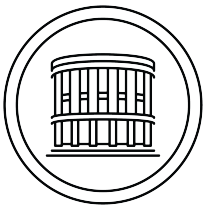
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Optimalizácia portfólia v jazyku Python

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava, 2026

Bc. Juraj Darnay

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Optimalizácia portfólia v jazyku Python

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.

Bratislava 2026 **Bc. Juraj Darnay**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Juraj Darnay
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimalizácia portfólia v jazyku Python
Portfolio optimisation in Python

Anotácia: Optimalizácia portfólia je základnou koncepciou moderného finančníctva a ústredným prvkom investičného rozhodovania a riadenia rizík. Práca skúma rôznorodé úlohy optimalizácie portfólia, počnúc klasickým Markowitzovým modelom, s rozšírením na zložitejšie a realistickejšie prístupy. Tie zahŕňajú napr. robustné optimalizačné techniky, formulácie s viacerými kritériami, neštandardné ohraničenia a optimalizáciu investičných stratégií. Tieto problémy sú spravidla formulované ako konvexné optimalizačné úlohy, čo umožňuje využívať výpočtové nástroje Pythonu na ich implementáciu a riešenie.

Vedúci: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „Optimalizácia portfólia v jazyku Python“, vrátane všetkých obrázkov, som vypracoval samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použil v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie sa vzťahuje na formálnu úpravu textu a je vhodným spôsobom označené.

.....

Bratislava, 7.5.2026

Bc. Juraj Darnay

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcel poďakovať školiteľke práce doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., za cenné rady, pripomienky a pomoc pri vypracovaní diplomovej práce.

Abstrakt

DARNAY, Juraj: Optimalizácia portfólia v jazyku python [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., 2026, 73 s.

Táto záverečná práca sa zaoberá problematikou optimalizácie portfólia v programovacom jazyku Python. Cieľom práce je skúmať rôznorodé optimalizačné úlohy a ich praktické využitie pri investičnom rozhodovaní. Teoretická časť práce je zameraná na skúmanie trom klasických formulácií Markowitzovej úlohy a analýzu spojitostí medzi nimi. Následne je pozornosť venovaná formulácii úlohy maximalizujúcej Sharpeov pomer a dodatočným ohraničeniam úloh. Súčasťou práce je aj uvedenie alternatívnych mier rizika, ako semivariancia, $CVaR$, $EVaR$, $Ave\text{-}DD$ a $CVaR\text{-}DD$, a ich použitia v optimalizácii portfólia. Praktická časť je venovaná návrhu a implementácii modulárneho balíka v jazyku Python, založeného na knižnici CVXPY, ktorý integruje diskutované metódy do jednotného rozhrania. Funkčnosť modelov je demonštrovaná na reálnych finančných dátach prostredníctvom viacerých metód spätného testovania. Výsledky ukazujú, že navrhnutý nástroj predstavuje praktickú pomôcku pre analytické aj vzdelávacie účely.

Kľúčové slová: výnos, riziko, portfólio, diverzifikácia, optimalizácia, *trade-off*, stredná hodnota, variancia, semivariancia, $CVaR$, $EVaR$, $Ave\text{-}DD$, $CVaR\text{-}DD$, spätné testovanie

Abstract

Darnay, Juraj: Portfolio optimisation in Python [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2026, 73 p.

This thesis deals with the problem of portfolio optimization in the Python programming language. The aim of the work is to explore various optimization problems and their practical applications in investment decision-making. The theoretical part focuses on examining three classical formulations of the Markowitz optimization problem and the analysis of the relationships between them. Subsequently, attention is given to the formulation of the Sharpe ratio maximization problem and additional constraints imposed on the optimization tasks. The thesis also introduces alternative risk measures, such as semivariance, $CVaR$, $EVaR$, $Ave\text{-}DD$, and $CVaR\text{-}DD$, together with their applications in portfolio optimization. The practical part is dedicated to the design and implementation of a modular package in Python, based on the CVXPY library, which integrates the discussed methods into a unified interface. The functionality of the models is demonstrated using real-world financial data through multiple backtesting methods. The results show that the proposed tool represents a practical utility for both analytical and educational purposes.

Keywords: return, risk, portfolio, diversification, optimization, trade-off, mean, variance, semivariance, $CVaR$, $EVaR$, $Ave\text{-}DD$, $CVaR\text{-}DD$, backtesting

Obsah

Úvod **12**

1 Teória portfólia **14**

1.1 Výnos a riziko aktíva 14

1.2 Portfólio 15

1.3 Odhad očakávaného výnosu 16

1.4 Sortinov pomer 19

2 Moderná teória portfólia **20**

2.1 Formulácia Markowitzovej úlohy 21

2.1.1 Prevod parametra disperzie α na parameter λ 23

2.1.2 Prevod parametra návratnosti β na parameter λ 28

2.2 Sharpeov pomer 30

2.2.1 Schaiblova transformačná metóda 30

2.3 Dodatočné ohraničenia v úlohách optimalizácie portfólia 31

2.3.1 Krátka pozícia 31

2.3.2 Ohraničenie vektora váh 32

2.3.3 Ohraničenie kardinality 33

2.3.4 Ohraničenie obratu 34

2.3.5 Ohraničenie diverzifikácie 34

2.3.6 Ohraničenie pákového efektu 35

2.3.7 Koncentrácia portfólia 35

3 Alternatívne miery rizika **37**

3.1 Riziko poklesu 37

3.2 Miery rizika založené na analýze chvostov rozdelenia 39

3.2.1 Definícia rizikových mier 39

3.2.2 Formulácia úloh 40

3.3 *Drawdown* portfólia 42

3.4 Definícia 43

3.5 Formulácia úlohy 44

4 Implementácia a opis kódov **47**

4.1 Spracovanie dát 47

4.2 Odhad parametrov 49

4.3 Optimalizácia 50

4.4 Vizualizácia výsledkov 53

5 Implementácia a spätné testovanie **54**

5.1 Vzťah medzi parametrami α, β a λ v Markowitzovej úlohe 54

5.2 Jednoduché spätné testovanie 56

5.3 Stres testy 61

5.3.1 Dotcom bublina 61

5.3.2 Finančná kríza 63

5.4 Spätné testovanie s posuvným oknom 65

5.5 Viacnásobné spätné testovanie 67

5.6 Zhrnutie výsledkov spätného testovania 69

Záver **71**

Zoznam použitej literatúry **72**

Zoznam skratiek a symbolov

r	výnos ako náhodná premenná
T	časová perióda z ktorej berieme historické dáta
μ	očakávaný výnos
σ^2	variancia
σ	volatilita
w	vektor váh
N	počet akcií
r_p	výnos portfólia ako náhodná premenná
γ	konštanta reprezentujúca počet obchodovaných dní
Σ	kovariančná matica
ρ	korelácia
σ_p^2	variancia portfólia
P_i	cena aktíva v i-ty deň
r_i^{lin}	lineárny denný výnos
r_i^{log}	logaritmický denný výnos
$\hat{\mu}^{ar}$	aritmetický priemer historických výnosov
$\hat{\mu}^{geo}$	geometrický priemer historických výnosov
$\hat{\mu}_T^{exp}$	exponenciálny priemer historických výnosov s konečnou periódou T
CAPM	*Capital Asset Pricing Model*
$\hat{\mu}_i^{CAPM}$	očakávaný výnos i-teho aktíva vypočítaný pomocou CAPM
r_f	výnos bezrizikového aktíva
β	koeficient v CAPM, v Markowitzovom modely značí dolnú hranicu výnosu
r_m	výnos trhu
S	Sortinov pomer
R	priemerný výnos v Sortinovom pomere
V	minimálny požadovaný výnos v Sortinovom pomere
α	v Markowitzovom modely značí hornú hranicu rizika, parameter averzie voči riziku (pri LPM) alebo interval spoľahlivosti
L	Lagrangeova funkcia
y	transformovaný vektor váh (Schaibleho transformácia)

κ	pomocná premenná v Schaibleho transformácii
k	parameter krytia krátkych pozícií dlhými pozíciami
w_{long}, w_{short}	vektory váh dlhých a krátkych pozícií
l, u	vektory dolných a horných hraníc váh aktív
z	vektor pomocných binárnych premenných pre ohraničenie kardinality
M	maximálny povolený počet aktív v portfóliu
s,u_t	pomocné premenné v optimalizačných úlohách
K	konštanta v *Big-M* metóde Schaibleho tranformácie
w_0	váhy pôvodného portfólia
k	maximálny povolený obrat portfólia
D	horná hranica pre sumu štvorcov váh (diverzifikácia)
L_{max}	maximálna povolená hrubá expozícia (pákový efekt)
A, B	parametre ohraničenia koncentrácie portfólia
τ	minimálny prijateľný výnos
SV	semivariancia
LPM_α	nižší parciálny moment rádu α
$\mathbb{I}\{\cdot\}$	indikátorová funkcia
M	semikovariančná matica
VaR	hodnota v riziku
$CVaR$	podmienená hodnota v riziku
$EVaR$	entropická hodnota v riziku
$\mathcal{K}_{exp}$	exponenciálny kužeľ
$HWM(t)$	historický vrchol hodnoty v čase t
$D(t), \bar{D}(t)$	absolútny a normalizovaný *drawdown* v čase t
$Max\text{-}DD$	maximálny *drawdown*
$Ave\text{-}DD$	priemerný *drawdown*
$CVaR\text{-}DD$	podmienený *drawdown* v riziku
r_t^{cum}	kumulatívny výnos aktív do času t
$MIQP$	zmiešané celočíselné kvadratické programovanie
LP, QP	lineárne, resp. kvadratické programovanie

Úvod

Investovanie zohráva dôležitú úlohu vo svete financií a je dôležitým aspektom ekonomickej aktivity nielen inštitúcií, ale v poslednej dobe čoraz viac aj jednotlivcov. Hlavným cieľom investora je nájsť takú stratégiu pri, ktorej má najväčšiu šancu dosiahnuť svoje investičné ciele. Intuitívne rozhodovanie v prostredí neistoty a veľkého množstva investičných príležitostí je neefektívne a postráda odborný rámec. To vedie k potrebe zavedenia systematických a matematických metód.

Touto problematikou sa zaoberal Harry Markowitz, ktorý v polovici 20. storočia vo svojej práci [1] predstavil formálny rámec pre konštrukciu efektívnych portfólií prostredníctvom optimalizačných metód. Tým položil základný stavebný kameň pre ďalší vývoj metód optimalizácie portfólia. Tie v priebehu rokov viedli k vzniku mnohých metód, ktoré buď priniesli odlišný prístup k riešeniu problému, alebo sa snažili vykompenzovať nedostatky klasických prístupov.

Rozvoj výpočtovej techniky umožnil preniesť teoretické koncepty do praxe. Programovací jazyk Python sa v posledných rokoch stal jedným zo štandardov v oblasti dátovej analýzy. Napriek existencii viacerých knižníc však často chýba jednotné a prehľadné prostredie, ktoré by prepájalo teoretické modely s ich praktickou implementáciou. Cieľom tejto práce preto nie je iba analyzovať vybrané modely, ale aj vytvoriť nástroje na ich jednoduchú implementáciu.

Práca je štrukturovaná do piatich kapitol. V prvej kapitole sa venujeme základným pojmom z finančnej matematiky. Definujeme výnos a riziko ako varianciu, a to z teoretického aj praktického hľadiska. Ďalej predstavíme koncept portfólia a jeho význam. Súčasťou kapitoly je aj zavedenie jednej z metrík na hodnotenie výkonnosti portfólia, konkrétne Sortinovho pomeru.

V druhej kapitole sa zameriame na klasické úlohy optimalizácie portfólia. Začneme viacerými formuláciami Markowitzovej úlohy a analyzujeme vzťahy medzi nimi. Následne formulujeme úlohu maximalizácie Sharpeovho pomeru, ktorý predstavuje ďalšiu významnú mieru hodnotenia výkonnosti portfólia. Kapitolu ukončime dodatočnými ohraničeniami úloh.

Tretia kapitola sa zaoberá alternatívnymi mierami rizika, ktoré ponúkajú mnohé výhody oproti klasickým prístupom. Svojimi vlastnosťami sa dokážu viac zamerať na rastový po-

tenciál aktív, čo môže viesť k vyšším výnosom, alebo lepšie zachytiť extrémne udalosti, čo je výhodné pri správe portfólia v období neistoty na finančných trhoch.

V štvrtej kapitole opíšeme moduly, ktoré sme si k tejto práci naprogramovali v jazyku Python. Ich cieľom je vytvoriť prehľadný a ľahko použiteľný nástroj na optimalizáciu portfólia, vhodný aj pre používateľov bez pokročilých znalostí programovania.

V poslednej kapitole sa zameriame na rôzne techniky spätného testovania, stres testov a všeobecného použitia navrhnutých modulov. S ich pomocou predstavíme ilustračné príklady použitia kódov. Navyše výsledky testov slúžia na porovnanie úloh naprieč rôznymi historickými dátami, scenármi a ohraničeniami úloh.

V práci sa primárne zameriavame na optimalizačné úlohy typu *trade-off* medzi výnosom a rizikom. Tento prístup vychádza z potreby investora nájsť vhodný kompromis medzi očakávaným výnosom a rizikom portfólia, ktoré predstavujú dôležité kritériá investičného rozhodovania. Tieto úlohy umožňujú generovať rôzne kombinácie riešení, čím poskytujú priestor na výber kompromisu medzi výnosom a rizikom v závislosti od individuálnych preferencií investora.

1 Teória portfólia

V našej práci sa zaoberáme mnohými formuláciami úloh optimalizácie portfólia. Skôr než k nim pristúpime, stručne vysvetlíme základné myšlienky investovania a zostavenie portfólia. Týmto spôsobom jasne definujeme kľúčové pojmy a umožníme čitateľovi bez hlbších znalostí finančnej matematiky lepšie porozumieť neskorším kapitolám. V tejto kapitole budeme vychádzať z literatúry [2], kapitola 5, a [3], kapitola 6.1.

1.1 Výnos a riziko aktíva

Pri modelovaní finančných aktív považujeme výnos za náhodnú premennú, keďže jeho budúci vývoj nie je známy. Výnos reprezentuje relatívnu zmenu ceny aktíva. Predpokladajme, že ho pozorujeme počas časovej periódy T. Nech r je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti $f(r)$. Strednú hodnotu výnosu definujeme ako

$$\mathbb{E}[r] = \int_{-\infty}^{\infty} r f(r) dr = \mu.$$

Riziko spojené s dosiahnutím očakávaného výnosu aktíva vyjadríme pomocou variancie výnosu. Variancia náhodnej premennej r s hustotou pravdepodobnosti $f(r)$ je definovaná ako

$$Var[r] = \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}[r])^2] = \sigma^2.$$

Variancia vyjadruje mieru rozptylu hodnôt výnosu okolo strednej hodnoty, teda do akej miery sa môže realizovaný výnos líšiť od očakávaného. Čím je jej hodnota vyššia, tým väčšia je neistota budúceho výnosu. Často sa namiesto variácie používa aj štandardná odchýlka definovaná ako

$$\sqrt{Var[r]} = \sigma.$$

Zatiaľ budeme predpokladať, že sa náhodná premenná r riadi normálnym rozdelením. Ako uvidíme v neskorších kapitolách, tento predpoklad výrazne zjednodušuje riešenie optimalizačných úloh. Pre krátke časové obdobia je tento predpoklad empiricky podložený experimentálnymi pozorovaniami [4], kapitola 7.2. Pri modelovaní výnosov na krátkych časových horizontoch preto budeme predpokladať, že $r \sim N(\mu, \sigma^2)$. Napriek tomu treba mať na pamäti, že tento predpoklad nemusí vždy zodpovedať realite. Pri dlhších časových horizontoch majú výnosy aktív tendenciu sa nesprávať ako normálne rozdelené.

1.2 Portfólio

V predchádzajúcej podkapitole sme definovali očakávaný výnos a riziko jedného aktíva. Investovať celý rozpočet do jediného aktíva je však veľmi riskantné, preto uvažujeme o investovaní do viacerých aktív súčasne. Ak pracujeme s kombináciou aspoň dvoch aktív, hovoríme o zostavovaní portfólia. Diverzifikáciou portfólia, teda rozdelením kapitálu medzi viaceré aktíva, sa snažíme znížiť riziko. Vo svete financií sa zvykne hovoriť: "Neukladaj všetky vajíčka do jedného košíka."

Treba zdôrazniť, že diverzifikáciou portfólia je možné znížiť nesystematické riziko. Tým rozumieme riziko spojené s konkrétnym aktívom alebo spoločnosťou, napríklad zlé hospodárske výsledky firmy či problémy v jej riadení. Naopak, systematické riziko diverzifikáciou odstrániť nemožno, pretože je spôsobené faktormi ovplyvňujúcimi celý trh, ako napríklad inflácia, zmeny úrokových sadzieb alebo ekonomická recesia.

Predpokladajme, že máme k dispozícii N aktív, ktoré držíme počas určitého časového obdobia. Z týchto aktív zostavujeme portfólio, pričom investor môže rozdeliť svoj kapitál medzi jednotlivé aktíva a tým dosiahnuť diverzifikáciu, teda rozloženie rizika medzi viacero aktív. Podiely kapitálu investované do jednotlivých aktív reprezentujeme vektorom váh $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^T$. Tento vektor spĺňa rovnosť $\mathbb{1}^T w = 1$, kde $\mathbb{1}$ je N rozmerný vektor jednotiek. Vďaka takémuto ohraničeniu nemusíme brať do úvahy veľkosť rozpočtu, keďže nám stačí vedieť aký podiel z neho investujeme do konkrétnych aktív.

Vektor w vyjadruje aj charakter investície. Ak je $w_i > 0$, investor dané aktívum nakupuje a drží s očakávaním nárastu jeho hodnoty. Väčšina štandardných portfólii pracuje výhradne s nezápornými váhami. Ak platí nerovnosť $w_i < 0$, ide o predaj na krátko. V takomto prípade investor si aktívum požičia a ihneď predá, pričom očakáva že ho v budúcnosti znova kúpi za nižšiu cenu a vráti. Rozdiel v predaji a kúpe predstavuje zisk.

Nech r_p je náhodná premenná označujúca výnos portfólia. Potom očakávaný výnos portfólia je daný ako

$$\mathbb{E}[r_p] = w^T \mu, \tag{1}$$

kde μ je vektor, ktorého zložky sú očakávané výnosy jednotlivých aktív. Treba poznamenať, že μ zvyčajne predstavuje denný očakávaný výnos. Ak ho chceme previesť na ročný, tak je potrebné μ preškálovať konštantou γ, ktorá zodpovedá počtu dní v roku kedy sú dané aktíva obchodované. Napríklad, pre akcie sa zvykne používať $\gamma = 252$ a kryptomeny

$\gamma = 365$. Ak majú aktíva rovnaký počet obchodovaných dní, tak nám stačí preškálovať priamo (1).

Riziko portfólia vypočítame ako

$$\sigma_p^2 = Var[r_p] = w^T \Sigma w, \tag{2}$$

kde Σ je kovariančná matica výnosov aktív. Táto matica vyjadruje variabilitu výnosov jednotlivých aktív, ako aj vzájomné vzťahy medi nimi. Má tvar

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

Na diagonále sa nachádzajú variancie individuálnych aktív a mimo diagonály sú kovariancie medzi dvojicami aktív dané ako

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \tag{3}$$

kde ρ_{ij} je korelácia medzi aktívami i a j. V (3) je dobre vidieť, že čím je korelácia medzi aktívami nižšia, tým môže byť aj (2) menšie. Tento jav predstavuje efekt diverzifikácie, ktorým chceme dosiahnuť nižšie riziko celkového portfólia. Podobne ako pri očakávaných výnosoch ročnú varianciu získame preškálovaním $\gamma \times w^T \Sigma w$.

Budeme predpokladať, že kovariančná matica je kladne definitná. Vo všeobecnosti síce platí, že je kladne semidefinitná, avšak rovnosť $w^T \Sigma w = 0$ nám pri reálnych dátach aktív nastane vtedy, keď je ich celkový počet vyšší ako počet pozorovaných dní ($N > T$). Avšak takéto dáta nie sú vhodné na optimalizáciu portfólia, a preto budeme ďalej predpokladať $\Sigma \succ 0$.

Variancia vyjadruje riziko v kvadratickej forme. Jej odmocnením získame štandardnú odchýlku, dennú volatilitu

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w},$$

ktorú môžeme previesť na ročnú škálovaním $\sqrt{\gamma} \times \sqrt{w^T \Sigma w}$.

1.3 Odhad očakávaného výnosu

V kapitolách 1.1 a 1.2 sme očakávaný výnos uvažovali ako teoretický parameter. Jeho skutočnú hodnotu však nepoznáme, preto ho musíme odhadnúť na základe minulých dát.

Nech P_i označuje cenu aktíva v i-ty deň. Denný výnos môžeme vypočítať lineárne ako

$$r_i^{lin} = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}}.$$

V niektorých situáciách je vhodnejšie pracovať s logaritmickými výnosmi, ktoré majú lepšie štatistické vlastnosti a často vedú k stabilnejšiemu správaniu dát. To je užitočné najmä pri komplexnejších matematických modeloch, analýze dlhodobých časových radov alebo pri volatilnejších dátach. Logaritmické výnosy definujeme ako

$$r_i^{log} = \ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right).$$

Ako sa uvádza v [5], apendix A3, hlavná výhoda logaritmických výnosov spočíva v tom, že môžu byť interpretované ako zložene úročené výnosy. Ich ďalšou výhodou je časová aditívnosť, čo znamená, že výnos za viac období je možné získať jednoduchým sčítaním jednotlivých logaritmických výnosov.

Očakávaný výnos odhadujeme z historických dát. Existuje viacero prístupov, pričom každý má svoje výhody i nevýhody. Najjednoduchším je aritmetický priemer

$$\hat{\mu}^{ar} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_i. \tag{4}$$

Aritmetický priemer môže byť pri odhade očakávaných výnosov nespoľahlivý, pretože má tendenciu výnosy mierne nadhodnocovať. Z tohto dôvodu sa často používa geometrický priemer, ktorý z historických denných výnosov ako

$$\hat{\mu}^{geo} = \left(\prod_{i=1}^{T} 1 + r_i\right)^{\frac{1}{T}} - 1. \tag{5}$$

Vo všeobecnosti platí nerovnosť $\hat{\mu}^{geo} \leq \hat{\mu}^{ar}$, takže geometrický priemer poskytuje konzervatívnejší odhad očakávaného výnosu. Voľba medzi (4) a (5) spočíva hlavne v spôsobe výpočtu denných výnosov. Ak používame logaritmické výnosy, je vhodnejšie použiť (4) pre ich časovú aditívnosť. Naopak, pri lineárnych výnosoch sa častejšie používa (5).

Ďalšou možnosťou odhadu očakávaného výnosu je exponenciálny vážený priemer. Tento prístup umožňuje priradiť rôzne váhy pozorovaniam. V praxi sa niekedy preferujú novšie dáta, ktoré lepšie odrážajú aktuálny stav trhu, zatiaľ čo staršie pozorovania môžu byť menej relevantné. Exponenciálne vážený odhad môžeme vypočítať ako

$$\hat{\mu}_T^{exp} = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{T-1} \alpha^i r_{T-i}.$$

Výpočtovo je vhodnejšie použiť rekurzívnu formuláciu

$$\hat{\mu}_T^{exp} = (1-\alpha)r_T + \alpha\mu_{T-1}, \tag{6}$$

kde $\alpha \in (0,1)$ je váhový parameter a $\hat{\mu}_1 = r_1$. Malé hodnoty α kladú väčší dôraz na nové dáta, zatiaľ čo väčšie hodnoty α viac zohľadňujú staršie pozorovania.

Očakávaný výnos môžeme odhadnúť aj pomocou modelu CAPM. Očakávaný denný výnos i-teho aktíva sa vypočíta ako

$$\hat{\mu}_i^{\text{CAPM}} = r_f + \beta(\mathbb{E}[r_m] - r_f), \quad \text{pre}\, i = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Premenná r_m označuje výnos trhu, ktorý je zvyčajne reprezentovaný akciovým indexom krajiny. Pri analýze amerických akcií sa napríklad často používa index $S\&P500$, ktorý zahŕňa 500 najväčších amerických spoločností.

Premenná r_f predstavuje bezrizikovú mieru výnosu, teda výnos aktíva považovaného za bezrizikové. V praxi sa často používajú výnosy dlhodobých štátnych dlhopisov s vysokým kreditným hodnotením. Teda dlhopisy, ktoré sú kategoricky najbezpečnejšie aktíva.

Koeficient β_i vyjadruje citlivosť výnosu i-teho aktíva na pohyby trhu a vypočíta sa ako

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}. \tag{8}$$

Ak je $\beta_i > 1$, potom výnos i-teho aktíva reaguje na zmeny trhu citlivejšie ako trh, a teda aktívum nesie vyššie systematické riziko. Naopak, ak $\beta_i < 1$,reakcia je miernejšia a aktívum je z hľadiska systematického rizika menej citlivé. Hodnota $\beta_i = 1$ znamená, že výnos aktíva má tendenciu kopírovať pohyb trhu. Parameter β_i sa dá namiesto (8) získať aj pomocou metódy najmenších štvorcov.

Spoľahlivosť modelu CAPM je ovplyvnená najmä výberom trhového portfólia a bezrizikovej miery výnosu. Pri použití rôznych aproximácií týchto veličín môžeme získať odlišné odhady očakávaných výnosov. Model CAPM je zároveň často kritizovaný za to, že nezohľadňuje všetky faktory, ktoré môžu ovplyvňovať výnosy aktív, čím sa jeho výpovedná hodnota znižuje. Napriek tomu sa v praxi často používa najmä pre svoju jednoduchosť a intuitívnu interpretáciu.

Model CAPM možno využiť aj pri investičných stratégiách, v ktorých sa investor snaží identifikovať podhodnotené alebo nadhodnotené aktíva. Podhodnotené aktíva sú také,

ktorých očakávaný výnos je podľa modelu vyšší než výnos implikovaný trhom, zatiaľ čo pri nadhodnotených aktívach je situácia opačná. Investor môže následne špekulovať, že sa trhová cena aktíva postupne prispôsobí jeho fundamentálnej hodnote. Treba však zdôrazniť, že takéto stratégie sú spojené s vysokou mierou rizika.

1.4 Sortinov pomer

Existuje viacero spôsobov, ktorými môžeme merať výkonnosť portfólia. Tieto miery slúžia na kvantitatívne ohodnotenie portfólia v závislosti od výnosu či rizika. Jedným z nich sa budeme zaoberať v kapitole 2.2, ale predtým sa zameriame na alternatívny prístup nazývaný Sortinov pomer.

Tento pomer sa zameriava na hodnotenie výkonnosti portfólia z pohľadu rizika poklesu. Základnou myšlienkou je, že investori vnímajú negatívne najmä záporné odchýlky výnosov, zatiaľ čo kladné odchýlky nepovažujú za riziko. Sortinov pomer definujeme podľa článku [6] ako

$$S = \frac{R - V}{TDD},$$

kde R je priemerný výnos v pozorovanom období a V je minimálny požadovaný výnos. TTD je je odchýlka od cieľa smerom nadol, ktorú vypočítame ako

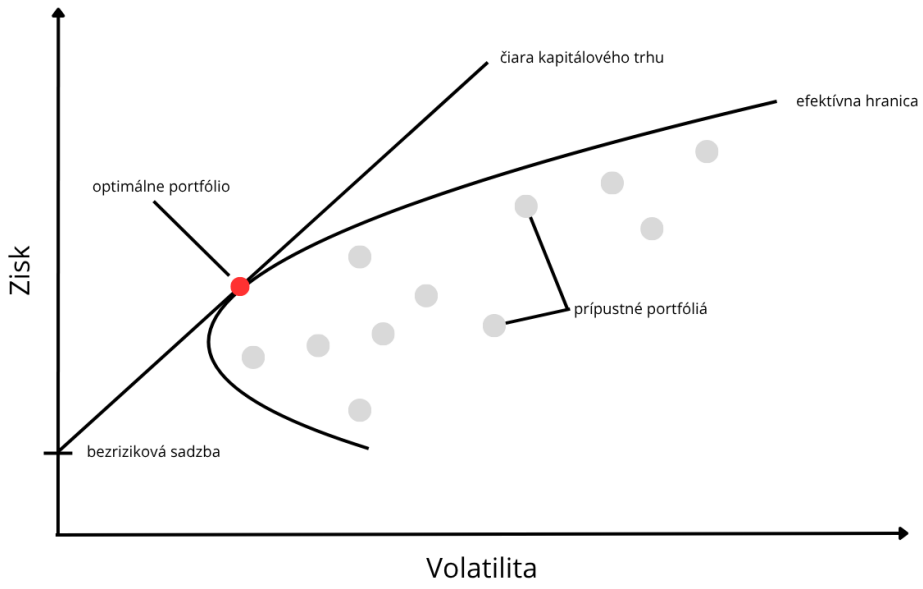
$$TTD = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \min(0, r_i - V)^2}.$$

2 Moderná teória portfólia

Každí investor stojí pred istou dilemou. Ideálne by bolo maximalizovať výnos a minimalizovať riziko. V reálnom svete však býva vyšší výnos spojený s vyšším rizikom. Pred investorom tým vyvstáva otázka, ako nájsť dobrý kompromis medzi týmito dvoma veličinami.

Touto otázkou sa detailne zaoberal Harry Markowitz vo svojej práci [1] formuloval teóriu, podľa ktorej by rizikovo averzný investor mal pri výbere portfólia brať do úvahy očakávaný výnos a volatilitu. Pri takejto kombinácii kritérií vzniká *trade-off*. Ako sme už spomenuli na začiatku kapitoly, čím je výnos vyšší tým je vyššia aj volatilita.

Táto skutočnosť vedie ku konceptu efektívnej krivky, na ktorej ležia Pareto-optimálne body. Na grafe 1 je táto myšlienka zobrazená podrobnejšie. Horná časť krivky, nazývanou efektívna hranica, nám zobrazuje portfólia, ktoré pre danú úroveň volatility dosahujú najvyššie výnosy. Ostatné portfólia sa nachádzajú pod touto krivkou a spolu s portfóliami z efektívnej hranice patria do množiny prípustných riešení. Ak máme k dispozícii aj bezrizikové aktívum, tak pomocou neho si vieme zostrojiť takzvanú čiaru kapitálového trhu. Bod dotyku tejto priamky s efektívnou hranicou určuje optimálne portfólio, ktoré maximalizuje pomer výnosu k riziku.



Obr. 1: Graf zobrazujúci efektívnu hranicu (zdroj [7], kapitola 2.2, vlastné spracovanie)

Toto bola hlavná myšlienka za Markowitzovým prístupom k optimalizácii portfólia.

Pre praktickú aplikáciu je potrebné zostrojiť vhodnú matematickú úlohu. Pri jej formulácii v následujúcej kapitole budeme vychádzať z literatúry [8], kapitola 4.4.1, a [3], kapitola 7.1.2.

2.1 Formulácia Markowitzovej úlohy

Uvažujme N aktív, ktoré držíme počas určitého časového obdobia. Vektor váh w reprezentuje rozdelenie portfólia, μ označuje očakávaný výnos a σ^2 varianciu. Tieto pojmy boli definované v kapitole 1.

Teraz môžeme prejsť k formulácii Markowitzovej úlohy. Jednou z často používaných formulácií je maximalizácia očakávaného výnosu pri ohraničení rizika. Úlohu formuluje ako

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu \\ & w^T\Sigma w \leq \alpha, \\ & \mathbb{1}^T w = 1, \quad w \succeq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

kde α je parameter určujúci maximálnu prípustnú varianciu, teda aké najvyššiemu riziku je investor ochotný byť vystavení. Ohraničenie $w \succeq 0$ znamená, že povolená je iba dlhá pozícia. Ohraničeniam úlohy sa podrobne venujeme v kapitole 2.3.

Alternatívna formulácia vychádza z opačného prístupu. Ten spočíva v tom, že cieľom je minimalizovať riziko pri minimálnom požadovanom výnose. Úloha sa formuluje následovne

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T\Sigma w \\ & w^T\mu \geq \beta, \\ & \mathbb{1}^T w = 1, \quad w \succeq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

kde β predstavuje minimálny očakávaný výnos. Zaujímavé je, že celú efektívnu hranicu dokážeme získať pomocou rôznych hodnôt parametrov α a β v oboch formuláciách.

Rozdiel medzi formuláciami (9) a (10) spočíva v účelovej funkcii a type ohraničenia. Avšak obe patria medzi úlohy konvexného programovania.

Nevýhodou úloh (9) a (10) je, že pre určité hodnoty parametrov α a β nemusí existovať prípustné riešenia. Jednou z možností, ako tomu predísť, je nastavenie parametrov pomocou tzv. naivného portfólia, v ktorom je investovaný kapitál do aktív rozdelený rovnomerne medzi všetky aktíva, teda $w_i = 1/N$ pre $i = 1, \ldots, N$. V takom prípade budú

parametre rovné $\alpha = \mathbb{1}^T\Sigma\mathbb{1}/N^2$ a $\beta = \mathbb{1}^T\mu/N$. Avšak pri nevhodnej voľbe parametrov môžeme naraziť na komplikácie.

Úlohy (9) a (10) predstavujú dva odlišné pohľady na ten istý problém. Hoci používajú odlišné formulácie, ich riešenia ležia na tej istej množine. Pre každú hodnotu parametra α existuje také β, pre ktorú sú optimálne portfóliá oboch úloh totožné.

Nevýhode úloh (9) a (10) so striktnými ohraničeniami sa dá vyhnúť požitím úlohy s dvoma parametrami v účelovej funkcii

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu - \lambda w^T\Sigma w \\ & \mathbb{1}^T w = 1, \\ & w \succeq 0, \end{aligned} \tag{11}$$

kde parameter $\lambda \in (0, \infty)$.

Formulácia (11) predstavuje bi-kriteriálnu úlohu, kde sa súčasne snažíme maximalizovať očakávaný výnos a minimalizovať riziko. Pre každé pevne zvolené λ získame riešenie, ktoré je Pareto-optimálne. To znamená, že neexistuje iné prípustné riešenie, ktoré by dosahovalo vyšší výnos pri rovnakom alebo nižšom riziku. Naviac, ak chceme dosiahnuť lepšie hodnoty očakávaného výnosu, tak sa to dá dosiahnuť len pri horších hodnotách rizika.

V limitnom prípade $\lambda \to 0$ získame portfólio s maximalizujúce očakávaný výnos, pričom riziko sa neberie do úvahy. Naopak, v prípade $\lambda \to \infty$ získame portfólio s minimálnym rizikom bez ohľadu na jeho výnos.

Ak existuje index k taký, že $\mu_k > \mu_i$ pre všetky $i \neq k$, potom pre $\lambda \to 0$ má optimálne riešenie tvar $w = e_k$, kde e_k je vektor samých núl okrem k-tej zložky. Teda riziko neberieme vôbec do úvahy, preto všetky prostriedky použijeme na nákup aktíva s najvyšším výnosom. Ak by $\mu_k \geq \mu_i$ pre všetky $i \neq k$, tak môžeme mať nekonečné množstvo optimálnych riešení. Akýmkoľvek spôsobom, ktorým by sme prerozdelili rozpočet medzi aktíva spĺňajúce $\mu_k = \mu_j$ pre $j \in \{1, 2, \ldots, N\} - \{k\}$, by sme dosiahli rovnaký zisk. V niektorých formuláciách úlohy sa uvažuje, že aktívum N je bezrizikové s výnosom r_f, a teda optimálne portfólio $w = e_N$ zodpovedá limitnému prípadu $\lambda \to \infty$. Inak povedané, riziku prikladáme natoľko veľkú váhu, že všetky prostriedky pôjdu do bezrizikového aktíva aby sme sa vyhli akémukoľvek riziku.

Zmena hodnoty λ nám umožňuje plynulo prechádzať medzi portfóliami s rôznou úrovňou rizika a výnosu, pričom opäť získavame body na efektívnej hranici. Tento prístup

je numericky stabilnejší a zaručuje existenciu riešenia pre všetky hodnoty parametra $\lambda > 0$.

Na záver môžeme o úlohách (9), (10) a (11) skonštatovať, že sú ekvivalentné v tom zmysle, že opisujú tú istú množinu efektívnych portfólií. Jediný rozdiel medzi nimi je, či vzťah medzi rizikom a výnosom je vyjadrený prostredníctvom ohraničení, alebo priamo sú v účelovej funkcii. Presnejšie spojitosti medzi parametrami týchto úloh detailne opíšeme v následujúcej kapitole.

2.1.1 Prevod parametra disperzie α na parameter λ

V tejto časti ukážeme vzťah medzi parametrom α a λ. Úloha (11) je vhodnejšia na použitie ako (9) a (10), pretože pre ľubovoľný parameter $\lambda > 0$ má úloha vždy prípustné riešenie. Avšak je ťažké povedať jednoznačne čo nám jeho hodnoty presne vypovedajú.

Napríklad vieme povedať, že pre $\lambda = 5$ bude Pareto-optimálnym riešením portfólio s nižším výnosom a nižším rizikom ako pre $\lambda = 1$. Avšak samotná hodnota $\lambda = 5$ nám neposkytuje žiadnu informáciu o výnose a riziku. V porovnaní s tým má α je interpretovateľné ako maximálna povolená variancia, a preto umožňuje jasne kvantifikovať očakávané riziko optimálneho riešenia.

Na začiatok uvažujme upravenú verziu úlohy (9) s voľnými váhami

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu \\ & w^T\Sigma w \leq \alpha, \\ & \mathbb{1}^T w = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Ukážeme, že v úlohe (12) môžeme ohraničenie $w^T\Sigma w \leq \alpha$ nahradiť rovnosťou $w^T\Sigma w = \alpha$. Vďaka tomu sa nám neskoršie odvádzanie značne zjednoduší. Vychádzajúc z [9] Lagrangeova funkcia úlohy (12) má následovný zápis

$$L_\alpha(w, \psi, \gamma) = -w^T\mu + \psi(w^T\Sigma w - \alpha) + \gamma(\mathbb{1}^T w - 1),$$

s definičným oborom

$$D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Nižšie uvádzame Kuhn-Tuckerove podmienky (ďalej KKT) optimality pre úlohu (12)

v následujúcom tvare

$$\frac{\partial L_\alpha}{\partial w} = -\mu + 2\psi\Sigma w + \gamma\mathbb{1} = 0, \tag{13}$$

$$w^T\Sigma w - \alpha \leq 0, \tag{14}$$

$$\mathbb{1}^T w = 1, \tag{15}$$

$$\psi(w^T\Sigma w - \alpha) = 0, \tag{16}$$

$$\psi \geq 0. \tag{17}$$

KKT podmienky optimality sú nutné, pretože sú splnené podmienky regularity. Taktiež sú aj postačujúce, lebo úloha (12) je konvexná. To zaručuje, že z KKT podmienok vieme získať optimálne riešenie úlohy (12).

Označme optimálne riešenie ako w^*, ψ^* a γ^*. Predpokladajme, že v optimálnom riešení platí $(w^*)^T\Sigma w^* < \alpha$, potom z podmienky (16) vyplýva, že $\psi^* = 0$. A to nás vedie po dosadení do (13) k rovnosti $\mu = \gamma^*\mathbb{1}$. Teda očakávané výnosy aktív sú rovnaké. Ak predpokladáme, že toto nemôže nastať, tak $\psi^* \neq 0$ a $(w^*)^T\Sigma w^* = \alpha$. Pokiaľ pripustíme, že zložky vektora μ môžu byť rovnaké, tak účelová funkcia je pre ľubovoľné prípustné w rovnaká. Z toho dôvodu je množina prípustných riešení aj množinou optimálnych riešení. Jedno z týchto prípustných riešení sa nachádza na hrane ohraničenia, a teda pre toto riešenie platí $(w^*)^T\Sigma w^* = \alpha$. Vďaka tomu môžeme bez ujmy na všeobecnosti ďalej pracovať s úlohou

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu \\ & w^T\Sigma w = \alpha, \\ & \mathbb{1}^T w = 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Teraz si vezmime úlohu (11) bez nezáporných váh

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu - \lambda w^T\Sigma w \\ & \mathbb{1}^T w = 1. \end{aligned} \tag{19}$$

Úloha (19) má Lagrangeovu funkciu a definičný obor

$$\begin{aligned} & L(w,\nu) = -w^T\mu + \lambda w^T\Sigma w + \nu(\mathbb{1}^T w - 1), \\ & D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nižšie uvádzame jej KKT podmienky optimality

$$\frac{\partial L}{\partial w} = -\mu + 2\lambda\Sigma w + \nu\mathbb{1} = 0, \tag{20}$$

$$\mathbb{1}^T w = 1. \tag{21}$$

KKT spĺňajú podmienky optimality a úloha (19) je konvexnou, z čoho vyplýva, že KKT podmienky sú nutnými i postačujúcimi. To nám zabezpečuje existenciu optimálneho riešenia, ktoré vieme nájsť z KKT podmienok.

Postupnými úpravami (20) si vieme vyjadriť optimálny vektor váh

$$w^* = \frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}(\mu - \nu\mathbb{1}).$$

Existenciu inverznej matice nám zaručuje predpoklad $\Sigma \succ 0$.

Následne po dosadení w^* do (21) získame

$$1 = \mathbb{1}^T w^* = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}^\top\Sigma^{-1}(\mu - \nu\mathbb{1}) = \frac{1}{2\lambda}(a - \nu^* b),$$

kde $a = \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mu$, $b = \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}$. Tým sa dostávame k rovnosti

$$\nu^* = \frac{a - 2\lambda}{b}.$$

Takto vyjadrené ν^* si vieme dosadiť dosadiť do w^*

$$w^* = \frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}\left(\mu - \frac{a-2\lambda}{b}\mathbb{1}\right) = \frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}\mu - \frac{a-2\lambda}{2\lambda b}\Sigma^{-1}\mathbb{1}. \tag{22}$$

Následne w^* dosadíme do variancie

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = (w^*)^T\Sigma w^* &= \left[\frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}\mu - \frac{a-2\lambda}{2\lambda b}\Sigma^{-1}\mathbb{1}\right]^T \Sigma \left[\frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}\mu - \frac{a-2\lambda}{2\lambda b}\Sigma^{-1}\mathbb{1}\right] \\
&= \frac{1}{4\lambda^2}\mu^T\Sigma^{-1}\mu - \frac{a-2\lambda}{4\lambda^2 b}\mu^T\Sigma^{-1}\mathbb{1} - \frac{a-2\lambda}{4\lambda^2 b}\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mu + \frac{(a-2\lambda)^2}{4\lambda^2 b^2}\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{4\lambda^2}c - \frac{a-2\lambda}{4\lambda^2 b}a - \frac{a-2\lambda}{4\lambda^2 b}a + \frac{(a-2\lambda)^2}{4\lambda^2 b^2}b = \frac{1}{b} + \frac{cb-a^2}{4b}\frac{1}{\lambda^2} = \alpha,
\end{aligned}$$

kde $c = \mu^T\Sigma^{-1}\mu$ a $w^T\Sigma w = \alpha$ musí platiť, keďže hľadáme aký je vzťah medzi α a λ parametrami. Teda snažíme sa nájsť rovnaké optimálne riešenie pre dve odlišné úlohy. Nutne potom musia byť splnené ohraničenia úlohy (18). Z nich následne dostávame vzťah

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\frac{cb - a^2}{4b\left(\alpha - \frac{1}{b}\right)}}.} \tag{23}$$

Tým sme explicitný vzťah medzi λ z (19) a pre zadaný parameter α z úlohy (12). Avšak treba pamätať, že toto odvodenie platí pre $w \in \mathbb{R}^N$. Ak by sme mali $w \succeq 0$ v podmienke zmení nám to Lagrangeovu funkciu a v dôsledku aj KKT podmienky.

Vezmime si úlohu (11). Jej Lagrangeova funkcia a definičný obor je

$$L(w, \nu, \gamma) = -w^T\mu + \lambda w^T \Sigma w + \nu(\mathbb{1}^T w - 1) + \gamma^T w$$
$$D : \mathbb{R}^N_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

a KKT podmienky majú následujúcu schému pre ľubovoľnú i-tu zložku

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = -\mu_i + 2\lambda(\Sigma w)_i + \nu + \gamma_i \leq 0, \tag{24}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_i} w_i = \mu_i w_i + 2\lambda(\Sigma w)_i w_i + \nu w_i + \gamma_i w_i = 0, \tag{25}$$
$$\gamma_i \geq 0, \tag{26}$$
$$\mathbb{1}^T w - 1 = 0, \tag{27}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_i}\gamma_i = \gamma_i w_i = 0, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, N \tag{28}$$
$$w_i \geq 0. \tag{29}$$

Ak je $w_i^* > 0$, tak z (28) vidíme, že $\gamma_i^* = 0$. Následne z (25) vyplýva, že $-\mu_i + 2\lambda(\Sigma w)_i + \nu + \gamma_i = 0$ a z tohto vzťahu by sme vedeli jednoducho obdobne odvodiť vzťah medzi λ a α ako sme to v tejto kapitole spravili pre $w \in \mathbb{R}^N$.

Ak je $w_i = 0$ narážame na isté problémy. V takomto prípade $\gamma_i \geq 0$ a vzťah medzi λ a α si už nevieme z KKT podmienok jednoznačne vyjadriť. Keďže nevieme vopred určiť, ktoré váhy budú nulové bez toho, aby sme poznali λ, a súčasne nevieme určiť λ bez znalosti aktívnych váh, analytický vzťah medzi λ a α sa stáva implicitným.

Tento problém sa dá riešiť pomocou numerickej metódy nazývanej bisekcia, o ktorej sa dá viac dočítať v [8], kapitola 4.2.5. Táto metóda nám umožňuje nájsť parameter λ pre príslušné α z úlohy (9) pomocou jednoduchého algoritmu.

V tomto algoritme si zvolíme počiatočný interval $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$. Dôležité je, aby tento interval obsahoval hodnotu, pri ktorej je variancia portfólia v riešení úlohy (11) rovná požadovanému cieľovému riziku α. Preto je vhodné zvoliť $\lambda_{min} = 0$ a λ_{max} musí byť dostatočne veľké. Treba však pamätať, že čím je λ_{max} väčšie, tým je istejšie, že vhodné λ nájdeme, avšak zároveň celý výpočet bude dlhšie trvať. V praxi by voľba $\lambda_{max} = 100$ mala

byť postačujúca, lebo vo väčšine prípadov $\lambda \in (0, 100]$ pokrýva podstatnú časť efektívnej hranice.

Prvý krok spočíva vo výpočte $t = (\lambda_{min} + \lambda_{max})/2$. Následne vyriešením úlohy (11) pre $\lambda = t$ získame optimálne riešenie $w^*(t)$. Potom porovnáme riziko portfólia $f(t) = (w^*(t))^T \Sigma w^*(t)$ s parametrom α. Ak je $f(t) > \alpha$, potom parameter t je príliš malý pre dané α, keďže riziko portfólia je väčšie ako požadované. Ak chceme nájsť pre úlohu (11) optimálne riešenie s nižším $f(t)$, potrebujeme zvýšiť hodnotu t. Preto aktualizujeme $\lambda_{min} = t$ a s novým intervalom opakujeme postup algoritmu. Opačný postup nám platí, ak je $f(t) < \alpha$, čo vedie k aktualizáciiλ$_{max} = t$. Ak je $f(t)$ menšie, potom potrebujeme pokračovať na intervale $[\lambda_{min}, t]$. Tento proces sa opakuje, až kým dĺžka intervalu $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ neklesne pod stanovenú hodnotu ϵ, ktorá sa volí ako malé kladné číslo blízke k nule.

Dôležitým predpokladom konvergencie je monotónny vzťah medzi parametrom t a rizikom. Z účelovej funkcie úlohy (11) je zrejmé, že so zvyšujúcou sa hodnotou t sa kladie vyššia váha na minimalizáciu rizika, čo vedie k výberu portfólia s nižším rizikom $f(t)$ a menším očakávaným výnosom. Schéma algoritmu je uvedená v (1).

Algoritmus 1 Metóda bisekcie pre nájdenie λ pri zadanom α.

dané počiatočný interval $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, cieľové riziko α, tolerancia $\epsilon > 0$.

opakuj

1. Výpočet stredu intervalu: $t = (\lambda_{min} + \lambda_{max})/2$.
2. Vyriešenie konvexnej úlohy (11) pre $\lambda = t$ a nájdenie optimálneho riešenia $w^*(t)$.
3. Výpočet dosiahnutého rizika: $f(t) = (w^*(t))^T \Sigma w^*(t)$.
4. **ak** $f(t) > \alpha$, **potom** $\lambda_{min} := t$;
5. **inak** $\lambda_{max} := t$.

kým $\lambda_{max} - \lambda_{min} \leq \epsilon$.

2.1.2 Prevod parametra návratnosti β na parameter λ

V tejto kapitole si ukážeme odvodenie vzťahu medzi parametrom β a λ obdobne ako v kapitole 2.1.1. Najskôr uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T \Sigma w \\ & w^T \mu \geq \beta, \\ & \mathbb{1}^T w = 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Aj tu si ukážeme, že môžeme ohraničenie $w^T \mu \leq \beta$ nahradiť rovnosťou $w^T \mu = \beta$. Lagrangeova funkcia a definičný obor úlohy (30) je

$$\begin{aligned} & L_\beta(w, \psi, \gamma) = w^T \Sigma w + \psi(\beta - w^T \mu) + \gamma(\mathbb{1}^T w - 1), \\ & D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pre úlohu (30) nižšie predstavujeme KKT podmienky optimality v následujúcom tvare

$$\frac{\partial L_\beta}{\partial w} = 2\Sigma w + \psi\mu + \gamma\mathbb{1} = 0, \tag{31}$$

$$\beta - w^T \mu \leq 0, \tag{32}$$

$$\mathbb{1}^T w = 1, \tag{33}$$

$$\psi(\beta - w^T \mu) = 0, \tag{34}$$

$$\psi \geq 0. \tag{35}$$

Tieto podmienky sú nutné, pretože úloha (30) spĺňa podmienky regularity a zároveň je konvexná, tak KKT podmienky sú aj postačujúce. Takže nájdením riešenia KKT podmienok získame optimálne riešenie úlohy (30).

Optimálne riešenie označíme ako w^*, ψ^* a γ^*. Predpokladajme, že v optimálnom riešení platí $w^T \mu < \beta$, potom z podmienky (34) vyplýva, že $\psi^* = 0$. Po dosadení ψ^* do (31) a algebraických úpravách dostávame $\Sigma w^* = \gamma^* \mathbb{1}/2$. Táto rovnosť nám hovorí, že príspevky rizika každého aktíva sú rovnaké. Pokiaľ predpokladáme, že takáto situácia nemôže nastať, tak $\psi^* \neq 0$ a $(w^*)^T \mu = \beta$. Ak pripustíme, že aktíva môžu prispievať rovnakou mierou rizika do portfólia, tak účelová funkcia je pre ľubovoľné prípustné w rovnaká. Z toho dôvodu bude množina prípustných riešení aj množinou optimálnych riešení. Jedno z týchto prípustných riešení sa nachádza na hrane ohraničenia, a teda pre toto riešenie platí

$(w^*)^T\mu = \beta$. Vďaka tomu môžeme bez ujmy na všeobecnosti ďalej pracovať s úlohou

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T\Sigma w \\ & w^T\mu = \beta, \\ & \mathbb{1}^T w = 1. \end{aligned} \tag{36}$$

Rovnako ako v kapitole 2.1.1 si z úlohy (19) dosadíme optimálny vektor váh (22) do očakávaného výnosu

$$(w^*)^T\mu = \frac{1}{2\lambda}\mu^T\Sigma^{-}1\mu - \frac{a-2\lambda}{2\lambda}\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mu = \frac{a}{b} + \frac{cb-a^2}{2\lambda b}$$

Keďže hľadáme rovnaké optimálne riešenie ako pre úlohu (30), tak w^* musí spĺňať ohraničenie $w^T\mu = \beta$. Tým osamostatnením parametra λ dostaneme

$$\boxed{\lambda = \frac{cb-a^2}{2b\left(\beta - \frac{a}{b}\right)}.} \tag{37}$$

Ak uvažujeme úlohu (11), tak sa dostávame k rovnakým úvahám ako v kapitole 2.1.1, kde sme ukázali, že analyticky odvodiť vzťah medzi β a λ sa preukazuje byť obtiažne. Preto znova aplikujeme metódu bisekcie pomocou algoritmu (2).

Algoritmus 2 Metóda bisekcie pre nájdenie λ pri zadanej β.

Dané: interval $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, cieľový výnos β, tolerancia $\epsilon > 0$. **Opakuj:**

1. Výpočet stredu intervalu: $t = (\lambda_{min} + \lambda_{max})/2$.
2. Vyriešenie konvexnej úlohy (11) pre $\lambda = t$ a nájdenie optimálneho riešenia $w^*(t)$.
3. Výpočet dosiahnutej bety portfólia: $f(t) = (w^*(t))^T\mu$.
4. **ak** $f(t) > \beta$, **potom** $\lambda_{min} := t$;
5. **Inak** $\lambda_{max} = t$.

kým $\lambda_{max} - \lambda_{min} \leq \epsilon$.

Tento algoritmus funguje podobne ako (1) s menšími rozdielmi. Porovnávame výnos portfólia $f(t) = (w^*(t))^T\mu$ s parametrom β. Ak je $f(t) > \beta$, tak parameter t je príliš malé pre príslušné β. Výnos portfólia je vyšší ako požadovaný. Ak chceme nájsť pre úlohu

(11) optimálne riešenie s nižším $f(t)$ potrebujeme zvýšiť hodnotu t. Tým, že má riziko vyššiu váhu v úlohe (11), tak pre optimálne riešenie bude portfólio dosahovať nižší výnos. Preto aktualizujeme $\lambda_{min} = t$ a s novým intervalom opakujeme postup algoritmu. Opačný postup nám platí ak je $f(t) < \beta$, čo vedie k aktualizáciiλ$_{max} = t$.

2.2 Sharpeov pomer

V Markowitzovom modeli závisí optimálne riešenie od požadovaného výnosu, rizika alebo voľby parametra λ. Existujú však aj ukazovatele, ktoré umožňujú kvantitatívne hodnotiť výkonnosť portfólia. Spravidla v takýchto úlohách maximalizujeme zvolenú mieru výnosnosti. Často používaným ukazovateľom je Sharpeov pomer. V tejto kapitole budeme vychádzať z [3] kapitola 7.2.

Sharpeov pomer vyjadruje podiel medzi nadvýnosom portfólia v porovnaní s bezrizikovou mierou a smerodajnou odchýlkou. Maximalizačná úloha má tvar

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T\Sigma w}} \\ & \mathbb{1}^T w = 1, \\ & w \succeq 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Úloha (38) nie je konvexná. Patrí do triedy zlomkového programovania (FP), ktoré sa dajú riešiť pomocou viacerých metód. Často používanými sú metóda bisekcie či Dinkelbachova metóda. Ich nevýhodou je, že vyžadujú opakované riešenie konvexných úloh, čo môže byť výpočtovo náročné. Efektívnejším prístupom je preto transformovať úlohu do ekvivalentnej konvexnej formy, čo je princípom Schaiblovej transformačnej metódy.

2.2.1 Schaiblova transformačná metóda

Ako sme už spomínali, úlohu maximalizovania Sharpeovho pomeru je vhodné transformovať na minimalizačnú úlohu. Touto transformáciou odstránime zlomkový tvar funkcie, čo nám umožní použiť štandardné QP algoritmy. Podrobný postup transformácie je opísaný v práci [10], kapitola 2.1.

Transformácia spočíva v zavedení novej premennej y, pre ktorú platí

$$w = \frac{y}{t}, \quad \text{kde}\, t = \mathbb{1}^T y \geq 0$$

Následne pomocou vhodnej normalizácie a elimináciou premennej t získame ekvivalentnú minimalizačnú úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & y^T \Sigma y \\ & y^T(\mu - r_f \mathbb{1}) = 1, \\ & \mathbb{1}^T y > 0, \\ & y \succeq 0, \end{aligned} \tag{39}$$

kde nerovnosť $y^T(\mu - r_f \mathbb{1}) \geq 1$ môžeme bez ujmy na všeobecnosť nahradiť rovnosťou. Pôvodnú premennú w dokážeme získať spätne z y a $t = \mathbb{1}^T y$ ako $w = y/\mathbb{1}^T y$. Ohraničenie $\mathbb{1}^T y > 0$ pri riešení úlohy s metódou vnútorného bodu nemusíme brať do úvahy, pretože $y \succeq 0$ zaručuje, že súčet zložiek vektora y je kladný, ak aspoň jedna zložka je nenulová.

Úloha (39) nemusí mať vždy prípustné riešenie. Predpokladáme, že platí $y^T(\mu - r_f \mathbb{1}) > 0$, resp. $w^T \mu - r_f > 0$. Ak táto podmienka nie je splnená, úlohu je potrebné vhodne upraviť. Podrobný popis je spracovaný v [10], kapitola 2.2. V praxi však takéto prípady spravidla nenastávajú, pretože väčšina aktív ponúka výnos nad úrovňou bezrizikového aktíva. To korešponduje s intuíciou, že investori za vyššie podstúpené riziko očakávajú vyšší výnos. Z toho vyplýva, že podmienka $y^T(\mu - r_f \mathbb{1}) > 0$ by mala byť splnená.

2.3 Dodatočné ohraničenia v úlohách optimalizácie portfólia

Do optimalizačnej úlohy môžeme zakomponovať rôzne ohraničenia, ktoré reprezentujú pravidlá a reštrikcie, ktorými sa investor riadi pri zostavovaní portfólia. Nech W je množina ohraničení, resp. množina prípustných riešení. Doposiaľ sme pracovali s množinou $W = \{w \in \mathbb{R}^N \mid \mathbb{1}^T w = 1, w \succeq 0\}$. Ďalšie ohraničenia, ktoré môžu byť zahrnuté do množiny W, uvádzame v tejto kapitole vychádzajúc z literatúry [3] kapitola 6.2.

2.3.1 Krátka pozícia

V kapitolách 1.2 a 2.2 sme úlohy formulovali iba s dlhými pozíciami, $w \succeq 0$. Ak sú povolené aj krátke pozície, tak zložky vektora váh môžu nadobúdať aj záporné hodnoty. Pre povolenie krátkej pozície si zavedieme nové premenné w_{long}, ktorá reprezentuje aktíva držané na dlhú pozíciu a w_{short} pre krátke pozície, pričom platí

$$w_{\text{long}} \succeq 0, \quad w_{\text{short}} \succeq 0, \quad w = w_{\text{long}} - w_{\text{short}}, \quad \mathbb{1}^T w_{\text{short}} \leq k \mathbb{1}^T w_{\text{long}}.$$

Parameter k nadobúda hodnoty v intervale $(0, 1)$ a určuje, aká časť krátkych pozícií môže byť krytá dlhými. Napríklad $k = 0.1$ znamená, že objem krátkych pozícií nemôže presiahnuť 10% hodnoty dlhých pozícií.

V reálnych trhových podmienkach prináša *short selling* so sebou vysoké riziko nesolventnosti. Preto je nežiadúce použiť klasické ohraničenie $\mathbb{1}^T w = 1$, pretože to implikuje možnosť použiť celé prostriedky z short operácie na nákup aktív. Zatiaľ čo pri dlhej pozícii je riziko straty nanajvýš vo výške investovanej sumy, tak pri krátkej pozícii je strata teoreticky neobmedzená. Preto v praxi niekedy brokeri vyžadujú kolaterál. Ohraničením $\mathbb{1}^T w_{\text{short}} \leq k\mathbb{1}^T w_{\text{long}}$ zabezpečíme obmedzenie na *short selling*. Pokiaľ nechceme obmedziť krátku pozíciu stačí dostadiť $k = 1$. Je ale dôležité pamätať, že čím je k vyššie, tým rastie riziko neschopnosti pokryť straty z krátkych pozícií, ak sa ceny aktív zvýšia.

Pre úlohu (39) nám stačí len nahradiť premennú w premennou y a tým dostaneme ekvivalentné ohraničenie

$$y_{\text{long}} \succeq 0, \quad y_{\text{short}} \succeq 0, \quad y = y_{\text{long}} - y_{\text{short}}, \quad \mathbb{1}^T y_{\text{short}} \leq k\mathbb{1}^T y_{\text{long}}. \tag{40}$$

2.3.2 Ohraničenie vektora váh

Niekedy sa môže stať, že optimálne riešenie úlohy je koncentrované len do malého počtu aktív. To môže predstavovať problém z hľadiska nedostatočnej diverzifikácie portfólia. Aby sme sa tomu vyhli, môžeme zaviesť nové ohraničenia typu

$$l \leq w \leq u, \tag{41}$$

kde l a u sú konštanty. Tieto ohraničenia sú lineárne, a teda konvexné. Aby úloha pre toto ohraničenia mala riešenie, tak musí platiť $u \geq 1/N$, aby bola splnená podmienka $\mathbb{1}^T w = 1$.

Pre úlohu (39) musíme tieto ohraničenia takisto transformovať pomocou substitúcie $w = y/\mathbb{1}^T y$. Tým získame nerovnosť

$$l \leq \frac{y}{\mathbb{1}^T y} \leq u.$$

Toto ohraničenie nie je konvexné, pretože obsahuje podiel dvoch premenných. Aby sme ho previedli na konvexné musíme celú nerovnosť vynásobiť kladným menovateľom

$$l\,\mathbb{1}^T y \leq y \leq u\,\mathbb{1}^T y.$$

Tieto ohraničenia sú lineárne vzhľadom na premennú y a zachovávajú konvexnosť transformovanej úlohy.

2.3.3 Ohraničenie kardinality

Niekedy máme k dispozícii dáta s veľkým počtom aktív, ale investor môže chcieť pre jednoduchosť spravovať určité množstvo aktív. Napríklad, ak dáta obsahujú 300 aktív, ale chce držať akcie nanajvýš 50 rôznych firiem. V takej situácii môže použiť ohraničenie

$$||w||_0 \leq M,$$

kde $||\cdot||_0$ je l_0-norma, ktorej výsledok je počet nenulových zložiek vektora. Problém tohto ohraničenia je, že nejde o konvexné obmedzenie. To sa dá vyriešiť, ako je uvedené v publikácii [11], použitím big-M metódy zavedením pomocných binárnych premennej $z_i \in \{0, 1\}$ pre $i = 1, \ldots, N$. Tým získame ekvivalentné ohraničenia

$$\begin{aligned} ||z|| &\leq M, \\ l\,z \leq w &\leq u\,z, \end{aligned} \tag{42}$$

kde l je dolné ohraničenie váh a u horné. Ako je vidieť, ak je $z_i = 0$, tak nutne aj $w_i = 0$. Ak $z_i \neq 0$, tak je aplikované ohraničenie na váhu w_i. Úlohu s takýmito ohraničeniami vieme riešiť pomocou viacerých *solverov* zmiešaného celočíselného kvadratického programovania (MIQP), napr. GUROBI, CPLEX, MOSEK. O MIQP sa možno viac dočítať v literatúre [12].

Pri transformovanej úlohe maximalizácie Sharpeovho pomeru dostávame

$$\begin{aligned} ||z|| &\leq M, \\ l\,z\,\mathbb{1}^T y \leq y &\leq u\,z\,\mathbb{1}^T y. \end{aligned}$$

Toto ohraničenie nie je konvexné, keďže sa v ňom násobí skalárna premenná $\mathbf{1}^T y$ s binárnou premennou z_i. Preto nie je priamo riešiteľné v rámci konvexného optimalizačného problému. Preto ho nahradíme systémom lineárnych rovníc.

Nech $t = \mathbb{1}^T y$ predstavuje súčet všetkých váh, a nech s_i je pomocná premenná, ktorá má reprezentovať súčin $s_i = z_i\,t$. Keďže súčin binárnej a reálnej premennej nie je lineárny, nahradíme ho nasledujúcou trojicou lineárnych nerovností:

$$s_i \leq t, \qquad s_i \leq K z_i, \qquad s_i \geq t - K(1 - z_i),$$

kde K je dostatočne veľká konštanta, ktorá ohraničuje maximálnu možnú hodnotu premennej t.

Táto konštrukcia zabezpečuje, že

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{ak } z_i = 0, \\ t, & \text{ak } z_i = 1, \end{cases}$$

a teda ekvivalentne $s_i = z_i\, t$ pre binárne z_i. Voľba K môže byť problematická. Musí byť dostatočne veľká, aby pokryla možné hodnoty t, no zároveň nie príliš veľká, aby sa predišlo numerickým problémom. V praxi je preto potrebné túto hodnotu určiť intuitívne a cez prípadné komplikácie ju potom navýšiť.

Po zavedení týchto pomocných premenných môžeme pôvodné nekonvexné ohraničenie prepísať do ekvivalentnej lineárnej formy

$$\begin{aligned} ||z|| &\leq M, \\ l\, s \leq & y \leq u\, s. \end{aligned} \tag{43}$$

Takto formulované obmedzenia sú lineárne vzhľadom na premenné y, s, t a binárne premenné z, a teda sú riešiteľné v MIQP.

2.3.4 Ohraničenie obratu

Pokiaľ máme existujúce portfólio, ktoré chceme optimalizovať, je výhodné ohraničiť akú veľkú časť portfólia sme ochotný upraviť. Týmto spôsobom sa dá vyhnúť nadmerným transakčným nákladom. Nech w_0 reprezentuje vektor váh držaného portfólia, potom ohraničenie má tvar

$$||w - w_0||_1 \leq k, \tag{44}$$

kde k predstavuje maximálne množstvo obratu. Jednotková norma nám zabezpečujeme, že počítame celkovú absolútnu zmenu váh. Toto ohraničenie je konvexné.

V prípade úlohy (39) pracujeme s ohraničením v tvare

$$||y - w_0\, \mathbb{1}^T y||_1 \leq k\, \mathbb{1}^T y.$$

2.3.5 Ohraničenie diverzifikácie

Suma štvorcov váh $||w||_2^2 = w^T w = \sum_{i=1}^{N} w_i^2$ sa často používa ako miera diverzifikácie portfólia. Nižšia hodnota tohto ukazovateľa značí vyššiu mieru diverzifikácie. To vedie ku

konvexnému ohraničeniu

$$||w||_2^2 \leq D, \tag{45}$$

kde $1/N \leq D \leq 1$. Ak je $D = 1$, ohraničenie nie je aktívne. V prípade $D = 1/N$ zodpovedá táto hodnota naivnému portfóliu. Vo všeobecnosti, ak nastavíme napríklad $D = 0.2$, môžeme očakávať, že portfólio bude maximálne koncentrované do jedného aktíva niekde okolo 0.2. Tým toto ohraničenie má na váhy portfólia podobný vplyv ako horná hranica v (41), avšak poskytuje istú flexibilitu, keďže koncentrované portfólia môžu trochu balansovať okolo hodnoty D.

Ak povolíme krátku pozíciu, musíme w_{short} a w_{long} aplikovať v (45) separátne. Dôvodom je, že pri povolení krátkych pozícií môže dochádzať k vzájomnému vyrušeniu kladných a záporných váh, čo by skresľovalo mieru diverzifikácie.

V úlohe (39) po transformácii získame

$$||y||_2^2 \leq D\,(\mathbb{1}^T y)^2. \tag{46}$$

2.3.6 Ohraničenie pákového efektu

Mnohé štáty obmedzujú, aké množstvo kapitálu môže byť použité na dlhé či krátke pozície. Na toto ohraničenie použijeme jednotkovú normu

$$||w||_1 \leq L_{\max},$$

ktorá zabezpečuje, že ohraničujeme celkové množstvo kapitálu. Ak je $||w||_1 = 1$, tak investor disponuje len s vlastným kapitálom. V prípade $||w||_1 > 1$ investor využíva páku. Parameter $L_{\max}$ slúži teda ako taká brzda, ktorá hovorí koľko si môže investor požičať. Napríklad $L_{\max} = 2$ znamená, že investor si nemôže požičať viac ako 50% z ceny nakupovaných aktív.

V úlohe (39) dostávame ohraničenie

$$||y||_1 \leq L_{\max}\,\mathbb{1}^T y.$$

2.3.7 Koncentrácia portfólia

Investor sa môže rozhodnúť, že chce koncentrovať určitú časť rozpočtu do obmedzeného počtu aktív, ktoré sa javia ako výhodnejšie vzhľadom k *trade-off* medzi výnosom a rizikom.

Nech $A \in [0,1]$ označuje podiel kapitálu, ktorý sa má koncentrovať do $B \in [0,1]$ podielu aktív. Takéto ohraničenie vyjadríme ako

$$\sum_{i=1}^{k} w_i \leq A, \quad \text{kde } k = BN.$$

Na základe teórie duality v lineárnom programovaní sa dá táto nerovnosť ekvivalentne reprezentovať, ako je podrobnejšie opísané v [8], časť *Exercises* 5.19, použitím pomocných premenných $\bar{u}$ a $\bar{u}_0$. Výhodou tohto postupu je, že namiesto veľkého počtu nerovností dostaneme iba $2N + 1$ lineárnych podmienok. Implementácia dodatočného ohraničenia v Markowitzovej úlohe vyzerá potom následovne

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}^T \bar{u} + k\bar{u}_0 \leq A, \\ &\bar{u} + \bar{u}_0 \mathbb{1} \geq w, \\ &\bar{u} \geq 0, \quad \text{pre } k = BN. \end{aligned} \tag{47}$$

V praxi sa dá stretnúť aj s ďalšími typmi ohraničení, avšak v tejto práci sa im už nebudeme ďalej venovať.

3 Alternatívne miery rizika

V kapitole 2 sme mieru rizika vyjadrili pomocou variancie (rozptylu) a na jej základe sme formulovali Markowitzovu úlohu spolu s úlohou maximalizácie Sharpeovho pomeru. Tieto prístupy majú isté nevýhody a nedostatky. Variancia počíta pozitívne aj negatívne odchýlky od priemeru, hoci štandardne sa investori chcú primárne vyhnúť tým negatívnym. Taktiež pri týchto dvoch úlohách predpokladáme, že sa výnosy riadia normálnym rozdelením. To však častokrát nemusí zodpovedať realite, keďže dáta môžu vykazovať ťažšie chvosty, ktoré signalizujú zvýšený výskyt trhových výkyvov, či asymetriu, kedy sú straty pravdepodobnejšie alebo menej pravdepodobné ako zisky. Tieto vlastnosti dát znamenajú, že reálne riziko je často vyššie, než dokáže zachytiť variancia pri predpoklade normálneho rozdelenia.

V tejto kapitole predstavíme alternatívne miery rizika, porovnáme ich vlastnosti s tradičnou varianciou a ukážeme, ako ich možno využiť v optimalizačných modeloch portfólia.

3.1 Riziko poklesu

Každý investor má odlišný postoj k *trade-off* vzťahu medzi stratou a ziskom. Preto by sa mohlo zdať výhodnejšie zamerať sa len na jedno z možných rizík a to na stratu, resp. pokles. Miery rizika poklesu vo všeobecnosti kvantifikujú straty pod zvolenou hranicou. Ich použitie v praxi môže byť vhodnejšie v porovnaní so symetrickými mierami, ako sú variancia či volatilita. Je ale dôležité pripomenúť, že ak rozdelenie výnosu nie je dostatočne asymetrické, tak miery rizika poklesu nemusia priniesť zásadnú výhodu. V tejto kapitole vychádzame z literatúry [3], kapitola 10.3.

Jednou zo základných mier rizika poklesu je semivariancia, ktorá na rozdiel od variancie počíta len s premennými, ktoré sú nižšie ako stredná hodnota

$$SV = \mathbb{E}\left[((\mu - w^T r)^+)^2\right],$$

kde $(\cdot)^+ = max(0, \cdot)$ a $w^T r$ predstavuje výnos portfólia. Na podobnom princípe sa dá definovať aj semivolatilita.

Zovšeobecnením semivariancie sú tzv. nižšie parciálne momenty (LPM)

$$LPM_\alpha = \mathbb{E}\left[((\tau - w^T r)^+)^\alpha\right],$$

kde parameter τ označuje minimálny akceptovateľný výnos a parameter α vyjadruje averziu investora voči poklesu pod túto hranicu. Pre neutrálneho investora bude $\alpha = 1$ a rizikovo averzný si zvolí $\alpha > 1$. Naopak, investor vyhľadávajúci riziko bude uvažovať o $\alpha \in (0, 1)$.

Nahradením klasickej variancie mierou LPM dostaneme optimalizačnú úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu - \lambda \mathbb{E}\left[((\tau - w^T r)^+)^\alpha\right] \\ & w \in W. \end{aligned} \tag{48}$$

V praxi môžeme LPM aproximovať pomocou priemeru vzorky z T pozorovaní $r_1, \ldots, r_T$

$$\mathbb{E}\left[((\tau - w^T r)^+)^\alpha\right] \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left((\tau - w^T r_t)^+\right)^\alpha$$

Ak je množina W lineárna, tak pri určitých hodnotách parametra α sú úlohy (48) konvexné a majú optimálne riešenie.

Formulácia semivariancie však nie je jednoznačná. Zatiaľ čo sa dá variancia jednoducho vyjadriť pomocou kovariančnej matice Σ, tak je otázne, či pre semivarianciu existuje taká matica M, pre ktorú platí

$$\mathbb{E}\left[((\tau - w^T r)^+)^2\right] = w^T M w$$

Markowitz navrhoval použiť maticu tvaru

$$M(w) = \mathbb{E}\left[(\tau\mathbb{1} - r)(\tau\mathbb{1} - r)^T \times I\{\tau > w^T r\}\right],$$

kde $I\{\cdot\}$ je indikátorová funkcia definovaná ako

$$I\{\tau > w^T r\} = \begin{cases} 1, & \text{ak } w^T r < \tau \\ 0, & \text{ak } w^T r \geq \tau \end{cases}$$

Problém v takejto metóde spočíva v tom, že matica $M(w)$ je endogénna, pretože zmena váh ovplyvňuje, kedy portfólio dosahuje horšiu výkonnosť, čo následne ovplyvňuje prvky semikovariančnej matice. Z toho dôvodu nie je vhodná na optimalizáciu portfólia.

V praxi sa dá stretnúť s heuristickou aproximáciou, podrobnejšie vysvetlenou v článku [13], ktorú si vyjadríme ako

$$M = \mathbb{E}\left[(\tau\mathbb{1} - r)^+((\tau\mathbb{1} - r)^+)^T\right].$$

Tento odhad sa dá vypočítať jednoducho pomocou historických dát. Nech $R \in \mathbb{R}^{T\times N}$ reprezentuje maticu týchto dát, kde stĺpec zobrazuje historické výnosy konkrétneho aktíva. Potom semivarianciu odhadneme ako

$$M = \frac{1}{T}\left[((\tau J_{T\times N} - R)^+)^T(\tau J_{T\times N} - R)^+\right],$$

kde J je matica samých jednotiek. Parameter τ sa volí v závislosti od toho, aký minimálny výnos považuje investor za akceptovateľný. Prípadne sa môže vypočítať ako priemerný výnos aktív

Semivariančnú úlohu pre $\alpha = 2$ potom formulujeme následovne

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T\mu - \lambda w^T M w \\ & w \in W. \end{aligned} \tag{49}$$

3.2 Miery rizika založené na analýze chvostov rozdelenia

V predchádzajúcej podkapitole sme sa sústredili na semivarianciu, ktorá umožňuje zachytávať výkyvy výlučne smerom nadol. To je výhodné pre investorov, ktorí nie sú averzní voči kladným odchýlkam. Pri analýze náhodných premenných treba rátať s istými odchýlkami od strednej hodnoty. Preto by sa mohlo zdať, že každá odchýlka od strednej hodnoty je prebytočnou informáciou. Investora by mohli skôr zaujímať extrémne výkyvy na chvostoch rozdelenia. Spôsobmi, ako merať tieto extrémne výkyvy, sa budeme zaoberať v tejto kapitole, ktorá vychádza z literatúry [3], kapitola 10.4.

Úlohy, ktorými sa budeme rozoberať vychádzajú z miery rizika nazývanej hodnota v riziku. Konkrétne sa zameriame na podmienenú a entropická hodnotu v riziku, ktoré umožňujú formulovať optimalizačnú úlohu ako konvexnú.

3.2.1 Definícia rizikových mier

Pred samotnou formuláciou úloh je vhodné uviesť definície rizikových mier a vysvetliť ich interpretáciu vo svete financií. Pri ich definovaní budeme vychádzať z článku [14].

Na začiatok si zadefinujeme VaR. Nech $X = -w^T r$ je náhodná premenná premenná vyjadrujúca stratu portfólia a $\alpha \in (0, 1]$ je interval spoľahlivosti. Potom hodnotu v riziku definujeme ako

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

VaR vyjadruje najmenšiu hodnotu x, pre ktorú pravdepodobnosť, že náhodná premenná X je menšia ako x, je aspoň α. Vo svete financií to znamená, že v $1-\alpha\%$ prípadov môže byť strata nižšia ako x. Napríklad, ak by pri analýze denných výnos počas 100 dní vyšlo $VaR_{0.95}(X) = -2\%$, potom s 95%-tnou istotou, resp. v 5% prípadov (t.j. približne 5 dní), bude denný výnos nižší ako -2%.

Výhodou VaR je možnosť vyjadriť mieru rizika ako jedno číslo, ktoré má rovnakú interpretáciu pre každé aktívum. Avšak nevýhodou je, že neposkytuje informáciu o tom, aké vysoké straty môžu nastať. Inými slovami, VaR neberie do úvahy správanie náhodnej premennej na chvoste rozdelenia, a preto môže viesť k podhodnoteniu extrémneho rizika.

Podmienenú hodnotu v riziku, niekedy nazývanou *expected shortfall* (ES), definujeme pomocou VaR ako

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[x \,|\, x \geq VaR_\alpha(X)].$$

Miera $CVaR$ vyjadruje očakávanú hodnotu x, ktoré presiahne VaR. Tým je táto miera citlivejšia, lebo berie aj do úvahy charakter chvostu.

V príklade s $VaR_{0.95}(X) = -2\%$ miera $CVaR$ vyjadruje priemerný výnos, keď je nižší ako -2%. Z tohto dôvodu je $CVaR$ považovaná za konzervatívnejšiu a informatívnejšiu mieru rizika, pretože poskytuje detailnejší pohľad na potenciálne extrémne straty.

Po definovaní VaR a $CVaR$ môžeme prejsť k tretej často používanej miere, známej ako entropická hodnota v riziku ($EVaR$), ktorá poskytuje horný odhad pre VaR. Tú definujem na intervale spoľahlivosti α ako

$$EVaR_\alpha(X) = \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{z} \ln \left(\frac{\mathbb{E}[e^{zX}]}{1-\alpha} \right) \right\}.$$

$EVaR$ umožňuje odhadnúť pravdepodobnosť extrémnych odchýlok pomocou exponenciálnych momentov. Tým predstavuje najtesnejšiu hornú hranicu pre VaR, ktorú možno získať touto metódou. Vo všeobecnosti potom platí $VaR \leq CVaR \leq EVaR$.

3.2.2 Formulácia úloh

Pri formulácii *trade-off* úlohy medzi výnosom a rizikom dosadíme $CVaR$ do účelovej funkcii

$$\begin{aligned} \max_w \quad & w^T\mu - \lambda CVaR_\alpha(w) \\ & w \in W. \end{aligned}$$

Táto úloha ešte nie je nutne konvexná. Na jej úpravu môžeme použiť konvexnú reprezentáciu $CVaR$

$$CVaR_\alpha(w) = \inf_\tau \left\{ \tau + \frac{1}{1-\alpha} E\left[(-w^T r - \tau)^+\right] \right\}. \tag{50}$$

Výraz $-w^T r - \tau$ je lineárny a operátor $(\cdot)^+$ predstavuje maximum dvoch konvexných funkcií. Stredná hodnota túto konvexnosť zachováva. Vďaka reprezentácii (50) získame maximalizačnú úlohu, kde premennú τ presunieme z vnútornej minimalizácie do spoločnej maximalizácie

$$\begin{aligned} \max_{w,\tau} \quad & w^T\mu - \lambda \left(\tau + \frac{1}{1-\alpha} E\left[(-w^T r - \tau)^+\right] \right) \\ & w \in W. \end{aligned}$$

V praxi sa stredná hodnota aproximuje pomocou výberového priemeru z T pozorovaní $r_1, \ldots, r_T$

$$\mathbb{E}[(-w^T r - \tau)^+] \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (-w^T r_t - \tau)^+.$$

Týmto dostaneme novú formuláciu úlohy ako

$$\begin{aligned} \max_{w,\tau} \quad & w^T\mu - \lambda \left(\tau + \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (-w^T r_t - \tau)^+ \right) \\ & w \in W. \end{aligned}$$

Pre potreby numerického riešenia je vhodné nahradiť $(\cdot)^+$ zavedením T pomocných premenných $u = (u_1, \ldots, u_T)$

$$\begin{aligned} \max_{w,\tau,u} \quad & w^T\mu - \lambda \left(\tau + \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} u_t \right) \\ & u_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T, \\ & u_t \geq -w^T r_t - \tau, \quad t = 1, \ldots, T, \\ & w \in W. \end{aligned} \tag{51}$$

Úloha (51) je lineárna. Jej nevýhodou je, že na charakterizáciu chvosta používame pomerne malú časť vzorky z celkových dát. Ak počítame 95% $CVaR$ z denných výnosov počas obdobia 100 dní, tak výsledný $CVaR$ sa odhaduje z približne 5 dní.

Ekvivalentným spôsobom môžeme formulovať aj úlohu s rizikom $EVaR$

$$\begin{aligned} \max_{w,t>0} \quad & w^T\mu - \lambda\left(t\,log\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[e^{-t^{-1}w^T r}\right]\right)\right) \\ & w \in W. \end{aligned}$$

Podobne ako pri $CVaR$ môžeme aproximovať strednú hodnotu pomocou výberového priemeru z T pozorovaní $r_1, \ldots, r_T$ a dostávame formuláciu

$$\begin{aligned} \max_{w,\tau} \quad & w^T\mu - \lambda\left(t\,log\left(\sum_{t'=1}^{T} e^{-t^{-1}w^T r_{t'}}\right)\right) - t\,log((1-\alpha)T) \\ & w \in W. \end{aligned}$$

Tento problém možno v praxi riešiť viacerými spôsobmi (pre podrobnejší opis metód pozri [3], kapitola 40.4.2). My budeme pracovať s konvexnou formuláciou využitím exponenciálneho kužeľa $\mathcal{K}_{\exp}$, ktorú mnohé *solvre* dokážu rozpoznať

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w},\, t>0,\, s,\, u} \quad & \mathbf{w}^\top\mu - \lambda\big(s - t\,\log\big((1-\alpha)T\big)\big) \\ & \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \\ & t \geq u_1 + \cdots + u_T, \\ & \big(-\mathbf{w}^\top r_{t'},\, -s,\, t,\, u_{t'}\big) \in \mathcal{K}_{\exp}, \quad t' = 1, \ldots, T, \end{aligned} \tag{52}$$

kde

$$\mathcal{K}_{\exp} \triangleq \big\{(a,b,c) \,\big|\, c \geq b\,e^{a/b},\ b > 0\big\} \ \cup\ \big\{(a,b,c) \,\big|\, a \leq 0,\ b = 0,\ c \geq 0\big\}$$

Formulácia (52) je pre nás výhodná, pretože efektívne nahrádza numericky náročné úlohy, čím zabezpečuje lepšiu stabilitu a rýchlosť výpočtu.

3.3 *Drawdown* portfólia

Myšlienka za touto alternatívnou mierou portfólia je prisúdiť istú mieru "trápenia" investora, ktorá priebežne sleduje kumulatívny zisk alebo bohatstvo. Z tohto dôvodu sa zameriavame výlučne na poklesy miesto rastov, podobne ako pri semivariancii, avšak s tým rozdielom, že strata je vždy vyjadrená vo vzťahu k predchádzajúcemu maximu. Táto podkapitola vychádza z knihy [3], kapitola 10.5.

3.4 Definícia

Na začiatok si definujeme tzv. *high watermark*, ktorý predstavuje historický vrchol hodnoty $X(t)$ až do času t

$$HWM(t) = \max_{1 \leq \tau \leq t} X(\tau).$$

Následne *drawdown* definujeme ako pokles od tohto historického vrcholu

$$D(t) = HWM(t) - X(t).$$

Normalizovaný *drawdown* si vyjadríme ako

$$\bar{D}(t) = \frac{HWM(t) - X(t)}{HWM(t)}.$$

Je dôležité podotknúť, že táto premenná je *path-dependent*, teda závisí od toho v akom poradí idú výnosy za sebou. Ak portfólio prudko narastie na začiatku sledovaného obdobia a následne klesne, *drawdown* môže byť vysoký v dôsledku vesokého historické maximum. Avšak, ak by sme portfólio začali merať vo vzdialenejšej minulosti, kde by sme mali viac výkyvov, tak v rovnakom roku by hodnota *drawdown* mohla byť nižšia.

V praxi je výhodné sumarizovať *drawdown* krivku do jedného čísla. Často používané spôsoby sú

- maximum *drawdown*

$$Max\text{-}DD = \max_{1 \leq t \leq T} D(t)$$

- priemerný *drawdown*

$$Ave\text{-}DD = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} D(t)$$

- $CVaR$ *drawdown*, niekedy alternatívne označovaný aj ako $CDaR$ (*conditional drawdown at risk*)

$$CVaR\text{-}DD(w) = \mathbb{E}[D(t) \,|\, D(t) \geq VaR_\alpha(D)]$$

Výnos portfólia v čase t je daný ako $R_t = w^T r_t$. Keďže *drawdown* je odvodený z kumulatívnych výnosov, je potrebné brať do úvahy kumulatívny výnos portfólia

$$R_t^{cum} = w^T r_t^{cum},$$

kde kumulatívny výnos aktív vypočítame ako

$$r_t^{cum} = \prod_{\tau=1}^{t}(1 + r_\tau) - 1. \tag{53}$$

Kumulatívne výnosy (53) korešpondujú zloženému lineárnemu úročeniu. Pre jednoduché lineárne úročenie a logaritmické výnosy je vhodnejšie použiť

$$r_t^{cum} = \sum_{\tau=1}^{t} r_\tau.$$

Jednoduché lineárne úročenie neodporúčame používať, keďže výnosy sa iba sčítavajú. To znamená, že ak v jeden deň sme mali výnos 0.1 a následujúci máme -0.1, tak kumulatívny výnos je 0. Avšak pri zloženom úročení by bol kumulatívny výnos $(1.1)(0.9) - 1 = -0.01$, teda strata 1%. Zložené úročenie lepšie reprezentuje reálny vývoj hodnoty portfólia.

Celková hodnota portfólia je daná ako $1 + R_t^{cum}$. Absolútny *drawdown* je

$$D_t(w) = \max_{1\leq\tau\leq t} w^T r_\tau^{cum} - w^T r_t^{cum}$$

a ohraničenie tvaru $D_t(w) \leq \alpha$ môžeme napísať ako lineárne ohraničenie

$$w^T r_t^{cum} \geq \max_{1\leq\tau\leq t} w^T r_\tau^{cum} - \alpha.$$

Následne normalizovaný *drawdown* dostaneme ako

$$\bar{D}_t(w) = \frac{\max_{1\leq\tau\leq t} w^T r_\tau^{cum} - w^T r_t^{cum}}{1 + \max_{1\leq\tau\leq t} w^T r_\tau^{cum}},$$

pričom ohraničenie $\bar{D}_t(w) \leq \alpha$ môžeme napísať v lineárnom tvare

$$w^T r_t^{cum} \geq (1-\alpha) \max_{1\leq\tau\leq t} w^T r_\tau^{cum} - \alpha.$$

3.5 Formulácia úlohy

Podobne ako pri portfóliách založených na chvostoch aj pri tu si pri formulácii úlohy vyjadríme riziko ako *drawdown*. V optimalizácii sa *Max-DD* nezvykne používať, lebo je daný jedným extrémnym pozorovaním., čo k vysokej citlivosti riešenia. Naopak *Ave-DD* a *CVaR-DD* podobný problém nemajú. Preto sa ďalej mierou *Max-DD* nebudeme zaoberať.

Pri použití *Ave-DD* formulujeme konvexnú úlohu následovne

$$\begin{aligned} \max_{w} \quad & w^T\mu - \lambda\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\max_{1\le\tau\le t} w^T r_\tau^{cum} - w^T r_t^{cum}\right) \\ & w \in W. \end{aligned} \tag{54}$$

Úlohu (54) je vhodnejšie upraviť pomocou zápisu do epigrafového tvaru a zavedením pomocných premenných s a u. Tým dostaneme následovnú formuláciu úlohy

$$\begin{aligned} \max_{w,u,s} \quad & w^T\mu - \lambda s \\ & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t \le \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} w^T r_t^{cum} + s, \\ & w^T r_t^{cum} \le u_t, && t = 1,\dots,T \\ & u_{t-1} \le u_t, && t = 2,\dots,T \\ & w \in W. \end{aligned} \tag{55}$$

Ak W obsahuje iba lineárne ohraničenia, tak úloha je lineárna.

Na formuláciu *CVaR-DD* použijeme variačnú konvexnú reprezentáciu

$$CVaR\text{-}DD(w) = \inf_{\tau}\left\{\tau + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(D_t(w)-\tau)^+\right\},$$

čím zabezpečíme konvexnosť úlohy, podobne ako pri $CVaR$. Použitie takejto formulácie nás vedie k úlohe

$$\begin{aligned} \max_{w} \quad & w^T\mu - \lambda\left(\tau + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\max_{1\le\tau\le t} w^T r_\tau^{cum} - w^T r_t^{cum} - \tau\right)^+\right) \\ & w \in W, \end{aligned}$$

kde pomocná premenná τ bola presunutá z vnútornej minimalizácie do vonkajšej maximalizácie. Táto úloha je konvexnou pri predpoklade, že množina W je konvexná. Avšak riešiť takúto úlohu priamo je numericky náročné. Preto je lepšie si ju previesť do vhodnejšieho tvaru.

Po sérií, ktorými odstránime operátor max a $(\cdot)^+$ a následným zavedením pomocných

premenných s, z a u môžeme úlohu formulovať ako

$$\begin{aligned}
\max_{w,\tau,s,z,u} \quad & w^T\mu - \lambda s \\
& s \geq \tau + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t, \\
& z_t \geq 0, && t = 1,\ldots,T \\
& z_t \geq u_t - w^T r_t^{cum} - \tau, && t = 1,\ldots,T \\
& w^T r_t^{cum} \leq u_t, && t = 1,\ldots,T \\
& u_{t-1} \leq u_t, && t = 2,\ldots,T \\
& w \in W.
\end{aligned} \tag{56}$$

Úloha (56) je lineárnou, ak množina W obsahuje iba lineárne ohraničenia.

4 Implementácia a opis kódov

Úlohy optimalizácie portfólia detailne opísané v kapitolách 2 a 3, spolu s dodatočnými ohraničeniami definované v kapitole 2.3, sme naprogramovali v Pythone. V čase písania záverečnej práce sme pracovali s verziou 3.13. Príslušné kódy sú voľne prístupné na stránke https://github.com/Jurdzi/portfolio_optimisation_cvxpy.

Základný kód *portfolio_optimization* pozostáva z celkových desiatich modulov. Kód sme sa rozhodli celý viesť v anglickom jazyku, keďže ide o štandard v programovaní a zároveň sme sa chceli vyhnúť miešaniu dvoch jazykov v rámci jedného programovacieho prostredia.

Pri implementácii boli použité aj nástroje generatívnej umelej inteligencie. Tie neboli použité na generovanie kompletných riešení, ale najmä ako podporný nástroj pri efektívnejšom programovaní, kontrolu kódu a návrhoch úprav. Všetky výstupy generované AI boli dôkladne skontrolované.

4.1 Spracovanie dát

Na spracovanie dát slúžia dva moduly *data* a *index_tickers*. Prvý z nich zabezpečuje načítanie historických dát vývoja cien aktív z konkrétneho excelovského či textového súboru, alebo umožňuje dáta stiahnuť zo stránky *Yahoo Finance*. Pre túto stránku je na načítanie konkrétnych aktív potrebné zadať symboly, prípadne názov podporovaného akciového indexu, pre ktorý modul *index_tickers* načíta aktuálne symboly aktív v danom indexe z Wikipédie. Ďalej pomocou *data* môžeme podobným spôsobom načítať trhové dáta, potrebné pre CAPM model, a odhadnúť jeho očakávaný výnos pomocou metód uvedených v 1.3. Zároveň slúži na načítanie vektora váh w_0 pre dodatočné ohraničenie z kapitoly 2.3.4. Nižšie uvádzame zoznam vstupných parametrov pre moduly.

Modul ***index_tickers***

- **index_name**: názov podporovaného indexu (S&P 500, Nasdaq 100, Dow Jones Industrial Average, DAX, FTSE 100, CAC 40), pre ktorý sa majú stiahnuť aktuálne symboly z Wikipedie.

Modul ***data***

- **source**: slúži na určenie spôsobu akým sa dáta majú stiahnuť alebo načítať (napr. *yahoo* pre sťahovanie z internetu alebo *csv, xlsx, txt, tsv* pre lokálne súbory),
- **file_path**: sesta k načítavanému súboru,
- **tickers**: zoznam konkrétnych symbolov aktív, ktoré sa majú spracovať,
- **start_date / end_date**: časový horizont historických dát,
- **sheet_name**: ak sa načítavajú dáta z excel alebo csv súboru, ktorý má viac hárkov je potrebné zadať jeho názov,
- **index_name**: názov akciového indexu (napr. S&P 500) pre automatické načítanie všetkých jeho komponentov,
- **w_0**: cesta k súboru s pôvodným vektorom váh,
- **market**: symbol trhu (napr. ^GSPC) potrebný pre výpočty modelu CAPM. Ak sú tieto dáta načítané zo súboru spolu s aktívami, musí sa zhodovať s názvom v týchto dátach,
- **method**: výber metódy odhadu (aritmetický, geometrický, či exponenciálny priemer),
- **alpha**: parameter pre exponenciálny vážený priemer,
- **gamma**: škálovací faktor reprezentujúci počet obchodovaných dní (ak nie je zadaný, dosadí sa 1),
- **return_type**: typ denných výnosov (lineárne alebo logaritmické).

Výstupom modulu *index_tickers* je zoznam symbolov aktív a *data* vracia vektor váh w_0, symboly aktív, logaritmické alebo lineárne denné výnosy aktív a trhu a očakávaný výnos trhu v závislosti od vstupných parametrov.

4.2 Odhad parametrov

Moduly *expected_return*, *expected_risk*, *semivariance* a *alternative_risk_measures* slúžia na odhad parametrov a implementáciu mier rizika s príslušnými ohraničeniami. Modul *expected_return* sa používa na odhad očakávaného výnosu aktív. Modul *expected_risk* je potrebný na výpočet klasických mier rizika, variancie alebo semivariancie, pričom výpočet semivariancie prebieha v samostatnom module *semivariance*. Nakoniec modul *alternative_risk_measures* slúži na implementáciu rizikových mier, ako $CVaR$, $EVaR$, $Ave\text{-}DD$ a $CVaR\text{-}DD$, a pridanie ohraničení pre príslušné formulácie úloh. Nižšie uvádzame vstupy pre tieto moduly.

Modul ***expected_return***

- **method**: výber metódy odhadu (aritmetický, geometrický, či exponenciálny priemer alebo model oceňovania kapitálových aktív CAPM),
- **returns**: historické denné výnosy aktív,
- **r_f**: Bezriziková úroková miera potrebná pre výpočet pomocou modelu CAPM,
- **market_returns**: dáta o výnosoch trhu použité pre výpočet systémového rizika (β),
- **gamma**: škálovací faktor reprezentujúci počet obchodovaných dní (ak nie je určené dosadí sa 1).

Modul ***expected_risk***

- **risk_measure**: voľba základnej metriky rizika (variancia pre celkové riziko alebo semivariancia pre riziko poklesu),
- **returns**: historické denné výnosy aktív,
- **tau**: minimálny prijateľný výnos, voči ktorému sa vypočítava semivariancia (ak nie je určený vypočíta sa ako priemer denných výnosov),
- **gamma**: škálovací faktor reprezentujúci počet obchodovaných dní (ak nie je určené dosadí sa 1).

Modul ***semivariance***

- **returns**: historické denné výnosy aktív,
- **tau**: minimálny prijateľný výnos, voči ktorému sa vypočítava semivariancia (ak nie je určený vypočíta sa ako priemer denných výnosov),
- **gamma**: škálovací faktor reprezentujúci počet obchodovaných dní (ak nie je určené dosadí sa 1).

Modul ***alternative_risk_measures***

- **risk_measure**: voľba alternatívnych mier rizika (*cvar, evar, ave-dd, cvar-dd*),
- **w**: vektor váh,
- **returns**: historické denné výnosy aktív,
- **alpha_tail**: interval spoľahlivosti pre výpočet mier rizika $CVaR$ alebo $EVaR$,
- **alpha_drawdown**: interval spoľahlivosti pre výpočet mier rizika *Ave-DD* a $CVaR$-DD,
- **drawdown_return_type**: metóda výpočtu kumulatívnych výnosov pre miery rizika založené na poklesoch (lineárne zložené, lineárne jednoduché a logaritmické).

4.3 Optimalizácia

Modul *portfolio_optimizer* implementuje úlohy (11), (49), (51), (52), (55) a (56) spolu s ohraničeniami z kapitoly 2.3. Navyše v *portfolio_optimizer* sa dá vykresliť efektívna hranica. Pre zabezpečenie reprezentatívneho rozloženia bodov používame pri generovaní hodnôt parametrov λ logaritmickú škálu na intervale $[10^{-2}, 10^{6}]$. Vďaka tomu získame veľký počet menších hodnôt a menší počet väčších na dobré grafické zobrazenie efektívnej hranice.

V module *max_sharpe* je implementovaná duálna úloha k úlohe maximalizujúcu Sharpeov pomer (39). Nakoniec modul *ensure_solution* je pomocný pre *portfolio_optimizer*, aby zabezpečil dokončenie výpočtov. Použitý *solver* si nemusí vždy poradiť s úlohou a zastaví sa na chybe, čo je problematické, keď spúšťame kód s veľkým počtom výpočtov. Pre podrobnejší opis kódov v nasledujúcej časti uvádzame jednotlivé vstupné parametre pre moduly s popisom.

Modul ***portfolio_optimizer***

- **mu**: očakávaný výnos aktív. Môže sa použiť namiesto **returns**,
- **returns**: historické denné výnosy aktív,
- **return_method**: výber techniky odhadu (aritmetický, geometrický, exponenciálny priemer alebo CAPM),
- **r_f**: bezriziková úroková miera,
- **market_returns**: denné výnosy a očakávaný výnos trhu,
- **gamma**: Škálovací faktor reprezentujúci počet obchodovaných dní (ak nie je určené dosadí sa 1),
- **risk_measure**: definuje cieľovú funkciu rizika (*variance, semivariance, cvar, evar, ave-dd, cvar-dd*),
- **tau**: minimálny prijateľný výnos, voči ktorému sa vypočítava semivariancia (ak nie je určený vypočíta sa ako priemer denných výnosov),
- **alpha_tail**: hladina spoľahlivosti pre výpočet mier rizika $CVaR$ alebo $EVaR$,
- **drawdown_return_type**: metóda výpočtu kumulatívnych výnosov pre miery rizika založené na poklesoch (lineárne zložené, lineárne jednoduché a logaritmické),
- **alpha_drawdown**: hladina spoľahlivosti pre výpočet mier rizika *Ave-DD* alebo $CVaR$-DD,
- **Lambda**: parameter λ v účelovej funkcii,
- **alpha / beta**: cieľová úroveň variancie alebo výnosu (využívané pre nájdenie λ),
- **bisection**: slúži na spustenie algoritmu (1) alebo (2),
- **av_max**: horná hranica intervalu algoritmov (1) alebo (2) (ak nie je hodnota zvolená, dosadí sa 100),
- **u / l**: horné a dolné hranice váh ak máme len dlhú pozíciu,
- **u_short, l_short**: hranice pre povolenú krátku pozíciu,

- **u_long, l_long**: hranice pre dlhú pozíciu, keď povoľujeme krátku,
- **k**: parameter v ohraničení (40),
- **k_turnover**: konštanta v (44),
- **w_0**: pôvodný vektor váh pre (44),
- **D**: limit pre diverzifikáciu portfólia v (45),
- **D_long, D_short**: limit pre diverzifikáciu portfólia, ak je povolená krátka pozícia,
- **M**: *big-M* v (42),
- **L_max**: maximálna povolená finančná páka v (44),
- **points**: počet bodov pre vygenerovanie spojitej efektívnej hranice,
- **highlight_choice**: možnosť zvýrazniť vybrané body na efektívnej hranici, prípadne najbližšie body k nim (ak nie je zvolené, dosadia sa body $[1, 5, 10, 20, 100]$),
- **eff_frontier**: nastavením hodnoty "Y"sa vykreslí efektívna hranica,
- **Solver**: výber numerického riešiteľa (*MOSEK, GUROBI, CPLEX*),
- **timer**: výber maximálneho času pre nájdenie optimálneho riešenia (ak nie je zvolené, tak sa určí 60.0 sekúnd).

Modul ***max_sharpe***

- **K**: Konštanta používaná v *big-M* metóde
- ostatné vstupy sa zhodujú s ohraničeniami úloh a nastaveniami pre *solver* v module *portfolio_optimizer*

Modul ***ensure_solution***

- **solve_function**: volanie špecifického modulu (*portfolio_optimizer* alebo *max_sharpe*),
- **prev_weights**: vektor váh z predchádzajúcej periódy,
- **first_step**: indikuje či ide o prvú periódu,

- **num_assets**: celkový počet aktív.

  Výstupom modulu *portfolio_optimizer* je očakávaný výnos, riziko (v závislosti od zvolenej rizikovej miery) a vektor váh pre portfólio, ktoré úloha našla ako optimálne riešenie. Modul *max_sharpe* vracia rovnaké výstupy spolu s hodnotou Sharpeovho pomeru. Modul *ensure_solution* vráti nový vektor váh ak ho *portfolio_optimizer* alebo *max_sharpe* nájde. V opačnom prípade použije vektor váh z predchádzajúcej periódy a ak ide o prvú, vráti váhy zodpovedajúce naivnému portfóliu.

4.4 Vizualizácia výsledkov

Modul *plot_portfolio_composition* slúži na grafické znázornenie zloženia portfólia pomocou koláčového grafu. V *calculate_metrics* počítame základné metriky na porovnanie modelov s *benchmarkom* ako výnos, volatilitu, Sharpeov a Sortinov pomer, $CVaR_{0.95}$, $Max\text{-}DD$ a $Ave\text{-}DD$.

Modul **plot_portfolio_composition**

- **weights**: optimálny vektor váh získaný optimalizáciou,
- **tickers**: symboly aktív,
- **portfolio_name**: názov grafu.

Modul **calculate_metrics**

- **daily_returns**: denné výnosy aktív, ktoré sa budú porovnávať,
- **r_f**: bezriziková úroková miera,
- **V**: minimálny požadovaný výnos pre Sortinov pomer.

5 Implementácia a spätné testovanie

V nadväznosti na predchádzajúce kapitoly, v ktorých sme predstavili formulácie optimalizačných úloh a štruktúru kódu, sa v tejto časti zameriame na praktické ukážky jeho aplikácie. Prezentované príklady slúžia na ilustráciu správania modelu pri rôznych obmedzeniach a pri použití odlišných mier rizika.

Na demonštráciu využívame historické dáta, prostredníctvom ktorých overujeme robustnosť a flexibilitu navrhnutých prístupov. Tieto príklady zároveň poskytujú návod na použitie kódu pri správe aktív a potvrdzujú použiteľnosť implementovaných matematických postupov. Pri analýze výsledkov spätného testovania sme sa inšpirovali prácou [15].

5.1 Vzťah medzi parametrami α, β a λ v Markowitzovej úlohe

V kapitole 2.1 sme formulovali tri varianty Markowitzovej úlohy (11), (9) a (10). Tieto prístupy sa líšia optimalizačným kritériom, avšak zdieľajú rovnakú množinu prípustných riešení pri vhodnej voľbe parametrov. To nás viedlo k analytickému odvodeniu vzťahov (23) a (37).

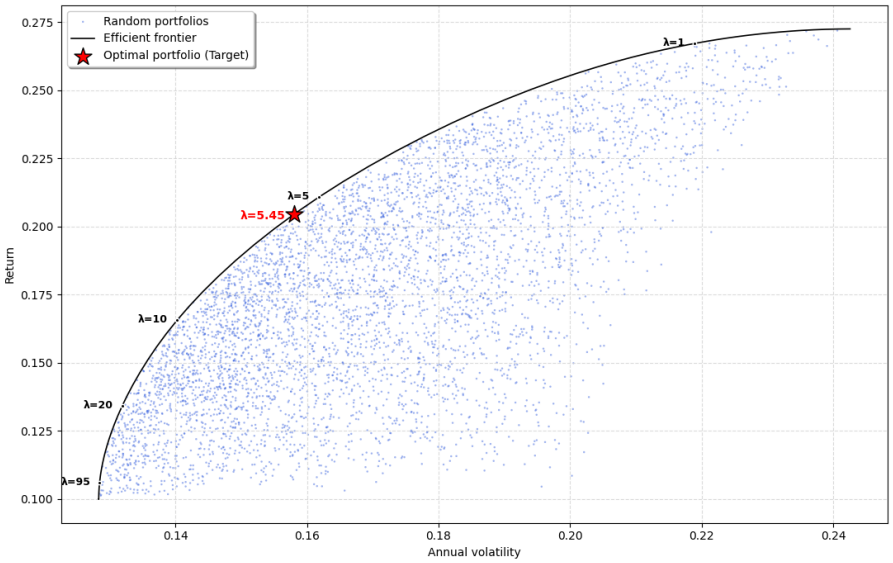
Na overenie týchto vzťahov sme z Yahoo Finance stiahli historické dáta cien aktív zahrnutých v indexe $S\&P\,500$ za obdobie od 1.1.2005 do 31.12.2025. Dáta boli očistené od aktív s neúplnými údajmi. Denné výnosy sme počítali lineárne a očakávané výnosy sme odhadli pomocou geometrického priemeru, ktorý sme preškálovali parametrom $\gamma = 252$, aby sme si ich previedli na ročné hodnoty.

Zvolili sme si parameter $\alpha = 0.05$ a zistili sme, že tejto hodnote bola určená $\lambda = 8.1069$. Zodpovedajúce optimálne portfólio dosahovalo očakávaný výnos 0.7878 s varianciou 0.05, čo je v súlade so zvoleným parametrom α. Relatívne vysoká očakávaná hodnota je spojená s absenciou obmedzenia krátkej pozície. V reálnom svete je takáto stratégia veľmi riskantná, pretože vedie k tomu, že veľká časť portfólia je držaná nakrátko. Pre parameter $\beta = 0.3$ sme našli príslušné $\lambda = 30.4833$. Očakávaný výnos portfólia bol 0.3, v súlade s požadovanou hodnotou β a riziko dosahovalo hodnotu 0.0118.

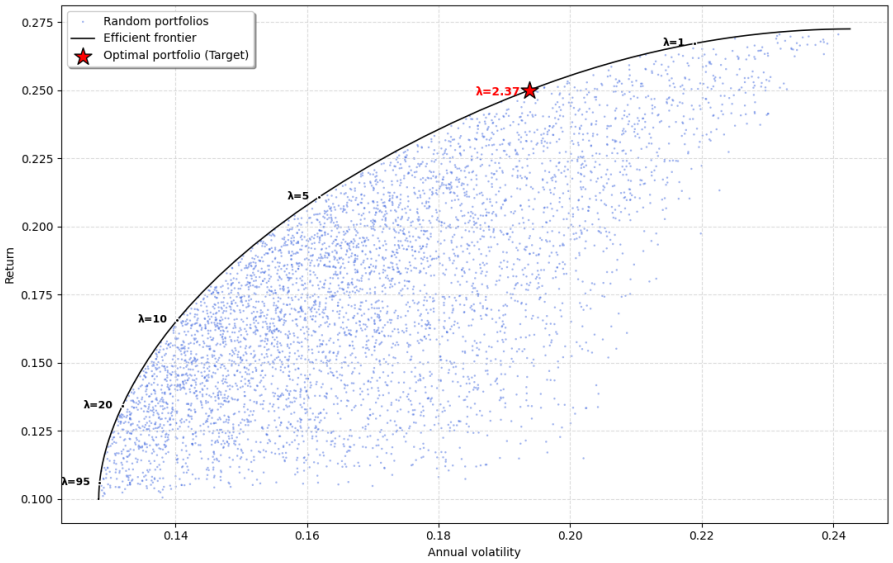
Uvedené výsledky potvrdzujú platnosť analytických vzťahov (23) a (37). Ako sme však už spomínali, nevýhodou je, že ak do úlohy zavedieme dodatočné ohraničenia, tak

analytické vzťahy nie sú platné. Na riešenie tohto problému sme navrhli použiť numerickú metódu nazývanou bisekcia.

Pre náš príklad sme sa rozhodli pre dlhú pozíciu s dodatočným ohraničením $||w||_2^2 \leq 0.05$ pre dosiahnutie lepšie diverzifikovaného portfólia. Pre $\alpha = 0.025$ sme našli príslušné $\lambda = 5.4538$ pri očakávanom výnose 0.2046. Efektívna hranica spolu s náhodnými portfóliami je zobrazená na grafe 2. Pre $\beta = 0.25$ sme dostali príslušné $\lambda = 2.3693$ a očakávané riziko 0.0376. Efektívna hranica je znázornená na grafe 3.



Obr. 2: Graf zobrazujúci efektívnu hranicu



Obr. 3: Graf zobrazujúci efektívnu hranicu

5.2 Jednoduché spätné testovanie

Cieľom tejto kapitoly je vyhodnotiť výkonnosť navrhnutých modelov optimalizácie portfólia na reálnych historických dátach. Testovanie bolo realizované na *out-of-sample* spätného testovania. Dáta boli rozdelené na trénovaciu časť (70%) určenú na odhad parametrov a testovaciu (30%) slúžiacu na vyhodnotenie výkonnosti modelov.

Za vstupné dáta sme si vybrali aktíva z indexu Nasdaq 100 v období 1.1.2015 do 1.1.2025. Trénovacia fáza zahŕňala prevažne obdobie ekonomického rastu, zatiaľ čo testovacia pokrýva obdobie takzvaných medvedích trhov, kedy globálna ekonomika bola v kríze kvôli vyšším úrokovým sadzbám a dôsledkami pandémie koronavírusu. Následne prešlo k prechodu do býčieho trhu, ktorý bol výrazne ovplyvnený rastom technologickými spoločnosťami.

Na odhad očakávaných výnosov sme použili model CAPM. V nej sme si za trh zvolili index $S\&P\,500$ a za bezrizikovú mieru sme vybrali výnos desať ročného dlhopisu *USA* k 15.3.2021 vo výške 1.732%. Denné výnosy sme si previedli na logaritmické a očakávaný výnos trhu sme odhadli pomocou aritmetického priemeru. Pracovali sme s dennými očakávanými hodnotami ($\gamma = 1$).

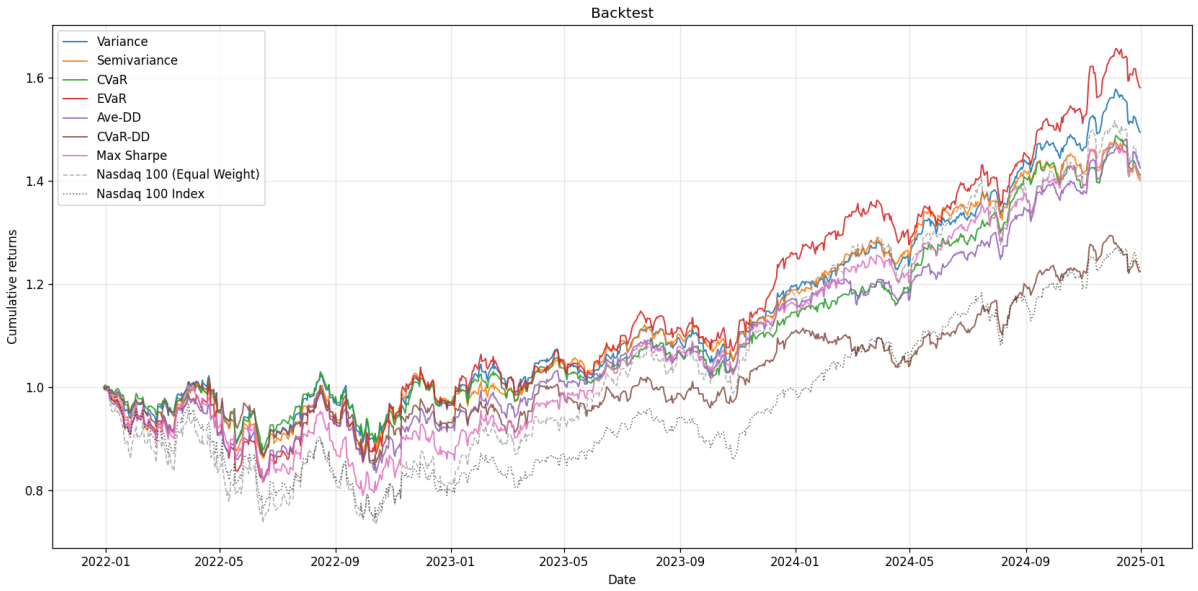
Dosadili sme parameter $\lambda = 5$. Pre dodatočné ohraničenie úlohy sme zvolili ohraničenie kardinality s parametrami $M = 20$, $l = 0$ a $u = 0.2$. Za *solver* sme si zvolili Mosek. Pre úlohu maximalizácie Sharpeovho pomeru sme zvolili $K = 3\,000$. Táto vysoká hodnota bola potrebná na zabezpečenie existencie prípustného riešenia, keďže pri nižších hodnotách dochádzalo k neexistencii riešenia v dôsledku malých hodnôt vstupných dát.

V semivariancii sme si τ vypočítali ako priemerný historický výnos aktív. Za α v $CVaR$, $EVaR$ a $CVaR\text{-}DD$ sme zvolili $\alpha = 0.95$. S týmito nastaveniami rizikových mier budeme pracovať aj v ďalších kapitolách.

Kumulatívne výnosy stratégií a benchmarkov sú znázornené na grafe 4. Z grafu je zrejmé, že stratégie si viedli lepšie v čase recesie ako naivné portfólio a index Nasdaq 100. Avšak v období rastu naivne diverzifikované portfólio prekonalo mnohé stratégie ako $CVaR$, $Ave\text{-}DD$, $CVaR\text{-}DD$. Vo všeobecnosti je naivne diverzifikované portfólio pomerne náročné prekonať vo výnose, naviac zvolením inej hodnoty λ by sme mohli nájsť portfólia, ktoré by dosiahli lepšie výnosy.

Celkovo vidíme, že modely si v čase krízy vedú lepšie ako *benchmark* a z grafu pôsobí,

že najlepšiu výkonnosť vykázal model s rizikovou mierou $EVaR$. Zaujímavé správanie vykazuje klasická Markowitzova úloha. V období recesie si vedie porovnateľne rovnako ako konzervatívnejšie rizikové miery a pôsobí, že bol prekonaný iba modelom s $EVaR$.



Obr. 4: Graf zobrazujúci kumulatívne výnosy stratégií

Na obrázku 6 sú zobrazené váhy jednotlivých aktív v portfóliách. Stratégie založené na variancii a semivariancii majú výrazne odlišne rozložené váhy. To sa dalo čakať, lebo semivariancia počíta len so stratami a to vytvára priestor na to, aby sa portfólio viac koncentrovalo do aktív, ktoré vykazujú výraznejšie odchýlky smerom nahor. Zaujímave je, že $EVaR$ bol veľmi selektívny pri výbere aktív a koncentrovalo sa do výrazne menšieho počtu ako ostatné stratégie. Najviac diverzifikované portfólio bolo maximalizujúce Sharpeov pomer, ktorý prostriedky zameriaval hlavne do technologických gigantov. Celkovo alternatívne miery rizika, ktoré zvyknú byť konzervatívne vyberajú aktíva, ktoré nie sú príliš populárne ale ide o sektor, ktorý zvykne vykazovať menšie riziko. Zaujímavé je, že $CVaR$-DD a $EVaR$-DD mierne povolili obmedzenie na váhy 0.2. To bolo pravdepodobne spôsobené *solverom*, ktorý po zavedení ohraničení týchto dvoch úloh pri numerickom výpočte mierne povolil ohraničenia. Prekročenie nepresiahlo 0.5%, a preto ho nemožno považovať za signifikantné.

V tabuľke 1 uvádzame základné metriky na porovnanie stratégií ako kumulatívny výnos, volatilita, semivolatilita, Sharpeov a Sortinov pomer, 95%-tná $CVaR$, Max-DD a Ave-DD. Niektoré úvahy z obrázka 4 sa potvrdzujú. Napríklad $EVaR$ dosiahol najvyšší

kumulatívny výnos 58.03%. To bolo hlavne zapríčinené tým, že portfólio bolo koncentrované primárne do spoločností Costco, Gilead Sciences a PACCAR Inc. Tieto tri spoločnosti zaznamenali vysoký rast v posledných rokoch a to stojí aj za značným kumulatívnym výnosom celkového portfólia. Takáto koncentrácia ale zároveň viedla k vyšším poklesom portfólia.

Najnižšiu úroveň rizika dosiahlo $CVaR$ vo všetkých rizikových mierach. Zaujímavý rozdiel možno pozorovať medzi *Ave-DD* a *CVaR-DD*. Prvý z nich si viedol dobre s výnosom 42.46%, len o trochu menej ako naivné portfólio, avšak *CVaR-DD* dosiahol kumulatívny výnos do výšky 22.43%. To mohlo byť zapríčinené tým, že sa optimalizácia sústredila na extrémne poklesy a to viedlo k takému výberu aktív, ktoré nemali do budúcna významný rastový potenciál a v období býčích trhov nedokázal držať krok, čo je dobre vidieť na grafe 4 približne od druhej polovice roka 2023.

Prekvapivé výsledky dosiahol Markowitzov model. Zaznamenal druhý najvyšší kumulatívny výnos a najlepšie miery Sharpeovho a Sortinovho pomeru, čo poukazuje na najlepší pomer medzi výnosom a rizikom.

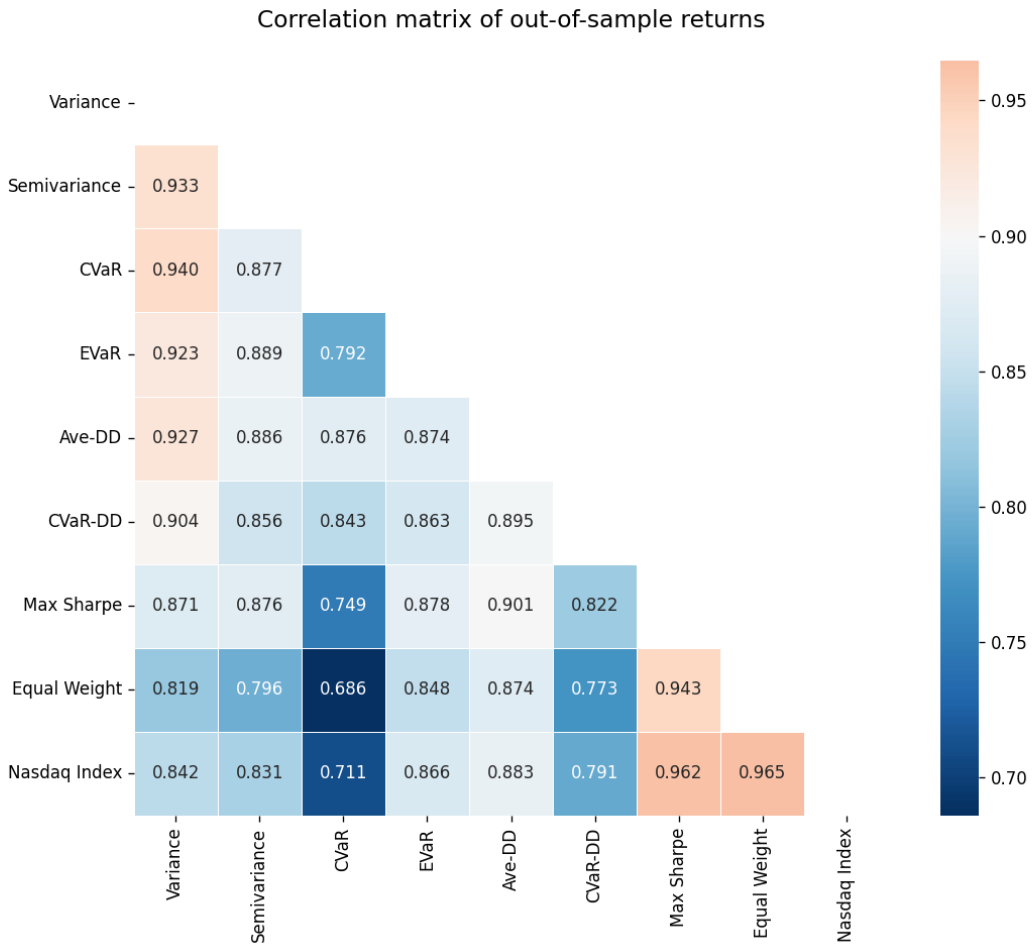
Tabuľka 1: Porovnanie rizikových metrík jednotlivých stratégií

Stratégia	Výnos (%)	Volatatilita (%)	Semivolatilita (%)	Sharpeov pomer	Sortinov pomer	$CVaR_{0.95}$ (%)	*Max-DD* (%)	*Ave-DD* (%)
Variancia	49.38	13.70	9.54	0.920	1.319	−1.92	−15.29	−3.48
Semivariancia	40.03	13.75	9.60	0.760	1.087	−1.94	−14.84	−3.65
$CVaR$	41.12	12.45	8.28	0.847	1.230	−1.69	−13.06	−3.19
$EVaR$	58.03	16.38	11.75	0.909	1.301	−2.38	−18.47	−4.30
Ave-DD	42.46	14.72	10.19	0.759	1.093	−2.09	−17.89	−4.32
$CVaR - DD$	22.43	14.59	9.59	0.417	0.601	−2.02	−16.39	−4.40
Sharpeov pomer	40.57	17.07	12.03	0.650	0.936	−2.49	−21.30	−5.57
Naivné portfólio	42.91	20.74	14.03	0.595	0.858	−2.94	−26.31	−8.08
Nasdaq 100 Index	22.71	17.47	12.30	0.379	0.536	−2.58	−25.43	−9.52

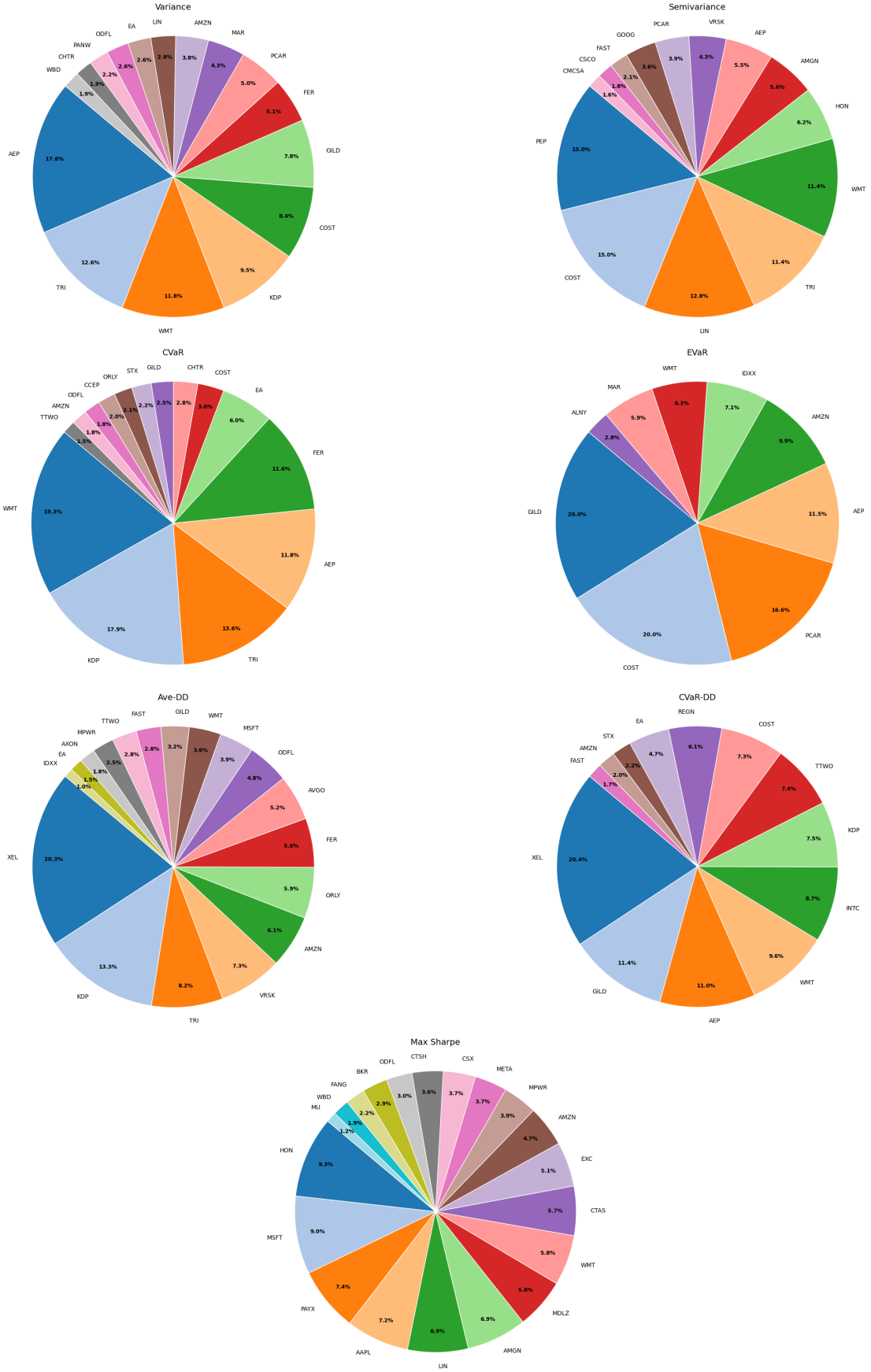
Z celkového pohľadu výsledky potvrdzujú význam použitia optimálizačných úloh pri konštrukcii portfólia. Väčšina modelov prekonala Nasdaq 100 a zároveň dosiahli porovnateľné alebo vyššie výnosy ako naivné portfólio pri nižšej úrovni rizika. Sharpeov a Sortinov pomer preukázali ich vyššiu výkonnosť z hľadiska pomeru výnosu k riziku.

Na záver sme analyzovali korelačnú maticu výnosov, znázornenú na obrázku 5. Vysoká korelácia medzi portfóliom založeným na variancii a ostatnými stratégiami naznačuje, že voľba alternatívnej optimalizačnej úlohy nemusí viesť k zásadne odlišnému správaniu portfólia. Napriek tomu možno pozorovať mierne nižšie korelácie medzi niektorými stratégiami, napríklad medzi *Ave-DD* a *CVaR-DD*, čo poukazuje na rozdiely v ich prístupe k riadeniu portfólia.

Je však dôležité poznamenať, že táto analýza nie je veľmi spoľahlivá bez kontextu ďalších ukazovateľov výnosu a rizika. Vysoká korelácia môže existovať aj medzi stratégiami, ktoré sa z hľadiska výkonnosti výrazne líšia.



Obr. 5: Korelačná matica výnosov medzi portfóliami a *benchmarkom*



Obr. 6: Porovnanie štruktúry portfólií pomocou koláčových grafov.

5.3 Stres testy

Stres testy sú jedným z dôležitých nástrojov spätného testovania. Ich cieľom je analyzovanie správania modelov v konkrétnych trhových situáciach. Tieto situácie môžu byť založené na historických udalostiach, ako sú finančné krízy, recesie alebo obdobia ekonomického rastu, prípadne môžu byť simulované pomocou synteticky generovaných dát (napr. náhly 10% pokles trhu). V tejto kapitole sa zameriame na vybrané príklady takýchto stres testov.

5.3.1 Dotcom bublina

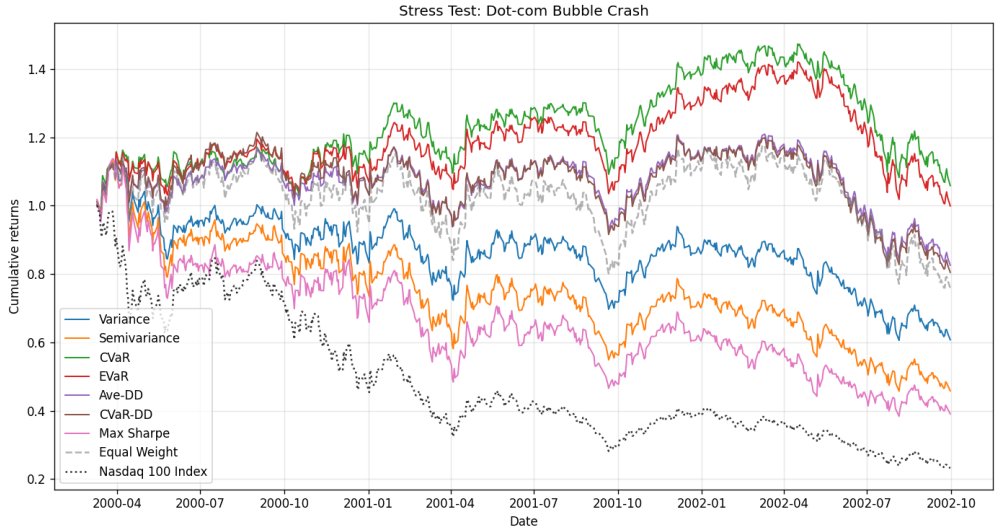
Prvý stres test je zameraný na tzv. dotcom bublinu. išlo o internetovú akciovú bublinu, ktorá rástla v 90. rokoch minulého storočia a vyvrcholila prasknutím 10.3.2000, čo viedlo k výraznému poklesu akciových trhov. V dôsledku zaznamenal index Nasdaq 100 pokles až o 39% [16].

Ako vstupné dáta sme si vybrali akcie, ktoré boli v roku 1998 uvedené na zozname indexu Nasdaq 100 zo stránky https://sites.google.com/site/unofficialnasdaq100site/yearly-year-end-rosters/1998. Trénovacie obdobie sme zvolili od 1.1.1997 do 10.3.2000 a testovacie obdobie do 1.10.2002. Počas načítavania dát sme sa stretli s problémom dostupnosti. Mnohé spoločnosti od roku 1988 zanikli alebo boli odkúpené. Po očistení dát skončili s výberom 27 aktív. Hoci takýto počet neumožňuje plne replikovať historickú štruktúru indexu, poskytuje dostatočný základ na porovnanie jednotlivých stratégií.

Očakávané výnosy aktív boli odhadnuté pomocou aritmetického priemeru historických logaritmických denných výnosov. Zvolili sme parameter $\lambda = 5$ a úlohy boli doplnená o obmedzenie $||w||_2^2 \leq 0.1$, ktoré podporuje diverzifikáciu portfólia. Ako bezriziková miera bola použitá hodnota 5%, ktorá približne zodpovedá výnosom desaťročných štátnych dlhopisov USA v danom období.

Na grafe 7 sú zobrazené kumulatívne výnosy jednotlivých stratégií spolu s naivným portfóliom a indexom. Na grafe môžeme vidieť, že všetky stratégie dosiahli lepší kumulatívny výnos ako Nasdaq 100. Najlepšie si viedli $CVaR$ a $EVaR$, ktorým sa darilo vykazovať v určitých obdobiach zisky. Po nich nasledujú *Ave-DD* a *CVaR-DD*, ktorých nižšia výkonnosť môže byť spôsobená tým, že trénovacie obdobie zachytáva prevažne

rastúci trh, a teda obsahuje relatívne málo výrazných poklesov potrebných na presný odhad rizika. Napriek tomu tieto stratégie dokázali mierne prekonať naivne diverzifikované portfólio. Zato úlohy s varianciou, semivarianciou a Sharpeovým pomerom si viedli horšie ako naivné portfólio. Klasická Markowitzova úloha sa na tomto teste preukazuje ako menej vhodná. Ešte slabšie výsledky dosahuje semivariačný model, čo možno pripísať spomínanému nedostatku negatívnych výkyvov v trénovacích dátach.



Obr. 7: Graf zobrazujúci kumulatívne výnosy stratégií pri dotcom bubline

V tabuľke 2 sú uvedené základné metriky na hodnotenie stratégii. Zistenia korešpondujú s úvahami z grafu 7. Najnižšie straty mali $CVaR$ a $EVaR$, pričom $CVaR$ ako jediná stratégia dosiahla kladný kumulatívny výnos. Po nich nasleduje *Ave-DD* a *CVaR-DD*, ktoré boli o trocha lepšie ako naivné portfólio. Naviac vidíme, že *Ave-DD* dosiahol o trocha lepší kumulatívny výnos ako *CVaR-DD* s nižšími prepadmi a rizikom.

Výsledky tohto stres testu nám potvrdzujú, že alternatívne miery rizika založené na analýze chvostov a *drawdownu* prinášajú konzervatívnejší prístup k optimalizácií portfólia a dokážu lepšie chrániť portfólio počas období výrazných trhových poklesov. Naopak, tradičné prístupy založené na variancii sa v tomto scenári ukazujú ako menej efektívne, keďže nedokážu prekonať naivne diverzifikované portfólio z hľadiska výnosu či rizika.

Tabuľka 2: Porovnanie rizikových metrík jednotlivých stratégií

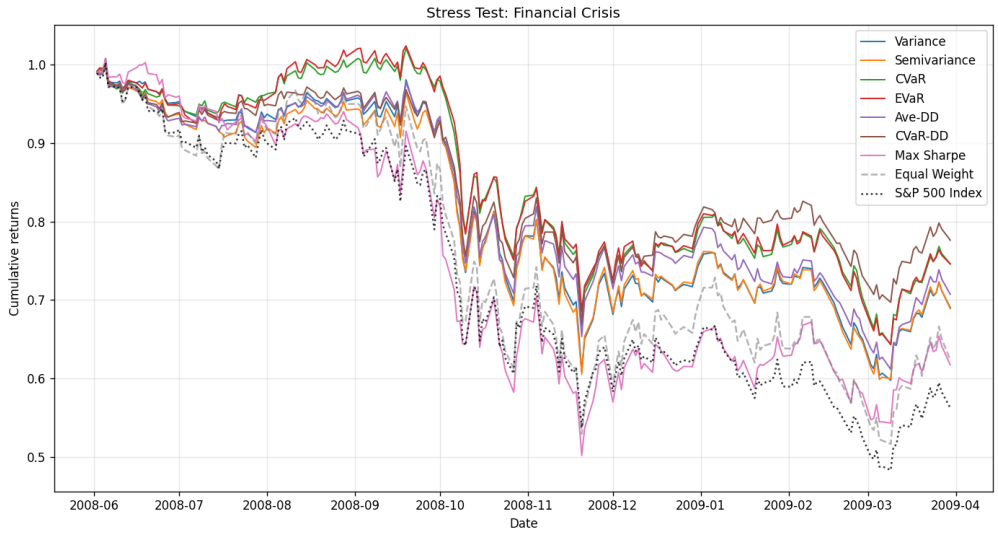
Stratégia	Výnos (%)	Volatatilita (%)	Semivolatilita (%)	Sharpeov pomer	Sortinov pomer	$CVaR_{0.95}$ (%)	*Max-DD* (%)	*Ave-DD* (%)
Variancia	−39.24	35.08	19.40	−0.53	−0.77	−4.12	−46.14	−23.36
Semivariancia	−54.17	43.54	23.73	−0.60	−0.88	−5.13	−59.59	−34.55
$CVaR$	5.84	25.01	13.83	0.01	0.02	−2.92	−28.14	−6.01
$EVaR$	−0.09	26.49	14.95	−0.06	−0.09	−3.12	−29.65	−6.69
Ave-DD	−17.44	28.67	15.88	−0.30	−0.431	−3.39	−31.72	−8.71
$CVaR - DD$	−19.51	29.65	16.59	−0.31	−0.45	−3.54	−33.72	−10.69
Sharpeov pomer	−60.92	49.68	27.37	−0.60	−0.87	−5.97	−66.24	−42.33
Naivné portfólio	−24.11	38.43	20.21	−0.222	−0.331	−4.35	−35.43	−12.00
Nasdaq Composite	−76.78	43.66	24.82	−1.211	−1.691	−5.55	−76.78	−51.95

5.3.2 Finančná kríza

V tejto kapitole sa zameriame na stres test finančnej krízy z roku 2008. Jej začiatky možno datovať do polovice roku 2007, keď rast úrokových sadzieb negatívne vplýval na ceny nehnuteľností. V tomto období sa akciový trh dostal na najvyššie hodnoty a začal postupne klesať až kým nedošlo na jeseň 2008 ku bankrotu spoločnosti Lehman Brothers, ktorý odštartoval prudký prepad trhu. Na rozdiel od dotcom bubliny, ktorá postihla hlavne technologický sektor, finančná kríza mala dopad na celý trh [17], kapitola 4.

Na analýzu sme použili akcie indexu S&P 500 za obdobie od 1.1.2005 do 31.3.2009. Trénovaciu vzorku sme si zobrali do 1.6.2008. Takýmto výberom dát sme chceli zabezpečiť, že vstupné dáta zachytávajú začiatky krízy, kedy modely majú možnosť zachytiť riziko poklesu a podľa toho prispôsobiť stratégiu. Bezriziková miera bola stanovená na úrovni 3%, čo približne zodpovedá výnosu desaťročných štátnych dlhopisov USA v danom období. Do modelov neboli zavedené dodatočné obmedzenia a uvažovali sa výhradne dlhé pozície.

Kumulatívne výnosy sú zobrazené na grafe 8. Z výsledkov vyplýva, že všetky úlohy okrem maximalizácie Sharpeovho pomeru mali lepší priebeh ako naivné portfólio a index. Pred bankrotom Lehman Brothers $CVaR$ a $EVaR$ si viedli najlepšie v období mierneho zotavenia trhu, avšak počas prepadu sa najstabilnejším ukázal byť $CVaR$-DD. Úlohy založené na variancii a semivariancii dosahovali horšiu výkonnosť a mali veľmi podobný priebeh.



Obr. 8: Graf zobrazujúci kumulatívne výnosy stratégií počas finančnej krízy

Tabuľka 3 zobrazuje výsledky metrík stres testu pre jednotlivé stratégie. Zatiaľ čo index S&P 500 stratil až 43.76% svojej hodnoty, najlepšie si hodnotu dokázal udržať $CVaR$-DD stratou 22.36%. Metódy $CVaR$ a $EVaR$ vykazujú veľmi podobne hodnoty výnosu, rizika a výkonnostných mier. To isté sa dá povedať aj o variancii a semivariancii. Stratégia maximalizácie Sharpeovho pomeru dopadla najhoršie. Stratila 0 0.65% viac na hodnote ako naivné portfólio a prešlo si ešte prudšími pádmi. Tým sa nám podobne ako pri stres teste dotcom bubliny ukazuje, že nie je vhodný na použitie v období poklesu akciového trhu.

Výsledky stres testu potvrdzujú, že alternatívne miery rizika sú citlivejšie na riziko, preto sú vhodnejšie na použitie v období ekonomickej krízy. Naviac $CVaR-DD$ dosiahla trocha lepšie výsledky ako $CVaR$, čo poukazuje na to, že môže byť citlivejší na riziko.

Tabuľka 3: Porovnanie rizikových metrík jednotlivých stratégií

Stratégia	Výnos (%)	Volatatilita (%)	Semivolatilita (%)	Sharpeov pomer	Sortinov pomer	$CVaR_{0.95}$ (%)	*Max-DD* (%)	*Ave-DD* (%)
Variance	−30.95	38.21	26.26	−1.06	−1.46	−5.55	−40.17	−18.80
Semivariancia	−31.10	39.47	26.65	−1.08	−1.40	−5.66	−40.02	−19.28
$CVaR$	−25.38	33.46	22.85	−0.98	−1.34	−5.03	−37.02	−16.19
$EVaR$	−25.40	33.99	23.05	−0.96	−1.32	−4.92	−37.19	−16.52
Ave-DD	−29.27	35.74	24.37	−1.07	−1.48	−5.12	−38.72	−17.63
CVaR-DD	−22.36	33.17	22.80	−0.85	−1.17	−4.89	−32.85	−15.15
Sharpeov pomer	−38.26	48.34	34.30	−1.02	−1.38	−7.11	−50.25	−26.06
Naivné portfólio	−37.61	51.89	33.53	−0.90	−1.24	−7.15	−48.72	−24.49
S&P 500 Index	−43.76	48.05	32.06	−1.27	−1.73	−6.96	−51.82	−26.93

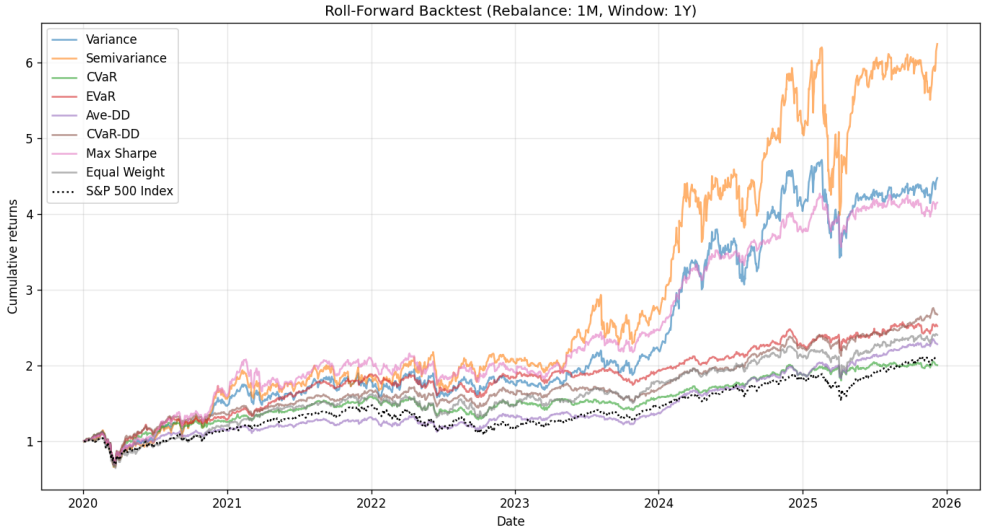
5.4 Spätné testovanie s posuvným oknom

Jednoduché spätné testovanie simuluje investičnú stratégiu založenú na jednorázovom nákupe aktív a ich následnom držaní počas celého investičného horizontu. V praxi však investori často pristupujú k aktívnej správe portfólia, ktorá zahŕňa pravidelnú rebalanciu. Tento prístup sa dá simulovať pomocou tzv. posúvaného okna. Veľkosť okna predstavuje počet dní určených na trénovanie. Po nájdení optimálneho riešenia sa následne okno posúva o zvolený časový interval a optimalizačná úloha sa vyrieši na nových dátach. Takýto prístup umožňuje flexibilnejšie reagovať na meniace sa trhové podmienky.

Spätné testovanie s posuvným oknom sme vykonali na dátach akcií indexu S&P 500 od 1.1.2019 do 1.1.2026. Veľkosť okna sme si zvolili 252 dní, čo približne zodpovedá jednému roku. Posun okna bo nastavený na 21 dní, približne o mesiac. Zvolili sme si $\lambda = 5$. Ako dodatočné ohraničenia sme zaviedli koncentráciu portfólia z kapitoly 2.3.7 s parametrami $A = 0.8$ a $B = 0.05$. Okrem prvej iterácie sme použili ohraničenie obratu pre $k = 0.3$, kde w_0 predstavuje optimálne riešenie z predchádzajúcej periódy. Za bezrizikovú mieru sme si zvolili 0.04%, čo približne zodpovedá výnosu desaťročných štátnych dlhopisov USA v analyzovanom období.

Na grafe 9 sú zobrazené kumulatívne výnosy jednotlivých stratégií. Z pohľadu vývoja výnosu najlepšie výsledky dosiahla úloha so semivarianciou. Tým, že sa pozerá iba na negatívne odchýlky od stanovenej hodnoty dokázala v rýchlo rastúcom trhu nájsť stratégiu

s najvyšším výnosom. Za ňou sa drží klasická Markowitzova úloha, ktorá v období rastu nedokázala dosiahnuť vysoké výnosy ako semivariancia. Podobne si viedla úloha maximalizácie Sharpeovho pomeru. Úlohy s alternatívnymi mierami dosiahli nižšie výnosy. To bolo pravdepodobne spôsobené ich konzervatívnejším prístupom k riziku, ktorý viedol k nižšiemu nákupu rýchlo rastúcich spoločností. Tento rozdiel je lepšie vidno ku koncu roka 2023, keď rizikovejšie metódy zaznamenali výraznejší rast hodnoty.



Obr. 9: Graf zobrazujúci kumulatívne výnosy stratégií pre posúvajúce okno

Tabuľka 4 uvádza porovnanie výkonnostných a rizikových metrík jednotlivých stratégií. Najvyšší kumulatívny výnos dosiahla úloha založená na semivariancii vo výške 524.66%. Po nej nasledovala Markowitzova úloha a maximalizácia Sharpeovho pomeru. Tieto stratégie boli aj rizikovejšie ako *benchmarky*. Zvyšné stratégie boli menej rizikové, ale vo výnosnosti iba $EVaR$ a $CVaR\text{-}DD$ prekonali naivné portfólio. Najvyššie hodnoty Sharpeovho a Sortinovho pomeru dosiahla úloha maximalizujúca Sharpeov pomer.

Tabuľka 4: Porovnanie rizikových metrík jednotlivých stratégií

Stratégia	Výnos (%)	Volatatilita (%)	Semivolatilita (%)	Sharpeov pomer	Sortinov pomer	$CVaR_{0.95}$ (%)	*Max-DD* (%)	*Ave-DD* (%)
Variance	347.56	29.23	22.90	0.88	1.23	−4.45	−41.08	−8.08
Semivariancia	524.66	36.06	29.11	0.93	1.29	−5.60	−42.62	−8.66
$CVaR$	100.21	18.17	16.10	0.52	0.71	−2.61	−40.93	−4.65
$EVaR$	151.87	19.44	16.30	0.70	0.98	−2.70	−38.23	−4.20
Ave-DD	128.00	17.83	16.26	0.65	0.87	−2.58	−38.96	−4.56
CVaR-DD	167.05	17.84	15.72	0.80	1.10	−2.55	−39.03	−4.30
Sharpeov pomer	315.02	24.10	18.88	0.954	1.36	−3.56	−36.86	−6.57
Naivné portfólio	140.13	21.71	17.62	0.61	0.86	−3.22	−38.20	−5.17
S&P 500 Index	110.15	21.02	17.11	0.51	0.72	−3.19	−33.92	−7.25

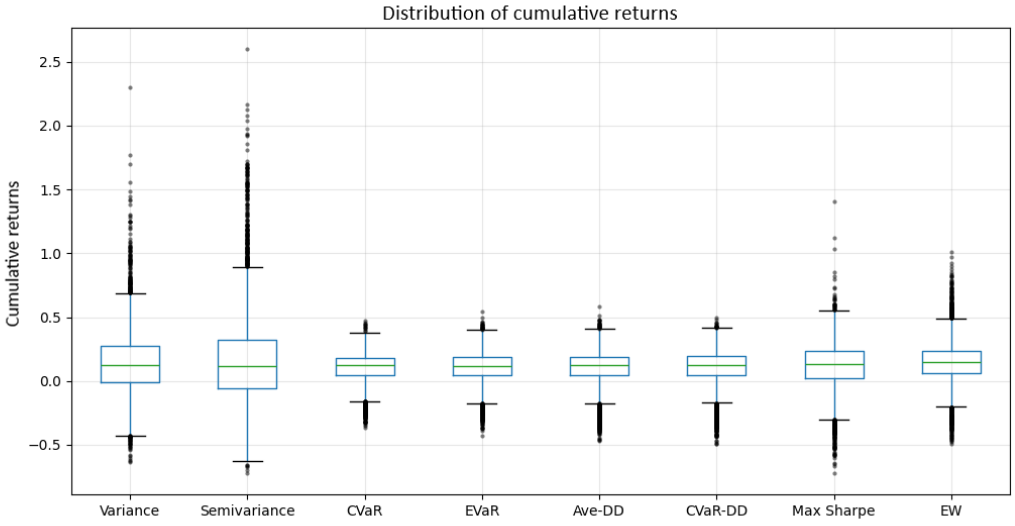
5.5 Viacnásobné spätné testovanie

Nevýhodou spätného testovania vykonaného na konkrétnom časovom intervale je, že závery vyvodené o modelom závisia od špecifických podmienkach na trhu a zvolených parametroch. Preto je všeobecná platnosť vyvodených záverov diskutabilná. Tento problém sa dá čiastočne vyriešiť pomocou viacnásobného náhodného testovania. Princíp spočíva v tom, že z rozsiahlejšej databázy je náhodne vybratá vzorka aktív a časové obdobie na trénovanie a testovanie. Takéto náhodné testy sa zopakujú viackrát a tým sa získajú robustnejšie výsledky z vyššieho počtu testov.

Na ukážku takéhoto testu sme si zobrali dáta akcií z indexu S&P 500 v období od 1.1.2005 do 1.1.2026. Z týchto dát bolo náhodne vyberaných 504 obchodovaných dní. Okno predstavovalo 252 dní a posúvalo sa každých 21 dní. Ako bezrizikovú mieru sme si zvolili 10 ročné vládne dlhopisy vlády USA, ktoré sa vyberali podľa posledného dňa v okne. V každej iterácii sa náhodne vybralo 100 aktív a vygenerovala sa $\lambda \in [1, 10]$. Krátku pozíciu sme nepovolili. Celkovo sme vykonali takýchto náhodných testov 5 000. Vzhľadom na výpočtovú náročnosť bol implementovaný modul *ensure_solution*, ktorý zabezpečuje stabilitu algoritmu v prípade numerických problémov pri jednotlivých iteráciách.

Distribúcia kumulatívnych výnosov je znázornená na grafe 10. Najvyšší rozptyl výnosov vykazuje úloha založená na semivariancii. Táto metóda zároveň dosahovala najvyššie zisky, ale zároveň bola najviac náchylná na straty. Po nej nasleduje Markowitzova úloha

so stále pomerne vysokým rozptylom. Obe tieto metódy spolu s úlohou maximalizujúcou Sharpeov pomer prekonávajú rozptyl naivného portfólia, čo poukazuje na vyšší potenciálny výnos za cenu väčšej nestability. Metódy *Ave-DD* a $CVaR$-DD na grafe vykazujú podobné správanie a nepôsobia byť lepšou alternatívou k naivnému portfóliu z hľadiska nižších výnosov. Úlohy zamerané na $CVaR$ a $EVaR$ sa preukázali byť najstabilnejšími, čo z nich robí vhodnú voľbu pre investorov preferujúcich stabilné portfólia.



Obr. 10: Graf zobrazujúci rozptyl výnosov portfólií

Tabuľka 5 sumarizuje priemerné metriky z vykonaných testov. Najvyšší priemerný výnos dosiahla semivariancia, avšak za cenu neúmerného rizika. Po nej pokračuje Markowitzova úloha s nižším priemerným výnosom a horšími mierami rizika ako naivné portfólio. Tým sa javí byť menej efektívna vo väčšine prípadov. Z tohto pohľadu si aj úloha maximalizujúca Sharpeov pomer viedla horšie ako naivné portfólio. Metódy založené na analýze chvostov rozdelenia a *drawdownu* dosiahli síce nižšie priemerné výnosy ako *benchmark*, ale podarilo sa im ho prekonať v rizikových mierach. Tým preukázali vyššiu mieru stability. Pomerové ukazovatele výkonnosti poukazujú na to, že z pohľadu vzťahu medzi výnosom a rizikom sú všetky modely menej výkonné ako naivné portfólio. Spomedzi modelov boli najlepšie ohodnotené $CVaR$-DD a $EVaR$-DD, ktoré získali rovnaké hodnoty Sharpeovho pomeru a $CVaR$-DD mal o 0.02 vyšší Sortinov pomer. Zato najhoršie ohodnoteným bola semivariancia. To bolo zapríčinené jej vysokou volatilitou a semivolatilitou, ktoré boli o viac ako dvojnásobok vyššie ako napríklad $CVaR$-DD, pričom dosiahnutý výnos nebol

dostatočný na kompenzáciu tohto rizika.

Tabuľka 5: Porovnanie priemerných rizikových metrík

Stratégia	Výnos (%)	Volatatilita (%)	Semivolatilita (%)	Sharpeov pomer	Sortinov pomer	$CVaR_{0.95}$ (%)	*Max-DD* (%)	*Ave-DD* (%)
Variancia	14.21	23.42	16.96	0.59	0.92	−3.48	−19.00	−7.36
Semivariancia	16.82	30.25	21.94	0.48	0.80	−4.47	−23.83	−9.94
$CVaR$	10.46	13.67	9.92	0.81	1.21	−2.02	−11.15	−3.64
$EVaR$	10.58	14.34	10.36	0.78	1.16	−2.12	−11.54	−3.81
Ave-DD	10.43	14.91	10.94	0.79	1.19	−2.23	−12.18	−4.10
CVaR-DD	10.76	14.55	10.60	0.81	1.23	−2.16	−11.95	−4.11
Sharpeov pomer	12.16	19.81	14.29	0.69	1.05	−2.94	−15.96	−5.76
Naivné portfólio	14.79	18.45	13.33	0.96	1.43	−2.71	−14.21	−4.27

5.6 Zhrnutie výsledkov spätného testovania

Realizované spätné testovania poskytli podrobnejší pohľad na vlastnosti a výkonnosť jednotlivých optimalizačných úloh.

Najskôr sme vykonali dva stres testy založené na historických krízových obdobiach. Prvý stres test zameraný na dotcom bublinu ukázal, že z portfólií vytvorené krátko pred krízou si najlepšie viedli úlohy implementujúce rizikové miery $CVaR$ a $EVaR$. Druhý test pozostával z analýzy reakcií na finančnú krízu z 2007-2009, kde najlepšie výsledky dosiahla úloha zameraná na $CVaR$-DD. To bolo asi spôsobené tým, že trénovacie dáta zachytávali obdobie mierneho poklesu trhu pred prehĺbením krízy a *drawdown* to vedel dobre zohľadniť. Oba testy poukazujú na to, že modernejšie prístupy zamerané na analýzu chvostov a *drawdownu* sú efektívnejšie ako tradičnejšie metódy v období kríz.

Ďalšiu metódu spätného testovania bolo posuvné okno, ktoré dokáže spoľahlivo simulovať a testovať aktívnu správu aktív. Túto metódu sme aplikovali na akciách S&P 500 v období od 1.1.2019 do 1.1.2026 s veľkosťou okna 252 dní a posunom o 21 dní. Pri tomto teste klasickejšie metódy a úloha so semivarianciou ako rizikovou mierou mali vyšší výnos, avšak pri vyššej miere rizika. Naopak, úlohy s $CVaR$, $EVaR$, *Ave-DD* a *CVaR-DD* sa ukázali byť stabilnejšie.

Aby sme sa vyhli vplyvu špecifických vstupov, sme vykonali viacnásobné náhodné spätné testovanie. Test pozostával z 5 000 iterácií na náhodných 100 aktívach z indexu S&P 500 s náhodne vybratým 251-dňovým oknom posúvaným každých 21 dní následujúcich 251 dní pre náhodnú $\lambda \in [1, 10]$. To nám umožnilo testovať veľký počet dát, ktoré minimalizovali vplyv konkrétneho historického obdobia a stratégie.

Zistenia ukázali, že úloha so semivarianciou dosahovala najvyššie priemerné výsledky, avšak za cenu neúmerne vysokého rizika. Klasická Markowitzova formulácia a úloha maximalizujúca Sharpeov pomer vykazovali nižší výnos a vyššie riziko ako naivné portfólio, čo poukazuje na ich citlivosť voči chybám v odhadoch. To poukazuje na to, že sú menej efektívne a neponúkajú žiadnu výhodu voči naivnému portfóliu.

Naopak úlohy založené na analýze chvostov a *drawdownu* sa preukázali byť robustnejšie. Tieto stratégie vykazovali najnižší rozptyl výsledkov a najvyššiu stabilitu. Z hľadiska výnosu medzi nimi dominova $CVaR\text{-}DD$, ktorý dosiahol aj najlepšie hodnotenie výkonnostných mier. Síce celkovo tieto úlohy neviedli k vyšším výnosom ako naivné portfólio, tak z hľadiska rizika sa ukázali byť ako najlepšou alternatívou pre investorov, ktorých prioritou je ochrana pred prudkými trhovými výkyvmi a minimalizáciou strát hlavne v obdobiach krízy.

Výsledky ukazujú, že naivná diverzifikácia portfólia predstavuje silný *benchmark*, ktorý nie je ľahké prekonať pre sofistikované metódy optimalizácie. Napriek tomu prístupy založené na analýze chvostov a *drawdowne* prinášajú pridanú hodnotu v podobe stability a efektívnejšej kontroly rizika.

Na záver je dôležité zdôrazniť, že závery vyvodené z výsledkov spätného testovania nezaručujú budúcu výkonnosť modelov. Testy boli realizované na historických dátach a úlohy sa nemusia správať rovnako v iných trhových podmienkach. Zároveň sú výsledky ovplyvnené voľbou parametrov a obmedzení úloh.

Záver

V tejto práci sme sa venovali analýze klasických a moderných metód optimalizácie portfólia. Hlavným cieľom práce bolo skúmať mnohé optimalizačné úlohy a aplikovať ich v programovacom jazyku Python. Následne nás zaujímalo, či pokročilé miery rizika dokážu na dynamickom finančnom trhu prekonať tradičnú Markowitzovu úlohu pomocou rôznych metód spätného testovania.

Dôležitou teoretickou časťou práce bolo oboznámenie čitateľa so základmi finančnej matematika, formulácia matematických úloh a odvodením analytických vzťahov medzi parametrami α, β a λ v rôznych formuláciách Markowitzovej úlohy. Zistili sme, že pri absencii dodatočných obmedzení sú tieto prístupy matematicky ekvivalentné, čo umožňuje definovať λ pomocou požadovaného výnosu alebo variancie. V prípade zavedenia dodatočných ohraničení do úlohy analytické vzťahy nie sú platné, preto sme navrhli použitie metódy bisekcie, ktorá stále dokáže nájsť vhodné λ. Tieto teoretické zistenia sme overili na reálnych dátach a preukázali, že sú správne.

Programovací rámec v jazyku Python, ktorý sme k danej práci vytvorili, je funkčný nástroj na implementáciu týchto metód a poskytuje základ pre ďalší výskum v oblasti optimalizačných úloh zameraných na správu portfólia.

Medzi možné smery rozvoja patrí implementácia iných metód optimalizácie portfólia. Napríklad metóda parity rizika, ktorá sa snaží optimalizovať portfólio tak, aby každé aktívum prispievalo predom určenou mierou rizika, čím poskytuje odlišný prístup k riziku ako prezentované úlohy. Poprípade vyžitie iných oblastí matematiky ako metódy zhlukov, ktoré sa snažia nájsť prirodzené skupiny aktív.

Priestor je aj pre rozšírenie formulácie úlohy. Ako napríklad pridanie nákladov vyplývajúcich z realizovanej transakcie, držania aktív alebo daní. Poprípade implementácia dodatočných ohraničení, ktoré by poskytli viac možnosti na špecifikáciu charakteru portfólia.

Najviac prínosnou by mohla byť aplikácia robustného programovania. Úlohy prezentované v tejto práci majú jeden zásadný nedostatok. Očakávaný výnos a riziko odhadujeme na základe historických dát, preto parametre so sebou nesú istú mieru chyby v odhade. Tento fakt je však v samotných úlohách ignorovaný, resp. sa predpokladá, že k chybovosti nedochádza. Robustné programovanie by priamo umožnilo implementovať chybovosť odhadov, čím by sa mohla zvýšiť efektivita portfólií v reálnych trhových podmienkach.

Zoznam použitej literatúry

[1] Markowitz H.M.: Portfolio Selection, The Journal of Finance 7, no. 1: 77–91, (1952), 15 s., dostupné na internete (3.10.2025): https://doi.org/10.2307/2975974

[2] Zákopčan M.: Základy finančíctva (2024)

[3] Palomar D. P.: Portfolio Optimization: Theory and Application, Cambridge University Press (2025), 608 s., dostupné na internete (21.9.2025): https://portfoliooptimizationbook.com/portfolio-optimization-book.pdf

[4] Brealey R., Meyers S.: Principles of Corporate Finance, McGraw-Hill (1991)

[5] Brooks, C. (2019). Introductory Econometrics for Finance (4th ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

[6] Rollinger T. N., Hoffman S. T.: Sortino: a 'sharper'ratio. Chicago, Illinois: Red Rock Capital $P3 - -8$ (2013), dostupné na internete (18.3.2025): http://www.redrockcapital.com/Sortino__A__Sharper__Ratio_Red_Rock_Capital.pdf

[7] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: Kapitoly z finančnej matematiky (2005)

[8] Boyd S., Vandenberghe L.: Convex Optimization, Cambridge University Press (2004), 714 s., dostupné na internete (21.9.2025): https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf

[9] Trnovská M., Hamala M.: Nelineárne programovanie, Epos (2012)

[10] Patzelt M.: Sharpeov pomer a súvisiace úlohy optimalizácie portfólia (2024), dostupné na internete (16.10.2025): https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioForm&sid=A6A9937D4AB687F47BCB8BA9E4AF

[11] Che, B., Lin Y., Zeng W.: The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem using a local search-based multi-objective evolutionary algorithm. Appl Intell 47, 505–525 (2017), dostupné na internete (16.10.2025): https://doi.org/10.1007/s10489-017-0898-z

[12] Bienstock D.: Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems. Mathematical Programming 74, 121–140 (1996), dostupné na internete (16.10.2025): https://doi.org/10.1007/BF02592208

[13] Estrada J.: Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach. (2007), dostupné na internete (16.10.2025): https://doi.org/10.2139/SSRN.1028206

[14] Ahmadi-Javid A.: Entropic Value-at-Risk: A New Coherent Risk Measure. J Optim Theory Appl 155, 1105–1123 (2012), dostupné na internete (29.4.2026): https://doi.org/10.1007/s10957-011-9968-2

[15] Alshamsi R. A. M.: Benchmarking Portfolio Models By Backtesting, Khalifa University of Science and Technology, dostupné na internete (18.3.2026): https://khazna.ku.ac.ae/ws/portalfiles/portal/27897832/file

[16] Wheale P. R., Amin L. H.: Bursting the dot.com "Bubble': A Case Study in Investor Behaviour. Technology Analysis & Strategic Management, 15(1), 117–136 (2003), dostupné na internete (20.4.2026): https://doi.org/10.1080/0953732032000046097

[17] Chari V., Christiano J., Kehoe P.:Facts and Mythis about the Financial Crisis of 2008. Federal Reserve Bank of Minneapolis (2008), dostupné na internete (20.4.2026):https://doi.org/10.21034/wp.666