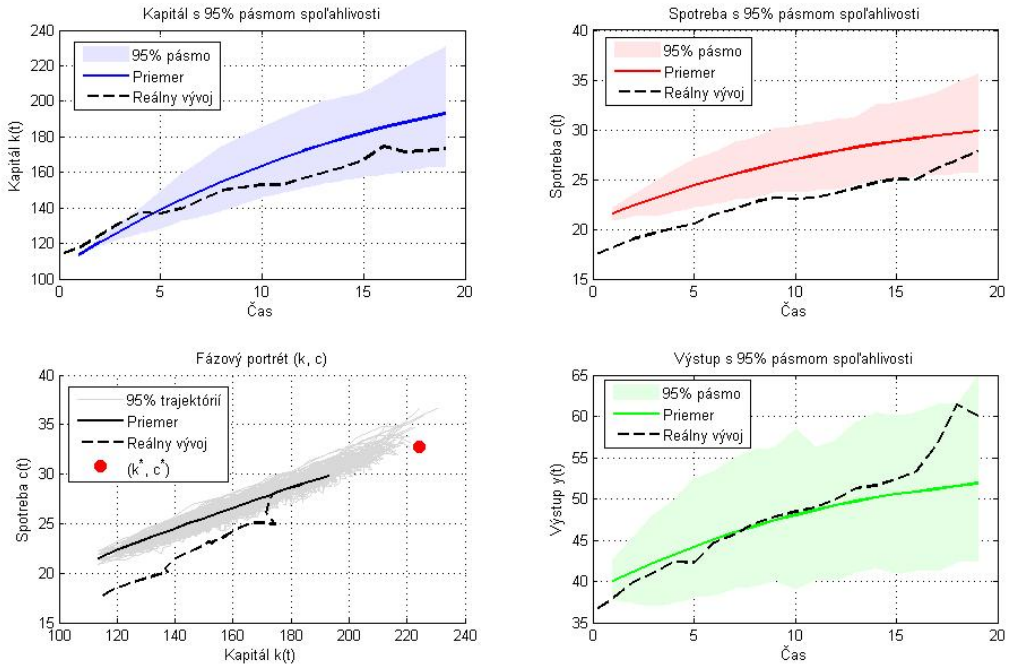
Z Obrázku 11 vieme posúdiť, že 95 % pásmo spoľahlivosti pokrylo vývoj kapitálu takmer pre celé obdobie. Výrazný odskok zaznamenal model až na konci sledovaného obdobia. Rovnaké skutočnosti platia aj pre vývoj spotreby. Tá však za posledné tri roky zaznamenala väčší odskok ako kapitál. HDP Českej republiky je pásmom spoľahlivosti

dostatočne pokryté počas prvých 18 rokov. Pri pohľade na fázový portrét konštatujeme, že stochastický šok dokázal sčasti zachytiť veľké odchýlky – na rozdiel od Ramseyho modelu. Reálna trajektória sa ale nenachádza v uvedenom pásme spoľahlivosti. Zároveň ale B-M model podhodnotil súradnice stacionárneho/kvázi-stacionárneho bodu, rovnako ako Ramseyho model.

Rozšírenie modelu o stochastický prvok dopomohlo k reálnejšej simulácii českej ekonomiky. Reálne dáta sa sčasti hýbu v spomínaných pásmach, tieto iba mierne prevyšujú. Rozšírenie modelu o stochastický prvok zobrazuje českú ekonomiku reálnejšie ako obyčajný Ramseyho model.

4.2.3 Brock-Mirmanov model pre Dánsko

Podobnou cestou ako pre Slovensko a Česko simulujeme ekonomiku pomocou Brock-Mirmanovho modelu. Vstupy do Modelu 4 budú identické ako v časti 4.1.3. Do modelu vstúpi stochastický šok z_t, ktorý je z log-normálneho rozdelenia a pre ktorý platí $\sigma_{z_t} = 0.0522$. Pre takýto model vypočítame maticu $V(k, z)$ a následne vykonáme 1000 simulácií s rôznymi náhodnými šokmi. Priemernú trajektóriu vývoja kapitálu, spotreby, HDP spolu s 95 % pásmom spoľahlivosti uvádzame na Obrázku 12.



Obr. 12: Brock-Mirmanov model pre Dánsko 2004 – 2023

Z obrázku 12 usudzujeme, že 95 % pásmo spoľahlivosti pokrylo vývoj kapitálu pre celé obdobie. Rovnako tak pokrylo celý vývoj HDP. Kvôli zanedbaniu podmienky vstupnej spotreby pásmo spoľahlivosti nedokáže pokryť jej vývoj a stane sa tak až na konci sledovaného 20-ročného horizontu. Fázový portrét opäť kvalitatívne zodpovedá realite, tentokrát je ale kvôli spotrebe jemne vychýlený.

Pomocou Brock-Mirmanovho modelu vieme reálnejšie simulovať ekonomiku Dánska, pre dva z troch vstupov sme dokonca pásmom spoľahlivosti pokryli celý sledovaný 20-ročný horizont. Z pohľadu rýchlosti rastu sa hodnoty v prípade spotreby správajú ako tie skutočné.

4.3 Zhrnutie modelov

V tejto kapitole sme sa venovali využitiu Ramseyho a Brock-Mirmanovho modelu pri analýze vývoja ekonomických ukazovateľov vo vybraných krajinách (Slovensko, Česká republika a Dánsko). Použili sme Ramseyho model na simuláciu vývoja kapitálu, spotreby a HDP, pričom sme sa zamerali na kalibráciu parametrov na 13-ročnom horizonte na základe reálnych dát a následne sme na testovanie modelu použili ďalších sedem rokov. Model sme simulovali aj v stochastickom prostredí pomocou Brock-Mirmanovho modelu.

V prípade Slovenska sme zistili, že model 1 (s parametrami $\rho = 0.08$, $\theta = 2$, $\delta = 0.02$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 7.2876$) najlepšie zachytáva dynamiku kapitálu a spotreby na 13-ročnom horizonte. Tento Model zároveň poskytuje najpresnejšie predikcie pre roky 2017 — 2023, hoci pre spotrebu sa vyskytuje niekoľko odchýlok.

Pre Českú republiku sme vytvorili Model 3 (s parametrami $\rho = 0.08$, $\theta = 1$, $\delta = 0.055$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 6.4583$). Tento model vykázal relatívne dobré výsledky na období 2004 — 2016, ale počas testovania v rokoch 2017 — 2023 model vykazoval vysokú chybovosť, najmä pri predpovediach pre spotrebu. Takýto model nedokázal zachytiť prudký nárast v posledných rokoch, čo bolo spôsobené prudkým nárastom spotreby v posledných rokoch.

Pre Dánsko sa Model 4 (s parametrami $\rho = 0.02$, $\theta = 1.25$, $\delta = 0.1$ a počiatočnou spotrebou $c(0) = 21.17$) ukázal ako optimálny model na 13-ročnom ako i 20-ročnom horizonte. Tento model dokázal zachytiť stabilný rast kapitálu a spotreby v danej krajine, čo bolo spôsobené spotrebou a kapitálom, ktoré v Dánsku rástli konštantnou rýchlosťou.

Pri analýze stochastických modelov (Brock-Mirmanov model) sme pre Slovensko, Českú republiku a Dánsko zistili, že pri zahrnutí stochastických šokov sú odchýlky vo vývoji kapitálovej vybavenosti a HDP väčšinou v rozmedzí predikovanom simuláciami. Modely však nie sú schopné zachytiť kvalitatívne zmeny v trendoch jednotlivých ekonomických ukazovateľov. Je vhodné poznamenať, že oba modely používajú príliš veľa predpokladov, ktoré v reálnej ekonomike nemusia vždy platiť. Z toho dôvodu je výskyt odchýlok v modeloch prirodzený.

Celkovo môžeme konštatovať, že deterministický Ramseyho model poskytol dobré výsledky pre nami sledované krajiny. Jeho rozšírením na stochastický Brock-Mirmanov model sme získali robustnejší model, vďaka ktorému vieme sledovať vývoj ekonomiky reálnejšie.

Záver

Diplomová práca bola zameraná na analýzu ekonomického rastu troch krajín – Slovenska, Českej republiky a Dánska – pomocou rastových modelov. Ako vhodné modely sme vyhodnotili Ramseyho model a Brock-Mirmanov model, ktorý zodpovedá Ramseyho modelu rozšírenému o stochastické šoky. Cieľom práce bolo kalibrovať tieto modely pomocou historických dát týchto krajín a následne preštudovať, ako deterministické a stochastické modely môžu zachytiť dynamiku kapitálu, spotreby a HDP.

Vzhľadom na uvedený cieľ sme sa po preštudovaní relevantnej literatúry rozhodli vychádzať z teoretického rámca pre Ramseyho a Brock-Mirmanov model. Tieto sme vyhodnotili ako vhodné pre potreby záverečnej práce z dôvodu vzájomnej previazanosti, dostatočného teoretického ukotvenia, flexibility použitia pre zvolené krajiny, ako aj konceptuálnej jednoduchosti, ale zároveň dostatočnej výpočtovej hĺbky.

V Kapitole 1 sme predstavili základné princípy Ramseyho modelu, ktorý sa zameriava na optimálne rozhodovanie ekonomických agentov v oblasti spotreby a investícií. Odvodili sme základné rovnice modelu, ktorý sme formulovali ako úlohu optimálneho riadenia, v ktorej sa maximalizuje celkový úžitok obyvateľstva počas nekonečného horizontu.

V Kapitole 2 sme predstavili Brock-Mirmanov model, ktorý predstavuje neoklasickú verziu Ramseyho modelu so zohľadnením náhodných technologických šokov. Cieľom tejto kapitoly bolo ukázať, akým spôsobom vieme model numericky riešiť. Využili sme Tauchenov algoritmus na diskretizáciu náhodných šokov a úlohu riešili pomocou Bellmanovej rovnice. Rovnako tak sme v tejto časti ukázali odvodenie kvázi-stacionárneho bodu, ktorý je akýmsi priblížením stacionárneho pevného bodu z teórie Ramseyho modelu.

V Kapitole 3 sme sa venovali špecifikácii vstupných dát a parametrov do modelu. Ukázali sme, kde nájsť vhodné dáta na vyplnenie týchto modelov a ako z daných dát vybrať vstupy do modelov.

V Kapitole 4 sme vytvorili a kalibrovali Ramseyho model pre jednotlivé krajiny tak, aby čo najpresnejšie popisovali vývoj ekonomických indikátorov počas kalibračného 13-ročného obdobia. Sledovali sme, nakoľko takéto modely dokážu zachytiť reálny vývoj aj v testovacom 7-ročnom období. Nakoniec sme využili numerické riešenie Brock-Mirmanovho modelu pre jednotlivé krajiny, a pozorovali sme, aký prínos má rozšírenie rastových modelov o prvok neistoty.

Záverom môžeme konštatovať, že deterministický Ramseyho model poskytol zmysluplné výsledky pri analýze dlhodobého rastu kapitálu, spotreby a HDP vo vybraných krajinách. Po rozšírení modelu o stochastický prvok sme získali nástroj, ktorý je citlivejší na výkyvy v makroekonomických ukazovateľoch a dokáže do určitej miery reflektovať volatilitu spôsobenú neočakávanými šokmi.

Výsledky však ukázali, že model si viedol dobre predovšetkým v prípadoch, kde medzi kalibračným a testovacím obdobím nenastali kvalitatívne zmeny v trendoch sledovaných premenných. V takýchto prípadoch boli odchýlky medzi modelovými a reálnymi hodnotami relatívne malé a mohli byť vysvetlené stochastickými šokmi v produkčnej funkcii. Naopak, ak sa v testovanom období objavili štrukturálne zmeny alebo prudké výkyvy, modely vykazovali výraznejšie odchýlky, ktoré ani jeden model nedokázal zaznamenať.

Jedným z možných vysvetlení týchto odchýlok môže byť aj zjednodušenie výdavkovej strany ekonomiky – najmä predpoklad, že vládne výdavky a čistý export sú zahrnuté v agregovanej spotrebe a investíciách. Do budúcnosti by preto bolo vhodné uvažovať o rozšírení modelu o explicitné zavedenie verejného sektora a zahraničného obchodu, čím by sa zlepšila schopnosť modelu zachytiť komplexnejšie dynamiky reálnych ekonomík.

Zoznam použitej literatúry

[1] Acemoglu, D.: *Introduction to modern economic growth*, Princeton University Press, New Yersey, 2009

[2] Adda, J., Cooper, R.: *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*, MIT Press, Cambridge, MA, 2003.

[3] Amilon, H., Bermin, H.-P.: *Welfare Effects of Controlling Labor Supply: An Application of the Stochastic Ramsey Model*, Review of Economic Dynamics 6 (2003), 502–518.

[4] Brock, W. A., Mirman, L. J.: *Optimal Economic Growth under Uncertainty: Discounted Case*, Journal of Economic Theory 4 (1972), 479–513.

[5] Český statistický úrad: *Databáze národních účtů*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://apl.czso.cz/pll/rocenka/rocenka.indexnu

[6] Dujava, D.: *Neoclassical and Keynesian View on a Growth of Economy of SR.(Neoklasický a keynesovský pohlad na rast ekonomiky SR.)*, [Economic Analysis & Policy Group, Working Paper Series, WP No. 1.] Bratislava, 2010: University of Economics in Bratislava, Faculty of National Economy, Department of Economic Policy. Dostupné na internete dňa 15.10.2024 na: https://nhf.euba.sk/www_write/files/katedry/khp/eapg/wp001.pdf

[7] Halická, M., Jurča, P.: *Optimálne riadenie II*, FMFI UK, Bratislava, 2015

[8] Heer, B., Maußner, A.: *Value Function Iteration as a Solution Method for the Ramsey Model*, Working Paper Series No. 2278, CESifo, Mníchov, 2008, dostupné na internete dňa 28.1.2025: https://www.ifo.de/DocDL/cesifo1_wp2278.pdf

[9] Heer, B.: *Advanced Macroeconomics*, Springer, Berlin, 2014.

[10] Jurča, P.: Ramseyho model ekonomického rastu ako úloha optimálneho riadenia, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2004, dostupné na internete (1.10.2024): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2004/jurca/diplomovka.pdf

[11] Kydland, F. E., Prescott, E. C.: *Time to Build and Aggregate Fluctuations*, Econometrica 50(6) (1982), 1345–1370.

[12] Mitra, T., Roy, S.: *Optimality of Ramsey–Euler Policy in the Stochastic Growth Model*, Journal of Economic Theory 172 (2017), 66–101.

[13] Novales, A., Herrero, A. M.: *Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[14] Ramsey, F. P.: *A Mathematical Theory of Saving*, The Economic Journal 38 (1928), 543–559.

[15] Sladký, K.: *Some Remarks on Stochastic Versions of the Ramsey Growth Model*, Prague Economic Papers 16 (2007), 239–247.

[16] Statistic Denmark: *StatBank Denmark*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://www.dst.dk/en/Statistik/emner

[17] Štatistická databáza Eurostatu: *Gross domestic product at market prices*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/nama_10_nfa_bs/default/table?lang=en&category=na10.nama10.nama_10_nfa

[18] Štatistická databáza Eurostatu: *Final consumption expenditure of households and non-profit institutions serving households*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00009/default/table?lang=en&category=t_na10.t_nama10.t_nama_10_ma

[19] Štatistická databáza Eurostatu: *Final consumption expenditure of general government*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00010/default/table?lang=en&category=t_na10.t_nama10.t_nama_10_ma

[20] Štatistická databáza Eurostatu: *Gross fixed capital formation (investments)*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00011__custom_15564979/default/table?lang=en

[21] Štatistická databáza Eurostatu: *Goods and services, imports and exports*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00110/default/table?lang=en&category=t_na10.t_nama10.t_nama_10_ma

[22] Štatistická databáza Eurostatu: *Employment, domestic concept - Total*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00112/default/table?lang=en

[23] Štatistická databáza Eurostatu: *Hours worked per week of full-time employment*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tps00071/default/table?lang=en&category=t_labour.t_employ.t_lfsa

[24] Štatistická databáza Eurostatu: *Capital stocks by sector and detailed asset type*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/nama_10_nfa_bs/default/table?lang=en&category=na10.nama10.nama_10_nfa

[25] Štatistická databáza Eurostatu: *Compensation of employees*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00013/default/table?lang=en&category=t_na10.t_nama10.t_nama_10_ma

[26] Štatistický úrad Slovenskej republiky: *Datacube*, dostupné dňa 8.2.2025 na internete: https://datacube.statistics.sk/

[27] Tauchen, G.: *Finite state Markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions*, Economics Letters 20 (1986), 177–181.