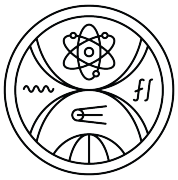
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MATEMATICKÉ MODELOVANIE FUNGOVANIA SLÁČIKOVÝCH HUDOBNÝCH NÁSTROJOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2026 Bc. Zuzana BABUŠÍKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MATEMATICKÉ MODELOVANIE FUNGOVANIA SLÁČIKOVÝCH HUDOBNÝCH NÁSTROJOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Peter Mederly, CSc.

Bratislava 2026 **Bc. Zuzana BABUŠÍKOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zuzana Babušíková
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Matematické modelovanie fungovania sláčikových hudobných nástrojov
Mathematical modeling of bowed string instruments

Anotácia: Sláčikové hudobné nástroje, osobitne husle, majú už mnoho rokov v hudbe špeciálne postavenie, a to tak ako súčasť hudobných telies, a tiež ako sólový nástroj. Primárnym vibrátorom v týchto nástrojoch je kmitajúca struna, ktorej základným matematickým modelom je jedna z klasických parciálnych diferenciálnych rovníc. Kým sa však zvukový signál iniciovaný kmitajúcou strunou dostane k poslucháčovi, prejde radom transformácií, ktorých pochopenie si vyžaduje podstatne zložitejšie matematické modely ako je východzia rovnica struny. Na rozdiel od mnohých iných hudobných nástrojov boli sláčikové hudobné nástroje predmetom intenzívneho vedeckého výskumu, ktorého základom je matematické modelovanie, a to od začiatku vedeckej revolúcie v 16. storočí až do súčasnosti, pričom tento proces stále pokračuje.

Vedúci: doc. RNDr. Peter Mederly, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „Matematické modelovanie fungovania sláčikových hudobných nástrojov", vrátane všetkých jej príloh a obrázkov, som vypracovala samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použila v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami a súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie je v práci vhodným spôsobom označené.

Miesto a dátum: ..... Podpis: .....

Poďakovanie Touto cestou by som sa rada poďakovala svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Petrovi Mederlymu, CSc. za ochotu, odborné vedenie a usmernenia, ktoré mi pomohli pri vypracovaní tejto práce. Úprimná vďaka patrí aj mojim rodičom a môjmu priateľovi za podporu počas štúdia.

Abstrakt

BABUŠÍKOVÁ, Zuzana: Matematické modelovanie fungovania sláčikových hudobných nástrojov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Peter Mederly, CSc., Bratislava, 2026, 54 s.

V diplomovej práci sa zaoberáme popisom pohybu struny rozochvenej ťahom sláčika a šírením týchto vibrácií. Na úvod stručne zhrnieme historický vývoj huslí a zavedieme pojmy, ktoré sa týkajú konštrukcie sláčikového nástroja. Ďalej sa venujeme dynamike struny a sláčika. Zameriavame sa na striedanie fázy statického trenia a fázy dynamického trenia, ktoré sprevádza zmena charakteru sily trenia pôsobiacej medzi strunou a sláčikom. Popíšeme model struny ako jednoduchého oscilátora, ktorý charakterizuje strunu jedným hmotným bodom. Sformulujeme počiatočné úlohy a odvodíme riešenia pre obe fázy. V ďalšej časti sa venujeme Helmholtzovmu modelu kmitania struny rozozvučanej sláčikom, odvodeniu jeho riešenia a Ramanovmu rozšíreniu tohto modelu. Na rozdiel od predchádzajúceho prístupu, Helmholtz a Raman uvažujú o strune ako o systéme so spojitým rozložením hmotnosti po celej jej dĺžke.

Kľúčové slová: struna, sláčik, samo-udržujúca sa oscilácia, Helmholtzov pohyb, model kmitania struny

Abstract

BABUŠÍKOVÁ, Zuzana: Mathematical modeling of bowed string instruments [Master's thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Peter Mederly, CSc., Bratislava, 2026, 54 p.

In this thesis, we examine the motion of a string excited by a bow and the propagation of the resulting vibrations. In the first chapter, we provide a brief historical overview of the violin and introduce terminology related to the construction of bowed string instruments. We then proceed to address the dynamics of the string-bow interaction, focusing on the alternation between sticking and sliding friction phases, which is accompanied by changes in the character of the friction between the string and the bow. We describe a model of the string as a simple oscillator, characterizing the string as a single mass concentrated at one point of the string. We formulate the initial value problems and derive solutions for both phases. In the subsequent section, we discuss the Helmholtz model of bowed string, derive its solution, and examine Raman's extension of this model. In contrast to the previous approach, Helmholtz and Raman consider the string as a system with a continuous mass distribution along its entire length.

Keywords: string, bow, self-sustained oscillation, Helmholtz motion, model of string vibration

Obsah

Úvod **9**

1 Vývoj a štruktúra huslí **12**

1.1 Štruktúra huslí 12

1.2 Historický vývoj huslí od 16. storočia po súčasnosť 12

1.2.1 Začiatky vývoja huslí v 16. storočí 13

1.2.2 Vývoj huslí v období baroka 14

1.2.3 Vývoj huslí a husľoví majstri 18. storočia 14

1.2.4 Vývoj huslí a fyzikálne objavy 19. storočia 15

1.2.5 Vývoj huslí od 20. storočia 17

2 Samo-udržujúce sa oscilácie a ich modelovanie **18**

2.1 Struna ako jednoduchý oscilátor 19

2.1.1 Fáza statického trenia 22

2.1.2 Fáza šmykového trenia 22

2.1.3 Odvodenie riešenia pre výchylku struny vo fáze šmykového trenia . 23

2.1.4 Grafické znázornenie striedania fáz 24

2.1.5 Odvodenie periódy modelu struny ako jednoduchého oscilátora . . . 26

2.1.6 Model jednoduchej oscilácie v softvéri `Matlab` 28

2.1.7 Takmer voľná oscilácia a relaxačná oscilácia 32

3 Modelovanie kmitov struny rozozvučanej sláčikom **34**

3.1 Helmholtzov model kmitania struny 34

3.1.1 Helmholtzove experimentálne zistenia 36

3.1.2 Helmholtzova teoretická analýza 37

3.2 Príklady iných reprezentácií Helmholtzovho pohybu 43

3.3 Ramanov model 44

Záver **48**

Zoznam použitej literatúry **50**

Príloha A **51**

A.1 Implementácia modelu samo-udržujúcej sa oscilácie do softvéru `Matlab` . . 51

Úvod

Sláčikové hudobné nástroje všeobecne a husle obzvlášť majú už mnoho rokov v hudbe mimoriadne postavenie, či už ako súčasť orchestrálnych telies, alebo ako sólový nástroj. Toto postavenie potvrdzuje aj skutočnosť, že husle sa podľa mnohých autorov stali spomedzi všetkých hudobných nástrojov predmetom najintenzívnejšieho vedeckého skúmania.

Primárnym zdrojom zvuku huslí je kmitajúca struna. Problematiku kmitajúcej struny možno spolu s teóriou ladení a stupníc zaradiť medzi najcharakteristickejšie symboly úzkych vzťahov medzi matematikou a hudbou. Zdokumentovaná história týchto vzťahov siaha do obdobia pred viac ako 2500 rokmi, keď sa v starovekom Grécku vďaka Pytagorovi a jeho žiakom rodili matematické základy teórie hudobných intervalov tvoriacich základ harmónie v hudbe. Druhý zo spomínaných symbolov, problém kmitajúcej struny, sa pokladá za jeden z podnetov, ktoré zásadne posunuli matematiku v 18. storočí. Na jeho riešení sa podieľali také významné osobnosti v oblasti matematiky ako Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) a Leonhard Paul Euler (1707-1783).

Ako sme už uviedli, husle patria medzi hudobné nástroje, ktorých zvuk je primárne iniciovaný kmitajúcou strunou. Sú teda súčasťou veľkej skupiny strunových nástrojov. Hoci strunové nástroje používajú ľudia už tisícročia, história huslí trvá len niekoľko storočí. Je to spôsobené tým, že na husliach sa struna nerozkmitáva brnknutím ani úderom, ale prostredníctvom sláčika. Tento rozdiel má významné dôsledky z praktického aj teoretického hľadiska. Z praktického hľadiska patria sláčikové hudobné nástroje medzi hudobné nástroje s predĺženým tónom. Na rozdiel od nástrojov s doznievajúcim tónom, ako je napríklad gitara, dokážu sláčikové nástroje udržať hraný tón dlhý čas, pretože im hráč prostredníctvom sláčika plynulo dodáva energiu. Táto skutočnosť má aj významné teoretické dôsledky, a to aj v oblasti matematického modelovania ich fungovania. Spomínaným významným matematikom sa v 18. storočí podarilo vyriešiť problém kmitania struny (iniciovaného brnknutím alebo úderom) známym ako vlnová rovnica. Trvalo ďalších 100 rokov kým ďalšia významná vedecká osobnosť, ktorou bol Hermann von Helmholtz (1821-1894), adaptoval Bernoulliho riešenie vlnovej rovnice aj na prípad pohybu struny rozozvučanej sláčikom. Na jeho počesť je dnes tento pohyb známy ako Helmholtzov pohyb. Okrem časovej stability sa tento pohyb od klasického voľného kmitania struny významne líši aj svojím priebehom.

Z fyzikálneho hľadiska možno sláčikový nástroj chápať ako systém generujúci zvukový signál. Neperiodickým zdrojom energie je sláčik, ktorý sa pôsobením pravej ruky hráča súvisle pohybuje po napnutej strune v priečnom smere. Struna je pritom uchytená medzi dvoma pevnými bodmi a udržiavaná pod určitým napätím. Medzi sláčikom a strunou vzniká trenie, ktoré periodicky mení svoj charakter medzi statickým stavom priľnutia, označovaným ako „stick", a dynamickým stavom sklzu, označovaným ako „slip". Striedanie týchto fáz uvádza strunu do samo-udržiavaného oscilačného pohybu. Kmity zo struny prenáša kobylka do tela nástroja, ktoré plní funkciu rezonátora. Rozkmitaním častí nástroja a vzduchu v jeho dutine sa šíria zvukové vlny do okolia, až ich zachytia uši hráča, či poslucháča.

Cieľom predkladanej diplomovej práce bolo charakterizovať vývoj a súčasný stav matematického modelovania vybraných aspektov fungovania sláčikových hudobných nástrojov s osobitným dôrazom na husle. V práci sme sa zamerali na stručný popis histórie vývoja huslí, ich vedeckého skúmania a na predstavenie vybraných matematických modelov kmitania struny na husliach, osobitne matematického modelu Helmholtzovho pohybu.

Základným zdrojom v našej práci je kniha od Lothara Cremera (1905-1990), *The Physics of the Violin* [3]. Cremerova kniha je všeobecne pokladaná za jedno zo základných diel v tejto oblasti. Ide o vysoko odbornú knihu, ktorá však nemá charakter učebnice a jej pochopenie predpokladá, že čitateľ disponuje dostatočnými predbežnými znalosťami a je v téme zorientovaný. Za najväčší prínos našej práce pokladáme doplnenie jeho teoretických poznatkov prezentovaných v knihe o chýbajúce matematické, či fyzikálne súvislosti, ktorého súčasťou je aj vlastná simulácia jedného z prezentovaných modelov kmitajúcej struny. Obsah práce sa opiera o logickú štruktúru kapitol spomínanej publikácie.

Práca má tri kapitoly a prílohu s naprogramovanou simuláciou jedného z modelov samo-udržujúcich sa oscilácií implementovanej do softvéru `Matlab`.

V prvej kapitole oboznamujeme čitateľa s históriou vývoja huslí a ich vedeckým skúmaním podľa [2], [3], [5] a [6].

Pokračujeme úvodom do problematiky samo-udržujúcich sa oscilácií a ich modelovania v druhej kapitole, pričom čerpáme z [1] a [3]. Samo-udržujúca sa oscilácia vzniká prostredníctvom suchého trenia medzi dvoma pevnými povrchmi v relatívnom pohybe jedného cez druhý. Predstavíme model uvažujúci strunu ako hmotnosť sústredenú do jedného bodu,

pričom budeme pozorovať priebeh jeho výchylky a rýchlosti v čase. Sformulujeme počiatočné úlohy pre fázu statického aj šmykového trenia a odvodíme ich riešenia. Následne model implementujeme do softvéru `Matlab` a doplníme grafickými znázorneniami, ktoré budú výstupmi vlastných simulácií. Popis modelu samo-udržiavaných oscilácií rozšírime o analýzu jeho hraničných prípadov.

V tretej kapitole sa venujeme základným modelom kmitov struny rozozvučanej sláčikom. Opierame sa o poznatky z [3], [4], [7] a [8]. Jej hlavná časť je venovaná popisu Helmholtzovho modelu vrátane popisu jeho experimentálnych zistení, na ktorých svoj model postavil. Na rozdiel od modelu samo-udržujúcej sa oscilácie predstavenej v prvej kapitole, Helmholtzov model uvažuje hmotnosť struny spojito rozloženú po celej jej dĺžke. Na Helmholtzovu prácu nadviazal Raman, ktorý k Helmholtzovmu modelu doplnil znázornenie distribúcie rýchlosti pozdĺž struny v danom okamihu.

1 Vývoj a štruktúra huslí

V tejto kapitole najprv predstavíme, z čoho sa husle skladajú a následne sa budeme venovať ich historickému vývoju. Postupovať budeme chronologicky, od 16. storočia až po súčasnosť. Opierame sa o poznatky zo zdrojov [2], [3], [5] a [6].

1.1 Štruktúra huslí

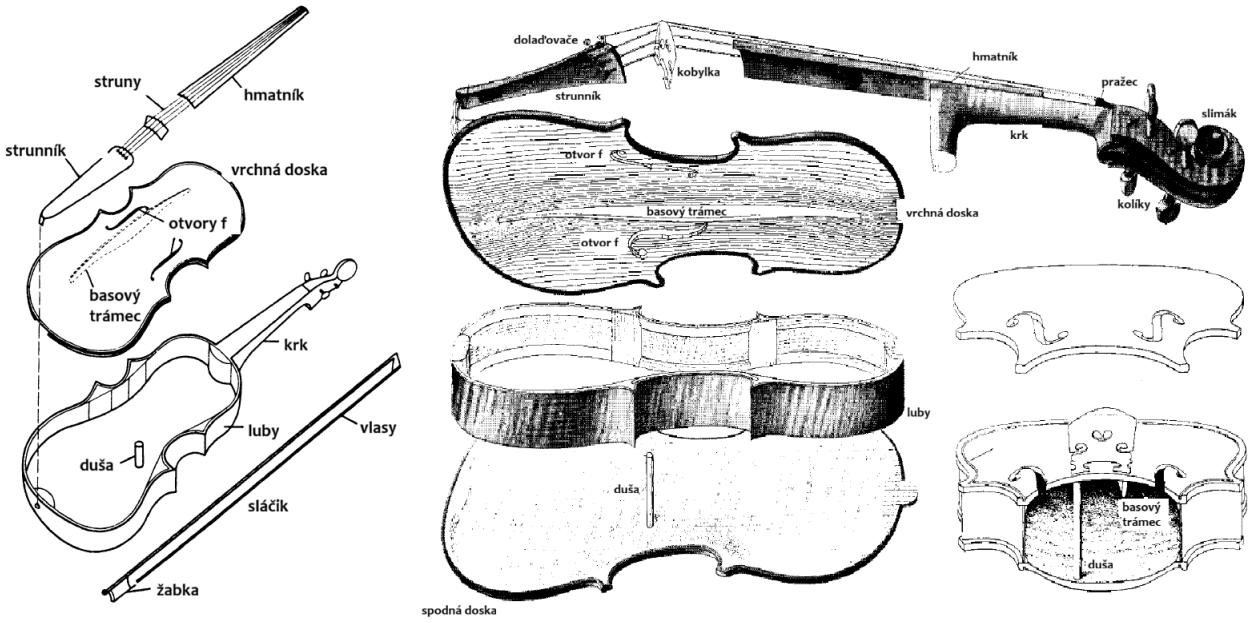
Husle sú sláčikový hudobný nástroj so štyrmi strunami ladenými po kvintách (g-d^1-a^1-e^2). Zo skupiny sláčikových nástrojov sú tým najmenším. Tón vzniká ťahom sláčika po strune. Telo huslí funguje ako rezonátor a zvuk zosilní.

Na Obr. 1 sú zobrazené jednotlivé časti nástroja. Vidíme na ňom vrchnú dosku, spodnú dosku a luby, ktoré spolu tvoria telo huslí, strunník a kobylku, ktorá struny podopiera a prenáša ich vibrácie do tela huslí. Okolo nej sú do vrchnej dosky vyrezané tzv. *f-otvory*, cez ktoré prechádzajú vzduchové prúdy. V hornej časti sa nachádza hmatník, pražec, hlava huslí so slimákom a ladiacimi kolíkmi.

Vo vnútri je duša a basový trámec, ktorých poloha výrazne ovplyvňuje zvuk nástroja. Duša je drevený kolík vložený medzi vrchnú a spodnú dosku nástroja. Nájdeme ju pod pravou nohou kobylky. Malé zmeny jej polohy spôsobia výraznú zmenu zvuku nástroja [3]. Basový trámec (*bassbar*) je drevená lišta umiestnená pozdĺžne zospodu vrchnej dosky pod ľavou nohou kobylky. Prívlastok „basový" je odvodený práve od jeho polohy - nachádza sa na rovnakej strane ako hlbšie ladené struny. Husľový sláčik má medzi špičkou na hornom konci a tzv. žabkou na dolnom konci natiahnuté konské vlasy. Žabka umožňuje regulovať ich napätie.

1.2 Historický vývoj huslí od 16. storočia po súčasnosť

V časti 1.1 sme predstavili jednotlivé časti huslí ako ich poznáme dnes. Štruktúra nástroja sa však postupne vyvíjala v závislosti od zručností husľových majstrov, požiadaviek vtedajšej doby a neskôr aj pod vplyvom fyzikálnych poznatkov.



Obr. 1: Opis štruktúry huslí [4], [5].

1.2.1 Začiatky vývoja huslí v 16. storočí

Prvé nástroje, ktoré sa svojou štruktúrou podobali husliam, vznikli už v stredoveku resp. v ranej renesancii. Prvým z predchodcov bol *rebec*, neskôr v renesancii *lira da braccio* a tretím, tiež renesančným nástrojom, je tzv. *renaissance fiddle*. Husle vznikali v období veľkého rozmachu umeleckej tvorby na pozadí spoločenských, vedeckých a filozofických zmien. Medzi najznámejšie osobnosti tejto doby patrili umelci Michelangelo, Raphael, Giovanni Gabrieli, Monteverdi či Leonardo da Vinci, ktorý sám bol hráčom na *liru da braccio*. Výrobou a vývojom huslí sa začali zaoberať v severnom Taliansku v okolí Milána. Najznámejšie dielne sa nachádzali v mestách Brescia – dielňa majstra Gaspara Bertolottiho (1542–1609) – a Cremona, kde pôsobil majster Andrea Amati (1511–1581).

V priebehu stáročného vývoja huslí sa rôzni majstri pokúšali o takú konštrukciu nástroja, aby vyhoveli požiadavkám vtedajšej spoločnosti a dosiahli jeho maximálny zvuk. Zručnosť konštruovať hudobné nástroje sa získavala empirickými poznatkami. Zásadnou zmenou bol presun duše huslí zo stredu pod pravú nohu kobylky a umiestnenie basového trámca priamo pod ľavú nohu kobylky na spodnú stranu hornej dosky. Týmto asymetrickým nastavením sa podarilo maximalizovať zvuk nástroja. Vzduch sa pohybuje dnu a von cez f-otvor na strane basového trámca. Ak by bolo nastavenie symetrické, vzduch

by vošiel pri jednej nohe kobylky dnu a pri druhej von a tieto dva pohyby by sa navzájom anulovali.

1.2.2 Vývoj huslí v období baroka

Fyzikálne objavy 17. storočia v oblasti zvuku a vibrácie struny viedli k poznaniu, že výška tónu úzko súvisí s frekvenciou vibrácií, pričom platí: vyšší tón - vyššia frekvencia.

Veľký podiel na rozšírení poznatkov o vibrácii struny má Galileo Galilei. Zhrnul známe poznatky o vzťahu dĺžky kmitajúcej struny k výške tónu zvuku, ktorý struna generuje. Vyjadril názor, že fyzikálna podstata tohto javu spočíva v počte vibrácií struny za jednotku času, teda vo frekvencii vibrácií. Z Galileových textov vyplýva, že rozumel závislosti frekvencie kmitajúcej struny od jej dĺžky, napätia a hustoty, hoci neprezentoval formálny vzorec vyjadrujúci túto závislosť.

V rovnakom čase sa vzťahom medzi výškou tónu a frekvenciou zaoberal aj kňaz Marin Mersenne (1588-1648). Zistil, že v ideálnych podmienkach je frekvencia kmitov struny nepriamo úmerná dĺžke struny a priamo úmerná odmocnine napätia. Na rozdiel od Galilea to vyjadril aj formálnym zápisom.

Husľoví majstri v období baroka prispôsobovali husle nielen štýlu hudby, ale aj akustike sál, kostolov a salónov, technike hry a preferenciám hráča.

1.2.3 Vývoj huslí a husľoví majstri 18. storočia

V severnom Taliansku v priebehu 18. storočia pracovalo na zdokonaľovaní huslí ako nástroja niekoľko majstrovských dielní. Najznámejšou z nich bola dielňa Antonia Stradivariho (1644 - 1737), žiaka Nicolu Amatia, a Giuseppe Guarneriho (1698 - 1744). Spomenutí husľoví majstri boli obdarení sluchovou pamäťou, absolútnym sluchom a mali nejaký spôsob na to, ako odhadnúť tónové vibrácie v dreve a podľa toho vyrezať tvar hornej aj spodnej dosky huslí. Ich vedomosti však zostali nezdokumentované – pravdepodobne preto, že sa cech chcel vyhnúť plateniu daní, alebo preto, že išlo o výrobné tajomstvo. Vďaka dodnes nenapodobiteľným nástrojom majstrov vtedajšej doby nazývame roky 1700 - 1750 aj „Golden Period" vo vývoji huslí. Nikomu ďalšiemu sa nepodarilo dosiahnuť pri výrobe huslí úroveň spomenutých majstrov. Do tohto bodu bol vývoj huslí výlučne empirický.

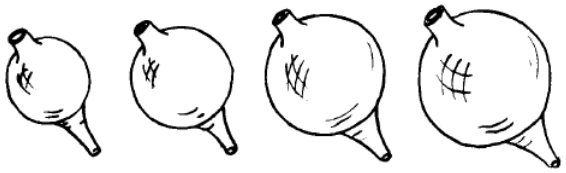
1.2.4 Vývoj huslí a fyzikálne objavy 19. storočia

V 19. storočí zmeny v konštrukcii huslí ovplyvnil vývoj na hudobnej scéne. Okrem iného sa frekvencia tónu a^1, a teda aj príslušnej struny na husliach, zvýšila z 370 Hz na 440-450 Hz. Zvyšovala sa kapacita koncertných sál a tomu sa museli prispôsobiť nástroje, teda bolo potrebné, aby mali husle silnejší zvuk. Husliari vtedajšej doby zmenili dynamiku krku, strún a kobylky tak, aby dosiahli nielen silnejší zvuk, ale aj zväčšili hráčovi priestor na manévrovanie so sláčikom. Konkrétne išlo o úpravy ako nahradenie basového trámca ťažším (zväčšenie statickej sily pôsobiacej na kobylku), či osadenie nového dlhšieho krku do hornej dosky zvyčajne aj so slimákom vštepeným doň. To si následne vyžadovalo dlhšie struny a vyššiu kobylku. Materiál a prierez strún sa nezmenil. Väčšia dĺžka strún si vyžadovala väčšie napnutie na dosiahnutie rovnakej výšky tónu a práve to malo za následok silnejší zvuk nástroja. Staršie nástroje barokových majstrov sa však vo väčšine prípadov nedali prispôsobiť týmto zmenám, s výnimkou huslí Antonia Stradivariho a Giuseppeho Guarneriho.

Félix Savart (1791-1841) je prvým vedcom, o ktorom je známe, že experimentoval priamo s husľami v čase spomínaných štrukturálnych zmien. Pokusy robil na zjednodušených lichobežníkových husliach s plochými doskami a rovnými f-otvormi. Jednotlivé dosky oddelil, posypal pieskom a rozvibroval pomocou sláčika v rôznych bodoch pozdĺž okrajov. Týmto postupom sa na nich vytvárali tzv. Chladniho obrazce. Tam, kde povrch nevibroval, sa piesok usadil a tak zviditeľnil tzv. nodálne (uzlové) oblasti dosky nástroja pri danej špecifickej frekvencii. Savartove experimenty ukázali, že funkcia duše huslí nie je primárne prenos vibrácií medzi doskami, ale skôr zmena vibračných režimov medzi doskami a nemusí byť nutne umiestnená vnútri nástroja. Rovnaký efekt dosiahneme, ak ju nahradíme zvierkou pôsobiacou na hornú a dolnú dosku zvonku. Savart spolu s Jeanom Baptistom Vuillaumom (1798-1875) dokázali pomocou stroja s ozubeným kolieskom na meranie frekvencie (Savartov vynález) identifikovať tzv. „tap tone" (rezonančná frekvencia po údere) v jednotlivých vrchných a spodných doskách huslí z dielne Antonia Stradivariho a Josepha Guarneria. Zistili, že frekvencia spodnej dosky je o niečo medzi poltónom a tónom vyššia ako frekvencia vrchnej dosky.

Ďalším významným vedcom, ktorý sa, okrem mnohých iných vecí, venoval aj problematike bezprostredne súvisiacej s husľami, bol nemecký fyzik Hermann von Helmholtz

(1821–1894). Pomocou sady guľovitých rezonátorov rôznej veľkosti taktiež skúmal frekvenčné zloženie tónov. Tieto zariadenia sa nazývajú Helmholtzove rezonátory. Sú to sklenené, alebo kovové duté gule s odstupňovanými veľkosťami, pričom každá z nich má dva otvory (viď Obr. 2). Ak sa frekvencia zvuku zhoduje s rezonančnou frekvenciou rezonátora, rezonátor túto frekvenciu zosilní. Na princípe Helmholtzových rezonátorov fungujú aj moderné načúvacie zariadenia, ktoré zosilňujú určité frekvencie zvuku, aby ich ľudské ucho lepšie vnímalo.



Obr. 2: Helmholtzove rezonátory [5].

Ďalej Helmholtz pozoroval harmonické zložky komplexného tónu v rôznych hudobných nástrojoch vrátane huslí. Z hľadiska pochopenia fungovania huslí má mimoriadne veľký význam jeho skúmanie tzv. „stick-slip" javu charakteristického pre strunu rozozvučanú sláčikom, dnes už známeho pod názvom Helmholtzov pílovitý priebeh vlny (tzv. Helmholtz sawtooth wave). Pomocou tzv. vibračného mikroskopu, ktorý sám skonštruoval, určeného na pozorovanie kmitov, dokázal popísať, ako sa jednotlivé body na strune pri jej rozkmitaní sláčikom pohybujú. Na základe toho dokázal zostaviť matematický model, pomocou ktorého sa dal vypočítať pohyb celej struny a amplitúdy jeho harmonických zložiek. Podľa [5] bol pravdepodobne prvým, kto rozpoznal, že periodický impulz, vyvolaný pílovitým pohybom sláčika natretého kolofóniou naprieč kmitajúcou strunou, vytvára podmienky, za ktorých frekvencie čiastkových zložiek generovaného tónu zodpovedajú celočíselným násobkom jeho fundamentálnej frekvencie. Táto harmonická väzba je odlišná od kmitania brnknutej struny (gitara, harfa, či klavír), kde väčšia tuhosť struny spôsobuje zvýšenie frekvencie vyšších harmonických zložiek.

1.2.5 Vývoj huslí od 20. storočia

Nemecký fyzik Hermann Backhaus (1885-1958) sa spolu so svojím žiakom Hermannom Meinelom (1904-1977) zaoberal vibračnými vzorcami huslí. Podarilo sa im zmapovať ich vibračné módy a akustickú frekvenčnú odozvu. Vykonali priekopnícky výskum zameraný na vplyv hrúbky dosky, zakrivenia kobylky, laku, duše a ďalších častí huslí na ich frekvenčnú odozvu. Ich práca patrí medzi najdôležitejšie objavy v oblasti akustiky.

V posledných rokoch sa venuje štúdiu huslí niekoľko skupín, či už sú to vedci zo Švédska, Austrálie, Spojeného kráľovstva, alebo USA. Spomenieme Heinricha Dünnwalda, ktorý v 80. rokoch minulého storočia vykonal rozsiahlu štatistickú štúdiu, ktorá obsahuje frekvenčné odozvy 700 huslí, od strojovo vyrobených až po starú taliansku výrobu. Na základe tejto štúdie dokázal určiť parametre, ktoré umožňujú rozlíšiť moderné husle od majstrovských historických nástrojov talianskych dielní podľa údajov z ich frekvenčných odoziev.

Mnohí hráči, výrobcovia a predajcovia sú toho názoru, že pokiaľ ide o husle, najlepšie nástroje boli vyrobené pred 350 rokmi. Všeobecnou snahou je zmenšiť rozdiel medzi zvukom historických huslí a huslí moderných výrobcov, a zároveň získať ešte hlbšie poznatky o fungovaní samotných nástrojov.

2 Samo-udržujúce sa oscilácie a ich modelovanie

Sláčikové nástroje patria do skupiny hudobných nástrojov s predĺženým tónom (*sustained-tone musical instruments*). Z hľadiska fyziky patria medzi oscilujúce systémy, ktoré na dopĺňanie strát energie použitej na svoje fungovanie periodicky odoberajú energiu z neperiodického zdroja. Kmitanie takýchto systémov sa označuje aj ako samo-udržujúca sa oscilácia. Sláčikové aj dychové hudobné nástroje patria medzi najstaršie a najrozšírenejšie systémy tohto druhu. Hoci strunové hudobné nástroje rozkmitávané brnknutím, alebo úderom, boli známe už od staroveku, využitie možnosti rozochvieť v hudobnom nástroji strunu sláčikom prišlo až podstatne neskôr.

Sláčik v spojení s pohybujúcou sa rukou hráča je svojou povahou neperiodický zdroj energie a jeho vývoj do dnešného stavu, s využitím kolofónie na ovplyvnenie jeho trecích vlastností, si vyžiadal dlhý empirický proces.

Z fyzikálneho hľadiska má vznik príjemného zvuku sláčikových nástrojov rovnaký základ ako škrípanie bŕzd automobilu. Zdrojom takýchto zvukov sú vyššie uvedené samo-udržujúce sa oscilácie, pričom fyzikálnym základom ich samo-udržujúceho mechanizmu je suché trenie medzi dvoma pevnými povrchmi v relatívnom pohybe jedného cez druhý. V tomto prípade ide o suché trenie medzi sláčikom a strunou. Pri tomto trení nadobúda trecia sila, ktorá je primárnym zdrojom zvukového vlnenia, striedavo statickú a dynamickú formu (priľnutie a skĺznutie). Týmto dvom formám trecej sily zodpovedajú dve fázy fungovania systému: fáza statického trenia (označujeme ju tiež ako fáza „stick") a fáza dynamického trenia (fáza „slip" alebo aj fáza šmykového trenia). Vo fáze stick pôsobí medzi strunou a sláčikom statické trenie a vo fáze slip dynamické, alebo šmykové trenie. V tejto kapitole popíšeme striedanie týchto dvoch fáz a predstavíme, ako ich matematicky modelovať. Sformulujeme úlohy s počiatočnými podmienkami pre obe fázy, odvodíme ich riešenie a model následne implementujeme do softvéru `Matlab`. Opierame sa predovšetkým o poznatky z publikácie [3], ale aj [1].

2.1 Struna ako jednoduchý oscilátor

Fungovanie samo-udržujúcich sa oscilácií, ktoré tvoria fyzikálny základ hry na sláčikových nástrojoch, možno ilustrovať aj na matematickom modeli jednoduchého oscilátora. Jednoduchý oscilátor sa obvykle reprezentuje systémom so závažím o hmotnosti m zavesenom na pružine s tuhosťou s. Štandardne sa používa ako príklad jednoduchého harmonického pohybu popísaného diferenciálnou rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{s\eta}{m} = 0,$$

kde η označuje výchylku závažia z rovnovážnej polohy.

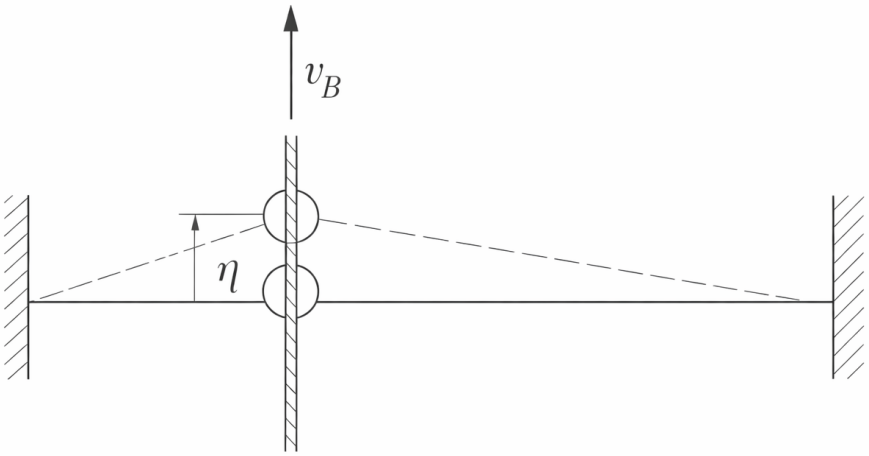
Na rozdiel od rozkmitania takéhoto systému obvyklým vychýlením závažia z jeho rovnovážnej polohy a následným uvoľnením, ktorého dôsledkom je jednoduchý harmonický pohyb, náš jednoduchý oscilátor bude mať podobu napnutej struny, ktorej celá hmotnosť m je sústredená do jedného hmotného bodu na strune. Zvyšok struny bude potom fungovať ako pružina s tuhosťou s.

Jednoduchým vychýlením a pustením struny v hmotnom bode by tento bod vykonával jednoduchý harmonický pohyb. V našom prípade sa systém rozkmitá pomocou sláčika priloženého k strune. Hmotný bod je bodom kontaktu struny so sláčikom a platí $m = \mu L$, kde μ je dĺžková hustota, teda hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky struny a L je dĺžka struny. Predpokladáme, že používame sláčik s kolofóniou nanesenou na jeho vlasoch, ktorá zabezpečuje jeho štandardné fungovanie.

Obr. 3 je schémou popísaného jednoduchého oscilátora. Struna je znázornená úsečkou. Jeden jej koniec reprezentuje kobylku a druhý pražec alebo miesto, kde hráčov prst pritláča strunu na hmatník. Hmotný bod je na obrázku znázornený kružnicou. Tento hmotný bod sláčik vychýli v takom smere, ako je na obrázku znázornené šípkou, a uvedie systém do oscilácie.

Výchylku bodu dotyku struny so sláčikom v čase t označíme $\eta(t)$. Cieľom je pozorovať jej časový vývoj.

Budeme modelovať situáciu, keď sa sláčik pohybuje v kladnom smere, teda v smere nahor, ako je znázornené na Obr. 3. V súlade s realitou predpokladáme, že hráč pohybujúci sláčikom vyvíja okrem sily potrebnej na jeho priečny pohyb cez strunu aj potrebný tlak na strunu „zhora". Najprv kvalitatívne popíšeme priebeh, ako sláčik pri pohybe interaguje so strunou, a potom sformulujeme príslušné vzťahy pre matematický model podľa [3].



Obr. 3: Model nahrádzajúci hmotnosť struny hmotou sústredenou v bode kontaktu struny so sláčikom [3].

Keď sa sláčik priložený na strunu začne pohybovať, na základe tlaku sláčika na strunu „zhora“ pôsobí medzi strunou a sláčikom sila statického trenia (kolofónia zvyšuje koeficient statického trenia, a tým posilňuje počiatočné „prilepenie” struny k sláčiku). V dôsledku tohto trenia sa struna začne pohybovať spolu so sláčikom. S rastúcou výchylkou z rovnovážnej polohy, lineárne s koeficientom tuhosti pružiny s, narastá aj reakčná sila struny pôsobiaca proti pohybu sláčika. Veľkosť reakčnej sily je daná vzťahom

$$F = s\eta.$$

Reakčná sila je však kompenzovaná silou ruky hráča pôsobiacou na sláčik, ktorý sa pohybuje stabilnou rýchlosťou v_B. Týmto spôsobom hráč spojito vykonáva prácu, ktorá predstavuje zdroj energie pre udržiavanie kmitov a zároveň kompenzuje straty energie vznikajúce v systéme z rôznych dôvodov. Táto fáza pohybu struny priľnutej na sláčik predstavuje fázu statického trenia.

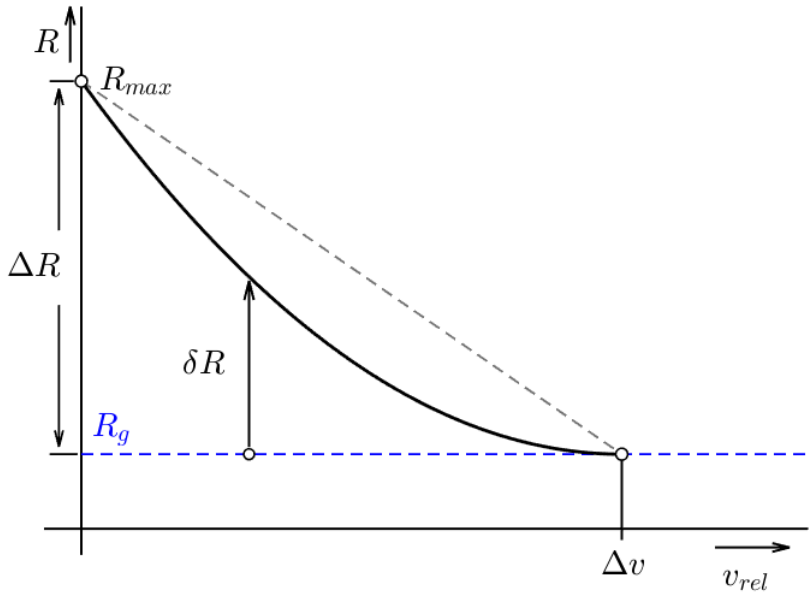
V momente, keď narastajúca reakčná sila F stúpne nad maximálnu silu statického trenia, označme ju $R_{\max}$, struna sa od sláčika „odlepí” a začne sa pohybovať oproti nemu. Týmto systém prešiel do fázy dynamického trenia.

Silu šmykového trenia, ktorou pohybujúci sa sláčik pôsobí na strunu počas fázy dynamického trenia, označíme R_g. Jej smer je totožný so smerom pohybu sláčika a jej veľkosť závisí od relatívnej rýchlosti v_{rel} pohybu sláčika oproti strune. Definujeme ju ako

$$v_{rel} = v_B - v,$$

kde v je rýchlosť pohybu struny. Experimenty ukázali, že hoci vo všeobecnosti šmykové trenie s rastúcou relatívnou rýchlosťou rastie, v prípade sláčika natretého kolofóniou je to inak. Šmykové trenie s rastúcou relatívnou rýchlosťou klesá, pričom maximálnu hodnotu rovnú sile statického trenia $R_{\max}$ dosahuje v bode pre $v_{rel} = 0$. Klesajúca funkcia sily šmykového trenia v závislosti od relatívnej rýchlosti je znázornená na Obr. 4.

Ukazuje sa, že pre náš model nie je potrebné detailnejšie uvažovať o závislosti sily šmykového trenia od relatívnej rýchlosti. Bez negatívneho vplyvu na výpovednosť modelu môžeme silu šmykového trenia R_g aproximovať konštantnou hodnotou. Na Obr. 4 je táto hodnota znázornená modrou prerušovanou čiarou. Tento predpoklad podstatne sprehľadní model.



Obr. 4: Závislosť sily trenia od relatívnej rýchlosti [3].

ΔR označíme rozdiel medzi maximálnou silou statického trenia a konštantnou aproximáciou sily šmykového trenia

$$\Delta R = R_{\max} - R_g. \tag{2.1}$$

2.1.1 Fáza statického trenia

Prvou fázou je stick fáza, alebo fáza statického trenia, kedy je struna unášaná sláčikom s konštantnou rýchlosťou v_B. Stále však hovoríme o modeli jednoduchej oscilácie, kedy výchylku struny reprezentuje jeden hmotný bod. Rýchlosť zmeny výchylky sa rovná rýchlosti pohybu sláčika v_B, teda platí diferenciálna rovnica

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = v_B. \tag{2.2}$$

Z toho vyplýva, že relatívna rýchlosť struny voči sláčiku je nulová:

$$v_{rel} = v_B - v = 0.$$

S nárastom výchylky lineárne narastá reakčná sila, ktorou struna pôsobí proti pohybu sláčika, ktorý ju unáša.

Je zrejmé, že v stick fáze má riešenie úlohy (2.2) tvar

$$\eta(t) = \eta_0 + v_B t, \tag{2.3}$$

kde η_0 je daná počiatočná výchylka, teda $\eta(0) = \eta_0$. Čas, ktorý je koncom prvej stick fázy a začiatkom prvej slip fázy od začiatku hry označíme t_1.

2.1.2 Fáza šmykového trenia

Počas fázy slip pôsobí sláčik na strunu silou dynamického alebo šmykového trenia. V tejto fáze vieme výchylku struny $\eta(t)$ (resp. hmotného bodu, ktorý ju reprezentuje) vyjadriť nehomogénnou rovnicou kmitania v tvare

$$m\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}t^2} + s\eta = R_g. \tag{2.4}$$

Odlepenie struny (hmotného bodu) od sláčika a zmena fázy nastane práve vtedy, keď sila pôsobiaca proti pohybu sláčika presiahne maximálnu hodnotu sily statického trenia. Z toho vyplýva, že prvou počiatočnou podmienkou je veľkosť výchylky v čase t_1 daná

$$\eta(t_1) = \frac{R_{\max}}{s}. \tag{2.5}$$

V momente prepnutia, t.j. na začiatku slip fázy, sa hmota pohybuje rýchlosťou sláčika, ako sme opísali v časti 2.1.1. Teda druhou počiatočnou podmienkou je rýchlosť struny v

čase t_1

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(t_1) = v_B, \tag{2.6}$$

pretože čas t_1 patrí ešte ako koncový bod aj do fázy stick.

2.1.3 Odvodenie riešenia pre výchylku struny vo fáze šmykového trenia

V tejto časti odvodíme riešenie pre výchylku struny vo fáze šmykového trenia. Na základe diferenciálnej rovnice (2.4) a počiatočných podmienok (2.5), (2.6) sformulujeme počiatočnú úlohu.

V predchádzajúcej časti 2.1.2 sme si označili čas prvého prepnutia fázy t_1. Vo fáze slip je čas t_1 začiatkom fázy. Preto uvažujeme $t_1 = 0$. Formulácia úlohy s počiatočnými podmienkami je nasledovná:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}t^2} + s\eta = R_g, \tag{2.7a}$$

$$\eta(0) = \frac{R_{\max}}{s}, \tag{2.7b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(0) = v_B. \tag{2.7c}$$

Pomocou charakteristickej rovnice dostávame všeobecné riešenie homogénnej rovnice v tvare

$$\eta_H(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{s}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{s}{m}}t\right) \tag{2.8}$$

a pomocou návrhu partikulárneho riešenia v tvare $\eta_P(t) = A$, kde A je konštanta, máme

$$\eta_P(t) = \frac{R_g}{s}.$$

Z toho dostávame všeobecné riešenie úlohy (2.7a) v tvare

$$\eta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{s}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{s}{m}}t\right) + \frac{R_g}{s}. \tag{2.9}$$

Využitím počiatočných podmienok (2.7b) a (2.7c) získame konštanty c_1, c_2 všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice druhého rádu v tvare

$$c_1 = \frac{R_{\max} - R_g}{s} = \frac{\Delta R}{s},$$
$$c_2 = v_B\sqrt{\frac{m}{s}}.$$

Riešenie predstavujúce priebeh výchylky $\eta(t)$ vo fáze šmykového trenia je potom dané vzťahom

$$\eta(t) = \frac{R_g}{s} + \frac{\Delta R}{s}\cos(\omega_0 t) + \frac{v_B}{\omega_0}\sin(\omega_0 t), \tag{2.10}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ je uhlová frekvencia oscilátora.

Na úplný opis tejto fázy ešte vyjadríme amplitúdu sínusových kmitov pri šmykovom trení. V našom prípade je partikulárnym riešením konštanta, preto nemá vplyv na kmitajúcu zložku riešenia. Tvar riešenia (2.8) homogénnej rovnice sa dá pomocou goniometrických vzorcov upraviť na

$$\eta(t) = d\sin(\omega_0 t + \Phi),$$

kde konštanta $d = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ a $\Phi = \arctan(\frac{c_1}{c_2})$. Z toho vyplýva, že amplitúda sínusových kmitov vo fáze šmykového trenia má tvar

$$\eta_A = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{s}\right)^2 + \left(\frac{v_B}{\omega_0}\right)^2}. \tag{2.11}$$

a rovná sa zároveň aj amplitúde v rámci celej oscilácie pozostávajúcej z fázy statického a dynamického trenia.

2.1.4 Grafické znázornenie striedania fáz

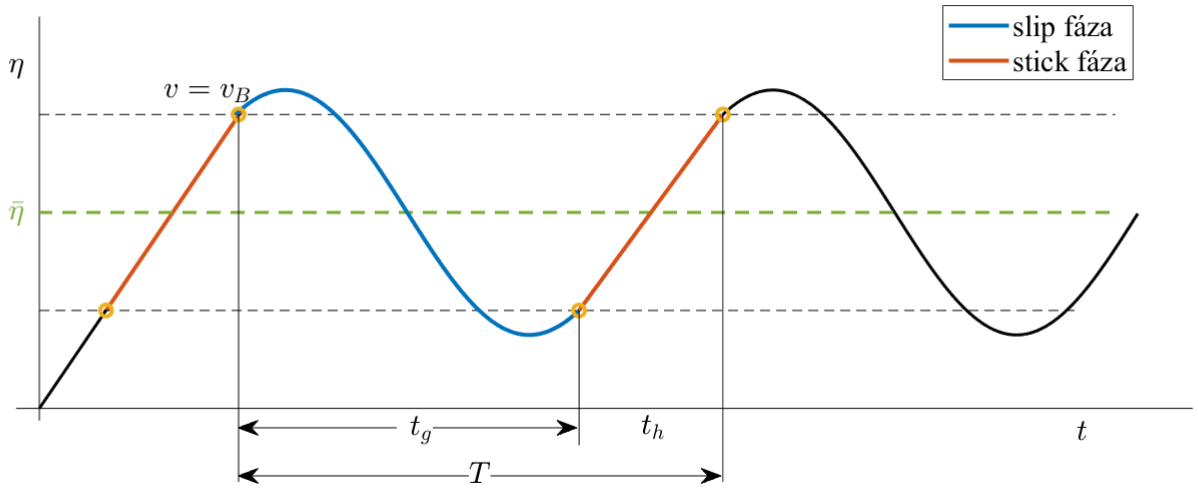
Pre lepšiu interpretáciu modelu dopĺňame aj schematické grafické znázornenia časového priebehu výchylky a rýchlosti, ktoré umožňujú názorne sledovať striedanie jednotlivých fáz v modeli jednoduchej oscilácie. Priebeh výchylky môžeme pozorovať na Obr. 5 a priebeh rýchlosti na Obr. 6.

Obr. 5 a Obr. 6 zachytávajú počiatočnú fázu a časť kmitov z ustáleného stavu kmitania struny pri pohybe sláčika smerom nahor. Vidíme na nich počiatočnú fázu, ktorej časť zodpovedá prvej stick fáze, celú prvú slip fázu, celú druhú stick fázu, celú druhú slip fázu a časť tretej stick fázy. Perióda T predstavuje jeden kmit, za ktorý sa vystriedajú obe fázy.

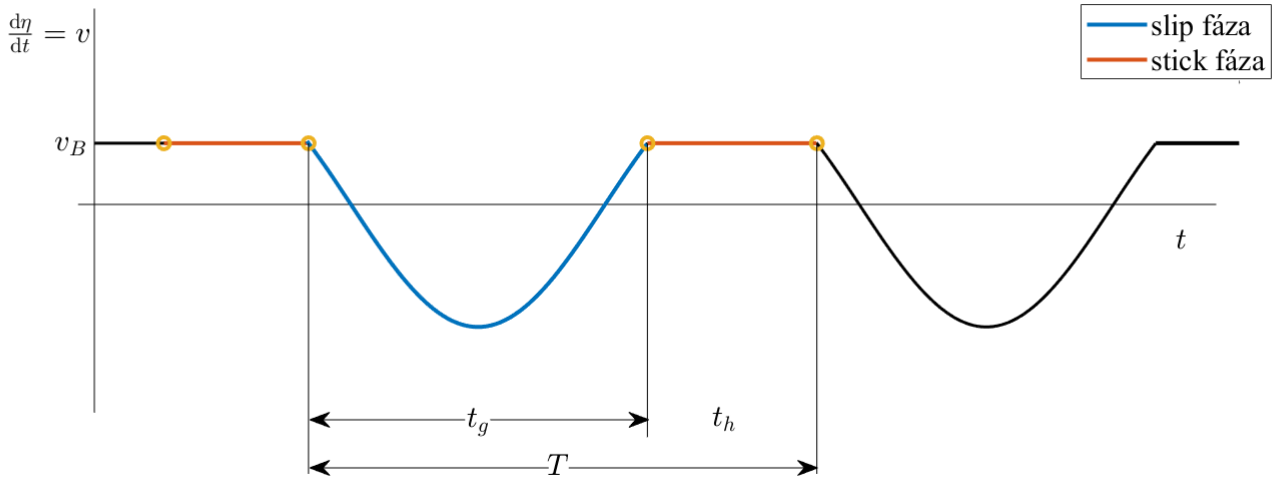
Ako možno vidieť aj z obrázka, na konci fázy statického trenia sa struna od sláčika „odlepí" a má rýchlosť sláčika v_B. Preto ešte istý čas pokračuje zotrvačnosťou v pohybe v smere pohybu sláčika. Tento moment je na obrázkoch znázornený prvou žltou kružnicou. V tomto pohybe ju podporuje aj sila dynamického trenia pôsobiaca na strunu od pohybujúceho sa sláčika. Celkovo sa však od momentu odlepenia rýchlosť struny začína

zmenšovať, ako to môžeme vidieť aj na Obr. 6, pretože na ňu pôsobí sila struny úmerná jej výchylke. Struna pôsobí silou ηs v opačnom smere ako je pohyb sláčika, pretože táto sila je v tejto fáze vychýlenia struny väčšia ako sila dynamického trenia sláčika:

$$\eta s > R_g.$$



Obr. 5: Schéma zobrazujúca výchylku struny pri striedaní fáz v samo-udržujúcej sa oscilácii.



Obr. 6: Schéma zobrazujúca rýchlosť struny pri striedaní fáz v samo-udržujúcej sa oscilácii.

Vplyvom uvedených faktorov rýchlosť struny klesne z kladnej hodnoty v_B najprv na nulu (priesečník krivky s osou x). Následne pokračujúcim vplyvom reakčnej sily struny

ηs, ktorá prevažuje nad silou dynamického trenia R_g, ďalej zrýchlene klesá do záporných hodnôt. Deje sa tak až do momentu, keď sa sila dynamického trenia R_g vyrovná sile ηs, ktorá klesá so zmenšujúcou sa výchylkou, teda keď platí $\eta s = R_g$ (viď priesečníky krivky s $\bar{\eta}$ na Obr. 5). Od tohto momentu začne naopak prevažovať veľkosť sily dynamického trenia R_g, ktorá začne pôsobiť na strunu v opačnom smere. Táto protichodná sila spôsobí, že rýchlosť struny stúpne zo záporných hodnôt najprv na nulu a potom začne stúpať v kladnom smere. Akonáhle struna dosiahne rýchlosť sláčika v_B, dôjde opäť k jej priľnutiu na sláčik a celý proces sa zopakuje. Poznamenávame, že na rozdiel od tejto ilustrácie je v praxi stick fáza v porovnaní so slip fázou omnoho dlhšia.

Výchylka struny sa v tomto modeli správa ako netlmená sínusoida. Z uvedeného kvalitatívneho popisu vyplýva, že rovnovážnou polohou pri kmitaní struny rozozvučanej sláčikom nie je pôvodná rovnovážna poloha s výchylkou rovnou 0, ale rovnovážna poloha

$$\bar{\eta} = \frac{R_g}{s}.$$

znázornená na Obr. 5 zelenou prerušovanou čiarou. Ďalej z uvedeného popisu vyplýva, že vo fáze dynamického trenia možno výchylku struny reprezentovať nehomogénnou rovnicou kmitania (2.4), ako sme to urobili v časti 2.1.1 a 2.1.2.

2.1.5 Odvodenie periódy modelu struny ako jednoduchého oscilátora

V tejto časti odvodíme trvanie priľnutia struny (čas stick fázy) a trvanie kĺzania struny (čas slip fázy) z riešení pre výchylku $\eta(t)$ v jednotlivých fázach. Výsledná perióda bude súčtom týchto dvoch časov.

Riešenie pre výchylku vo fáze stick má tvar $\eta(t) = \eta_0 + v_B t$. Počiatočná podmienka η_0 reprezentuje minimálnu výchylku

$$\eta_0 = \eta_{\min}$$

a z (2.3) máme riešenie pre maximálnu výchylku

$$\eta_{\max} = \eta_{\min} + v_B t. \tag{2.12}$$

Podľa (2.1) a (2.5) vieme $\eta_{\max}$ vyjadriť ako

$$\eta_{\max} = \frac{R_g + \Delta R}{s}$$

a analogicky pre $\eta_{\min}$

$$\eta_{\min} = \frac{R_g - \Delta R}{s}.$$

Hodnoty $R_g \pm \Delta R$ určujú hranice prechodu medzi jednotlivými fázami. Z (2.12) pre dobu priľnutia, ktorú označíme t_h, platí

$$t_h = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{v_B},$$

ďalej po dosadení $\eta_{\max}$ a $\eta_{\min}$ máme

$$t_h = \frac{2\Delta R}{s v_B}. \tag{2.13}$$

Deriváciou výchylky (2.10) podľa času vo fáze slip dostaneme rýchlosť bodu struny v mieste kontaktu so sláčikom

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\Delta R}{s}\omega_0 \sin(\omega_0 t) + v_B \cos(\omega_0 t).$$

V tomto prípade je rovnica $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(t) = v_B$ podmienkou ukončenia fázy slip. K opätovnému zachyteniu struny sláčikom, ktorým končí fáza slip a začína nová fáza stick, príde v okamihu, keď sa ich rýchlosti vyrovnajú. Podmienka ukončenia fázy slip je splnená v okamihu $t = t_g$, kde t_g označujeme trvanie fázy slip:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(t_g) = v_B.$$

Po ekvivalentných úpravách a použití goniometrických identít dostaneme

$$-\frac{\Delta R\omega_0}{s} \sin\left(\frac{\omega_0 t_g}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 t_g}{2}\right) = v_B \sin^2\left(\frac{\omega_0 t_g}{2}\right),$$

odkiaľ máme

$$-\frac{\Delta R\omega_0}{s v_B} = \tan\left(\frac{\omega_0 t_g}{2}\right).$$

Keďže je ľavá strana rovnice záporná, resp. $\dfrac{\Delta R\omega_0}{s v_B} > 0$, a hľadáme kladné riešenie zodpovedajúce času $t_g > 0$, využijeme identitu

$$\arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha), \quad \text{pre } \alpha < 0,$$

a dostávame, že doba kĺzania struny je daná vzťahom

$$t_g = \frac{1}{\omega_0}\left(\pi + 2\arctan\left(\frac{s v_B}{\Delta R\omega_0}\right)\right).$$

Nakoniec, výsledná perióda je $T = t_h + t_g$, teda

$$T = \frac{2\Delta R}{s v_B} + \frac{1}{\omega_0}\left(\pi + 2\arctan\left(\frac{s v_B}{\Delta R\omega_0}\right)\right).$$

Toto odvodenie korešponduje s výsledkami uvedenými v [3].

2.1.6 Model jednoduchej oscilácie v softvéri `Matlab`

Predstavený model z časti (2.1) sme implementovali do softvéru `Matlab`. Najprv sformulujeme numerické riešenie a následne ho porovnáme s analytickým, ktoré sme si už odvodili.

Rovnicu (2.4) prepíšeme na systém dvoch rovníc prvého rádu

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = v(t), \tag{2.14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R_g - s\eta}{m} \tag{2.14b}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\eta(0) = \eta_0, \tag{2.15a}$$

$$v(0) = v_B. \tag{2.15b}$$

Počiatočné podmienky (2.15) platia len pre stick fázu, ktorou začíname. Keď už systém nespĺňa podmienku

$$s\eta < R_{\max}$$

prepne sa do slip fázy a počiatočnými podmienkami sú posledne nadobudnuté hodnoty z predchádzajúcej stick fázy.

Systém rovníc (2.14) sme numericky aproximovali pomocou Eulerovej explicitnej metódy. Zaveďme si časový krok h a numerické aproximácie v i-tom čase $t_i = ih$ označíme η_i a v_i, teda platí

$$\eta_i \approx \eta(t_i),$$

$$v_i \approx v(t_i).$$

Pre dostatočnú presnosť sme zvolili krok $h = 1/10000$.

Aplikáciou Eulerovej explicitnej metódy na (2.2) pre stick fázu platí

$$\eta_{i+1} = \eta_i + hv_B,$$

pričom z $v_{rel} = 0$ máme

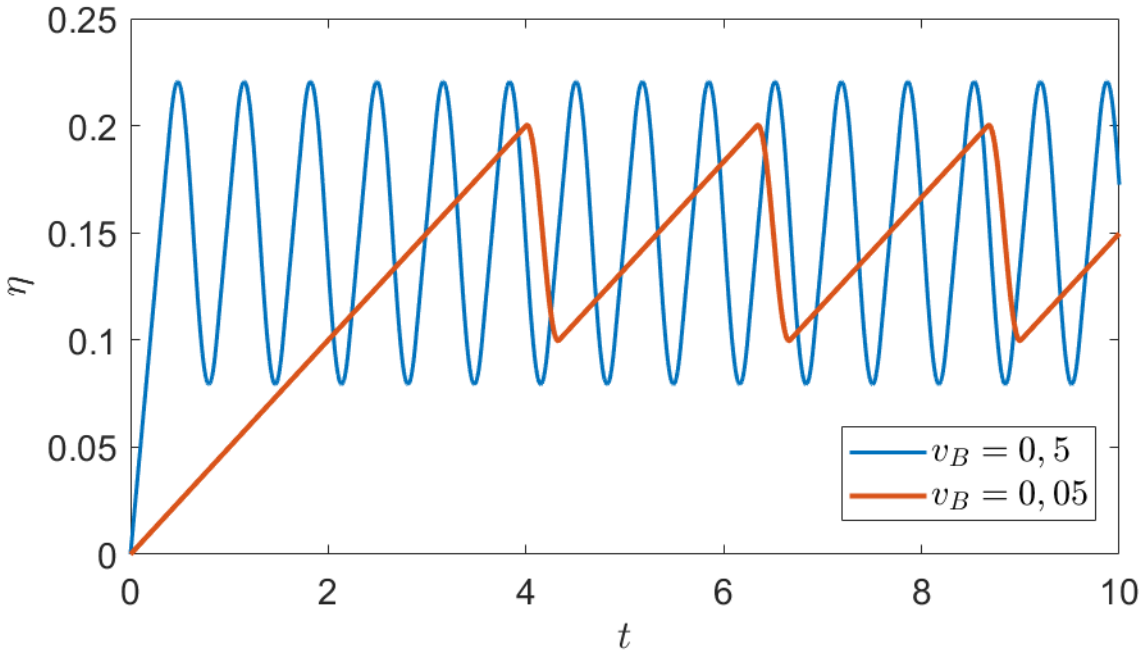
$$v_{i+1} = v_B$$

a z (2.14) pre slip fázu dostaneme

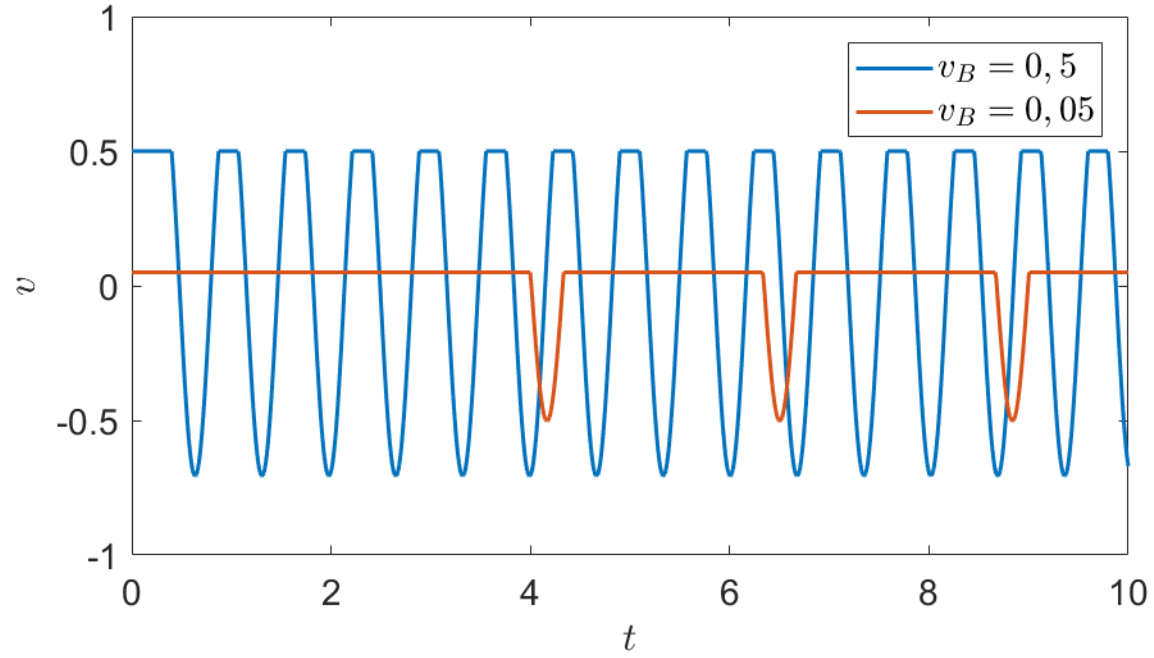
$$\eta_{i+1} = \eta_i + hv_i,$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{m}\left(R_g - s\eta_i\right).$$

Simuláciu spúšťame pre dve rýchlosti sláčika $v_B = 0,05$ a $v_B = 0,5$. Pri voľbe nižšej rýchlosti sláčika má výchylka v čase pílovitý priebeh (stick fáza je dlhšia) a rýchlosť vykazuje charakteristické skokové zmeny, ako je znázornené na Obr. 7 a na Obr. 8. S väčšou rýchlosťou sláčika sa do systému pridáva viac energie a stick fáza je kratšia. Časový krok sme pre dostatočnú presnosť zvolili $h = 1/10\,000$. Ostatné parametre modelu sme zvolili $m = 0,1$, $s = 10$, $R_{\max} = 2$, $R_g = 1,5$ a $T = 10$. Keďže uhlová rýchlosť závisí od tuhosti pružiny a hmotnosti $\omega_0 = \sqrt{s/m}$, frekvencia kmitov rastie s väčšou tuhosťou pružiny a menšou hmotnosťou. Zvýšením hodnoty $R_{\max}$ rastie aj doba priľnutia struny na sláčik, to znamená, že fáza stick bude dlhšia.

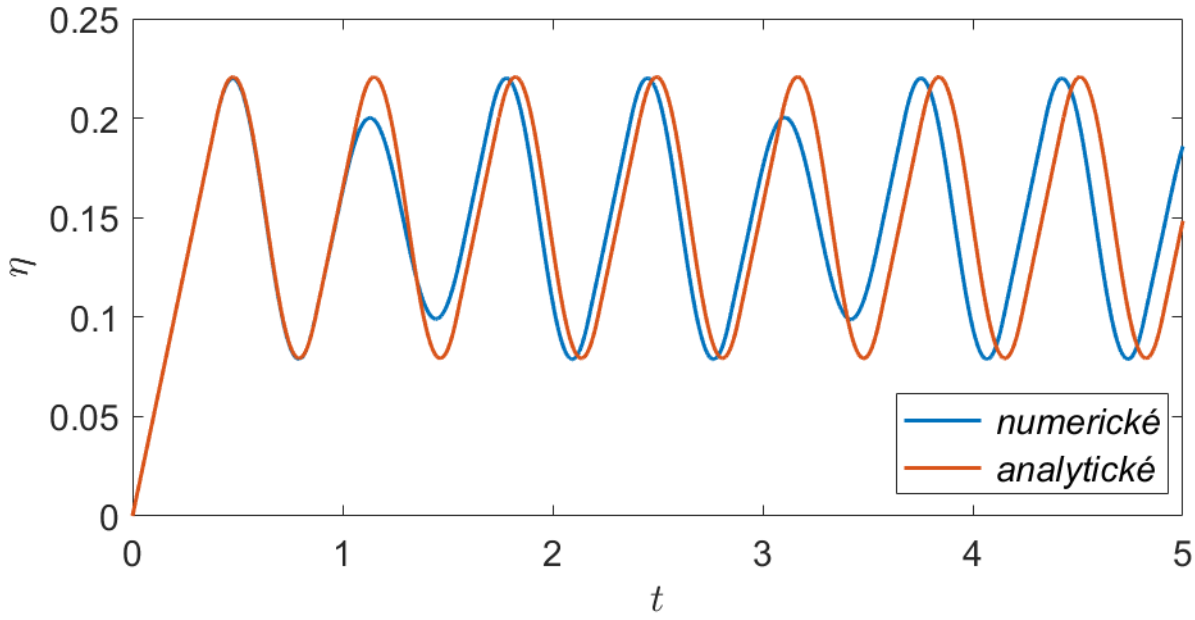
Následne numerické riešenie získané pomocou Eulerovej explicitnej metódy pre $v_B = 0,5$ porovnáme s analytickým, ktoré je v tvare (2.3) pre stick fázu a v tvare (2.10) pre slip fázu. Porovnanie výchylky struny môžeme vidieť na Obr. 9 a porovnanie rýchlosti struny na Obr. 10. Úmyselne sme zvolili krok $h = 1/1000$, aby sme videli rozdiel medzi numerickým a analytickým riešením. Na Obr. 10 je priblížený aj detail zobrazujúci nestabilitu numerického riešenia v bode prepnutia fázy. Nepresnosti numerického riešenia pozorujeme aj inde, ale špeciálne v bode prepnutia fázy numerické riešenie osciluje. Pri voľbe menšieho kroku $h = 1/10\,000$ je numerické riešenie dostatočne presné a na grafe prakticky nerozoznateľné od analytického.



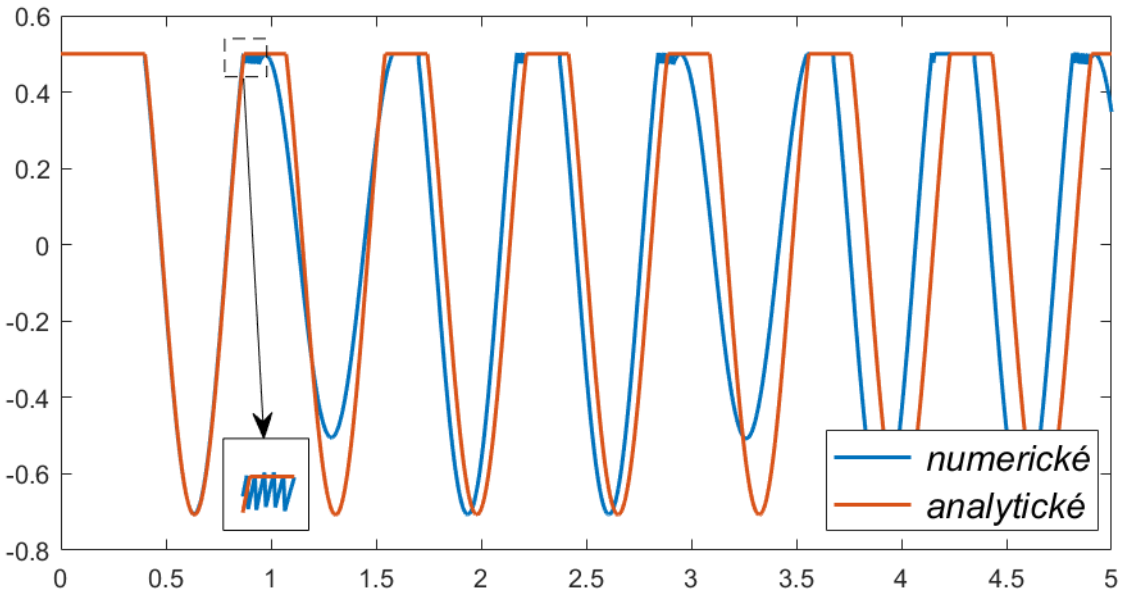
Obr. 7: Výchylka struny v čase pre rýchlosť sláčika $v_B = 0,5$ a $v_B = 0,05$ pri voľbe kroku $h = 1/10\,000$.



Obr. 8: Rýchlosť struny v čase pre rýchlosť sláčika $v_B = 0,5$ a $v_B = 0,05$ pri voľbe kroku $h = 1/10\,000$.



Obr. 9: Porovnanie numerického a analytického riešenia výchylky struny v čase pre rýchlosť sláčika $v_B = 0,5$ a krok $h = 1/1000$.



Obr. 10: Porovnanie numerického a analytického riešenia rýchlosti struny v čase pre rýchlosť sláčika $v_B = 0,5$ a krok $h = 1/1000$.

2.1.7 Takmer voľná oscilácia a relaxačná oscilácia

V časti 2.1.3 sme odvodili, že amplitúda sínusových kmitov počas režimu dynamického trenia má tvar (2.11). Vo fáze statického trenia zodpovedá prvý člen pod odmocninou vo vzťahu (2.11) druhej mocnine polovice výchylky rovnej $\Delta R/s$. Z (2.13) je zrejmé, že veľkosť $\Delta R/s$ priamo ovplyvňuje trvanie fázy statického trenia. Veľkosť druhého člena pod odmocninou vo vzťahu (2.11), teda $(v_B/\omega_0)^2$, rastie s rýchlosťou sláčika (ktorá nepriamo úmerne súvisí aj s dobou trvania fázy statického trenia) a s poklesom frekvencie kmitajúcej struny. Teda aj s nárastom doby kĺzania struny vo fáze šmykového trenia. Na základe uvedeného rozlišujeme dva hraničné prípady - počas cyklu dominuje fáza šmyku alebo fáza priľnutia.

Ak platí

$$\frac{\Delta R}{s} << \frac{v_B}{\omega_0} \text{ alebo po úprave } \Delta R << v_B\sqrt{sm}, \tag{2.16}$$

čo v praxi znamená, že trecia sila je malá v porovnaní s napätím struny a jej hmotnosťou, tak sa výrazne zníži podiel trvania fázy statického trenia v rámci trvania jednej periódy a vysoko bude prevládať trvanie fázy šmykového trenia zodpovedajúce voľným kmitom struny. Podľa Barkhausena [1] sa dá v tejto situácii hovoriť o „takmer voľnej oscilácii". V tomto prípade sa perióda kmitu T takmer zhoduje s periódou v prípade, v ktorom by kmitanie nebolo vyvolané trením, ale napríklad brnknutím.

Z (2.11) a (2.16) vieme maximálnu výchylku (amplitúdu kmitov) vyjadriť nasledovne:

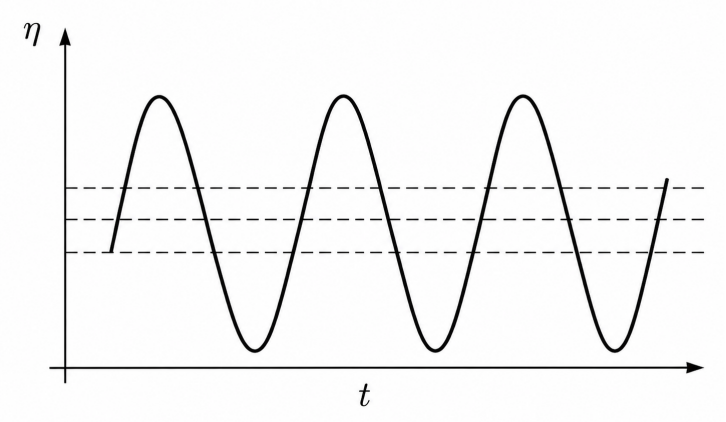
$$\hat{\eta} = \frac{v_B}{\omega_0}.$$

Predpokladaná malá veľkosť síl trenia $R_{\max}$ a R_g tieto vzťahy neovplyvňuje. Z toho vyplýva, že amplitúda kmitov rastie s rýchlosťou sláčika. Rozdiel medzi $R_{\max}$ a R_g však aj v tejto situácii hrá významnú úlohu pri generovaní samo-udržujúcich sa oscilácií. Popísaný prvý prípad je graficky znázornený na Obr. 11.

Naopak, ak platí

$$\frac{\Delta R}{s} >> \frac{v_B}{\omega_0} \tag{2.17}$$

tak v celkovom trvaní kmitu prevažuje fáza statického trenia a tvar kmitov má výrazne pílovitý charakter. Amplitúda kmitov je rozhodujúcim spôsobom ovplyvňovaná veľkosťou síl trenia a tuhosťou s, teda napätím struny. Tieto faktory spolu s rýchlosťou pohybu



Obr. 11: Hraničný prípad priebehu výchylky zobrazujúci „takmer voľná oscilácia" [3].

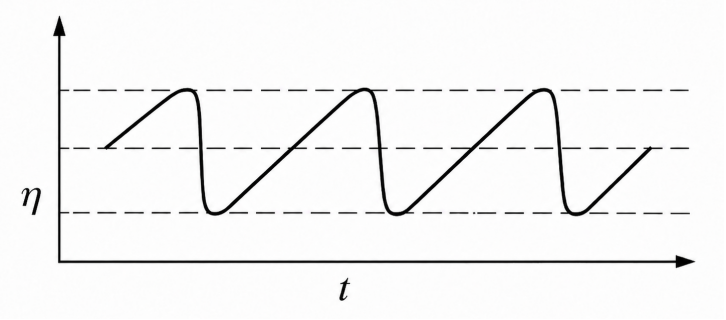
sláčika určujú v rozhodujúcej miere celkovú periódu

$$T \approx t_h = \frac{2\Delta R}{sv_B}.$$

Tento hraničný prípad by sa dal z uvedených dôvodov charakterizovať ako relaxačné kmity, alebo oscilácia s procesom prepínania, keďže závisia od procesu náhlej zmeny stavu charakterizovanej veličinou

$$\hat{\eta} = \frac{\Delta R}{s}.$$

Hoci sa v tomto hraničnom prípade vo vzťahoch explicitne hmotnosť m nevyskytuje, je dôležitá rovnako, ako bol dôležitý rozdiel hodnôt síl trenia ΔR v predchádzajúcom hraničnom prípade. Hmotnosť je podmienkou zotrvačnosti pohybu, bez ktorej by neprišlo k prekmitnutiu cez rovnovážnu polohu. To by znemožnilo opätovné zachytenie struny sláčikom, a tým aj udržateľné kmitanie systému. Bez uvažovania zotrvačnosti hmotnosti m by výchylka klesla z počiatočnej podmienky $\eta(0) = \frac{R_{\max}}{s}$ do strednej hodnoty $\bar{\eta} = \frac{R_g}{s}$, kde by sa ustálila. Popísaný druhý prípad je graficky znázornený na Obr. 12.



Obr. 12: Hraničný prípad priebehu výchylky zobrazujúci prepínanie oscilácie, alebo relaxačné kmity [3].

3 Modelovanie kmitov struny rozozvučanej sláčikom

V predchádzajúcich častiach sme sa oboznámili so základným princípom fungovania sláčikových nástrojov. Sú ním samo-udržujúce sa oscilácie prostredníctvom prepínania režimov statického a dynamického trenia medzi sláčikom a strunou. Toto prepínanie je základom pre priebežné dodávanie energie potrebnej na trvalé udržiavanie kmitov struny, a tým na zabezpečenie trvalého zvuku sláčikového nástroja. Na popis fungovania samo-udržujúcich sa oscilácií sme použili model jednoduchého harmonického oscilátora, ktorý bol rozkmitaný pohybom sláčika. Tento oscilátor tvorila natiahnutá struna, ktorej celá hmotnosť bola sústredená do jedného bodu. Tento bod bol zároveň bodom dotyku sláčika so strunou.

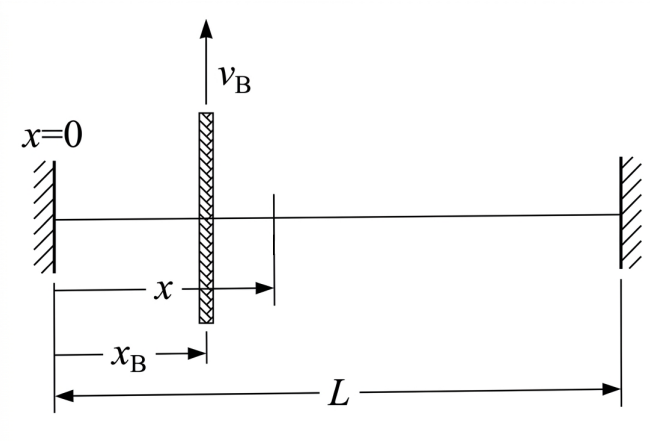
V tejto časti prejdeme od uvedeného jednoduchého modelu z podkapitoly 2.1 k skúmaniu kmitania struny rozozvučanej sláčikom, ktorej hmotnosť však nie je sústredená do jedného bodu, ale je spojito rozložená po celej jej dĺžke ako je to aj v prípade reálnej struny. V modeli jednoduchej oscilácie 2.1 pokračoval hmotný bod po odtrhnutí od sláčika na konci fázy statického trenia ešte istý čas zotrvačnosťou v pohybe v pôvodnom smere. V prípade struny so spojito rozloženou hmotnosťou prichádza v momente odtrhnutia struny od sláčika k skokovej zmene rýchlosti z kladnej na zápornú hodnotu. Naším cieľom je prezentovať experimentálne zistenia a model kmitania takejto struny, ktorého autorom je Helmholtz. Vychádzame pri tom zo zdrojov [3], [4], [7], a [8].

3.1 Helmholtzov model kmitania struny

Vzdialenosť bodu kontaktu struny so sláčikom od kobylky označíme x_B a dĺžku struny L. x je vzdialenosť pozorovaného bodu od kobylky. Uvedené označenia, ktoré budeme pre jednotlivé časti systému používať, sú zobrazené na Obr. 13.

Rovnako, ako v podkapitole 2.1, aj v tomto prípade dochádza k striedaniu režimu statického a dynamického trenia spojeného so zmenou vplyvu sily trenia, a tým aj charakteru pohybu systému. V režime statického trenia je rýchlosť struny v bode x_B dotyku sláčika určená rýchlosťou sláčikom, a teda fixná. Pre strunu sa javí tento bod ako pevný. V dôsledku toho sa struna rozdelí na dva nezávislé segmenty s dĺžkami x_B a $L - x_B$, z ktorých každý má svoje vlastné prirodzené frekvencie. Sila pôsobiaca počas režimu dynamického

trenia v bode dotyku sláčika pôsobí z pohľadu struny ako sila zvonku. Aj keď jej veľkosť závisí od relatívnej rýchlosti sláčika oproti strune, systém, na ktorý táto sila pôsobí, je celá struna s jej prirodzenými frekvenciami danými jej dĺžkou a napätím.

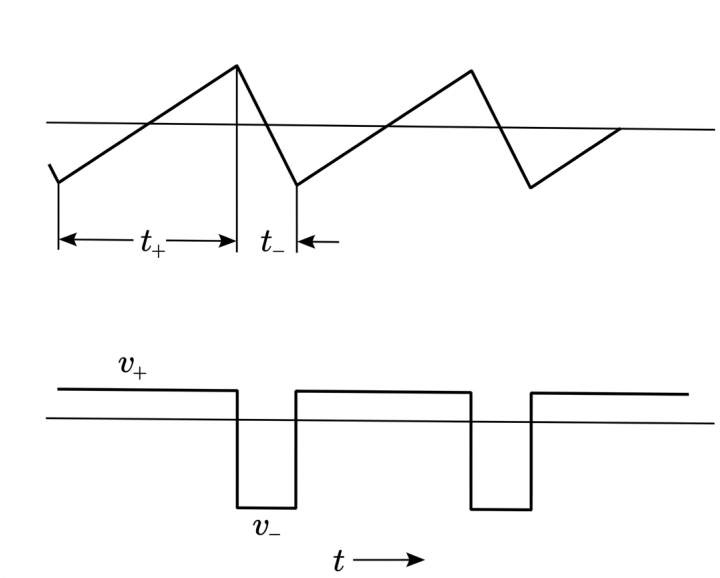


Obr. 13: Označenia pre Helmholtzov model struny rozkmitanej sláčikom [3].

Podmienkou periodicity systému je, aby rozloženie výchylky a rýchlosti, teda stav celej struny, bolo rovnaké pri každom jej uvoľnení od sláčika. Zhodovať sa musí aj pri každom zachytení struny sláčikom. Medzi dvoma za sebou nasledujúcimi uvoľneniami, a tiež medzi dvoma za sebou nasledujúcimi zachyteniami prechádza struna dvoma rôznymi fázami svojho pohybu. Ide o náročnú požiadavku na systém. Zložitosť tejto podmienky ilustruje fakt, že ak má struna v momente uvoľnenia trojuholníkový tvar s vrcholom v mieste kontaktu so sláčikom, energia struny sa od momentu uvoľnenia po nej šíri a odráža sa od jej koncov. Systém musí následne nadobudnúť také rozloženie výchyliek a rýchlostí, aby pri opätovnom zachytení rýchlosť struny pod sláčikom presne zodpovedala rýchlosti sláčika v_B. Ako sa uvádza v [3], táto podmienka je komplikovaným obmedzením pre tvorbu teoretického modelu fungovania tohto systému. V najlepšom prípade možno teoretickú interpretáciu vyvodiť na základe výsledkov experimentálnych pozorovaní pohybu struny [3]. Podstata tohto tvrdenia vychádza z toho, že zatiaľ čo pri matematickom modelovaní voľných oscilácií struny (napr. brnknutie struny) možno vychádzať z počiatočného stavu, ktorým sa struna ďalej riadi, pri strune rozozvučanej sláčikom ide o prípad nelineárnej spätnej väzby. Modelovanie tohto prípadu predstavuje podstatne náročnejší problém. Ako ukážeme v časti 3.1.2, Helmholtz aj napriek tomu pri teoretickej analýze svojich experimentálnych zistení modeloval pohyb struny ako voľnú (netlmenú) osciláciu bez rozlišovania jednotlivých fáz.

3.1.1 Helmholtzove experimentálne zistenia

Ako vyplýva z vyššie uvedeného, pri skúmaní problému si Helmholtz musel najprv zostaviť vhodné experimentálne zariadenie. Nazval ho vibračný mikroskop. Bol to jeho vlastný vynález. Skladal sa z okulára pripevneného k ladičke, ktorú prostredníctvom magnetického poľa generovaného striedavým prúdom uviedol do jednoduchej harmonickej oscilácie paralelne so strunou. Pozoroval vibrácie a výchylku struny. Okulár bol zaostrený na svetlé zrnko škrobu prilepené na strune. Po rozkmitaní struny sláčikom bolo možné v okulári vidieť tzv. Lissajousove obrazce. Z nich sa dal pri vhodnom pomere frekvencií ladičky a frekvencií kmitov struny odčítať časový priebeh výchylky struny v sledovanom bode.



Obr. 14: Priebeh výchylky (hore) a rýchlosti struny (dole) v jednom bode podľa Helmholtza [3].

Na základe svojich experimentov Helmholtz dokázal popísať časový priebeh výchylky struny rozozvučanej sláčikom v jej jednotlivých bodoch a aj ako celku. Hlavným výsledkom bolo prekvapujúco jednoduché zistenie. Časový priebeh výchylky v ktoromkoľvek bode struny mal pílovitý priebeh. Teda pozostával z postupnosti za sebou nasledujúcich trojuholníkov ako znázorňuje Obr. 14. Rozozvučaním struny dĺžky L sláčikom je po strune vyslaný „Helmholtz corner" (Helmholtzov zlom alebo diskontinuita), ktorý cestuje po strune ako vlna rýchlosťou c. Rýchlosť šírenia vlny je definovaná vzťahom $c = \sqrt{F_x/\mu}$,

kde F_x je napätie struny a μ je jej dĺžková hustota. Trojuholníkový tvar je dôsledkom putujúceho zlomu, ktorý svojím prechodom skokovo zmení rýchlosť pozorovaného bodu na strune. Znamená to, že rýchlosť každého z bodov struny rozozvučanej sláčikom sa skokovo mení medzi konštantnými hodnotami v_+ v kladnom smere a v_- v zápornom smere. Experimenty tiež ukázali, že pohyb každého z bodov struny mal síce pílovitý resp. trojuholníkový charakter, ale jeho parametre záviseli od polohy bodu na strune. Tiež potvrdili prepínací charakter oscilácií, ktorý sme ilustrovali na jednoduchom modeli v podkapitole 2.1. Trojuholníkový priebeh výchylky na Obr. 14 pripomína prepínanie oscilácie, ako sme popísali v časti 2.1.7.

3.1.2 Helmholtzova teoretická analýza

Teraz bude naším cieľom predstaviť matematický model, ktorý umožní popísať priebeh výchylky bodov struny v čase. Budeme pritom vychádzať z [3].

Časové intervaly, v ktorých výchylka v jednotlivých bodoch struny rastie, budeme označovať t_+ a intervaly, kde funkcia klesá t_- (viď Obr. 14). Ukázalo sa, že vzájomný pomer týchto časov sa pre jednotlivé body na strune výrazne líši. Závisí od bodu kontaktu struny so sláčikom a jeho vzdialeností od koncov struny, ako aj od rýchlosti šírenia vlny po strune. V strede struny sa čas t_+ pohybu struny nahor rovná času t_- pohybu struny nadol, zatiaľ čo pri koncoch struny sa tieto časy výrazne líšia. Teda jedna fáza pohybu je dlhá a druhá je krátka. Platí tiež, že čím je pozorovaný bod bližšie ku koncu struny, tým je menší jeho rozkmit (dvojnásobok amplitúdy). Počas intervalu t_+ je rýchlosť v_+ pohybu bodu struny, teda aj nárastu jeho výchylky, konštantná kladná a počas intervalu t_- je rýchlosť v_- konštantná záporná.

Potom vieme dvojnásobok maximálnej výchylky (dvojnásobok amplitúdy) vyjadriť pomocou oboch intervalov nasledovne:

$$2\hat{\eta} = v_+ t_+ = -v_- t_-. \tag{3.18}$$

V bode kontaktu struny so sláčikom je dlhá fáza totožná s fázou statického trenia a krátka s fázou šmykového trenia. V prípade pohybu struny nahor počas fázy priľnutia je rýchlosť v_+ rovná rýchlosti sláčika v_B, platí $v_+ = v_B$. Krátka fáza, teda fáza dynamického trenia, sa vyznačuje vysokou rýchlosťou v zápornom smere.

Z (3.18) priamo vyplýva

$$t_+ : t_- = -v_- : v_+ \tag{3.19}$$

a pre periódu platí $T = t_+ + t_- = t_+ \left(1 + \frac{v_+}{(-v_-)}\right)$. Rozdiel rýchlostí medzi intervalmi t_+ a t_- označíme

$$\Delta v = v_+ + (-v_-).$$

Následne vieme rovnicu (3.19) rozšíriť na

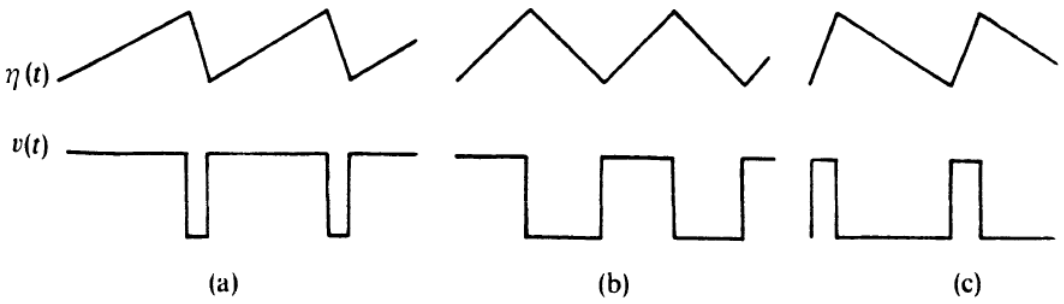
$$t_+ : t_- : T = -v_- : v_+ : \Delta v. \tag{3.20}$$

Z experimentov tiež vyplynulo, že perióda kmitov struny určujúca výšku generovaného tónu bola pri strune rozozvučanej sláčikom takmer rovnaká ako frekvencia struny pri voľných osciláciách iniciovaných brnknutím. Táto skutočnosť umožnila pozerať sa na systém so strunou rozozvučanou sláčikom ako na systém s voľným kmitaním, pri ktorom sláčik zabezpečuje jeho stabilitu dodávaním energie v správnych momentoch na zabezpečenie udržania pílovitého charakteru kmitov.

Uvedené závery z experimentov viedli Helmholtza k popisu výsledného pohybu struny pomocou superpozície jej prirodzených módov kmitania známych z Bernoulliho riešenia vlnovej rovnice pre voľné kmity struny. Urobil tak napriek tomu, že sláčik spôsobuje prepínanie režimov kmitov medzi fázou statického a dynamického trenia. Na podporu takéhoto prístupu použil argument, že základná frekvencia kmitov zostáva konštantná, preto možno pohyb pokladať za periodický a rozložiť ho na harmonické zložky.

Ako sme už vyššie spomenuli, hlavným výsledkom Helmholtzových pozorovaní pomocou vibračného mikroskopu bolo zistenie, že priebeh výchylky v závislosti od času má v ktoromkoľvek bode na strune pílovitý tvar. Tento pílovitý tvar však nebude v každom bode rovnaký. Jeho časový priebeh určený hodnotami t_+ a t_-, resp. v_+ a v_-, sa bude líšiť v závislosti od pozorovaného bodu, ako znázorňuje Obr. 15.

Helmholtz nepoužil pri Bernoulliho riešení vlnovej rovnice štandardnú počiatočnú podmienku, ktorou je počiatočná poloha struny v čase začiatku kmitania $t = 0$. Namiesto nej zvolil vhodný bod na už kmitajúcej strune, pričom ako počiatočnú podmienku pre riešenie výchylky struny využil časový priebeh výchylky tohto bodu počas jednej periódy T, zodpovedajúcej fundamentálnej frekvencii kmitov struny závislej od jej dĺžky a napätia struny. Bod zvolil tak, aby preň hodnota $t_-/2$, teda polovica času trvania klesajúcej fázy



Obr. 15: Výchylka $\eta(t)$ a rýchlosť $v(t)$ struny v troch bodoch pozdĺž jej dĺžky: (a) v $x = L/4$, (b) v strede a (c) v $x = 3L/4$ [4].

výchylky pri jeho pílovitom pohybe, bola menšia ako $T/4$. Zároveň ako počiatočný čas $t = 0$ zvolil čas, kedy je výchylka tohto bodu pri prechode z kladných hodnôt do záporných nulová. To znamená, že jedna perióda pohybu pozostávala z počiatočného poklesu z nulovej výchylky do záporného minima v trvaní $t_-/2$, plynulého nárastu do kladného maxima v trvaní t_+ a záverečného návratu z maxima do nulovej polohy v trvaní $t_-/2$.

Pri popise predstavovaného modelu budeme v súlade s [3] vychádzať z Bernoulliho riešenia vlnovej rovnice v komplexnom tvare

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{\eta}}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nt/T}\right\}, \tag{3.21}$$

kde $\underline{\hat{\eta}}_n$ je komplexná amplitúda n-tej harmonickej zložky riešenia.

Pre časový priebeh kmitov struny v bode x_1 potom platí

$$\eta(x_1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{\eta}}_{1n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nt/T}\right\}, \tag{3.22}$$

kde $\underline{\hat{\eta}}_{1n}$ je komplexná amplitúda n-tej harmonickej zložky riešenia v bode x_1, ktorú vieme určiť z Fourierovho rozkladu pílovitého priebehu výchylky v bode x_1.

Ak zvolíme bod x_1 mimo uzlových bodov n-tej harmonickej zložky, platí $\sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \neq 0$. Takúto podmienku si môžeme dovoliť vzhľadom na cieľ, ktorý modelom sledujeme. Potom porovnaním vzťahov (3.21) a (3.22) pre amplitúdu n-tej harmonickej zložky vyplýva

$$\underline{\hat{\eta}}_n = \frac{\underline{\hat{\eta}}_{n1}}{\sin(n\pi x_1/L)}. \tag{3.23}$$

Takto sme dostali riešenie pre pohyb celej struny.

Ďalej sa sústredíme na určenie amplitúdy harmonických zložiek v zvolenom bode x_1. Z podmienky $\frac{t_-}{2} < \frac{T}{4}$ vyplýva, že bod x_1 leží medzi kobylkou a stredom struny. Vychádzajúc z pílovitého priebehu výchylky v bode x_1 určeného hodnotami t_+ a t_- prislúchajúcimi k tomuto bodu, pre n-tú zložku jeho Fourierovho rozkladu dostávame

$$\underline{\hat{\eta}}_{1n} = \mathrm{i}\frac{2\hat{\eta}}{\pi^2 n^2}\frac{T^2}{t_+ t_-}\sin\left(\frac{\pi n t_-}{T}\right).$$

Dosadením do vzťahu (3.23) získame vzťah pre amplitúdu n-tej harmonickej zložky celej struny

$$\underline{\hat{\eta}}_n = \mathrm{i}\frac{2\hat{\eta}}{\pi^2 n^2}\frac{T^2}{t_+ t_-}\frac{\sin(\frac{\pi n t_-}{T})}{\sin(\frac{\pi n x_1}{L})} \tag{3.24}$$

Tento vzťah obsahuje hodnotu určujúcu polohu bodu x_1. Keďže je amplitúda $\underline{\hat{\eta}}_n$ pre celú strunu rovnaká, jej hodnota nemôže závisieť od polohy bodu x_1. Aby sa táto závislosť odstránila, vo výraze

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi n t_-}{T}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n x_1}{L}\right)}$$

sa musia rovnať argumenty funkcií sínus v jeho čitateli a v menovateli. Teda musí platiť

$$\frac{t_-}{T} = \frac{x_1}{L}. \tag{3.25}$$

To znamená, že pomer času klesania t_- a periódy T sa musí rovnať pomeru polohy bodu x_1 a celkovej dĺžky struny L. Inými slovami, čím je bod x_1 bližšie ku kobylke, tým kratšie trvá fáza klesania t_-. Za tohto predpokladu sa vzťah (3.24) zjednoduší na

$$\underline{\hat{\eta}}_n = \mathrm{i}\frac{2\hat{\eta}}{\pi^2 n^2}\frac{T^2}{t_+ t_-}.$$

Keďže perióda T je súčtom t_+ a t_-, môžeme podobne ako v prípade vzťahu (3.20) rozšíriť vzťah (3.25) do tvaru

$$t_+ : t_- : T = (L - x_1) : x_1 : L. \tag{3.26}$$

Z rovnosti $T = \dfrac{2L}{c}$ a z (3.26) dostávame

$$t_- = \frac{2x_1}{c},$$

z čoho vyplýva, že čas klesania výchylky v bode x_1 zodpovedá času, ktorý vlna potrebuje na prekonanie dráhy od bodu x_1 k bližšiemu koncu struny a späť. Analogicky odvodíme

$$t_+ = \frac{2(L - x_1)}{c}$$

z čoho vyplýva, že čas stúpania výchylky v bode x_1 zodpovedá času, ktorý vlna potrebuje na prekonanie dráhy od bodu x_1 k vzdialenejšiemu koncu struny a späť. Tieto vzťahy zároveň potvrdzujú, že „zlom" struny sa pohybuje konštantnou rýchlosťou od kobylky k pražcu a späť.

V bode kontaktu struny so sláčikom $x_1 = x_B$ zodpovedá interval t_+ trvaniu fázy statického trenia

$$t_h = t_+(x_B) = \frac{2(L - x_B)}{c} \tag{3.27a}$$

a interval t_- zodpovedá trvaniu fázy dynamického trenia

$$t_g = t_-(x_B) = \frac{2x_B}{c}. \tag{3.27b}$$

Z toho vyplýva, že trvanie fázy statického trenia a fázy dynamického trenia závisia len od polohy sláčika x_B a rýchlosti šírenia vlny c.

Model struny rozozvučanej sláčikom bude úplný, ak určíme aj závislosť $\hat{\eta}(x)$ výchylky od polohy bodu na strune, ktorá predstavuje obálku pohybu zlomu. Zo vzťahov (3.27) a (3.25) vyplýva

$$t_+ : t_- : T = -v_- : v_+ : \Delta v = (L - x) : x : L. \tag{3.28}$$

To znamená, že pomery časových intervalov t_+, t_- a T sú rovné pomerom rýchlostí pohybu struny v danom bode v_+, v_- a Δv, a pomerom vzdialeností $L - x$, x a L. Hodnoty t_+, t_-, v_+, v_- teda závisia od polohy x. Hodnoty T, Δv a L sú konštantné. K zmene rýchlosti Δv prichádza v momente, keď nad alebo pod sledovaným bodom prechádza putujúci zlom.

Z pomeru (3.28) tiež vyplýva, že

$$v_+ = \Delta v \frac{x}{L}, \tag{3.29a}$$

čo znamená, že rýchlosť stúpania výchylky v bode x rastie lineárne s jeho vzdialenosťou od bližšieho konca struny. Analogicky z neho vyplýva, že rýchlosť klesania

$$v_- = -\Delta v \, \frac{L - x}{L} \tag{3.29b}$$

rastie lineárne so vzdialenosťou od druhého konca. Jednotlivé segmenty struny medzi koncom a zlomom sa správajú ako tuhé tyče, ktoré sa otáčajú v opačných smeroch okolo koncových bodov s uhlovou rýchlosťou $\Delta v/L$.

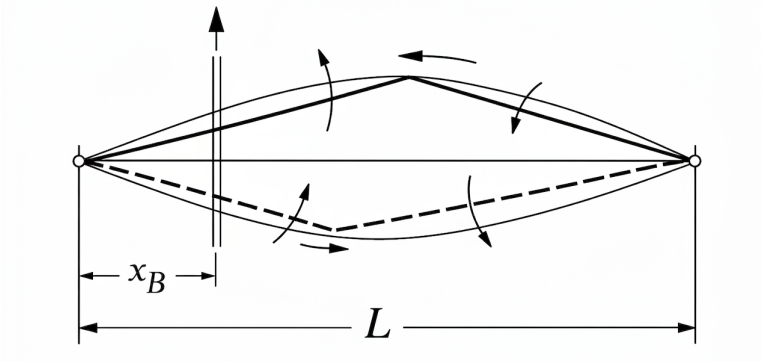
Ďalej z rovnice (3.18) použitím (3.28) a vyjadrením t_+, t_-, v_+, v_- z (3.27), (3.29) odvodíme nasledovnú závislosť výchylky struny $\hat{\eta}(x)$ od polohy bodu x na strune

$$\hat{\eta}(x) = \frac{\Delta v\ T}{2} \frac{(L-x)x}{L^2}. \tag{3.30}$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že obálku pohybu zlomu po strune tvoria dve paraboly s maximom resp. minimom v strede struny. Dosadením tohto bodu $x = L/2$ do (3.30) získame riešenie pre hodnotu výchylky v strede struny v tvare

$$\hat{\eta}_{\max} = \frac{\Delta v\ T}{8}. \tag{3.31}$$

Helmholtz ukázal, že hladký tvar sláčikom rozozvučanej struny je len optická ilúzia. Voľné oko dokáže vidieť len parabolický obal, a preto sa môže zdať, že si struna zachováva parabolický tvar počas celej periódy. Na Obr. 16 je naznačený pohyb zlomu po strune, ktorý sa odráža od kobylky a od hráčovho prsta resp. pražca. Pri kobylke sa odrazením jeho orientácia zmení a ďalej po strune pokračuje v opačnej fáze. Pokiaľ sa dĺžka struny nemení, čas, ktorý potrebuje Helmholtzov zlom na jednu cestu tam a späť, je konštantný. Periodicitu striedania fáz „slip–stick" zabezpečuje Helmholtzov zlom. Obr. 16 zobrazuje polohy struny v dvoch časových okamihoch, ktoré sú od seba vzdialené o $T/2$. Šípky naznačujú smer pohybu sláčika a smer pohybu jednotlivých úsekov struny.



Obr. 16: Helmholtzov pohyb struny [3].

3.2 Príklady iných reprezentácií Helmholtzovho pohybu

Na Obr. 16 je Helmholtzov pohyb znázornený vo forme závislosti výchylky bodov struny od ich polohy v dvoch časových okamihoch. Ako sme uviedli v predchádzajúcej časti, pri Helmholtzovom pohybe má výchylka struny v každom momente podobu trojuholníka s vrcholom obiehajúcim v čase po parabolických oblúkoch nachádzajúcich sa nad a pod rovnovážnou polohou struny. Helmholtzov pohyb možno popísať a graficky znázorniť aj inými spôsobmi, ktoré zdôrazňujú jeho iné vlastnosti. V tejto časti uvádzame dva príklady takýchto spôsobov.

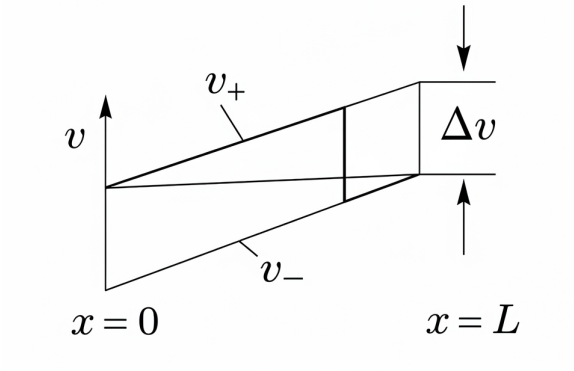
Pri malých výchylkách možno paraboly, po ktorých sa pohybuje zlom struny, nahradiť kružnicovými oblúkmi. Symbolom $\Delta\alpha$ označíme súčet uhlov ramien trojuholníka, ktoré sa stretávajú v bode obiehajúceho zlomu a znázorňujú polohu struny v danom momente, s rovnovážnou polohou. Predpokladáme, že zlom sa pohybuje po kružnicových oblúkoch. Potom ramená trojuholníka tvoria obvodový uhol nad tetivou zodpovedajúcou rovnovážnej polohe struny. Veľkosť tohto uhla sa rovná $180° - \Delta\alpha$. Keďže ide o obvodový uhol nad fixnou tetivou, zostáva jeho veľkosť počas pohybu struny konštantná. Preto musí byť konštantná aj hodnota $\Delta\alpha$. Helmholtzov pohyb možno znázorniť ako posúvanie sa obvodového uhla.

Pozrime sa teraz, za tohto predpokladu, na charakteristiku pohybu struny pri Helmholtzovom pohybe z dynamického hľadiska. Na obiehajúci zlom pôsobí v každom okamihu priečna sila, ktorá v ňom vyvoláva skokovú zmenu rýchlosti Δv. Táto priečna sila sa rovná zložke napätia struny kolmej na jej rovnovážnu polohu, ktorá vznikne po vychýlení struny z tejto rovnovážnej polohy. Pri malých výchylkách je táto priečna sila úmerná hodnote $\Delta\alpha$ a jej veľkosť sa rovná $F_x\Delta\alpha$, kde F_x je napätie struny. Uvažujme o pohybe malej časti struny v bode zlomu v čase $\mathrm{d}t$. Dĺžka tejto časti struny sa dá vyjadriť $c\mathrm{d}t$, kde c je rýchlosť pohybu vlny po strune. Jej hmotnosť sa potom rovná $\mu c\mathrm{d}t$, kde μ je dĺžková hustota struny. Keďže v bode zlomu dochádza k zmene rýchlosti výchylky o hodnotu Δv, z druhého Newtonovho zákona vyplýva, že impulz sily je rovný zmene hybnosti:

$$F_x\Delta\alpha\ \mathrm{d}t = \Delta v\mu c\ \mathrm{d}t.$$

Tento vzťah odvodený cez dynamiku systému potvrdzuje, že hodnota Δv musí byť konštantná, pretože všetky ostatné hodnoty v ňom sú konštanty. Tento fakt možno vyvodiť aj zo vzťahu (3.28), ktorý vyplynul z Bernoulliho riešenia vlnovej rovnice.

Konštantnosť Δv a lineárna závislosť rýchlostí v_+ a v_- od polohy bodu na strune viedli Ramana [7] k myšlienke znázorniť Helmholtzov pohyb, okrem závislosti výchylky $\eta(x)$ od polohy bodu na strune, ako to robil Helmholtz, aj zobrazením závislosti rýchlosti $v(x)$ od polohy bodu na strune v danom okamihu. Ramanova reprezentácia Helmhotzovho pohybu uvedeným spôsobom je zobrazená na Obr. 17. Z obrázku vyplýva, že z tohto uhla pohľadu je Helmholtzov pohyb v podstate „rýchlostná vlna" v tvare schodu, ktorá behá hore a dolu po strune a pri každom odraze od konca struny zmení svoje znamienko. Takáto reprezentácia má isté výhody v prípade, že počas pohybu struny v rámci jednej periódy sa vyskytuje viac ako jedna hodnota zmeny rýchlosti Δv.



Obr. 17: Helmholtzovo rozdelenie rýchlosti pozdĺž struny [3].

3.3 Ramanov model

Na Helmholtzovu prácu nadviazal indický fyzik C. V. Raman (1888 - 1970), ktorý komplexne spracoval pohyb sláčika po rozochvenej strune. Pomocou mechanického stroja ukázal, že minimálna sila potrebná na stabilný Helmholtzov pohyb je priamo úmerná rýchlosti sláčika a nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od kobylky. Ramanov model popíšeme podľa [4], [7] a [8].

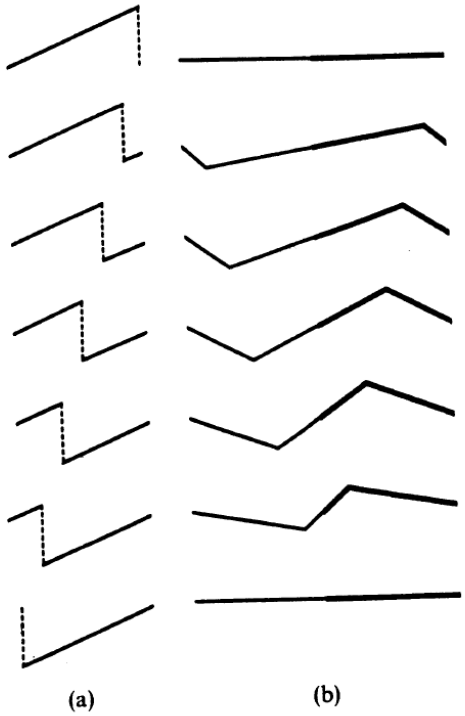
Ako sme uviedli v 3.2, Raman v rámci svojho modelu doplnil znázornenie výchylky $\eta(x)$ pri Helmholtzovom pohybe grafom distribúcie rýchlosti $v(x)$ pozdĺž struny v danom okamihu. V dôsledku toho je Ramanov model pružnejší pri popise situácií s viacerými diskontinuitami. V tejto časti si predstavíme túto myšlienku podrobnejšie.

Na Obr. 18 sú znázornené Ramanove grafy pre rýchlosť a výchylku v jednotlivých bodoch struny pre najjednoduchší prípad s jednou diskontinuitou (bodom zlomu). Krivky

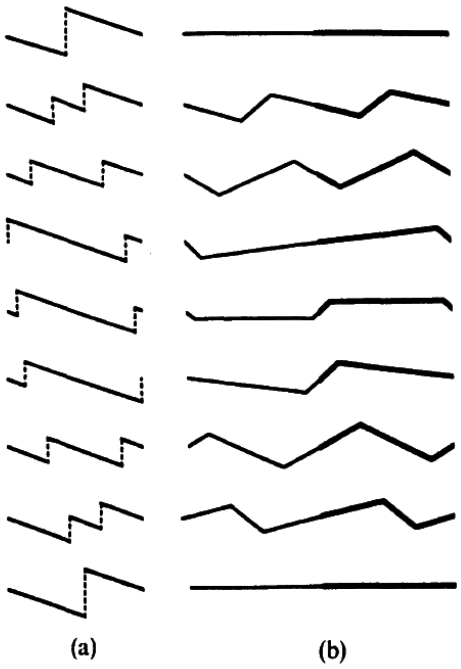
na jednotlivých horizontálnych úrovniach zodpovedajú stavu struny v rôznych časoch. V prípade jednej diskontinuity, keď sa diskontinuita nachádza na jednom konci struny, má graf rýchlosti v čase podobu úsečky. Táto úsečka spája hodnotu zodpovedajúcu rýchlosti diskontinuity na tomto konci struny s nulovou hodnotou rýchlosti na druhom konci struny. Počas posúvania diskontinuity pozdĺž struny sa graf rýchlosti skladá z paralelných úsečiek prechádzajúcich jej koncami, pričom rýchlosť v každom bode pred a za bodom jej skokovej zmeny sú proporcionálne k ich vzdialenostiam od koncov struny. Podobne ako v Helmholtzovom prístupe, krivky výchylky pozostávajú z dvoch úsečiek prechádzajúcich cez konce struny a stretávajú sa v bode, do ktorého sa dostala diskontinuita v grafe rýchlosti. Poznamenávame, že na grafe na Obr. 18 prevzatom z [8] je v časti (b) zobrazený priebeh výchylky na strune počas celej periódy. Dĺžka grafu teda zodpovedá dvojnásobku dĺžky struny. Graf distribúcie rýchlosti v stĺpci (a) zodpovedá pravej (hrubšej) polovici grafu výchylky.

Raman uvažoval aj prípad s dvoma diskontinuitami (bodmi zlomu), ktorý je na Obr. 19. Za bod, v ktorom sa obe diskontinuity prekrývajú, bol zvolený stred struny, čo znamená, že struna vibruje v dvoch segmentoch s dvojnásobnou základnou frekvenciou.

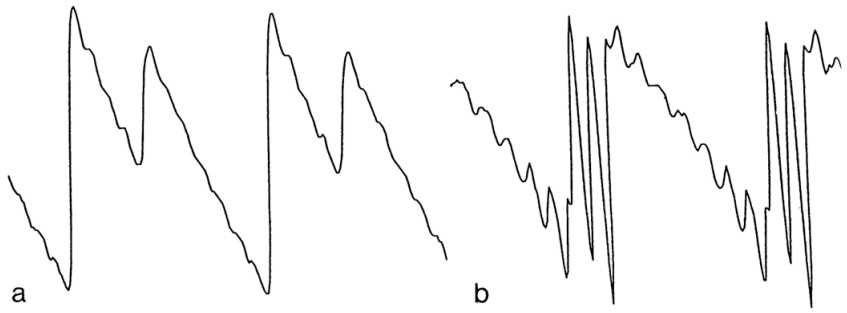
V praxi sa dá okrem Helmholtzovho pohybu stretnúť aj s inými periodickými režimami pri osciláciách struny rozozvučanej sláčikom. Dynamický systém, ktorý predstavuje sláčik so strunou, je mimoriadne zložitý a má veľa nestabilných stavov. Režim struny, v ktorom zlom obieha po jej dĺžke a na koncoch sa odráža v opačnej fáze (viď Obr. 16), nie je jediný možný pohyb struny. Helmholtz sám spomenul, že je to len jeden z možných pohybov. Keďže ide o dynamický systém, režim pohybu struny závisí od toho, ako a kde sa so sláčikom po strune hýbe. Závisí to od rýchlosti sláčika, polohy kontaktu struny so sláčikom a tlaku vyvíjaného sláčikom na strunu. Napríklad pri nedostatočnom tlaku sláčika na strunu sa môže vyskytnúť „double-slip" alebo tzv. dvojšmykový pohyb. Druhá slip fáza sa vyskytuje okolo stredu fázy statického trenia, čo má za následok dvojitú pílovitú vlnu. Tento jav negatívne ovplyvňuje kvalitu tónu. Iným príkladom je režim nazývaný „multiple-fly back", pri ktorom sa namiesto štandardného spätného pohybu struny pri Helmholtzovom pohybe vyskytne zhluk spätných pohybov s meniacim sa smerom. Priebeh oscilácií pri týchto režimoch je ilustrovaný na časovom priebehu sily pôsobiacej v týchto režimoch na kobylku. Obr. 20 časť **a** znázorňuje „double-slip", časť **b** „multiple-fly back".



Obr. 18: Krivky rýchlosti (a) a výchylky (b) Helmholtzovho pohybu s jednou diskontinuitou [8].



Obr. 19: Krivky rýchlosti (a) a výchylky (b) Helmholtzovho pohybu s dvoma diskontinuitami [8].



Obr. 20: Časový priebeh sily pôsobiacej na kobylku počas režimu „double-slip" (časť a) a počas režimu „multiple-fly back" (časť b) [4].

Záver

Diplomová práca sa zaoberá princípmi fungovania sláčikových hudobných nástrojov so zameraním na husle a ich matematickým modelovaním. Rozoberá vznik zvuku rozozvučaním struny prostredníctvom sláčika. Cieľom práce bolo opísať menej známy pohyb struny rozozvučanej sláčikom v porovnaní s brnknutou strunou a predstaviť vybrané matematické modely takéhoto pohybu.

V prvej kapitole sme čitateľa oboznámili so štruktúrou huslí a uviedli sme krátky historický prehľad vývoja štruktúry huslí. Spomenuli sme najvýznamnejších husľových majstrov, vedcov, či fyzikov, ktorí sa na ňom podieľali od 16. storočia až po súčasnosť. Významnou postavou v danej problematike je Hermann von Helmholtz, ktorého vedecký prínos je predmetom analýzy v nadväzujúcich kapitolách tejto práce.

Druhá kapitola obsahuje popis modelu, ktorý považuje strunu za jednoduchý oscilátor budený suchým trením medzi strunou a sláčikom. Kmitanie takéhoto systému je príkladom samo-udržujúcich sa oscilácií. V rámci jednej periódy (jedného kmitu) sme analyzovali dva režimy pohybu struny. Fázu priľnutia struny na sláčik, počas ktorej sa uplatňuje trecia sila v statickej forme, a fázu kĺzania alebo šmýkania struny po sláčiku, kde je forma trecej sily dynamická. Pre obe fázy sme sformulovali počiatočnú úlohu a odvodili riešenie úlohy. Najprv sme analyzovali priebeh výchylky a rýchlosti struny, kde sme sa sústredili na objasnenie mechanizmu striedania fáz. V ďalšej časti sme odvodili trvanie fázy priľnutia a trvanie fázy kĺzania, teda aj celkovú periódu jedného kmitu. Pokračovali sme implementáciou zostrojeného modelu do softvéru `Matlab`. Zistili sme, že priebeh výchylky a rýchlosti struny závisí najmä od zvolenej rýchlosti sláčika. Analýzu sme doplnili o porovnanie grafických výstupov analytického a numerického riešenia, ktoré sme získali aplikovaním Eulerovej explicitnej metódy. Model samo-udržujúcej sa oscilácie sme rozšírili o dva krajné prípady, ktorými sú takmer voľná oscilácia a relaxačná oscilácia.

V tretej kapitole sme predstavili prístup Hermanna von Helmholtza, ktorého model pohybu struny rozozvučanej sláčikom sa už výrazne približuje realite. Popísali sme Helmholtzove experimentálne zistenia, ktoré boli základom jeho teoretických poznatkov. Ukázali sme, že kmitanie struny má charakteristický pílovitý priebeh s rýchlosťou priamo závislou od polohy daného bodu, pričom kľúčovým prvkom periodicity je obiehajúci Helmholtzov zlom. V závere tretej kapitoly sme predstavili Ramanov model, ktorý rozší-

ril Helmholtzovo chápanie kmitania struny o analýzu distribúcie rýchlosti pozdĺž struny. Tento prístup umožnil interpretovať zložitejšie stavy kmitania, najmä prítomnosť viacerých diskontinuít súčasne. Okrem popisu stabilného pohybu sme poukázali aj na anomálne režimy, akými napríklad sú „double-slip" a „multiple-fly back".

Úplný popis a modelovanie fungovania sláčikových hudobných nástrojov zahŕňa aj činnosti kobylky a tela nástroja. Takéto modelovanie si vyžaduje použitie pokročilejších matematických nástrojov a fyzikálnych znalostí. Cremer sa vo svojej knihe [3] podrobnejšie venuje aj formulácií modelu pre kobylku a telo nástroja vrátane skúmania stláčania a prúdeniu vzduchu v dutine nástroja. V posledných kapitolách tiež analyzuje, ako sa vibrácie nástroja prenášajú do okolia formou zvukových vĺn a nakoniec, ako ovplyvní akustika miestnosti celkový výsledný zvuk. Týmto smerom by sa mohlo uberať aj potenciálne rozšírenie tejto práce. Keďže modelovanie prenosu kmitov cez kobylku do tela huslí v stupni podrobnosti, v akom sme modelovali pohyb struny, by neúmerne zväčšilo rozsah diplomovej práce, rozhodli sme sa ho do práce nezaradiť.

Zoznam použitej literatúry

[1] Barkhausen, H.: *Das Problem der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksichtigung schneller elektrischer Schwingungen*, dizertačná práca, University of Göttingen, 1907, dostupné na internete (3.3.2026): https://dn790008.ca.archive.org/0/items/dasproblemdersc01barkgoog/dasproblemdersc01barkgoog.pdf

[2] Buen, A.: *Violin Acoustics History - a brief introduction*, predložený na konferencii *Joint Baltic–Nordic Acoustics Meeting 2006*, 8.-10. november 2006, Gothenburg, dostupné na internete (3.11.2025): https://www.akutek.info/Papers/AB_Violin_acoustics_history.pdf

[3] Cremer, L.: *The Physics of the Violin*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1984

[4] Fletcher, H. N., Rossing D. T.: *The Physics of Musical Instruments*, Springer Science + Business Media, New York, 1998

[5] Hutchins, C. M., Benade, V.: *Research Papers in Violin Acoustics 1975-1993*, Acoustical Society of America, Woodbury, 1997

[6] Hutchins, C. M., a spol.: *Cas Journal*, Catgut Acoustical Society, New Jersey, 2000

[7] Raman, C. V.: *The theory of the cyclical vibrations of a bowed string*, Bulletin of the Indian Association for the Cultivation of Science, 1918, dostupné na internete (3.3.2026): https://archive.org/details/scientificpapers0000rama/page/n19/mode/2up

[8] Rossing D. T.: *The Science of String Instruments*, Springer Science + Business Media, New York, 2010

Príloha A

A.1 Implementácia modelu samo-udržujúcej sa oscilácie do softvéru Matlab

Skripty softvéru Matlab použité v kapitole 2.1.6 obsahuje tri funkcie s názvami exact_stick, exact_slip a self_sustained _oscillation, ktoré následne spúšťam v skripte oscillation_final.

Funkcia exact_stick:

```
function [eta,v] = exact_stick(eta0,vb,t)
%presne riesenie fazy stick
    eta=eta0+vb*t;
    v=vb;
end
```

Funkcia exact_slip:

```
function [eta,v] = exact_slip(m,s,vb,Rmax,Rg,t)
%presne riesenie fazy slip
    omega_0=sqrt(s/m);
    delta_R=Rmax-Rg;
    eta=Rg/s+delta_R/s*cos(omega_0*t)+vb/omega_0*sin(omega_0*t);
    v=-delta_R/s*sin(omega_0*t)*omega_0+vb*cos(omega_0*t);
end
```

Skript oscillation _final:

```
%% Self-sustained oscillation by dry friction
clear
close all

%% priklad 1 - vb=0.5
% hmotnost
m = 1e-1;

% tuhost pruziny
s = 10;

% rychlost slacika
vb = 0.5;

% maximalna hodnota statickeho trenia
Rmax = 2;
```

```
%smykove trenie
Rg = 1.5;

%uhlova frekvencia
omega_0=sqrt(s/m);

%rozdiel max. statickeho trenia a smykoveho trenia
delta_R=Rmax-Rg;

%casovy interval
T=10;

%krok
h=1/10000;

t=[0:h:T];

[eta_num,v_num,eta_exact,v_exact]=self_sustained_oscillation(m,s,vb,Rmax,Rg,t,h);

%vychylka v case
f_eta=figure('Position', [10 10 1300 700])
plot(t,eta_num,'LineWidth', 1.5)
hold on

%rychlost v case
f_v=figure('Position', [0 10 1300 700])
plot(t,v_num,'LineWidth', 1.5)
hold on

%% priklad 2 - vb=0.05
% hmotnost
m = 1e-1;

% tuhost pruziny
s = 10;

% rychlost slacika
vb = 0.05;

% maximalna hodnota statickeho trenia
Rmax = 2;

%smykove trenie
Rg = 1.5;

%uhlova frekvencia
omega_0=sqrt(s/m);

%rozdiel max. statickeho trenia a smykoveho trenia
delta_R=Rmax-Rg;

%casovy interval
T=10;
```

```
%krok
h=1/10000;

t=[0:h:T];

[eta,v]=self_sustained_oscillation(m,s,vb,Rmax,Rg,t,h);

%vychylka v case
figure(f_eta)
plot(t,eta,'LineWidth', 2)
legend({'$v_B = 0,5$', '$v_B = 0,05$'}, 'Interpreter', 'latex','FontSize', 14)
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)
ylabel('$\eta$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)

%rychlost v case
figure(f_v)
plot(t,v,'LineWidth', 1.5)
legend({'$v_B = 0,5$', '$v_B = 0,05$'}, 'Interpreter', 'latex','FontSize', 14)
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)
ylabel('$v$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)

%% porovnanie numerickeho a analytickeho riesenia

% hmotnost
m = 1e-1;

% tuhost pruziny
s = 10;

% rychlost slacika
vb = 0.5;

% maximalna hodnota statickeho trenia
Rmax = 2;

%smykove trenie
Rg = 1.5;

%uhlova frekvencia
omega_0=sqrt(s/m);

%rozdiel max. statickeho trenia a smykoveho trenia
delta_R=Rmax-Rg;

%casovy interval
T=5;

%krok
```

```
h=1/1000;

t=[0:h:T];

[eta_num,v_num,eta_exact,v_exact]=self_sustained_oscillation(m,s,vb,Rmax,Rg,t,h);

figure('Position', [0 10 1300 700])
plot(t,eta_num,t,eta_exact,'LineWidth', 1.5)
legend({'\it numerické', '\it analytické'}, 'Interpreter', 'tex','FontSize', 14)
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)
ylabel('$\eta$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)

figure('Position', [0 10 1300 700])
plot(t,v_num,t,v_exact,'LineWidth', 1.5)
legend({'\it numerické', '\it analytické'}, 'Interpreter', 'tex','FontSize', 14)
hold on
rectangle('Position',[0.78 0.44 0.2 0.1],'LineStyle','--')
X = [0.265 0.28];
 Y = [0.83   0.28];
annotation('arrow',X,Y);
ax1=axes('position',[.248 .12 .1 .205]);
tZoom = (t < 0.905) & (t > 0.865);
ax2=annotation('rectangle',[.25 .14 .063 .14])
ax2.FaceAlpha=0.1
plot(ax1,t(tZoom),v_num(tZoom),t(tZoom),v_exact(tZoom),'LineWidth',1.5)
axis off
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)
ylabel('$v$', 'Interpreter', 'latex','FontSize', 18)
set(gca, 'FontSize', 14)
```