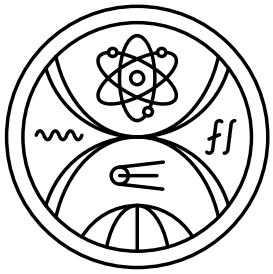
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA SO STOCHASTICKOU DOMINANCIOU V OHRANIČENIACH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2026 Bc. Terézia DURAČINSKÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA SO STOCHASTICKOU DOMINANCIOU V OHRANIČENIACH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Bratislava 2026 **Bc. Terézia DURAČINSKÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Terézia Duračinská
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimalizácia portfólia so stochastickou dominanciou v ohraničeniach
Portfolio optimization and stochastic dominance constraints

Anotácia: Koncept stochastickej dominancie vznikol ako nástroj na hodnotenie na porovnávanie náhodných premenných, najmä v ekonomických a finančných aplikáciách, kde sa stretávame s neistotou a rizikom. Jeho cieľom je poskytnúť formalizovaný spôsob, ako rozhodovať medzi alternatívami, ktoré zahŕňajú neisté výsledky, bez nutnosti explicitného stanovovania preferencií alebo presného vyčíslenia rizika. Pri optimalizácii portfólia je jeho využitie časté najmä v ohraničeniach úlohy.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA SO STOCHASTICKOU DOMINANCIOU V OHRANIČENIACH“, vrátane všetkých jej príloh a obrázkov, som vypracovala samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použila v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity, a že ich použitie je v práci vhodným spôsobom označené.

Miesto a dátum: ..... Titul, meno a priezvisko: .....

Poďakovanie Rada by som sa na tomto mieste úprimne poďakovala vedúcej mojej diplomovej práce, Mgr. Jane Szolgayovej, PhD., za odborné vedenie, cenné rady, trpezlivosť a čas, ktorý mi venovala počas jej spracovania. Zároveň ďakujem svojej rodine a blízkym za podporu, pochopenie a motiváciu počas celého štúdia. Moje poďakovanie patrí aj všetkým, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli pri vypracovaní tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

DURAČINSKÁ, Terézia: *Optimalizácia portfólia so stochastickou dominanciou v ohraničeniach* [diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2026, 86.s

Diplomová práca sa zaoberá stochastickou dominanciou a jej využitím pri hľadaní optimálneho portfólia. Práca uvádza teoretické poznatky o stochastickej dominancii prvého a druhého rádu. Teoretická časť práce sa venuje kvalitatívnemu porovnaniu dominancie v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu a mean-variance prístupu, pričom analyzuje aj vzťahy medzi týmito typmi dominancie pre normálne a rovnomerne rozdelené spojité náhodné premenné. Aplikačná časť vychádza z modelu prezentovaného v odbornej literatúre, ktorý je následne rozšírený prostredníctvom relaxácie jedného z obmedzení. V práci sú využité reálne historické údaje aktív z amerického indexu S&P 500. Numerická analýza umožňuje prostredníctvom vhodne zvolených referenčných modelov a metrík porovnať vlastnosti jednotlivých prístupov z hľadiska výnosnosti a rizikovosti portfólií. Zároveň sa ukazuje, že zmena hodnoty sledovaného parametra významne ovplyvňuje charakteristiky výsledného portfólia.

Kľúčové slová: Markowitzová optimalizácia portfólia, riziko, stochastická dominancia, očakávaný výnos, CVaR, asymetria

Abstract

DURAČINSKÁ, Terézia: *Portfolio optimization and stochastic dominance constraints* [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2026, 86.p

The diploma thesis deals with stochastic dominance and its application in the search for an optimal portfolio. It presents the theoretical background of first-order and second-order stochastic dominance. The theoretical part focuses on a qualitative comparison between second-order stochastic dominance and the mean–variance approach, while also analysing the relationships between these types of dominance for continuously distributed random variables with uniform distributions and normal distributions. The practical part is based on a model presented in the existing literature, which is subsequently extended through the relaxation of one of its constraints. The thesis uses real historical data of assets from the S&P 500 index. The numerical analysis makes it possible to compare the properties of the considered approaches in terms of portfolio return and risk using appropriately selected benchmark models and performance measures. The results also indicate that changes in the value of the observed parameter significantly affect the characteristics of the resulting portfolio.

Keywords: Markowitz portfolio optimization, risk, stochastic dominance, expected return, CVaR, skewness

Obsah

Úvod **9**

1 Stochastická dominancia **11**

1.1 Stochastická dominancia prvého rádu (FSD) 12

1.2 Stochastická dominancia druhého rádu (SSD) 13

1.3 Vzťah medzi mean–variance kritériom a stochastickou dominanciou druhého rádu 16

1.4 Rovnomerné rozdelenie a SSD dominancia 23

1.5 Vzťah medzi stochastickou dominanciou druhého rádu a CVaR 27

2 Optimalizačný model so stochastickou dominanciou v ohraničeniach **30**

2.1 Základná formulácia modelu 30

2.2 Štrukturálne predpoklady modelu 31

2.3 Ekvivalentná formulácia ako úloha lineárneho programovania 32

2.4 Rozšírenie modelu pomocou relaxácie SSD ohraničenia 33

3 Charakteristika dát a metodológia porovnávania modelov **36**

3.1 Popis dát a výber vzorky 36

3.2 Miery asymetrie a koncentrácie rozdelenia 40

3.3 Porovnávané optimalizačné modely alokácie portfólia 44

3.4 Hodnotiace metriky výkonnosti portfólií 48

4 Aplikácia modelu na dáta **54**

4.1 Dáta a ich základná charakteristika 54

4.2 Výsledky optimalizácie portfólia SSD modelu 56

4.3 Out of sample analýza (M2) modelu 60

4.4 Výsledky optimalizácie portfólia rozšíreného modelu 66

Záver **70**

Zoznam použitej literatúry **72**

Kódy **77**

Príloha A **78**

Príloha B **81**

Príloha C **83**

Príloha D **86**

Úvod

Problematika optimálnej alokácie aktív patrí medzi často riešené témy nielen v odbornej literatúre, ale aj v investičnej praxi. Investori sa pri rozhodovaní snažia nájsť také portfólio, ktoré pri prijateľnej miere rizika umožní dosiahnuť čo najvyšší výnos. Táto diplomová práca sa preto zameriava na návrh modelu optimálneho portfólia založeného na princípoch stochastickej dominancie.

Jedným z najznámejších modelov v oblasti optimalizácie portfólia je Markowitzov model, predstavený v práci [26], ktorý tvorí základ modernej teórie portfólia. Tento model, aj napriek svojej popularite, má aj viacero nedostatkov. Jedným z nich je napríklad skutočnosť, že penalizuje kladné aj záporné odchýlky od očakávaného výnosu rovnakým spôsobom. Z pohľadu investora sú však pri nepovolených krátkych pozíciách kladné odchýlky vítané, zatiaľ čo nežiaducimi sú predovšetkým záporné odchýlky.

Koncept stochastickej dominancie predstavuje alternatívny spôsob, ako porovnávať jednotlivé investície. Rozlišujeme pritom stochastickú dominanciu prvého, druhého a vyšších rádov. V tejto práci sa zameriavame na využitie stochastickej dominancie druhého rádu v modeloch voľby portfólia. Stochastická dominancia druhého rádu vyjadruje, že investícia je preferovaná všetkými racionálnymi rizikovo averznými investormi, a to nezávisle od ich konkrétnej funkcie užitočnosti. Model, s ktorým v tejto práci pracujeme, bol predstavený Dentchevou a Ruszczyńským v roku 2006 [9].

Hlavným cieľom práce je priblížiť čitateľovi koncept stochastickej dominancie v kontexte výberu optimálneho portfólia, rozšíriť existujúci model založený na stochastickej dominancii druhého rádu a porovnať ho s tradičnejšími modelmi, ktoré sú v investičnej praxi bežne využívané.

V prvej kapitole sa podrobnejšie venujeme vzťahu medzi stochastickou dominanciou druhého rádu a dominanciou podľa mean-variance pravidla. Zároveň prezentujeme systematické porovnanie rovnomerne rozdelených náhodných premenných a taktiež aj pre normálne rozdelenie náhodných premenných z pohľadu stochastickej dominancie aj mean-variance prístupu. V závere kapitoly uvádzame súvislosť stochastickej dominancie druhého rádu s podmienenou hodnotou v strate (CVaR), ktorá slúži ako základ pri formulácii optimalizačných úloh využívaných v numerickej časti práce.

V druhej kapitole sa zameriavame na opis modelu na hľadanie optimálneho portfólia

využívajúceho stochastické ohraničenia. Model je formulovaný ako optimalizačná úloha maximalizácie očakávaného výnosu portfólia pri súčasnom splnení podmienky stochastickej dominancie voči zvolenému benchmarku, napríklad trhovému indexu. Cieľom modelu je identifikovať portfólio s vyšším očakávaným výnosom a zároveň priaznivejšími hodnotami ukazovateľa CVaR. Súčasťou kapitoly je aj predstavenie rozšírenej verzie modelu, ktorá vzniká relaxáciou podmienky stochastickej dominancie.

Tretia kapitola sa venuje opisu použitých dát, ich frekvencie a základných štatistických charakteristík. Pozornosť je zameraná najmä na analýzu šikmosti a špicatosti výnosov, pričom sú predstavené aj štatistické testy využité na overenie týchto vlastností v analyzovaných dátach. Kapitola zároveň predstavuje referenčné modely, s ktorými budú porovnávané modely založené na stochastickej dominancii druhého rádu, ako aj metriky použité na hodnotenie ich výkonnosti. Súčasťou kapitoly je aj opis bootstrapovej metódy, ktorá slúži na overenie stability získaných výsledkov a posúdenie, či pozorované závery nie sú iba dôsledkom náhodnosti v dátach.

V poslednej kapitole prezentujeme získané numerické výsledky. Portfóliá vytvorené modelmi zohľadňujúcimi stochastickú dominanciu druhého rádu porovnávame s referenčnými prístupmi na základe vybraných finančných metrík a bootstrapovej analýzy. Súčasťou hodnotenia je aj out of sample analýza, ktorá umožňuje posúdiť stabilitu a praktickú výkonnosť jednotlivých modelov. Pri rozšírení základného modelu sa zároveň zameriavame na analýzu vplyvu parametra relaxácie na zloženie optimálneho portfólia.

Uvedené kapitoly tak tvoria ucelený rámec práce, ktorý zahŕňa teoretické vymedzenie problematiky, jej aplikáciu na reálne dáta a následné zhodnotenie dosiahnutých výsledkov.

1 Stochastická dominancia

Koncept podobný stochastickej dominancii bol známy už dlho, avšak jej hlavnými priekopníkmi boli Levy [25], Hadar a Russell [14], Rothschild a Stiglitz [33], ktorí položili základy stochastickej dominancie prvého a druhého rádu. Potreba vytvorenia nového modelu rozhodovania investorov vznikla v dôsledku rôznych paradoxov dovtedy používaného Markowitzovho modelu (mean-variance model) [26]. Tento model predpokladá, že investor si vyberie také aktívum alebo investíciu, ktorá mu poskytne najvyšší výnos pri najnižšom riziku. Sú však známe situácie *mean-variance paradoxy*, v ktorých Markowitzovo pravidlo nedokáže jednoznačne rozlíšiť medzi investíciami, hoci z pohľadu racionálneho investora je optimálna voľba jasná.

Jeden z takýchto paradoxov opisuje Levy vo svojej knihe o stochastickej dominancii [25], keď počas druhého ročníka štúdia prezentoval svojmu profesorovi príklad s dvoma alternatívnymi investíciami. Prvá investícia x vyplatí 1 \$ alebo 2 \$ s rovnakou pravdepodobnosťou. Druhá investícia y vyplatí 2 \$ alebo 4 \$, opäť s rovnakou pravdepodobnosťou. Predpokladajme, že obe investície vyžadujú vstupný poplatok 1.1 \$. Jednoduchým výpočtom možno zistiť, že investícia y má vyššiu strednú hodnotu aj smerodajnú odchýlku ako investícia x. Podľa Markowitzovho pravidla by teda nebolo možné jednoznačne určiť, ktorá investícia je lepšia, avšak racionálne uvažujúci investor by si zvolil investíciu y, pretože najnižší možný výnos investície y zodpovedá najvyššiemu výnosu investície x.

V tejto kapitole uvedieme prehľad základov teórie stochastickej dominancie (SD), ktoré predstavujú optimálne rozhodovacie pravidlá pre rôzne možné funkcie užitočnosti. Definujeme stochastickú dominanciu prvého rádu (FSD) a taktiež stochastickú dominanciu druhého rádu (SSD). Predstavíme mean-variance pravidlo a ukážeme ako súvisí s SSD dominanciou. Taktiež ukážeme súvis medzi SSD a podmienenou hodnotou v riziku (CVaR).

V časti 1.1 zavedieme pojem stochastickej dominancie prvého rádu, pričom následne v časti 1.2 predstavíme dominanciu druhého rádu. V časti 1.3 uvedieme vzťah medzi stochastickou dominanciou druhého rádu a mean–variance pravidlom. Na príkladoch budeme skúmať, či dochádza k dominancii podľa jednotlivých kritérií a či sú tieto kritériá navzájom ekvivalentné. V časti 1.4 predstavíme tvrdenia, ktoré platia pre rovnomerné náhodné premenné. Napokon v časti 1.5 prepojíme stochastickú dominanciu druhého rádu s podmienenou hodnotou v riziku, a to s ohľadom na modely predstavené v kapitole 2.

1.1 Stochastická dominancia prvého rádu (FSD)

V tejto časti predstavíme definíciu stochastickej dominancie prvého rádu (FSD), ktorú uvádzame s cieľom lepšieho pochopenia širšieho konceptu stochastickej dominancie. Pravidlo stochastickej dominancie poskytuje alternatívny prístup pri rozhodovaní o alokácii investícií do aktív, keďže umožňuje identifikovať také optimálne zloženie portfólia, ktoré by bolo preferované všetkými investormi bez ohľadu na konkrétny tvar ich funkcie užitočnosti $U(x)$.

Stochastická dominancia prvého rádu vychádza z predpokladu racionálneho správania investorov, ktorých preferencie sú reprezentované neklesajúcimi a spojitými funkciami užitočnosti $U(x)$, teda funkciami patriacimi do množiny $(U_1(x))$.

Uvažujme investora, ktorý sa rozhoduje medzi dvoma investíciami F a G, pričom tieto náhodné premenné predstavujú výnosy daných investícií. Za uvedeného predpokladu investor preferuje vyšší výnos pred nižším, čo je v súlade s vlastnosťami funkcií užitočnosti z množiny $U_1(x)$.

Definícia 1.1. *[25]*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná s distribučnou funkciou G a U_1 je množina všetkých funkcií užitočnosti, ktoré sú spojité a neklesajúce. Hovoríme, že X_F ostro dominuje X_G podľa prvého rádu (ozn. $X_F \succ_1 X_G$) práve vtedy, keď $E\big(U(x_F)\big) \geq E\big(U(x_G)\big)$ $\forall U \in U_1$ a $\exists U_0 \in U_1$, pre ktoré je splnená ostrá nerovnosť.

Z Definície 1.1 vyplýva, že pri porovnávaní dvoch investícií bude podľa stochastickej dominancie prvého rádu preferovaná jedna z nich práve vtedy, ak by bola preferovanou pre každého racionálneho investora.

Posúdenie stochastickej dominancie prvého rádu priamo z definície však nie je vždy praktické, keďže vyžaduje porovnanie očakávaných užitočností pre všetky funkcie z množiny $U_1(x)$. Preto je užitočné hľadať ekvivalentné podmienky, ktoré umožňujú jednoduchšie overiť, či medzi investíciami F a G dochádza k dominancii prvého rádu. V praxi má investor spravidla k dispozícii historické výnosy týchto investícií, na základe ktorých vie odhadnúť ich distribučné funkcie, čo následne umožňuje efektívnejšie posúdenie dominancie.

Na základe týchto skutočností preto predstavíme pravidlo stochastickej dominancie prvého rádu, ktoré je formulované pomocou distribučných funkcií a je ekvivalentné s Definíciou 1.1.

Veta 1.1. *[25]*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná s distribučnou funkciou G. Potom nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:

i) $X_F \succ_1 X_G$

ii) $F(x) \leq G(x), \forall x, \ kde \ \exists x_0 : F(x_0) < G(x_0)$

iii) $E\big(U(x_F)\big) \geq E\big(U(x_G)\big), \ \forall U \in U_1 \ kde \ \exists U_0 \in U_1 : E\big(U(x_F)\big) > E\big(U(x_G)\big).$

Podľa Vety 1.1 platí, že ak investícia F stochasticky dominuje investícii G v zmysle dominancie prvého rádu, znamená to, že pre všetky úrovne výnosu je pravdepodobnosť dosiahnutia aspoň tejto úrovne výnosu vyššia pri investícii F než pri investícii G.

Analogickým spôsobom, ako definujeme ostrú dominanciu $\succ_1$, môžeme v rámci stochastickej dominancie prvého rádu definovať aj neostrú dominanciu $\succeq_1$. V prípade neostrej dominancie sa nevyžaduje splnenie podmienky $\exists U_0 \in U_1 : E\big(U(x_F)\big) > E\big(U(x_G)\big)$, resp. $\exists x_0 : F(x_0) < G(x_0)$, postačuje, ak sú príslušné nerovnosti splnené v neostrom tvare.

1.2 Stochastická dominancia druhého rádu (SSD)

Stochastická dominancia prvého rádu pracuje s funkciami užitočnosti z množiny U_1, t. j. spojitými a neklesajúcimi. Stochastická dominancia druhého rádu vychádza z rovnakých princípov ako stochastická dominancia prvého rádu, pracuje však s inou množinou uvažovaných funkcií užitočnosti. Uvažujme množinu U_2 všetkých funkcií užitočnosti, ktoré sú spojité, neklesajúce a konkávne.

Podmienka konkávnosti zabezpečuje, že analyzujeme správanie rizikovo averzných investorov. Stochastická dominancia druhého rádu tak slúži na identifikáciu takej investície, ktorá by bola preferovaná každým rizikovo averzným investorom bez ohľadu na konkrétny tvar jeho funkcie užitočnosti.

Definícia 1.2. *[34]*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná

s distribučnou funkciou G a U_2 je množina všetkých funkcií užitočnosti, ktoré sú spojité neklesajúce a konkávne. Hovoríme, že X_F ostro dominuje X_G podľa druhého rádu (ozn. $X_F \succ_2 X_G$) práve vtedy, keď $E\big(U(x_F)\big) \geq E\big(U(x_G)\big),\ \forall U \in U_2$ a $\exists U_0 \in U_2$, pre ktoré je splnená ostrá nerovnosť.

Analogicky ako pri FSD, aj v prípade SSD máme definíciu dominancie založenú na očakávanej hodnote funkcie užitočnosti rovnako ako je uvedené v Definícii 1.1. Uvedené definície (1.1, 1.2) sú z hľadiska formálnej štruktúry veľmi podobné. Zásadný rozdiel spočíva v triede uvažovaných funkcií užitočnosti. Kým pri FSD uvažujeme funkcie z množiny U_1, pri SSD ide o funkcie z množiny U_2. Bez ohľadu na konkrétny tvar funkcie užitočnosti z uvažovanej množiny však platí, že preferovaná je tá investícia, ktorá dosahuje vyššiu očakávanú hodnotu funkcie užitočnosti.

Podobne ako pri FSD, definícia neposkytuje praktický nástroj na posúdenie dominancie. V tomto kontexte je užitočná nasledujúca veta, ktorá predstavuje ľahšie overiteľnú podmienku ekvivalentnú so stochastickou dominanciou.

Veta 1.2. *[34]*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná s distribučnou funkciou G. Potom nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:

i) $X_F \succ_2 X_G$

ii) $\forall x \in R : \int_{-\infty}^{x} F(t)\ dt \leq \int_{-\infty}^{x} G(t)\ dt$ *a* $\exists x_0 : \int_{-\infty}^{x_0} F(t)\ dt < \int_{-\infty}^{x_0} G(t)\ dt$

iii) $E\big(U(x_F)\big) \geq E\big(U(x_G)\big),\ \forall U \in U_2,$ *kde* $\exists U_0 \in U_2 : E\big(U(x_F)\big) > E\big(U(x_G)\big)$.

Vetu 1.2 možno interpretovať tak, že investícia F dominuje investícii G v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu práve vtedy, keď pre každú hranicu výnosu je integrál z distribučnej funkcie F menší alebo rovný než príslušný integrál pre investíciu G.

Ďalším užitočným nástrojom na posúdenie, či jedna investícia môže dominovať inú investíciu v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu, je nutná podmienka založená na očakávanej hodnote výnosov:

Veta 1.3. *[25] (nutná podmienka)*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná s distribučnou funkciou G. Potom ak $X_F \succ_2 X_G$, tak platí $E(X_F) \geq E(X_G)$.

Vetu 1.3 možno interpretovať tak, že ak investor preferuje jednu investíciu, napr. F, pred inou investíciou G na základe stochastickej dominancie druhého rádu, potom musí investícia F dosahovať aspoň takú vysokú očakávanú hodnotu výnosu ako investícia G.

Rovnako ako pri FSD možno definovať aj neostrú stochastickú dominanciu druhého rádu ($\succeq_2$), s ktorou budeme pracovať v praktickej časti práce. V rámci praktickej časti budeme predpokladať výlučne neostrú dominanciu.

Definícia 1.3. *[25]*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná s distribučnou funkciou G a U_2 je množina všetkých funkcií užitočnosti, ktoré sú spojité neklesajúce a konkávne. Hovoríme, že X_F neostro dominuje X_G podľa druhého rádu (ozn. $X_F \succeq_2 X_G$) práve vtedy, keď $E\big(U(x_F)\big) \geq E\big(U(x_G)\big),\ \forall U \in U_2$.

Analogicky ako pri ostrej dominancii je možné aj neostrú dominanciu ekvivalentne formulovať pomocou integrálnej nerovnosti distribučných funkcií:

Veta 1.4. *[25]*
Nech X_F je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Nech X_G je náhodná premenná s distribučnou funkciou G. Potom nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:

i) $X_F \succeq_2 X_G$

ii) $\forall x \in R : \int_{-\infty}^{x} F(t)\ dt \leq \int_{-\infty}^{x} G(t)\ dt$

iii) $E\big(U(x_F)\big) \geq E\big(U(x_G)\big),\ \forall U \in U_2.$

Vidíme, že pri definícii neostrej dominancie neuvažujeme ostré nerovnosti ako pri ostrej dominancii, ale postačujú neostré nerovnosti. Táto skutočnosť má praktický význam pri tvorbe modelov, keďže nie je potrebné zabezpečiť splnenie striktnej nerovnosti, ale možno sa obmedziť na menej prísne kritérium.

Doteraz sme si predstavili rôzne pravidlá a podmienky, pomocou ktorých možno určiť stochastickú dominanciu druhého rádu pri porovnaní dvoch investícií. Mohlo by sa preto zdať, že pri výbere z viacerých investícií je vždy možné jednoznačne určiť tú najlepšiu. V skutočnosti to však neplatí. Stochastická dominancia druhého rádu totiž vytvára len čiastočné usporiadanie [25]. Je to dané tým, že vyžaduje, aby jedna investícia bola preferovaná pred druhou pre všetky funkcie užitočnosti z uvažovanej množiny. Táto podmienka

však nemusí byť splnená pre každú dvojicu investícií, a preto môže nastať situácia, že ani jedna z porovnávaných investícií nedominuje druhej. Pomocou SSD tak dokážeme rozdeliť investície iba na tie, ktoré nie sú dominované žiadnou inou investíciou, a na tie, ktoré sú niektorou investíciou dominované. Investície, ktoré nie sú dominované, však bez dodatočných informácií nevieme jednoznačne zoradiť od najlepšej po najhoršiu. Podobná situácia nastáva aj pri výbere optimálneho portfólia podľa Markowitza. Aj v tomto prípade sa neurčuje jediné najlepšie portfólio, ale tzv. efektívna hranica, ktorá predstavuje množinu portfólií nedominovaných v zmysle mean–variance kritéria. Ktoré z týchto portfólií je najlepšie, nie je možné určiť bez dodatočnej informácie o preferenciách. Aj Markowitzov prístup teda vedie iba k čiastočnému usporiadaniu, nie k úplnému poradiu všetkých portfólií [25].

1.3 Vzťah medzi mean–variance kritériom a stochastickou dominanciou druhého rádu

Markowitzov model predstavuje rámec pre analýzu portfólií prostredníctvom dvojice charakteristík – očakávaného výnosu a variability, meranej rozptylom. Z tohto prístupu prirodzene vyplýva mean-variance pravidlo, podľa ktorého investor preferuje portfóliá s vyšším očakávaným výnosom a nižším rozptylom. V tejto časti práce predstavíme mean–variance rozhodovacieho pravidla (MV) a následne ho budeme porovnávať s kritériami stochastickej dominancie. Zameriame sa najmä na to, či môže nastať situácia, keď mean–variance pravidlo vyberie ako preferovanú inú investíciu než stochastická dominancia druhého rádu.

Definícia 1.4. *[26]*
Nech X_F a X_G sú náhodné premenné s konečnými strednými hodnotami μ_F. μ_G a varianciami σ_F^2, σ_G^2. Hovoríme, že náhodná premenná X_F dominuje premennú X_G podľa mean–variance pravidla, ak platí

$$\mu_F \geq \mu_G, \qquad \sigma_F^2 \leq \sigma_G^2,$$

pričom aspoň jedna z týchto nerovností je ostrá.

Podľa 1.4 platí, že ak má investícia F aspoň taký očakávaný výnos ako investícia G a zároveň má najviac takú volatilitu tak potom investícia F dominuje investícií G podľa mean-variance pravidla.

Ak budeme uvažovať, že výnosy investícií majú normálne rozdelenie tak platí, že MV pravidlo je ekvivalentné s SSD pravidlom.

Veta 1.5. *[25]*
Nech X_F je náhodná premenná s normálnym rozdelením s distribučnou funkciou F a nech X_G je náhodná premenná s normálnym rozdelením s distribučnou funkciou G. Predpokladajme, že $X_F \sim N(\mu_F, \sigma_F^2)$ a $X_G \sim N(\mu_G, \sigma_G^2)$. Potom X_F dominuje X_G ($X_F \succ_2 X_G$) práve vtedy, keď X_F dominuje X_G podľa mean-variance pravidla:

$$i)\ \mu_F \geq \mu_G$$
$$ii)\ \sigma_F^2 \leq \sigma_G^2$$

s aspoň jednou ostrou nerovnosťou.

Podľa Vety 1.5 teda platí, že ak majú dve investície normálne rozdelené výnosy a spĺňajú požiadavky $i)$ a $ii)$, mean-variance kritérium je ekvivalentné so stochastickou dominanciou druhého rádu. Avšak, pokiaľ predpoklad normality nie je splnený, tak môže dôjsť k scenáru, kedy SSD pravidlo určí dominantnú investíciu, ale MV pravidlo nebude vedieť jednoznačne určiť dominantnú investíciu alebo aj k prípadu, že SSD neurči dominanciu ale, MV pravidlo dominantnú investíciu určí. Takisto je možné, že dominancia nenastáva ani pri jednom pravidle. Takúto situáciu môžeme pozorovať v nasledujúcom príklade.

Príklad 1.1. *Nech X_F a X_G sú náhodné premenné s normálnym rozdelením a parametrami $X_F \sim N(0,1)$ a $X_G \sim N(0.5,4)$ a s distribučnými funkciami F, G. Rozhodnite, či dochádza k SSD dominancii a k MV dominancii.*

Riešenie: Pri porovnaní stredných hodnôt vidíme, že platí $\mu_F < \mu_G$. Zároveň pre disperzie platí $\sigma_F^2 < \sigma_G^2$. V tomto prípade teda nie sú splnené podmienky Vety 1.5, a preto nemožno tvrdiť, že by niektorá z premenných dominovala podľa SSD ani že by bola optimálna podľa mean-variance kritéria.

Ako ďalší si ukážeme prípad, v ktorom nie je splnený predpoklad normality, a teda výsledky mean-variance (MV) pravidla nebudú ekvivalentné so závermi vyplývajúcimi zo stochastickej dominancie druhého rádu (SSD). Na tomto príklade zároveň demonštrujeme, že vyššia miera rizika náhodnej premennej v zmysle disperzie automaticky neznamená,

že táto premenná nemôže byť stochasticky dominantná podľa druhého rádu. Dôvodom je skutočnosť, že SSD hodnotí celý priebeh distribučnej funkcie náhodnej premennej a nie iba jej rozptyl.

Príklad 1.2. *Máme dve investície X_F a X_G, pri ktorých poznáme pravdepodobnosť ich jednotlivých výnosov, ktoré sú zapísané v Tabuľke 1. Rozhodnite, či dochádza k SSD dominancii a k MV dominancii.*

x	$P(x)$
1	1

Investícia X_F

x	$P(x)$
1	0.8
10	0.2

Investícia X_G

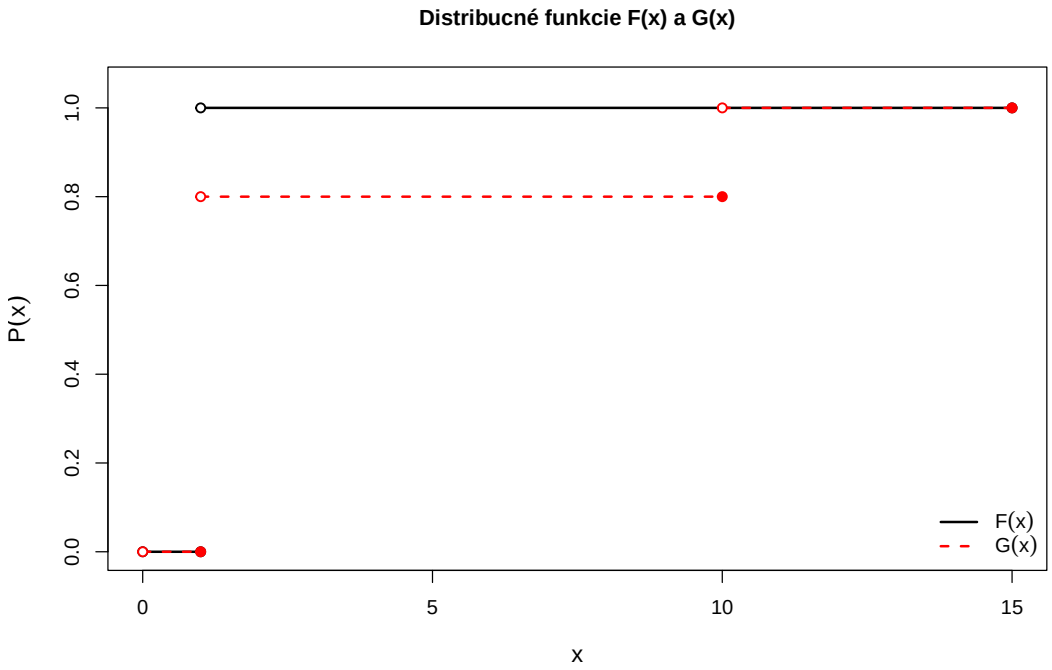
Tabuľka 1: Porovnanie investícií X_F a X_G.

Riešenie: Pre obe investície určíme príslušné distribučné funkcie a graficky zobrazíme ich priebeh.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.8, & 1 \leq x < 10, \\ 1, & x \geq 10 \end{cases}$$

Priebeh distribučných funkcií je znázornený na Obr. 1



Obr. 1: Priebeh distribučných funkcií

Pozrime sa na stredné hodnoty a na disperziu premenných X_F, X_G. Jednoduchým výpočtom prídeme na to, že:

$$\mu_F = 1,\ \mu_G = 2.8 \text{ a } \sigma_F^2 = 0,\ \sigma_G^2 = 12.96.$$

Z pohľadu samotnej disperzie, ktorá sa často interpretuje ako miera rizika, by si investor zvolil investíciu X_F, keďže má nulový rozptyl, a teda neobsahuje žiadnu variabilitu. Pri aplikácii mean-variance kritéria však nemožno jednoznačne určiť preferovanú investíciu, keďže síce platí $\mu_G > \mu_F$, avšak zároveň aj $\sigma_G^2 > \sigma_F^2$, čo vedie ku konfliktu kritérií.

Pozrime sa teraz na porovnanie investícií pomocou stochastickej dominancie druhého rádu. Podľa Vety 1.2 platí, že investícia X_G stochasticky dominuje investíciu X_F druhého rádu práve vtedy, keď:

$$\int_{-\infty}^{x} \big[F(t) - G(t)\big]\, dt \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ a } \exists x_0 : \int_{-\infty}^{x_0} \big[F(t) - G(t)\big]\, dt > 0.$$

Z grafického znázornenia distribučných funkcií na Obr. 1 je zrejmé, $F(x) \geq G(x)$ na celom $\mathbb{R}$, kde neostrá nerovnosť nastáva na intervale nenulovej dĺžky. Preto je aj výsledný integrál nezáporný pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$. Môžeme teda konštatovať, že investícia X_G stochasticky dominuje investíciu X_F v zmysle druhého rádu, teda $X_G \succ_2 X_F$.

Vidíme, že pri porovnávaní investícií môže nastať situácia, v ktorej mean-variance pravidlo nedokáže investície jednoznačne usporiadať, zatiaľ čo medzi nimi existuje dominancia v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu. Teraz uvedieme opačnú situáciu, v ktorej SSD dominancia medzi investíciami nenastáva, no investície je možné porovnať pomocou mean-variance pravidla.

Príklad 1.3. *Nech máme dve investície X_F a X_G, pri ktorých poznáme pravdepodobnosť ich jednotlivých výnosov, ktoré sú zapísané v Tabuľke 2. Rozhodnite, či dochádza k SSD dominancii a k MV dominancii.*

x	$P(x)$
0	0.054
1	0.655
4	0.291

Investícia X_F

x	$P(x)$
0	0.096
1	0.068
4	0.836

Inveatícia X_G

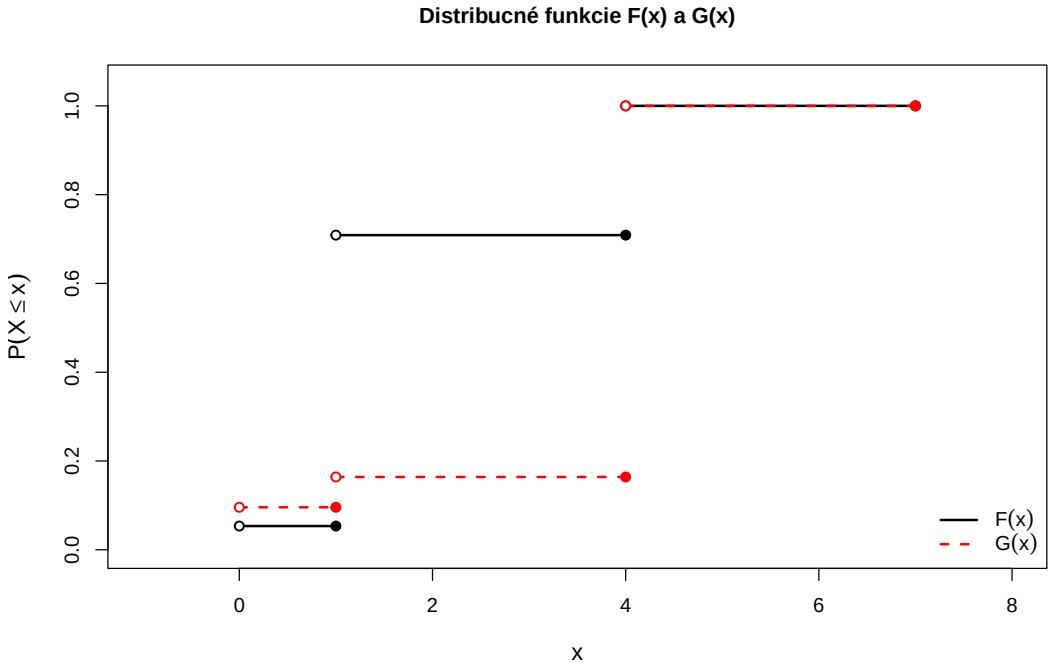
Tabuľka 2: Porovnanie investícií X_F a X_G.

Riešenie Pre obe investície určíme príslušné distribučné funkcie a graficky zobrazíme ich priebeh na Obr. 2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.054, & 0 \leq x < 1 \\ 0.709, & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.096, & 0 \leq x < 1 \\ 0.164, & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Pre náhodné premenné X_F a X_G sme vypočítali základné charakteristiky ako je priemer a disperzia:



Obr. 2: Priebeh distribučných funkcií

Investícia	μ	σ^2
X_F	1.82	2.00
X_G	3.41	1.8

Tabuľka 3: Stredná hodnota a disperzia investícií

Na základe výpočtov platí že $\mu_F < \mu_G$ a zároveň $\sigma_F^2 > \sigma_G^2$, teda podľa MV pravidla by si investor vybral investíciu X_G.

Pozrime sa teraz na investície z pohľadu stochastickej dominancie druhého rádu (SSD). Z Obr. 2 je zrejmé, že ak uvažujeme integrál rozdielu distribučných funkcií investícií $F-G$, jeho hodnota je spočiatku záporná, následne postupne rastie až k nule a napokon nadobúda kladné hodnoty. Jednoduchým výpočtom možno ukázať, že hodnota tohto integrálu v bode 4 je 1.593, čo znamená, že výsledná hodnota je kladná.

Podľa SSD teda nevieme určiť dominanciu, pretože platí, že $X_F \not\succ_2 X_G$ a zároveň $X_G \not\succ_2 X_F$.

Pomocou príkladov 1.2 a 1.3 sme ukázali, že ak MV pravidlo nájde dominantnú investíciu, automaticky to neznamená, že aj SSD pravidlo identifikuje dominantnú investíciu a

naopak. Môžu teda nastať prípady, keď jedna metóda určí optimálnu investíciu, zatiaľ čo druhá nie. Zostáva však zodpovedať otázku, či môže nastať situácia, v ktorej sa investor pri rozhodovaní medzi dvomi investíciami podľa MV pravidla rozhodne pre investíciu G, zatiaľ čo podľa SSD pravidla by bola ako dominantná určená investícia F.

Ukážeme sporom, že takáto situácia nemôže nastať. Predpokladajme, že existujú investície X_F a X_G, pričom platí, že $X_F \succ_2 X_G$ a zároveň X_G dominuje X_F v zmysle MV. Z nutnej podmienky SSD dominancie (Veta 1.3) vyplýva, že platí $\mu_F \geq \mu_G$. Keďže však X_G dominuje X_F podľa MV, musí platiť aj $\mu_G \geq \mu_F$, a teda nutne $\mu_F = \mu_G$. Z MV kritéria ďalej dostávame $\sigma_G^2 < \sigma_F^2$. Dostávame sa tak do situácie, kde majú obe investície rovnakú strednú hodnotu, pričom zároveň X_F dominuje X_G v zmysle SSD. Za týchto predpokladov možno aplikovať vetu o mean-preserving spread (MPS), formulovanú nižšie, pričom jej využitím dospejeme k sporu. Pojem mean-preserving spread vyjadruje vzťah medzi náhodnými premennými, ktorý je definovaný nasledovne.

Definícia 1.5. *[33]*
Nech X_F a X_G sú náhodné premenné s konečnými strednými hodnotami. Hovoríme, že X_G je mean - preserving spread (MPS) premennej X_F, ak existuje náhodná premenná φ s $E[\varphi|X_F] = 0$, taká, že

$$X_G = X_F + \varphi.$$

V kontexte riešeného problému je pre nás kľúčový vzťah medzi mean-preserving spread (MPS) so stochastickou dominanciou druhého rádu (SSD), ktorý formuluje nasledujúca veta.

Veta 1.6. *[33]*
Nech X_F a X_G sú náhodné premenné s konečnými strednými hodnotami. Nech F a G označujú ich distribučné funkcie. Hovoríme, že X_G je MPS X_F práve vtedy, keď

$$E[X_G] = E[X_F]$$

a pre všetky t platí

$$\int_{-\infty}^{t} G(u)\,du \;\geq\; \int_{-\infty}^{t} F(u)\,du,$$

pričom nerovnosť je ostrá aspoň pre jedno t.

Mean-preserving spread (MPS) podľa definície 1.5 predstavuje formálnu definíciu zvýšenia rizika pri nezmenenom očakávanom výnose. Ide o transformáciu distribúcie, ktorá rozťahuje jej chvosty, pričom stredná hodnota zostáva rovnaká. Rothschild spolu so Stiglitzom dokázali, že náhodná premenná X_G je MPS X_F práve vtedy keď majú rovnaké stredné hodnoty a kde zároveň platí $X_F \succ_2 X_G$. Pre podrobnejší výklad pozri [33].

Ak sa vrátime k uvažovanému scenáru, kde máme investície X_F a X_G s rovnakými očakávanými výnosmi a zároveň platí $X_F \succ_2 X_G$, potom podľa vety 1.6 vyplýva, že investícia X_G je MSP investície X_F. To znamená, že existuje náhodná veličina (šum) φ, pre ktorú platí $E(\varphi \mid X_F) = 0$ a zároveň platí:

$$X_G = X_F + \varphi$$

Keďže X_G vzniká pridaním čistého šumu k X_F, jej disperzia sa rozkladá ako:

$$\sigma_G^2 = \sigma_F^2 + \sigma_\varphi^2 + 2\mathrm{Cov}(X_F, \varphi).$$

Z predpokladu $E(\varphi \mid X_F) = 0$ vyplýva $E(\varphi) = 0$ a zároveň podľa [35] platí:

$$\mathrm{Cov}(X_F, \varphi) = \mathrm{Cov}\left(X_F, E(\varphi|X_F)\right) = E\big(X_F \times E((\varphi|X_F)\big) - E(X_F)E(\varphi|X_F) = E(X_F \times 0) = 0.$$

Takže

$$\sigma_G^2 = \sigma_F^2 + \sigma_\varphi^2 \geq \sigma_F^2$$

Tým sa dostávame do sporu s $\sigma_G^2 < \sigma_F^2$.

Ukázali sme teda, že ak obe pravidlá (MV a SSD) vedú k rozhodnutiu, musia byť v zhode. Existujú však situácie, keď jedno z nich rozhodnúť dokáže, zatiaľ čo druhé nie. Zároveň sme videli, že pri normálnom rozdelení vieme dominanciu jednoznačne určiť tak v zmysle MV, ako aj SSD. V nasledujúcej časti sa zameriame na inú významnú triedu rozdelení konkrétne rovnomerné rozdelenie a pokúsime sa pre ňu odvodiť obdobné rozhodovacie pravidlo.

1.4 Rovnomerné rozdelenie a SSD dominancia

Pre dvojicu rovnomerne rozdelených náhodných premenných budeme analyzovať dominanciu v zmysle SSD a mean-variance (MV) pravidla. Uvažujme dve rôzne náhodné premnné, $X \sim R(a_1, b_1)$, kde $a_1 < b_1$ a $Y \sim R(a_2, b_2)$, kde $a_2 < b_2$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $a_1 \leq a_2$.

Najskôr sa zameriame na prípad, keď distribučné funkcie F_X a F_Y nemajú prienik v množine hodnôt $(0,1)$, teda neexistuje x, pre ktoré by platilo $F_X(x) = F_Y(x) \in (0,1)$. Tento prípad nastáva práve vtedy, keď platí $a_1 \leq a_2$ a $b_1 \leq b_2$, pričom aspoň jedna z týchto nerovností je ostrá, keďže premenné X a Y nie sú rovnako rozdelené.

Na túto otázku odpovedá tvrdenie 1.1, ktoré tvrdí kedy dochádza k dominancii podľa SSD aj podľa MV ak sa distribučné funkcie neprekrížia.

Tvrdenie 1.1. *Nech X je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na intervale (a_1, b_1), teda $X \sim R(a_1, b_1)$, kde $a_1 < b_1$. Nech Y je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na intervale (a_2, b_2), t. j. $Y \sim R(a_2, b_2)$, kde $a_2 < b_2$. Predpokladajme, že $a_1 \leq a_2$ a $b_1 \leq b_2$, pričom aspoň jedna z týchto nerovností je ostrá. Potom platí, že $Y \succ_2 X$. Navyše ak platí, že $(b_1 - a_1) \geq (b_2 - a_2)$ tak potom náhodná premenná Y dominuje premennú X podľa MV.*

Dôkaz: Predpokladajme, že platí usporiadanie ako je v tvrdení 1.1. Chceme dokázať, že potom $Y \succ_2 X$. Najprv si zapíšeme distribučné funkcie:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} & x \in [a_1, b_1], \\ 1 & x > b_1, \end{cases} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < a_2, \\ \dfrac{x - a_2}{b_2 - a_2} & x \in [a_2, b_2], \\ 1 & x > b_2. \end{cases}$$

Vďaka predpokladom $a_1 \leq a_2$ a $b_1 \leq b_2$ vieme povedať, že $F_X(x) \geq F_Y(x)$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$. Navyše pre $x \in (a_1, b_1)$ platí v uvedenej nerovnosti ostrá nerovnosť. Z toho vyplýva, že

$$\int_{-\infty}^{x} (F_X(t) - F_Y(t))\, dt \geq 0$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$. Navyše vieme, že daná nerovnosť je ostrá pre $x \in (a_1, b_1)$. Využitím vety 1.2 časti ii) dostávame, že $Y \succ_2 X$.

Pre porovnanie X a Y MV pravidlom potrebujeme určiť stredné hodnoty μ_X, μ_Y a variancie σ_X^2, σ_Y^2. Pre stredné hodnoty dostávame ostrú nerovnosť:

$$\mu_X = \frac{a_1 + b_1}{2} < \frac{a_2 + b_2}{2} = \mu_Y,$$

keďže aspoň jedna z nerovností $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ je ostrá. Pre variancie platí:

$$\sigma_X^2 = \frac{(b_1 - a_1)^2}{12}, \qquad \sigma_Y^2 = \frac{(b_2 - a_2)^2}{12}.$$

Vidíme, že ak

$$(b_1 - a_1) \geq (b_2 - a_2),$$

potom

$$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2,$$

a teda Y dominuje X v zmysle média a variability (MV).

Naopak, ak

$$(b_1 - a_1) < (b_2 - a_2),$$

potom

$$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2,$$

a MV kritérium nevie dané investície jednoznačne usporiadať. Z uvedeného vyplýva, že v prípade neprekrývajúcich sa rovnomerných rozdelení nevedú stochastická dominancia druhého rádu a mean-variance kritérium vo všeobecnosti k rovnakým záverom. Stochastická dominancia druhého rádu v takýchto situáciách vždy umožňuje jednoznačne určiť preferované rozdelenie, zatiaľ čo mean-variance prístup identifikuje dominanciu iba za predpokladu, že platí $(b_1 - a_1) \geq (b_2 - a_2)$. □

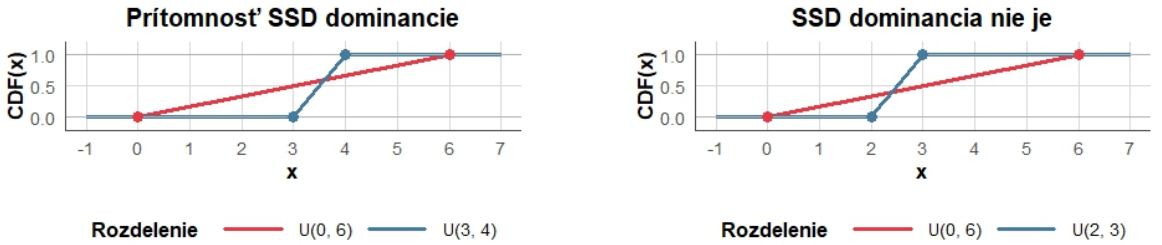
V druhej časti sa zameriame na prípad, keď distribučné funkcie F_X a F_Y majú prienik v množine hodnôt $(0, 1)$, teda existuje x, pre ktoré $F_X(x) = F_Y(x) \in (0, 1)$. Tento prípad nastáva práve vtedy, keď platí $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. V nasledujúcom tvrdení ukážeme, že v takom prípade je SSD dominancia ekvivalentná s dominanciou v zmysle MV.

Tvrdenie 1.2. *Nech X je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na intervale (a_1, b_1), teda $X \sim R(a_1, b_1)$, a nech Y je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na intervale (a_2, b_2), t. j. $Y \sim R(a_2, b_2)$. Ďalej predpokladajme, že platí $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Potom platí, že $Y \succ_2 X$ práve vtedy, keď $\mu_Y \geq \mu_X$. Navyše platí, že Y dominuje X v zmysle MV práve vtedy $\mu_Y \geq \mu_X$.*

Dôkaz: Základná idea dôkazu je, že pri rovnomerných rozdeleniach majú distribučné funkcie lineárny tvar a ich integrály sú jednoduché funkcie. Explicitným výpočtom príslušných integrálov možno dokázať, že ak $\mu_Y \geq \mu_X$, potom integrály distribučných funkcií spĺňajú požadovanú nerovnosť z vety 1.2 pre všetky x, a teda $Y \succ_2 X$. Ak však $\mu_Y < \mu_X$, možno ukázať, že integrálna nerovnosť z vety 1.2 neplatí a dominancia nenastáva. Pre podrobný dôkaz tvrdenia pozri Prílohu A, kde je explicitný výpočet integrálov.

Pre porovnanie dominancie podľa MV pravidla je rozhodujúce porovnanie stredných hodnôt a variancií daných náhodných premenných. Vieme, že $\sigma_X^2 = \frac{(b_1-a_1)^2}{12}$ a $\sigma_Y^2 = \frac{(b_2-a_2)^2}{12}$. Z predpokladov tvrdenia priamo vyplýva, že $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$. Vidíme teda, že pre dominanciu podľa MV kritéra dostávame rovnaké kritérium, ako pri dominancii podľa SSD. Ak $\mu_Y \geq \mu_X$, tak Y dominuje X podľa MV kritéria. A naopak, ak $\mu_Y < \mu_X$ dominancia v zmysle MV nenastáva. □

Pre lepšie pochopenie získaných výsledkov uvedieme dva konkrétne príklady a znázorníme ich graficky.



(a) prípad SSD dominancie

(b) prípad žiadnej SSD dominancie

Obr. 3: Porovnanie distribučných funkcií X, Y

Na Obr. 3a sú znázornené distribučné funkcie náhodných premenných $X \sim R(0,6)$ a $Y \sim R(3,4)$. Na základe Tvrdenia 1.2 môžeme dominanciu overiť jednoduchým porovnaním stredných hodnôt:

$$\mu_X = \frac{0+6}{2} = 3, \qquad \mu_Y = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

Keďže $\mu_Y > \mu_X$, platí $Y \succ_2 X$. Ak sa pozrieme na disperziu tak platí, že

$$\sigma_X^2 = \frac{(6-0)^2}{12} = 3 \qquad \sigma_Y^2 = \frac{(4-3)^2}{12} = 1/12.$$

Vidíme, že platí $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, a teda platí, že Y dominuje X aj podľa MV pravidla.

Na Obr. 3b sú náhodné premenné $X \sim R(0,6)$ a $Y \sim R(2,3)$. Opäť vypočítame stredné hodnoty:

$$\mu_X = 3, \qquad \mu_Y = \frac{2+3}{2} = 2{,}5.$$

Tu platí $\mu_Y < \mu_X$. V tomto prípade funkcia $S(x) = \int_{-\infty}^{x} [F_X(t) - F_Y(t)]\, dt$ začína kladne, ale skončí záporne, teda podmienka (ii) z Vety 1.2 nie je splnená. Z toho vyplýva, že ani jedna premenná nie je SSD-dominantná voči druhej.

Ak sa pozrieme na disperziu tak platí, že

$$\sigma_X^2 = \frac{(6-0)^2}{12} = 3 \qquad \sigma_Y^2 = \frac{(3-2)^2}{12} = 1/12.$$

Vidíme, že platí $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, a zároveň platí, že $\mu_X > \mu_Y$ takže ani podľa MV pravidla nevieme určiť dominanciu.

1.5 Vzťah medzi stochastickou dominanciou druhého rádu a CVaR

V praktickej časti práce budeme pracovať s modelmi využívajúcimi SSD dominanciu v ohraničeniach. Stochastická dominancia druhého rádu úzko súvisí s podmienenou hodnotou v riziku (CVaR), čo umožňuje nahradiť podmienku SSD práve pomocou CVaR. Z tohto dôvodu je táto časť práce venovaná pojmom VaR, CVaR a ich vzájomnému prepojeniu.

V tejto podkapitole predstavíme koncept hodnoty v riziku (VaR) ako aj podmienenú hodnotu v riziku (CVaR), demonštrujeme prepojenie konceptu stochastickej dominancie druhého rádu (SSD) s konceptom CVaR. Toto prepojenie je kľúčové pre praktickú časť práce, kde prejdeme od obmedzení založených na SSD k obmedzeniam využívajúcim CVaR. Teoretický základ prepojenia vychádza z práce [21, 22]. Pri definovaní VaR a CVaR budeme predpokladať, že náhodná premenná reprezentuje stratu investície.

Definícia 1.6. *[21]*
Nech $F(x) = P(X_F \leq x)$ predstavuje distribučnú funkciu náhodnej premennej X_F. Potom hodnota v riziku na úrovni spoľahlivosti α je definovaná ako

$$VaR_\alpha(X_F) = VaR_\alpha = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Hodnota v riziku (VaR) predstavuje mieru rizika, ktorá udáva maximálnu stratu portfólia, ktorá nebude prekročená s danou pravdepodobnosťou za určité časové obdobie. S pohľadu investora to znamená, že ak $\alpha = 0.95$, potom s 95,% pravdepodobnosťou strata neprekročí hodnotu VaR za dané obdobie.

Definícia 1.7. *[21]*
Nech $VaR_\alpha(X_F)$ je hodnota v riziku stratovej náhodnej premennej X_F. Potom podmienená hodnota v riziku je definovaná ako

$$CVaR_\alpha(X_F) = CVaR_\alpha = E[X_F \mid X_F \geq VaR_\alpha(X_F)],$$

kde $CVaR_\alpha(X_F)$ predstavuje priemernú hodnotu náhodnej premennej X_F podmienenú extrémnou stratou, ktorá nastane s pravdepodobnosťou $1-\alpha$.

Podmienená hodnota v riziku, označovaná ako CVaR (Conditional Value at Risk) alebo Expected Shortfall (ES), teda predstavuje mieru rizika vyjadrujúcu priemernú stratu portfólia za predpokladu, že strata prekročila úroveň Value at Risk pri hladine α. Na rozdiel od miery VaR, ktorá určuje iba hraničnú hodnotu straty, CVaR zohľadňuje aj veľkosť strát v najnepriaznivejších $(1-\alpha)\%$ scenároch. Napríklad pri $\alpha = 0,95$ CVaR vyjadruje priemernú stratu portfólia v najhorších 5% prípadov.

Podmienená hodnota v riziku spĺňa všetky podmienky Vety o koherencii [21], čím je považované za koherentnú mieru rizika, na rozdiel od VaR.

Keďže v práci uvažujeme výnosy (a nie straty), VaR a CVaR interpretujeme v tomto kontexte. Hodnota VaR predstavuje hranicu, pre ktorú platí, že v $(1-\alpha)\%$ najhorších prípadov je výnos nižší než táto hodnota. Hodnota CVaR následne vyjadruje priemerný výnos práve v týchto najhorších $(1-\alpha)\%$ prípadoch.

Po zadefinovaní CVaR môžeme prejsť k jeho prepojeniu so stochastickou dominanciou druhého rádu (SSD).

Lema 1.1. *[22]*
Nech X_{F_i} pre $i = 1, 2$ predstavujú náhodné premenné, ktoré predstavujú výnos investícií, a nech $X_{G_i} = -X_{F_i}$ pre $i = 1, 2$ sú náhodné premenné záporných výnosov. Navyše nech $\mathbb{E}|X_{G_i}| < \infty$ pre $i = 1, 2$. Potom platí:

$$X_{F_1} \succeq_2 X_{F_2} \quad \Leftrightarrow \quad CVaR_\alpha(X_{G_1}) \leq CVaR_\alpha(X_{G_2}) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Lema 1.1 poskytuje teoretický základ pre prechod od SSD k CVaR a je užitočná pri praktickom výpočte a optimalizácii modelu. Táto lema hovorí, že ak investor preferuje jednu investíciu pred druhou, znamená to, že daná investícia dosahuje nižšie hodnoty CVaR (v zmysle strát), a teda má v najhorších prípadoch nižšie očakávané straty. Naopak, ak má jedna investícia nižšie hodnoty CVaR, potom bude preferovaná každým rizikovo averzným investorom v porovnaní s druhou investíciou.

V našej práci budeme pracovať s modelmi portfólia, ktoré budú predpokladať diskrétne rozdelenie výnosov vychádzajúce z minulých pozorovaní. S výnosmi teda budeme pracovať

ako s náhodnými premennými, ktoré majú diskrétne rovnomerné rozdelenie. Preto uvedieme lemu, ktorá umožňuje efektívny výpočet CVaR práve pre takto rozdelené náhodné premenné.

Lema 1.2. *[22]*

Nech X_G je náhodná premenná (reprezentujúca záporné výnosy) s diskrétnym rovnomerným rozdelením, $X_G \sim R(\{g_1, \ldots, g_T\})$. Označme $g^{[k]}$ ako k-tý najmenší prvok medzi $g_1, \ldots, g_T$, pričom platí $g^{[1]} \leq \cdots \leq g^{[T]}$. Pre $\alpha \in \left[\frac{k}{T}, \frac{k+1}{T}\right]$ a pre $\alpha \neq 1$ platí

$$CVaR_\alpha(X_G) = g^{[k+1]} + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=k+1}^{T} \left(g^{[i]} - g^{[k+1]}\right),$$

kde $k = 0, 1, \ldots, T-1$, a pre $\alpha = 1$ platí $CVaR_1(X_G) = f^{[T]}$.

Dôkaz vychádza zo všeobecného vzorca pre CVaR_α, ktorý hovorí, že CVaR_α je priemer všetkých hodnôt náhodnej premennej presahujúcich jej VaR_α. V našom prípade majú všetky scenáre rovnakú pravdepodobnosť $1/T$, stačí usporiadať hodnoty $g_1, \ldots, g_T$ vzostupne. Po dosadení rovnakých pravdepodobností do všeobecného vzorca sa výraz zjednoduší na obyčajný aritmetický priemer všetkých hodnôt od g_{k+1} po g_T. Tým sa ukáže, že CVaR_α je jednoducho priemer najhorších strát nad VaR_α. Pre viac detailov pozri [22].

V tejto kapitole sme sa venovali konceptu stochastickej dominancie prvého a druhého rádu a predstavili sme ich základné vlastnosti. Zároveň sme analyzovali dominanciu v zmysle SSD aj MV a poskytli sme ucelený pohľad na vzťah medzi týmito dvoma prístupmi. Ukázali sme, že existujú situácie, v ktorých dominancia nastáva iba podľa jedného z týchto kritérií, avšak ak nastáva podľa oboch, vedú k rovnakému záveru. Ďalej sme formulovali tvrdenie umožňujúce určiť SSD dominanciu pre rovnomerné náhodné premenné a ukázali sme, že táto podmienka je za istých predpokladov ekvivalentná s MV pravidlom. V závere kapitoly sme zaviedli pojmy hodnota v riziku (VaR) a podmienená hodnota v riziku (CVaR) a ukázali sme, že podmienku SSD dominancie investície možno ekvivalentne vyjadriť pomocou nerovnosti príslušných hodnôt CVaR.

2 Optimalizačný model so stochastickou dominanciou v ohraničeniach

V literatúre zameranej na optimalizáciu portfólia sa SSD objavuje ako jeden z nástrojov na hodnotenie rizika a porovnávanie investičných alternatív. Aj napriek tomu, že jej teoretická definícia je jednotná, jednotliví autori ju využívajú odlišným spôsobom v závislosti od toho, či je cieľom testovať efektívnosť existujúceho portfólia [30], konštruovať nové portfólio [9, 20] alebo zohľadniť neistotu distribúcií [10]. SSD tak môže vystupovať ako kritérium porovnávania alebo ako súbor obmedzení v optimalizačnom modeli, prípadne ako súčasť robustného rozhodovania.

V tejto časti práce predstavíme modely, pomocou ktorých budeme hľadať optimálne portfólio s podmienkou stochastickej dominancie druhého rádu v ohraničeniach. Základný model, s ktorým budeme pracovať pochádza z článku [9]. Okrem všeobecného modelu predstavíme aj súbor predpokladov v časti 2.2, vďaka ktorým je možné všeobecný model pretransformovať na úlohu lineárneho programovania predstavený v časti 2.3. K tomu využijeme známe vzťahy medzi SSD a CVaR, ktoré boli predstavené v Sekcii 1.5.

Okrem základnej formulácie modelu navrhneme vlastné rozšírenie modelu. V rozšírenom modeli využijeme relaxáciu ohraničenia so stochastickou dominanciou prostredníctvom parametra ε.

2.1 Základná formulácia modelu

Model portfóliovej optimalizácie so stochastickou dominanciou druhého rádu (SSD) [9] rozširuje klasické prístupy k optimalizácii portfólia tým, že do optimalizačného problému explicitne vkladá podmienku, podľa ktorej musí výnos portfólia stochasticky dominovať referenčnému výnosu (benchmarku) v zmysle stochastickej dominancie druhého rádu.

Tento prístup vychádza z teórie stochastickej dominancie a odráža preferencie rizikovo averzných investorov bez nutnosti explicitne špecifikovať ich funkciu užitočnosti či konkrétnu mieru rizika. Model je prakticky využiteľný, pretože pracuje s bežne dostupnými vstupnými údajmi (historické alebo simulované výnosy aktív a benchmarku) a eliminuje subjektívny výber rizikovej miery, ktorý je typický pre mean-variance modely Markowitza.

Aby sme mohli tento prístup matematicky formulovať, zavedieme nasledujúce označe-

nie. Nech $R(x)$ predstavuje náhodný výnos portfólia, $f(x)$ predstavuje účelovú funkcia, najčastejšie očakávaný výnos portfólia:

$$f(x) = \mathbb{E}[R(x)].$$

Označme vektor váh portfólia $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, pričom $x \in X$ a množina X je definovaná ako:

$$X = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \Big\},$$

uvažujeme teda plnú alokáciu kapitálu bez krátkych pozícií. Ďalej označme Y referenčný náhodný výnos (benchmark), napríklad výnos trhového indexu. Potom základná formulácia modelu má nasledovný tvar:

$$\max_{x \in X} f(x) \tag{1}$$

$$\text{pri podmienkach} \quad R(x) \succeq_2 Y, \tag{2}$$

$$x \in X, \tag{3}$$

Model definovaný pomocou (1)-(3) budeme označovať ako (M1).

Podmienka (2) zaručuje, že portfólio $R(x)$ je preferované pred benchmarkom Y všetkými racionálnymi rizikovo averznými investormi. Prostredníctvom tejto podmienky, je vybrané optimálne portfólio aspoň také dobré ako nami zvolený benchmark, podrobnejšie informácie sú uvedené v Sekcii 1.2.

Treba si uvedomiť, že to, aké optimálne portfólio model nájde, nezávisí od preferencií alebo funkcie užitočnosti investora, ale od zvoleného benchmarku. SSD obmedzenie potom zabezpečuje, aby optimálne portfólio dosahovalo výkonnosť aspoň na úrovni tohto benchmarku.

2.2 Štrukturálne predpoklady modelu

Model (M1) predstavuje všeobecný model optimalizácie portfólia so stochastickými ohraničeniami. Aby sme prešli ku konkrétnemu modelu, ktorý budeme riešiť v praktickej časti, je potrebné prijať určitý súbor predpokladov. V tejto časti preto predstavíme predpoklady, na základe ktorých bude možné model (M1) transformovať na úlohu lineárneho programovania.

Predpokladajme, že investor má k dispozícii n aktív, ktorých výnosy sú diskrétne rozdelené, s T realizáciami. Podobne uvažujme, že výnosy benchmarku Y sú diskrétne rozdelené, s m realizáciami. Tieto predpoklady odrážajú praktickú situáciu, v ktorej majú investori k dispozícii historické (prípadne simulované) výnosy aktív a indexov, a preto je prirodzené uvažovať diskrétne rozdelenia.

Za predpokladu diskrétneho rozdelenia výnosov aktív R aj benchmarku Y je možné pôvodný model (M1) ekvivalentne transformovať na úlohu lineárneho programovania [9]. Konkrétne, nech výnosy jednotlivých aktív R_j, pre $j = 1, \ldots, n$, nadobúdajú T realizácií r_{jt}, kde $t = 1, \ldots, T$, s pravdepodobnosťami $p_t > 0$, pričom $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$. Benchmark Y nadobúda m realizácií y_i, pre $i = 1, \ldots, m$ s pravdepodobnosťami $\pi_i > 0$, pričom $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$.

Podmienku (2) v modeli (M1) možno podľa [9] ekvivalentne vyjadriť ako sústavu m nerovností:

$$\mathbb{E}\big[(y_i - R(x))^+\big] \leq \mathbb{E}\big[(y_i - Y)^+\big], \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Pre podrobnejší prechod pozri [9]. Tu y_i predstavujú jednotlivé realizácie (scenáre) náhodnej premennej Y, ktoré aproximujú jej distribúciu v diskrétnom prípade. Funkcia $(z)^{+1}$ označuje pozitívnu časť.

Tieto nerovnosti umožňujú lineárnu reformuláciu celého optimalizačného problému. Po zavedení pomocných premenných $s_{it} \geq 0$ (reprezentujúcich nedostatok výnosu portfólia pod úrovňou y_i v scenári t) dostávame výsledný lineárny program.

2.3 Ekvivalentná formulácia ako úloha lineárneho programovania

Po zavedení podmienok predstavených v Sekcii 2.2 vieme model (M1) zapísať ako úlohu lineárneho programovania, v ktorej je účelová funkcia zapísaná priamo ako maximalizácia očakávaného výnosu portfólia [9]:

[1] Platí $(z)^+ = \max(0, z)$.

$$\max \sum_{t=1}^{T} p_t \sum_{j=1}^{n} x_j r_{jt} \tag{4}$$

$$\text{pri podmienkach } \sum_{j=1}^{n} x_j r_{jt} + s_{it} \geq y_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{5}$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t s_{it} \leq \sum_{k=1}^{m} \pi_k \max(0, y_i - y_k), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$s_{it} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

kde $s_{it} \geq 0$ sú pomocné premenné, ktoré v každom scenári t a pre každú prahovú úroveň y_i reprezentujú nedostatok výnosu portfólia pod hodnotou benchmarku y_i. Pravá strana obmedzenia (6) predstavuje očakávanú hodnotu nedostatku benchmarku Y voči prahovej hodnote y_i. Model definovaný zápisom (4)-(9) budeme označovať ako (M2).

Model (M2) maximalizuje očakávaný výnos portfólia $\mathbb{E}[R(x)]$ za súčasného splnenia podmienky stochastickej dominancie druhého rádu voči benchmarku Y. Zaručuje, že portfólio $R(x)$ je pre všetkých rizikovo averzných investorov aspoň rovnako atraktívne ako benchmark Y.

Vďaka lineárnej štruktúre je model (M2) priamo riešiteľný pomocou štandardných optimalizačných programov ako Matlab.

2.4 Rozšírenie modelu pomocou relaxácie SSD ohraničenia

V tejto časti predstavujeme prirodzené rozšírenie základného modelu (M1), ktoré umožňuje kontrolovať mieru prísnosti podmienky stochastickej dominancie druhého rádu. Navrhnuté rozšírenie je vlastnou modifikáciou modelu a je motivované potrebou analyzovať citlivosť optimálneho portfólia na uvoľnenie požiadavky SSD.

Konkrétne relaxujeme požiadavku $R(x) \succeq_2 Y$ zavedením parametra $\varepsilon \geq 0$, ktorý reprezentuje prípustnú odchýlku od presnej SSD dominancie. Podobné relaxácie dominančných alebo rizikových obmedzení sa v literatúre často využívajú v rámci robustnej optimalizácie a analýzy citlivosti, kde umožňujú skúmať kompromis medzi výnosom a

mierou rizikovej ochrany.

Táto formulácia je rozšírením všeobecného modelu (M1) predstaveného v Sekcii 2.1 a má tvar:

$$\max_{x \in X} \quad f(x) \tag{10}$$

$$\text{pri podmienkach} \quad R(x) + \varepsilon \succeq_2 Y, \tag{11}$$

$$x \in X, \tag{12}$$

kde $\varepsilon \geq 0$ je voliteľný parameter relaxácie. Podmienku (11) môžeme chápať tak, že výnos portfólia $R(x)$ stochasticky dominuje druhého rádu benchmark Y až po posunutí o konštantu ε smerom nahor, teda SSD portfólia je menej prísna a vďaka tomu môžeme dostávať portfólia s vyšším očakávaným výnosom. Pod označením (M3) budeme chápať model definovaný pomocou (10) - (12).

Vidíme, že pri $\varepsilon = 0$ dostávame pôvodný model (M1) (plná SSD dominancia). Pri $\varepsilon > 0$ povoľujeme, aby výnos portfólia zaostával za benchmarkom v určitej miere (v zmysle SSD), čo zvyčajne umožňuje dosiahnuť vyšší očakávaný výnos $f(x)$ na úkor mierneho oslabenia ochrany pred rizikom.

Takáto relaxácia je užitočná najmä pri analýze citlivosti riešenia na zmenu prísnosti rizikových obmedzení a pri skúmaní trade-offu medzi výnosom a mierou stochastickej dominancie.

Model (M3) možno rovnakým postupom ako v časti 2.3 previesť na úlohu lineárneho programovania. Pre diskrétne rozdelené výnosy aktív i benchmarku sa podmienka (11) premieta do upravených nerovností:

$$\mathbb{E}\big[(y_i - (R(x) + \varepsilon))^+\big] \leq \mathbb{E}\big[(y_i - Y)^+\big], \quad i = 1, \ldots, m.$$

Po zavedení pomocných premenných $s_{it} \geq 0$ (reprezentujúcich shortfall výnosu portfólia posunutého o ε pod úrovňou y_i v scenári t) dostávame analogicky ako v Sekcii 2.3 výsledný lineárny program:

$$\max_{x,\,s} \quad \sum_{t=1}^{T} p_t \sum_{j=1}^{n} x_j r_{jt} \tag{13}$$

$$\text{pri podmienkach} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j r_{jt} + \varepsilon + s_{it} \;\geq\; y_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{14}$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t \, s_{it} \;\leq\; \sum_{k=1}^{m} \pi_k \max(0, y_i - y_k), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

$$s_{it} \;\geq\; 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{17}$$

$$x_j \;\geq\; 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Tento model (13) - (18) budeme označovať ako (M4). Umožňuje systematicky skúmať trade-off medzi očakávaným výnosom a mierou nadradenosti voči benchmarku. V numerickej časti práce budeme analyzovať, ako sa mení štruktúra optimálneho portfólia, jeho očakávaný výnos a rizikové charakteristiky pri rôznych hodnotách parametra ε.

V tejto kapitole sme postupne formulovali základný model (M1) založený na stochastickej dominancii druhého rádu a jeho následnú lineárnu reformuláciu (M2) v diskrétnom prípade, ktorý je prevzatý z [9]. Následne sme navrhli vlastné rozšírenie tohto rámca zavedením relaxačného parametra ε, ktorý umožňuje kontrolovať mieru prísnosti SSD obmedzenia a vedie k rozšírenému modelu (M3), resp. jeho lineárnej podobe (M4).

Hlavným prínosom týchto formulácií je pri diskrétnom rozdelení výnosov aktív a benchmarku ich transformácia na úlohy lineárneho programovania, ktoré umožňujú efektívne numerické riešenie a praktickú implementáciu. Zároveň zavedenie parametra ε poskytuje nástroj na analýzu citlivosti optimálneho portfólia vzhľadom na mieru požadovanej stochastickej dominancie.

3 Charakteristika dát a metodológia porovnávania modelov

Cieľom aplikačnej časti práce je skúmať správanie modelov predstavených v Kapitole 2 na konkrétnych reálnych dátach. Z tohto dôvodu je najskôr potrebné špecifikovať finančné aktíva, s ktorými budeme pracovať, ako aj spôsob ich spracovania a základné vlastnosti analyzovaných dát. V časti 3.1.1 preto opíšeme finančné aktíva, ktoré budú použité v modeloch (M2) a (M4). V časti 3.1.2 sa zameriame na porovnanie jednoduchých a logaritmických výnosov a zdôvodníme, prečo sme sa rozhodli pracovať s vybraným typom výnosov. Následne sa v sekcii 3.2 budeme venovať problematike asymetrie finančných dát, a to všeobecne aj na konkrétnych analyzovaných dátach. Predstavíme pojmy ako šikmosť a špicatosť a uvedieme testy, pomocou ktorých budeme overovať prítomnosť asymetrie v dátach.

V časti 3.3 predstavíme vybrané modely optimalizácie portfólia, ktoré budú slúžiť ako referenčné modely pri porovnaní s modelmi (M2) a (M4). Nakoniec v časti 3.4 stručne uvedieme zvolené výkonnostné a rizikové metriky, ktoré budú použité na vzájomné porovnanie modelov.

3.1 Popis dát a výber vzorky

V tejto časti práce opíšeme použité dáta, typ výnosov, s ktorými budeme pracovať, a frekvenciu, pri ktorej tieto výnosy počítame. Zároveň tu stručne uvedieme postup získavania a spracovania dát v programe R (konkrétne v prostredí RStudio).

3.1.1 Vybrané akciové tituly a ich charakteristika

Pri hľadaní optimálneho portfólia v aplikačnej časti práce budeme pracovať s vybranými akciami z akciového indexu S&P 500. Vybrali sme 30 popredných spoločností v indexe S&P 500 k dátumu 9. októbra 2025. Tieto spoločnosti sú uvedené v Tabuľke 4. Index S&P 500 zahŕňa 500 najväčších verejne obchodovaných spoločností v USA podľa trhovej kapitalizácie.

Medzi 30 najväčších spoločností indexu S&P 500 nepochybne patria technologické firmy, ktoré profitujú z rozvoja umelej inteligencie, cloudových služieb a digitálnej eko-

Tabuľka 4: 30 najväčších spoločností v indexe S&P 500 k 9. 10. 2025

Por.	Spoločnosť	Skratka	Por.	Spoločnosť	Skratka
1	Nvidia	NVDA	16	Netflix	NFLX
2	Microsoft	MSFT	17	Mastercard	MA
3	Apple Inc.	AAPL	18	ExxonMobil	XOM
4	Amazon	AMZN	19	Johnson & Johnson	JNJ
5	Meta Platforms	META	20	Palantir Technologies	PLTR
6	Broadcom	AVGO	21	Costco	COST
7	Alphabet Inc. (Class A)	GOOGL	22	AbbVie	ABBV
8	Tesla, Inc.	TSLA	23	Advanced Micro Devices	AMD
9	Alphabet Inc. (Class C)	GOOG	24	Home Depot	HD
10	Berkshire Hathaway	BRK-B	25	Bank of America	BAC
11	Oracle Corporation	ORCL	26	Procter & Gamble	PG
12	JPMorgan Chase	JPM	27	UnitedHealth Group	UNH
13	Walmart	WMT	28	GE Aerospace	GE
14	Eli Lilly	LLY	29	Chevron Corporation	CVX
15	Visa Inc.	V	30	Coca-Cola Company	KO

nomiky. Kľúčové miesto tu zaujímajú výrobcovia čipov a hardvéru pre AI (Nvidia, Broadcom, AMD), poskytovatelia cloudových platforiem (Microsoft, Amazon, Alphabet, Oracle), výrobcovia spotrebnej elektroniky (Apple) či spoločnosti zamerané na sociálne siete a digitálnu reklamu (Meta Platforms). Významné zastúpenie majú aj firmy vyrábajúce polovodiče pre 5G a dátové centrá. Okrem technologického sektora je v prvej tridsiatke výrazne zastúpený aj finančný sektor (JPMorgan Chase, Visa, Mastercard, Bank of America), zdravotníctvo a farmaceutické spoločnosti (Eli Lilly, Johnson & Johnson, UnitedHealth Group, AbbVie), maloobchod a spotrebný tovar (Walmart, Costco, Procter & Gamble, Coca-Cola), energetika (ExxonMobil, Chevron) a ďalšie tradičné odvetvia. Vzorka tak poskytuje reprezentatívny prierez najvplyvnejšími sektormi americkej, ale aj globálnej ekonomiky.

Ako benchmark budeme používať index S&P 500, a to hlavne z dôvodu, že je široko diverzifikovaný a dobre odráža situáciu na trhu. Rovnako aj preto, že odráža výnosy a riziko veľkých spoločností.

3.1.2 Voľba spôsobu výpočtu výnosov

Pri analýze finančných dát je jedným zo základných rozhodnutí voľba spôsobu výpočtu výnosov. Najčastejšie sa pritom používajú dve alternatívy, a to jednoduché a logaritmické výnosy. Ako jednoduché, tak i logaritmické výnosy majú veľmi podobné rozdelenia (najmä ak sú výnosy blízke nule), samotné poradie rizikovosti aktív však závisí od miery, ktorou meriame riziko [28]. Kým pri využití variancie je jedno, či pracujeme s jednoduchými alebo logaritmickými výnosy, tak pri využití CVaR ako metriky rizika sú výsledky rôzne podľa toho, aký spôsob výpočtu výnosov použijeme [28]. Ako bolo uvedené v Kapitole 2, v tejto práci pracujeme s modelmi (M2) a (M4), v ktorých je podmienka stochastickej dominancie druhého rádu (SSD) formulovaná pomocou CVaR. Z tohto dôvodu je výber typu výnosov kľúčový pre konzistentnosť a interpretovateľnosť výsledkov.

Modely (M2) a (M4) maximalizujú očakávaný výnos portfólia pri danom CVaR obmedzení. Aby bola táto maximalizácia exaktná, je nevyhnutné pracovať s jednoduchými výnosmi, pretože očakávaný výnos portfólia je v tomto prípade presne vyjadrený ako vážený priemer očakávaných výnosov jednotlivých aktív. Použitie logaritmických výnosov by viedlo iba k aproximácii tejto veličiny, a tým aj k potenciálnemu skresleniu výsledkov optimalizácie.

3.1.3 Obdobie pozorovania a frekvencia dát

Na získanie dát sme použili prostredie R (konkrétne *RStudio*) a balík *quantmod*, pomocou ktorého sme stiahli týždenné uzatváracie ceny upravené o dividendy a rozdelenia akcií (adjusted close prices) za určité obdobie v závislosti od scenára. Získali sme tak maticu týždenných cien $P = (p_{t,i})$, kde $t = 1, 2, \ldots, T$ označuje jednotlivé obchodné týždne (pričom T predstavuje ich počet, ktoré sa budú v Kapitole 4 meniť v závislosti od situácie) a $i = 1, 2, \ldots, 30$ označuje jednotlivé akcie. Z tejto matice cien P sme následne vypočítali maticu týždenných jednoduchých výnosov $R = (r_{t,i})$ s rozmermi $(T-1) \times 30$ nasledovne:

$$r_{t,i} = \frac{p_{t,i}}{p_{t-1,i}} - 1.$$

Pre potreby nášho modelu sme maticu R transponovali, takže každý riadok teraz predstavuje jednu akciu a každý stĺpec jeden scenár. Rovnaký postup sme aplikovali aj na index S&P 500, ktorého dáta sme získali za rovnaké časové obdobie. Výsledkom je vektor

týždenných výnosov $Y \in \mathbb{R}^{T-1}$. Pomocou týchto dát budeme analyzovať, či existuje také portfólio zložené z uvedených 30 akcií, ktoré dominuje indexu S&P 500 podľa kritéria SSD.

3.1.4 Chýbajúce údaje v dátach

V praktickej časti práce budeme meniť dĺžku sledovaného obdobia analyzovaných dát, pričom začiatok pozorovania zostáva nezmenený. Finančné dáta preto budeme analyzovať od 01. 01. 2020. Keďže spoločnosť vystupujúca pod skratkou PLTR nebola k 30. 09. 2020 obchodovaná na burze, jej výnosy za obdobie od 01. 01. 2020 do 30. 09. 2020 bolo potrebné odhadnúť.

Na odhadnutie chýbajúcich údajov existujú rôzne metódy. Jedna z metód na doplnenie chýbajúcich údajov je Stambaughová metódu (1997) [36], ktorá chýbajúce údaje odhaduje pomocou metódy maximálnej pravdepodobnosti (MLE) za predpokladu normálneho rozdelenia údajov. Keďže finančné dáta často normálne rozdelené nie sú, vyvinuli sa aj alternatívne metódy, ktoré tento predpoklad nevyžadujú. Ďalšou metódou, pomocou ktorej vieme nahradiť chýbajúce dáta je Pageová metóda (2013) [29]. Pagevá metóda je intuitívna metóda založená na spriemerovaní výsledkov, ale vyžaduje veľa simulácií a vďaka spriemerovaniu stráca informácie o dátach ako sú šikmosť, ťažké chvosty, ktoré sú ale pri našej analýze dôležité, keďže testujeme dáta či sú asymetrické. Preto táto metóda pre nás nie je vhodná. Vylepšením Page metódy je metóda, ktorú navrhli Jiang a Martin v roku 2016 (Combined Backfilling) [18], ktorá spája Pagevu metódu s backfillingom. Combined Backfilling metóda vyžíva všetky vstupné dáta, zachytáva nenormalitu v dátach, eliminuje problém spriemerovania a je kompatibilná s pokročilými optimalizačnými technikami. Výsledkom Combined Backfillingu je jeden dlhý dataset, ktorý zachováva empirické vlastnosti rezíduí (vrátane asymetrie a ťažkých chvostov). Pre nás je táto metóda zle aplikovateľná, keďže by sme dostali maticu výnosov s veľkým počtom scenárov a optimalizačný problém by mal vysoký počet ohraničení a optimalizácia by nemusela mať riešenie. Na základe poznatkov k spomínaným metódam sme sa rozhodli pracovať so Stambaughovu metódu kvôli jej jednoduchej implementácií.

3.2 Miery asymetrie a koncentrácie rozdelenia

Jedným z hlavných dôvodov, prečo vznikla potreba rozšíriť klasický Markowitzov model optimalizácie portfólia je spôsob, akým tento model chápe riziko. Markowitzov prístup meria riziko pomocou rozptylu výnosov, pričom berie do úvahy kladné aj záporné odchýlky od očakávanej hodnoty. Tým pádom penalizuje aj kladné odchýlky, ktoré však z pohľadu investora nepredstavujú nežiaduci jav.

Toto obmedzenie klasického Markowitzovho prístupu zároveň predpokladá určitú „regularitu“ správania výnosov, ktorá je v praxi často porušovaná. V literatúre sa preto bežne poukazuje na to, že finančné výnosy nemusia byť normálne rozdelené, čo má priamy dopad na platnosť jeho základných predpokladov. Z tohto dôvodu je testovanie vlastností rozdelenia výnosov, vrátane testov šikmosti, špicatosti kľúčové pre posúdenie vhodnosti klasického Markowitzovho rámca. Ak sa preukáže prítomnosť asymetrie v dátach, poskytuje to opodstatnenie pre použitie alternatívnych modelov rizika, ktoré sú menej citlivé na tieto predpoklady a môžu lepšie reflektovať skutočné správanie výnosov.

V nadväznosti na kapitolu 2, v ktorej sme predstavili modely (M2,M4) využívajúce alternatívne miery rizika je preto prirodzené bližšie sa pozrieť na vlastnosti rozdelenia výnosov, najmä na ich asymetriu. Tá môže významne ovplyvniť vhodnosť použitia jednotlivých modelov.

Na posúdenie asymetrie výnosov sa vo finančnej literatúre bežne využívajú charakteristiky ako *šikmosť* (skewness) a *špicatosť* (kurtosis). Šikmosť zachytáva, či sú výnosy viac orientované smerom k vysokým ziskom (kladné odchýlky) alebo k stratám (záporné odchýlky), zatiaľ čo špicatosť poskytuje informáciu o pravdepodobnosti výskytu extrémnych hodnôt.

V tejto časti práce v krátkosti pripomenieme pojmy *šikmosť* a *špicatosť* a ich využitie pri analýze finančných dát. V časti 3.2.2 následne preskúmame, či je možné o finančných dátach tvrdiť všeobecnejšie vlastnosti, napríklad či majú väčšiu náchylnosť k stratám alebo k ziskom [4, 12, 3]. Zároveň predstavíme vybrané testy šikmosti a špicatosti, ktoré budeme aplikovať na naše dáta, a stručne opíšeme ich základný princíp [6, 7].

3.2.1 Šikmosť a špicatosť

Šikmosť (skewness) vyjadruje mieru asymetrie a smer asymetrie rozdelenia pravdepodobnosti, ktorá je definovaná [32]:

$$\text{Skewness} = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

kde μ_3 značí tretí centrálny moment, σ smerodajnú odchýlku.

Ak sa hodnota rovná 0, tak to znamená, že rozdelenie je symetrické. Ak je šikmosť kladná, znamená to, že pravý chvost rozdelenia je dlhší a hrubší (rozloženie je šikmé doprava pravostranná asymetria). Ak je šikmosť záporná, dlhší a hrubší je ľavý chvost (rozloženie je šikmé doľava teda má ľavostrannú asymetriu, t.j. častejšie sa vyskytujú extrémne záporné výnosy). [3].

Okrem šikmosti, teda miery asymetrie dát, nás môže zaujímať aj špicatosť dát.

Špicatosť (kurtosis) charakterizuje hrúbku chvostov rozdelenia a mieru koncentrácie dát okolo stredu, definovaná ako [32]:

$$\text{Kurtosis} = \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Normálne rozdelenie má kurtosis presne rovný 3. Hodnoty vyššie ako 3 označujú rozdelenie s ťažkými (fat) chvostami. Hodnoty menšie ako 3 označujú rozdelenie s tenkými chvostami [3].

Na výpočet šikmosti a špicatosti používame výberové odhady centrálnych momentov. V praxi sa stretávame s tromi hlavnými spôsobmi výpočtu týchto výberových koeficientov, ktoré sa líšia mierou korekcie na skreslenie pri konečnej veľkosti vzorky [3, 19].

V práci predstavíme dve hlavné spôsoby výpočtu koeficientov, s ktorými budeme pracovať v aplikačnej časti práce. Type 1 predstavíme z dôvodu, že test, ktorý je predstavený v časti 3.2.2 využíva tento typ. Type 2 predstavíme z dôvodu, že ho budeme využívať v praktickej časti práce. Dôvod prečo sme sa rozhodli využívať tento typ je ten že je nevychýlený a vhodný pre stredné vzorky.

Typ 1

$$\begin{aligned} g_{1,i} &= \frac{m_{3,i}}{m_{2,i}^{3/2}} = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{t,i} - \bar{R}_i)^3}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{t,i} - \bar{R}_i)^2\right)^{3/2}}, \\ g_{2,i} &= \frac{m_{4,i}}{m_{2,i}^2} - 3 = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{t,i} - \bar{R}_i)^4}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{t,i} - \bar{R}_i)^2\right)^2} - 3, \end{aligned} \tag{19}$$

kde m_i označujú výberové centrálne momenty, pričom ich výpočet uvádzame v nami zvolenom značení. Vzorce (19) vyjadrujú výpočet šikmosti a špicatosti pre i-te aktívum, kde $i \in 1, 2, \ldots, n$

Pri špicatosti sa odpočítava 3, aby normálne rozdelenie malo hodnotu 0 (nadbytočná špicatosť). Tento typ je jednoduchý, ale pri malých vzorkách výrazne skreslený. Vyskytuje sa najmä v starších učebniciach a softvéroch [3, 19].

Typ 2 (nevychýlený odhad)

$$\begin{aligned} G_{1,i} &= g_{1,i} \cdot \frac{\sqrt{T(T-1)}}{T-2}, \\ G_{2,i} &= \frac{T-1}{(T-2)(T-3)}\big[(T+1)g_{2,i}+6\big] \end{aligned} \tag{20}$$

Tento typ predstavuje plne nevychýlený (unbiased) odhad populačnej šikmosti a špicatosti (za predpokladu normality). Je dnes najviac odporúčaný pre malé a stredné vzorky a používa ho napr, SAS a SPSS [3, 19].

Na výpočet šikmosti a špicatosti budeme používať funkcie `skewness, kurtosis` z balíka *e1071*, ktorý ráta rôzne druhy šikmosť aj kurotsis podľa definícií predstavených v článku [19].

3.2.2 Empirická analýza šikmosti a špicatosti výnosov

Empirické štúdie ukazujú, že historické výnosy rizikových aktív nie sú vo všeobecnosti symetrické, ale vykazujú systematickú asymetriu rozdelenia a zvýšený výskyt extrémnych hodnôt [2, 4, 12]. Táto vlastnosť je z hľadiska portfóliovej teórie dôležitá, pretože klasický Markowitzov model vychádza z predpokladu symetrického rozdelenia výnosov a penalizuje odchýlky od očakávanej hodnoty bez ohľadu na ich smer.

V dôsledku toho môže pri výrazne asymetrických rozdeleniach dochádzať k situácii, že negatívne aj pozitívne odchýlky sú v modeli hodnotené rovnako, čo nemusí korešpondovať s preferenciami investora. Táto skutočnosť je zároveň jedným z motívov pre použitie alternatívnych prístupov, ako je stochastická dominancia druhého rádu (SSD), ktorá umožňuje citlivejšie zachytiť riziko v chvostoch rozdelenia.

Empirické výsledky zároveň ukazujú, že výnosy rizikových aktív majú tendenciu vykazovať negatívnu šikmosť čo znamená, že veľké záporné výnosy sa vyskytujú častejšie a sú výraznejšie než zodpovedajúce kladné extrémy rovnakej absolútnej veľkosti [12],.

V nadväznosti na tieto zistenia sa v tejto časti zameriame na to, či sa uvedené charakteristiky asymetrie a špicatosti prejavujú aj v nami analyzovanom dátovom súbore.

Pre testovaní šikmosti a špicatosti použijeme D'Agostinov test šikmosti (D'Agostino's test of skewness) [6]. Tento test vychádza z výberového koeficientu šikmosti typu 1 (označovaného obyčajne g_1, ktorý bol predstavený v časti 3.2.1). Pod nulovou hypotézou, že dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia, sa tento koeficient transformuje na premennú Z, ktorá má približne štandardné normálne rozdelenie $N(0, 1)$. Uvedená transformácia je spoľahlivá už pri veľkosti výberu $n > 8$. Ak platí $|Z| \geq 1{,}96$ (čo zodpovedá 5 % hladine významnosti pri obojstrannom teste), zamietame nulovú hypotézu. To znamená, že dáta sú významne asymetrické (šikmé), a teda nemôžeme ich považovať za pochádzajúce z normálneho rozdelenia [6].

Pokiaľ D´Agostinov test nezamietne nulovú hypotézu, je potrebné sa pozrieť na špicatosť dát. Na testovanie špicatosti dát použijeme D´Agostinov a Pearsonov test [7], ktorý funguje na podobnom princípe ako test na šikmosť. Opäť za platnosti nulovej hypotézy g_2 pretransformuje na štatistickú premennú, ktorá má približne normálne rozdelenie. Aproximácia je vhodná už pri $n > 20$. [13]

Nezamietnutie oboch hypotéz znamená, že dané aktívum má šikmosť štatisticky nevýraznú od 0, a rovnako aj nadbytočná špicatosť je štatisticky blízko 0, teda môžeme tvrdiť, že historické výnosy aktíva nevykazujú asymetriu a ani ťažké chvosty. V takom prípade môžeme predpokladať, že výnosy aktíva vykazujú vlastnosti blízke normálnemu rozdeleniu, čo znamená, že predpoklady klasického Markowitzovho modelu sú v tomto prípade primerane splnené a jeho použitie je opodstatnené. Naopak, ak by sa aspoň jedna z hypotéz zamietla, naznačovalo by to prítomnosť asymetrie alebo nadmernej špicatosti vo výnosoch, teda odchýlku od normálneho rozdelenia. V takom prípade by boli základné predpoklady Markowitzovho prístupu porušené a vhodnejšie by bolo uvažovať o alternatívnych modeloch optimalizácie portfólia, ktoré lepšie zachytávajú empirické vlastnosti finančných dát.

V rStudiu sme testy vykonávali pomocou funkcie `dagoTest()` z balíka *fBasic*.

Výsledky empirickej analýzy na nami používaných dátach budú popísané v sekcii 4.1.2.

3.3 Porovnávané optimalizačné modely alokácie portfólia

V tejto časti predstavíme referenčné modely, ktoré budú slúžiť na porovnanie s modelmi (M2) a (M4) uvedenými v kapitole 2. Uvažovať budeme o rôznych variantoch Markowitzovho modelu, pričom sa zameriame na prístupy minimalizácie rizika pri danom výnose, maximalizácie výnosu pri stanovenej úrovni rizika, ako aj na hľadanie optimálneho pomeru medzi výnosom a rizikom. Okrem toho zahrnieme aj model s rovnomerným rozdelením váh.

3.3.1 Markowitzov model

Na hľadanie optimálneho portfólia pomocou Markowitzovho modelu [26] sa v praxi používa optimalizačný problém, ktorý má nasledujúcu podobu:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{pri podmienkach} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i = \bar{R}_p, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{21}$$

kde x_i sú váhy predstavujúce podiel i-tého aktíva v portfóliu, σ_{ij} je kovariancia medzi výnosmi i-tého a j-tého aktíva a $\bar{R}_i$ je očakávaný výnos i-tého aktíva. V tomto modeli je očakávaný výnos portfólia $\bar{R}_p$ pevne zadaný a optimalizačný problém hľadá portfólio s najnižšou varianciou.

Pomocou zmeny parametra $\bar{R}_p$ vieme takto nájsť optimálne portfóliá, ktoré ležia na efektívnej hranici. Ako prvé referenčné portfólio sme v našej práci zvolili trhové potrfólio. Trhové portfólio je portfólio, ktoré vznikne ako bod dotyku dotyčnice z bezrizikového výnosu k efektívnej hranici. Tento problém je ekvivalentný s úlohou maximalizácie Sharpe ratia [23], ktorý má nasledujúcu podobu:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\ldots,x_n} \quad & \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i\, x_i - r_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\, \sigma_{ij}}} \\ \text{pri podmienkach} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{22}$$

kde r_f je výnos bezrizikového aktíva. Model (22) budeme v práci označovať ako (R1). Bezriziková miera výnosu sa v akademickej literatúre zvyčajne aproximuje výnosom štátnych dlhopisov, najmä 10-ročných US Treasury bondov. Empirické údaje ukazujú, že ich výnosy sa v dlhodobom horizonte pohybujú v nižších jednotkách percent, pričom priemerná hodnota dosahuje približne 2,92% podľa [5]. Na tomto základe bola v práci použitá hodnota 3% p.a., ktorá predstavuje primeranú aproximáciu bezrizikovej sadzby.

Na riešenie optimálneho portfólia podľa modelu (22), ktorý je formulovaný ako úloha kvadratického programovania, bolo použité prostredie R (RStudio) spolu s balíkom *quadprog*. V rámci neho bola na výpočet využitá funkcia `solve.QP`.

Trhové portfólio dosahuje najvyššie možné Sharpe ratio spomedzi všetkých portfólií nachádzajúcich sa na efektívnej hranici, t. j. maximalizuje výnos na jednotku rizika.

Ďalším referenčným modelom, pomocou ktorého budeme porovnávať modely (M2) a (M4), je Markowitzov model, v ktorom ako fixný parameter zvolíme volatilitu rovnakú ako volatilita indexu $S\&P$ 500 a maximalizujeme očakávaný výnos portfólia.

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i \\ \text{pri podmienkach} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{23}$$

kde σ_p^2 predstavuje očakávanú varianciu portfólia, ktorá je v tomto modeli pevne stanovená. V našom prípade túto hodnotu zvolíme ako varianciu zodpovedajúcu indexu S&P 500. Portfólio získané z úlohy (23) budeme označovať ako (R2).

Takto formulovaný model predstavuje úlohu kvadratického programovania, v ktorej maximalizujeme očakávaný výnos pri danom obmedzení na riziko. Na jej riešenie je možné využiť štandardné optimalizačné algoritmy, napríklad metódy implementované v balíku *quadprog*.

Z koncepčného hľadiska ide o úlohu analogickú k modelu (M2), pričom rozdiel spočíva v spôsobe formulácie dominancie. Kým model (M2) zabezpečuje dominanciu indexu podľa SSD, model (R2) dosahuje dominanciu voči indexu prostredníctvom mean-variance kritéria, teda pri rovnakom (alebo nižšom) riziku dosahuje vyšší očakávaný výnos.

Ako ďalší referenčný model využijeme formuláciu Markowitzovho modelu (21), pričom očakávaný výnos portfólia $\bar{R}_p$ zvolíme rovný očakávanému výnosu modelu (M2). Takto získané optimálne portfólio budeme označovať ako (R3).

Tento prístup je prirodzený z hľadiska porovnania portfólií, keďže hľadáme portfólio s rovnakým očakávaným výnosom ako (M2), ktoré však zároveň leží na Markowitzovej efektívnej hranici, a teda má minimálne možné riziko. Takto získané portfólio predstavuje vhodné portfólio na porovnávanie s modelom (M2).

Matematicky ide o úlohu kvadratického programovania v tvare:

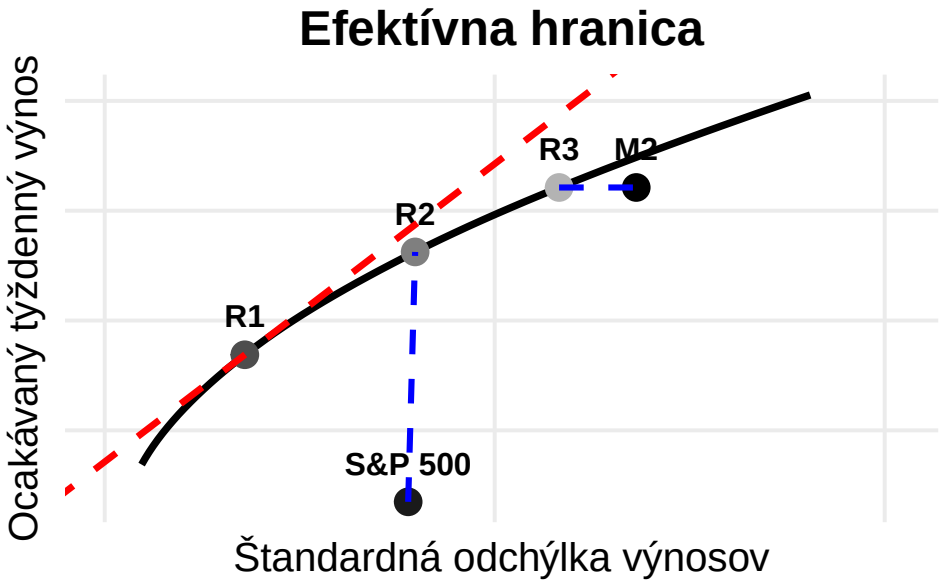
$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{pri podmienkach} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i = \bar{R}_{M2}, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{24}$$

kde $\bar{R}_{M2}$ označuje očakávaný výnos portfólia získaného z modelu (M2).

Úloha (24) patrí medzi konvexné kvadratické optimalizačné problémy a je možné ju efektívne riešiť pomocou štandardných numerických algoritmov, napríklad prostredníctvom funkcie `solve.QP` z balíka *quadprog* v prostredí R.

Z hľadiska interpretácie portfólio (R3) reprezentuje efektívne portfólio s rovnakým výnosom ako (M2), pričom dosahuje najnižšiu možnú varianciu. V dôsledku toho portfólio (R3) dominuje portfóliu (M2) podľa mean-variance kritéria, keďže pri rovnakom očakávanom výnose vykazuje nižšie (alebo najnižšie možné) riziko.

Pre lepšiu ilustráciu uvádzame vizuálne znázornenie modelov (R1) – (R3) na efektívnej hranici na Obr. 4.



Obr. 4: Rozloženie referenčných modelov a indexu na efektívnej hranici

3.3.2 Model s rovnakým rozložením váh

Posledným modelom na porovnanie bude model s rovnakým rozložením váh, ktorý slúži ako naivný model. Model budeme v práci označovať ako Equally model. Tento prístup spočíva v rovnomernom rozdelení kapitálu medzi všetky dostupné aktíva, teda každé aktívum má váhu presne $\frac{1}{n}$, kde n je počet aktív. Model v texte budeme označovať ako (R4).

V praxi sa ukazuje, že tento naivný prístup optimalizácie pri časových obdobiach 5-10 rokov dosahuje vo väčšine prípadov lepšiu výkonnosť ako Markowitzov model [8].

Tento model nevyžaduje žiadne znalosti o optimalizácii portfólia, odhadoch výnosov ani kovariančnej matrici. Napriek svojej jednoduchosti sa často využíva ako referenčný bod na porovnanie výkonnosti sofistikovaných stratégií.

Tento naivný spôsob tvorby optimálneho portfólia je pre investorov atraktívny najmä vďaka svojej jednoduchosti, keďže nevyžaduje žiadne výpočty stredných hodnôt ani kovariančnej matice. Ide o statický prístup k tvorbe portfólia, pretože bez ohľadu na zvolené časové obdobie vždy vedie k rovnakému rozhodnutiu v podobe rovnomerného rozdelenia váh medzi aktíva.

Nevýhodou tohto prístupu je však skutočnosť, že keďže nepracuje s očakávanými výnosmi ani ich štatistickým rozdelením, ignoruje rozdielne rizikovo-výnosové charakteristiky jednotlivých investícií. Z tohto dôvodu môže byť v porovnaní so sofistikovanejšími modelmi menej efektívny pri optimalizácii portfólia.

3.4 Hodnotiace metriky výkonnosti portfólií

V praktickej časti práce budeme porovnávať modely (M2) a (M4) s referenčnými modelmi, ktoré boli predstavené v časti 3.3 , na to aby sme mohli modely porovnávať potrebujeme finančné ukazovatele resp. metriky podľa ktorých budeme modely porovnávať. Preto v tejto podkapitole predstavíme metriky výkonnosti, pomocou ktorých budeme vzájomne porovnávať optimálne portfóliá získané rôznymi modelmi. Tieto ukazovatele umožňujú komplexné zhodnotenie jednotlivých stratégií z hľadiska očakávaného výnosu, podstupovaného rizika, efektívnosti využitia rizika aj stability v čase. Vybrané metriky zároveň slúžia investorovi ako objektívne kritériá pri rozhodovaní o najvhodnejšom portfóliu podľa jeho individuálnych preferencií, či už kladie dôraz predovšetkým na maximalizáciu výnosu, minimalizáciu rizika, najvyšší výnos na jednotku rizika, ochranu pred extrémnymi stratami, alebo kombináciu uvedených aspektov.

Výber použitých metrík bol motivovaný snahou zachytiť viacero pohľadov na hodnotenie portfólia, nie len samotný výnos, ale aj riziko, jeho asymetriu a správanie v extrémnych situáciách. Z tohto dôvodu sú metriky v tejto práci rozdelené do niekoľkých skupín podľa toho, aký aspekt portfólia opisujú. Prvú skupinu tvoria základné ukazovatele výnosu a rizika, konkrétne očakávaný výnos a volatilita, ktoré poskytujú základný popis výkonnosti portfólia. Druhá skupina zahŕňa ukazovatele rizikovo-očisteného výnosu, ako Sharpe a Sortino ratio, ktoré umožňujú zohľadniť vzťah medzi výnosom a rizikom rôzneho charakteru. Tretia skupina je zameraná na mieru rizika v zmysle potenciálnych strát, kde budeme používať VaR, CVaR a Maximum Drawdown (MDD), ktoré lepšie zachytávajú extrémne negatívne scenáre. Poslednú skupinu tvoria relatívne výkonnostné ukazovatele voči referenčnému portfóliu, konkrétne tracking error a information ratio, ktoré umožňujú posúdiť odchýlku a efektívnosť aktívne spravovaných stratégií v porovnaní s benchmarkom.

3.4.1 Očakávaný výnos

Pre portfólio je očakávaný výnos váženým priemerom očakávaných výnosov jednotlivých aktív [27], ktoré ho tvoria. Očakávaný výnos portfólia $\bar{r}_p$ je:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i,$$

3.4.2 Volatilita portfolia

Neistotu očakávaného výnosu investori vyjadrujú pomocou smerodajnej odchýlky výnosov σ [27]. Na výpočet smerodajnej odchýlky výnosu portfólia σ_p potrebujeme okrem smerodajných odchýlok jednotlivých aktív σ_i aj kovarancie medzi nimi σ_{ij}. Hodnotu σ_p vypočítame podľa vzťahu:

$$\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(R_p) = E[(R_p - \bar{R}_p)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij},$$

kde $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(R_i, R_j)$.

Na výpočet očakávaného výnosu a volatility budeme používať funkcie z prostredia R. Konkrétne ide o funkcie `mean()` a `sd()`.

3.4.3 Sharpe ratio

Sharpe ratio[2] (ďalej aj ako SR) je miera, ktorá udáva pomer medzi nadvýnosom a rizikom [17]. Hovorí, koľko dodatočného výnosu prináša portfólio za jednotku rizika. Čím je hodnota Sharpe ratia vyššia, tým je portfólio efektívnejšie. Záporná hodnota poukazuje na skutočnosť, že pri nenulovom riziku nám investícia ponúkne menšiu návratnosť ako bezrizikové aktívum. Sharpeov pomer väčší ako 1 sa považuje za dobrý, väčší ako 2 za veľmi dobrý a väčší ako 3 za excelentný. Sharpe ratio sa počíta ako [24]:

$$SR = \frac{E[R_p - r_f]}{\sigma_p} = \frac{\bar{R}_p - r_f}{\sigma_p}.$$

3.4.4 Sortino ratio

Nevýhodou Sharpe ratia je, že zohľadňuje všetky odchýlky od očakávaného výnosu, teda aj tie kladné (nadvýnosy), aj záporné (straty). Naopak, Sortinov pomer nepenalizuje

[2]Známy pod slovenským ekvivalentom ako Sharpeov pomer.

odchýlky smerom nahor [24]. Zameriava sa výlučne na tzv. „downside volatilitu“, teda iba na tie odchýlky nižšie od MAR (minimálna akceptovateľná miera návratnosti).

Princíp výpočtu je podobný ako pri výpočte Sharpe ratia, s tým rozdielom, že sa zohľadnia len výnosy nižšie ako MAR. Tento prístup lepšie vystihuje skutočné riziko z pohľadu investora, pretože volatilita spôsobená nadpriemerne vysokými výnosmi nie je nežiaduca a nemalá by byť penalizovaná. Vo všeobecnosti sa Sortino ratio definuje pomocou MAR ale v praxi sa za hodnotu MAR dosadzuje bezrizikový výnos r_f.

Pre investorov citlivých na poklesy môže byť Sortinov pomer obzvlášť dôležitým indikátorom. Vyššie hodnoty Sortino ratia naznačujú lepší pomer výnosu k nežiaducim poklesom. Sortino ratio je definované ako [24]:

$$\text{Sortino ratio} = \frac{\bar{R}_p - \text{MAR}}{\sigma_{\text{záporná}}} = \frac{\bar{R}_p - r_f}{\sigma_{\text{záporná}}},$$

kde $\sigma_{\text{záporná}}$ predstavuje downside volatilitu, ktorá sa ráta ako:

$$\sigma_{\text{záporná}} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \min(0, R_{pt} - MAR)^2},$$

kde R_{pt} je očakávaný výnos portfólia v scenári t.

Na výpočet Sharpe ratia a Sortino ratia budeme používať funkcie z balíka *PerformanceAnalytics* v R. Konkrétne ide o funkcie `SharpeRatio()` a `SortinoRatio()`.

3.4.5 VaR, CVaR

Definície Var a CVaR sú spomenuté v časti 1.5.

Na výpočet VaR a CVaR budeme používať funkcie z balíka *PerformanceAnalytics* v R. Konkrétne ide o funkcie `VaR()` a `ES()`.

3.4.6 Maximum drawdown MDD

Maximum Drawdown (MDD) je najväčší pokles hodnoty portfólia od lokálneho maxima k následnému minimálnemu bodu počas sledovaného obdobia [16, 31]. Udáva najväčšiu stratu, ktorú investor zažil od vrcholu k najnižšiemu bodu. Čím vyššia hodnota MDD, tým väčšie bolo riziko poklesu. Pre nás je optimálna hodnota MDD čo najnižšia (ideálne blízko nuly).

Nech W_t označuje hodnotu kapitálu v čase t

$$W_t = \prod_{s=1}^{t}(1 + R_{p,s}).$$

Relatívny pokles (drawdown) v čase t vypočítame ako:

$$d(t) = \frac{\text{peak}_t - W_t}{\text{peak}_t},$$

kde peak_t predstavuje maximálnu hodnotu kapitálu dosiahnutú do času t

$$\text{peak}_t = \max_{\tau \in \{1,\ldots,t\}} W_\tau.$$

Inak povedané, $d(t)$ je najväčší relatívny pokles od historického maxima do času t. Maximum Drawdown (MDD) je potom najväčší relatívny pokles zo všetkých $d(t)$ počas celého sledovaného obdobia. Hlbší matematický pohľad môžeme nájsť v [16], [31]. Túto metriku budeme počítať pomocou funkcie `maxDrawdown` z balíka *PerformanceAnalytics*.

3.4.7 Tracking error

Tracking Error (TE) je miera odchýlky výnosov portfólia od výnosu benchmarku. Udáva o koľko percentuálnych bodov sa v priemere líši výnos portfólia od benchmarku [15]. Tracking Error použitý v kontexte hodnotenia aktivity portfólio manažéra popisuje riziko jeho aktívnej správy fondu. Čím vyššia hodnota Tracking Erroru, tým rozdielnejšie sa portfólio pohybuje voči benchmarku, čo vyplýva z aktívnej správy portfólio manažéra. Naopak, hodnota blízka nule nám dáva jasnú informáciu, že portfólio manažér sa pri správe portfólia takmer vôbec neodchyľuje od benchmarku. Tracking Error sa definuje ako:

$$TE = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{p,t} - y_t)^2}.$$

Čím vyššia hodnota, tým väčšia odchýlka od benchmarku. To však neznamená automaticky lepší výnos, ale len väčšiu aktivitu manažéra. Výpočet Tracing erroru bude prebiehať pomocou funkcie `TrackingError` z balíka *PerformanceAnalytics*.

3.4.8 Information ratio

Information Ratio (IR) je ukazovateľ výkonnosti portfólia, ktorý popisuje, ako si portfólio vedie v porovnaní s benchmarkom pri zohľadnení aktívneho rizika [17]. Pre investora

je lepšia čo najvyššia hodnota IR, pretože čím väčší je kladný rozdiel medzi výnosom portfólia a benchmarku a čím nižší je tracking error, tým lepšie. Kladná hodnota IR znamená, že portfólio v danom období prekonáva benchmark po úprave o riziko odchýlky. Information Ratio je definované ako [24]:

$$IR = \frac{\bar{R}_{p_{\text{ročný}}} - \bar{Y}_{\text{ročný}}}{TE},$$

kde $\bar{R}_{p_{\text{ročný}}}$ je anualizovaný výnos portfólia, $\bar{Y}_{\text{ročný}}$ je anualizovaný výnos benchmarku.

Information ratio budeme rátať pomocou funkcie `InformationRatio` z balíka *PerformanceAnalytics*, ktorá z týždenných výnosov vypočíta anualizované (ročné) výnosy pomocou geometrickej anualizácie a tie použije pri výpočte.

3.4.9 Bootstrap metóda

Pre referenčné modely, ktoré boli predstavené v časti 3.3 dávajú finančné metriky jednu konkrétnu hodnotu. Zaujímavý by bol pohľad, na koľko sú citlivé dané hodnoty na výber dát. Preto v tejto časti predstavíme metódu bootstrap, ktorá je v tejto práci použitá ako nástroj na odhad variability a spoľahlivosti výkonnostných metrík vypočítaných z dostupných finančných dát. Bootstrap umožňuje simulovať opakované pozorovania tým, že z pôvodného datasetu vytvára nové vzorky rovnakého rozsahu pomocou náhodného výberu s opakovaním. Pre každú z týchto bootstrapových vzoriek sa následne znovu vyrátajú sledované metriky, ako napr. Sharpe ratio, Sortino ratio, Tracking Error či Information Ratio. Rozdelenie bootstrapových odhadov jednotlivých metrík slúži ako aproximácia ich skutočného rozdelenia, čím umožňuje získať nielen priemerné hodnoty, ale aj mieru variability, intervaly spoľahlivosti a robustnejší pohľad na stabilitu týchto ukazovateľov v porovnaní s jednoduchým výpočtom z jednej vzorky.

Metóda dokáže odhaliť, ako citlivé sú jednotlivé metriky na výber dát, a poskytuje realistickejší obraz o ich spoľahlivosti aj pri kratších časových radoch. Napriek tomu je potrebné mať na pamäti aj obmedzenia bootstrapu. Výsledky môžu byť skreslené pri výskyte výrazných odľahlých hodnôt alebo pri silnej časovej závislosti dát. Celkovo však bootstrap predstavuje vhodný a flexibilný nástroj na hodnotenie výkonnostných metrík, ktorý v tejto práci umožňuje získať detailnejšie a spoľahlivejšie výsledky než tradičný jednorazový výpočet [37].

Pomocou získaných aproximácií rozdelení metrík pre jednotlivé modely vieme odhadnúť pravdepodobnosť, že daná metrika je pre modely (M2) a (M4) lepšia než pre porovnávacie (referenčné) modely. Postup spočíva v tom, že analyzujeme hodnoty jednotlivých metrík pre každý model a následne ich porovnávame s hodnotami dosiahnutými referenčnými modelmi.

Na základe tohto porovnania vyhodnocujeme, či modely (M2) a (M4) dosahujú v danej metrike lepšie výsledky. Týmto spôsobom získavame empirické pravdepodobnosti, ktoré vyjadrujú, s akou pravdepodobnosťou modely (M2) a (M4) prekonávajú ostatné modely v jednotlivých metrikách.

V tejto kapitole sme predstavili dáta, s ktorými budeme v empirickej časti pracovať, ako aj vybranú vzorku 30 najväčších spoločností indexu S&P 500. Vysvetlili sme pojmy ako sú špicatosť a šikmosť a ako tieto hodnoty ovplyvňujú naše dáta. Taktiež sme predstavili testy pomocou, ktorých meriame asymetriu v dátach. Zároveň sme opísali referenčné modely, s ktorými budeme modely (M2,M4) porovnávať. Uviedli sme súbor metrík výkonnosti a rizika použitých na ich vzájomné hodnotenie. Takisto sme predstavili vlastný spôsob porovnávania modelov založený na kombinácii predstavených metrík a bootstrap metódy.

4 Aplikácia modelu na dáta

Po predstavení optimalizačných modelov, s ktorými budeme pracovať, ako aj dát, ktoré budeme analyzovať, a metrík, pomocou ktorých budeme jednotlivé modely porovnávať, sa môžeme pustiť do konkrétnej aplikačnej časti práce.

V časti 4.1 sa zameriame na analýzu konkrétnych dát. Preskúmame tvar rozdelenia výnosov jednotlivých aktív, konkrétne ich šikmosť a špicatosť, a overíme existenciu vzájomných korelácií medzi aktívami. Zároveň analyzujeme úroveň výnosov a volatilitu jednotlivých aktív.

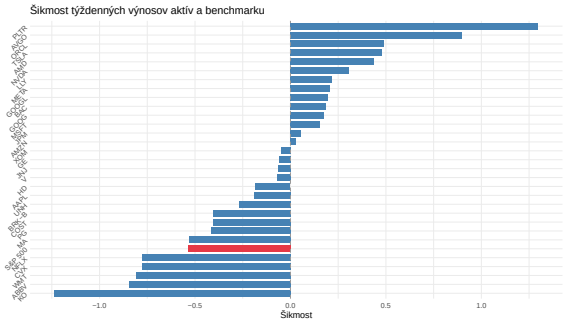
Následne v časti 4.2 aj v časti 4.4 aplikujeme modely (M2) a (M4) na skúmané dáta a porovnáme optimálne portfólia s portfóliami získanými pomocou referenčných modelov (R1) - (R4). Jednotlivé portfóliá budú porovnané na základe metrík uvedených v kapitole 3.4.

4.1 Dáta a ich základná charakteristika

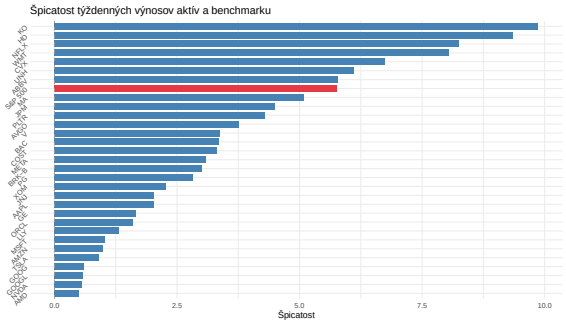
V tejto časti budeme skúmať základné vlastnosti nami vybraných finančných aktív ako sú ich očakávaný výnos, volatilita a ďalšie. Taktiež sa pozrieme na koreláciu aktív s indexom $S\&P$ 500 a otestujeme či historické výnosy aktív sú šikmé a špicaté.

4.1.1 Základné štatistiky výnosov

V numerickej analýze sme pracovali s týždennými historickými výnosmi aktív a indexu za obdobie od 01. 01. 2020 do 31. 12. 2024. Rok 2025 zámerne vynechávame, pretože nám bude slúžiť na out of sample analýzu. Po aplikovaní Stambaughovej metódu, ktorá bola spomenutá v časti 3.1.4 sme pre akcie získali maticu výnosov s rozmermi 261×30 a pre index vektor výnosov $Y \in R^{261}$. Prehľad všetkých základných štatistík dát je predstavený v Tabuľke B1 v prílohe B. Šikmosť aj špicatosť sme počítali ako nevychýlený odhad (type 2) (20). Šikmosť i špicatosť jednotlivých aktív je prehľadne zobrazená na Obr. 5a a 5b. Vidíme, že hodnoty šikmosti (skewness) a špicatosti (kurtosis) finančných aktív aj indexu $S\&P$ 500, sa výrazne odlišujú od nuly. To prirodzene vedie k otázke, či je táto odchýlka štatisticky významná. Preto otestujeme, či sa uvedené momenty štatisticky významne líšia od nuly.



(a) Šikmosť týždenných výnosov aktív a benchmarku



(b) Špicatosť týždenných výnosov aktív a benchmarku

Obr. 5: Momenty rozdelenia týždenných výnosov aktív

4.1.2 Testovanie šikmosti a špicatosti

Pre historické výnosy aktív a indexu sme testovali špicatosť a šikmosť pomocou testov predstavených v Sekcii 3.2.2. Vykonali sme dagoTest a testovali sme dve nulové hypotézy:

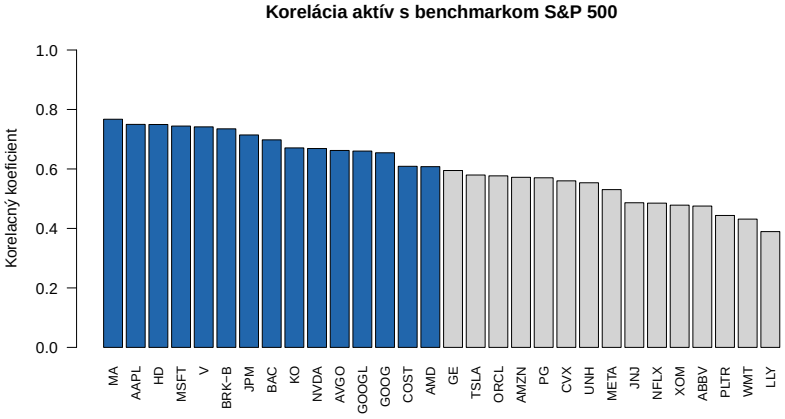
- $H_0 : \gamma_1 = 0$ vs $H_1 : \gamma_1 \neq 0$ (hypotéza šikmosti)
- $H_0 : \gamma_2 = 0$ vs $H_1 : \gamma_2 \neq 0$ (hypotéza špicatosti)

Podrobný prehľad výsledku testov je súčasťou Prílohy B v Tabuľke B2. Medzi aktívami jedine spoločnosti GOOGL a GOOG majú podľa testov šikmosť aj nadbytočnú špicatosť štatisticky nevýraznú od 0, v ostatných prípadoch testy identifikujú buď výraznú šikmosť alebo špicatosť. Pri 16 aktívach pozorujeme výrazne šikmé rozdelenie výnosov, čo indikuje, že využitie inej miery rizika ako variancie je v tomto prípade rozumné.

4.1.3 Korelačná analýza

Pre bližšie zoznámenie sa s dátami sme sa pozreli aj na korelačnú maticu výnosov, aby sme posúdili mieru lineárnej závislosti medzi jednotlivými aktívami. Ukázalo sa, že všetky koeficienty v korelačnej maticu sú kladné, takže môžeme predpokladať, že ak sa bude dariť jednému aktívu, tak sa bude dariť aj ostatným, a zároveň, ak jedno aktívum bude klesať na výnosoch, tak budú aj ostatné.

Keďže korelačná matica má rozmery 31×31 a jej úplné zobrazenie by bolo prehľadné len ťažko, rozhodli sme sa ju neuvádzať v plnom rozsahu. Namiesto toho prezentujeme



Obr. 6: Korelácia aktív s indexom S&P 500

iba korelácie jednotlivých aktív s benchmarkom, teda s indexom S&P 500, ktoré sú pre ďalšie analýzy najrelevantnejšie.

Na Obr. 6 sú aktíva zoradené podľa veľkosti korelačného koeficienta s indexom. Modrou farbou sú zvýraznené tie aktíva, ktorých korelačný koeficient presahuje hodnotu 0.6, čo naznačuje výraznú pozitívnu koreláciu s trhom. Z grafu je zrejmé, že najvyššiu koreláciu s indexom S&P 500 vykazujú veľké technologické spoločnosti, ako napríklad MA, AAPL, MSFT, JPM, NVDA, GOOGL a ďalšie. Toto zistenie naznačuje, že väčšina posudzovaných aktív je úzko spätá s celkovým vývojom trhu (indexu), čo môže v neskoršej fáze ovplyvniť možnosti diverzifikácie.

4.2 Výsledky optimalizácie portfólia SSD modelu

V tejto časti práce budeme skúmať optimálne portfólio, ktoré dominuje indexu $S\&P$ 500 pomocou modelov (M2) a (M4). Optimálne portfólia porovnáme s referenčnými modelmi (R1) - (R4) pomocou finančných ukazovateľov a taktiež pomocou bootstrap metódy.

4.2.1 Optimálne portfólio navrhovaného modelu

Zloženie optimálneho portfólia môžeme vidieť v Tabuľke 5. Ak by investor považoval nami pozorované obdobie za vhodné a reprezentatívne, volil by portfólio z 8 aktív, ktoré sú znázornené v Tabuľke 5, pričom najväčšie zastúpenie by v jeho portfóliu malo aktívum LLY s ABBV a najmenšie zastúpenie firma ORCL.

Tabuľka 5: Optimálne zloženie portfólia, ktoré stochasticky dominuje indexu S&P 500 pomocou modelu (M2)

	NVDA	AVGO	ORCL	LLY	PLTR	ABBV	PG	UNH
Váha	0.1242	0.0896	0.0473	0.2085	0.1612	0.2047	0.1073	0.0571

4.2.2 Porovnanie s referenčnými modelmi

Po nájdení optimálneho portfólia pomocou modelu (M2) určíme aj optimálne zloženie portfólií pomocou referenčných modelov spomenutých v časti 3.3 (R1) - (R4). Následne môžeme jednotlivé modely medzi sebou porovnať pomocou metrík uvedených v časti 3.4.

V Tabuľke 6 sú uvedené rôzne metriky, pomocou ktorých boli porovnávané zvolené modely. Metriky boli vypočítané pomocou funkcií opísaných v sekcii 3.4.

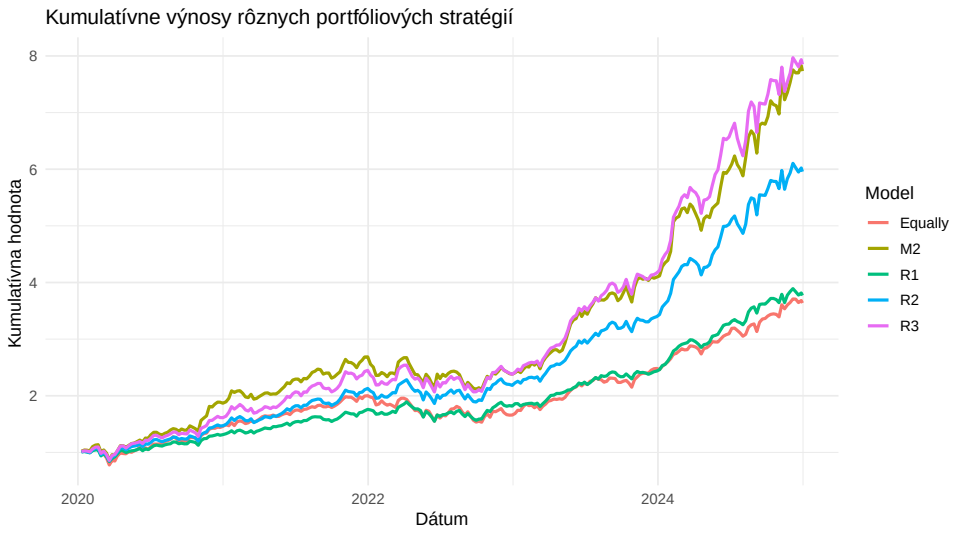
Tabuľka 6: Porovnanie referenčných modelov podľa výkonnostných metrík

	M2	R1	R2	R3	Equally
Očak. výnos	0.0084	0.0054	0.0072	0.0084	0.0054
Volatilita	0.0336	0.0236	0.0280	0.0317	0.0289
Sharpe	0.2333	0.2034	0.2386	0.2479	0.1663
Sortino	0.4221	0.3138	0.3903	0.4209	0.2556
VaR 95%	-0.0384	-0.0306	-0.0368	-0.0417	-0.0398
CVaR 95%	-0.0577	-0.0488	-0.0542	-0.0602	-0.0599
MDD	0.2412	0.1979	0.2047	0.2165	0.2915
Tracking Error	0.1439	0.1034	0.1174	0.1346	0.0501
Information Ratio	2.6106	1.6942	2.5513	2.8252	3.3091

Farby: najlepšie, najhoršie v riadku.

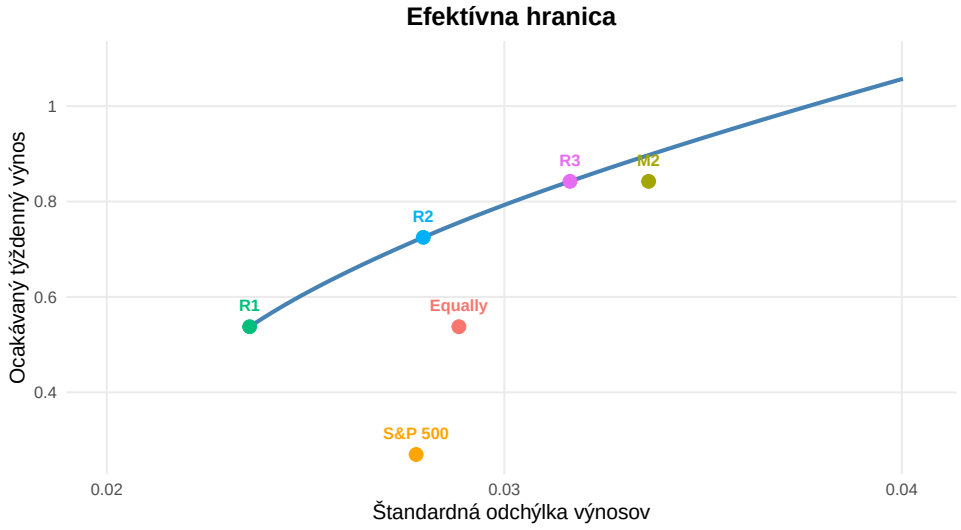
Ako ďalší krok sme sa pozreli ako vyzerajú kumulatívne výnosy referenčných modelov v sledovanom období. Kumulatívne výnosy môžeme pozorovať na Obr. 7.

Zaujímavým pozorovaním je, že pre sledované obdobie model (R1) spolu s Equally (R4) modelom vykazujú veľmi podobný priebeh kumulatívnych výnosov počas sledovaného



Obr. 7: Kumulatívne výnosy referenčných modelov za sledované obdobie

obdobia, čo je znázornené na Obr. 7. Takisto model (R3) spolu s modelom (M2) vykazujú podobný priebeh kumulatívnyxh výnosov. Z priebehu kumulatívnych výnosov zároveň vidíme, že model (R3) dosahuje na konci periódy najvyššie hodnoty.



Obr. 8: Rozloženie referenčných modelov a indexu na efektívnej hranici

Výsledok je výrazne ovplyvnený výberom referenčných modelov (R1) – (R4), čo je zreteľne znázornené na Obr. 8. Tento obrázok prezentuje efektívnu hranicu podľa Markowitza [26], pričom modely (R1), (R2) a (R3) identifikujú portfóliá nachádzajúce sa priamo na tejto hranici.

Model (R1), ako bolo diskutované v časti 3.3.1, predstavuje portfólio s maximálnym

Sharpe ratiom na efektívnej hranici. Model (R2) zodpovedá portfóliu s rovnakou volatilitou ako index $S\&P$ 500, zatiaľ čo model (R3) dosahuje rovnaký očakávaný výnos ako model (M2), avšak pri nižšej úrovni rizika.

Z grafu je zároveň zrejmé, že index $S\&P$ 500 a rovnako vážené portfólio (R4) sa nachádzajú pod efektívnou hranicou. To naznačuje, že pri danej úrovni rizika by bolo možné zostaviť portfólio s vyšším výnosom. Model SSD (M2) sa síce nachádza blízko efektívnej hranice, no je od nej mierne odchýlený.

4.2.3 Porovnanie pomocou metódy bootstrap

Pre porovnanie výsledkov jednotlivých modelov sme využili aj kombináciu metrík s bootstrap metódou, predstavenú v Sekcii 3.4.9. Vykonali sme 1000 simulácií, na základe ktorých sme vypočítali priemerné hodnoty vybraných metrík, ako aj ich empirické p-hodnoty. Empirické p-hodnoty indikujú, aká je pravdepodobnosť, že pri zmene dát o šum bude daná metrika v SSD modeli (M2) výkonnejšia v porovnaní s referenčnými modelmi. Tieto empirické p-hodnoty sú znázornené v Tabuľke 7.

Tabuľka 7: Empirické P-hodnoty: Pravdepodobnosť, že model M2 je lepší ako referenčný model

Model	Mean_p	Sharpe_p	Sortino_p	CVaR_p	MaxDD_p
M2 vs R1	0.889	0.620	0.708	0.224	0.283
M2 vs R2	0.662	0.476	0.557	0.368	0.334
M2 vs R3	0.491	0.416	0.485	0.532	0.403
M2 vs Equally	0.881	0.766	0.809	0.565	0.558

Farby: najvyššia, druhá najvyššia, pravdepodobnosť prekonania modelu podľa metriky

V Tabuľke 7 uvádzame empirické pravdepodobnosti, že model (M2) prekonáva referenčné modely (R1) – (R4) v jednotlivých metrikách. Z výsledkov vyplýva, že model (M2) najčastejšie prekonáva model (R4) vo väčšine sledovaných metrík. Zaujímavým zistením je, že v prípade metriky CVaR model (M2) prekonáva model (R1) len v 22% simulácií. Model (R3) dosahuje empirické pravdepodobnosti približne na úrovni 50%, čo naznačuje, že z hľadiska sledovaných metrík dosahuje porovnateľné výsledky ako model (M2).

V tejto časti práce sme určili optimálne zloženie portfólia v testovacom období od 01. 01. 2020 do 31. 12. 2024 a porovnali sme model s referenčnými modelmi (R1) – (R4) na základe viacerých výkonnostných metrík. Na základe získaných výsledkov môžeme konštatovať, že SSD model (M2) v tomto období prekonáva modely (R1) – (R4). Z bootstrapovej analýzy však zároveň vyplýva, že model (R3) dosahuje porovnateľné výsledky ako model (M2), keďže empirické pravdepodobnosti jeho prevahy sa pohybujú približne na úrovni 50%.

Ďalším krokom bude overenie, či tieto závery pretrvávajú aj pri historických výnosoch, na ktorých model nebol trénovaný. Tento aspekt budeme skúmať prostredníctvom out-of-sample analýzy.

4.3 Out of sample analýza (M2) modelu

V tejto časti práce sa pozrieme na out of sample analýzu modelu (M2). Analýza bude rozdelená na tri časové úseky, kedy každé obdobie rozdelíme na trénovaciu a testovaciu časť. Na trénovacom období určíme optimálne zloženie portfólia pomocou SSD modelu (M2) a taktiež aj pomocou modelov (R1) - (R4). Následne na tieto optimálne portfólia použijeme testovacie dáta a pozrieme sa ako sa jednotlivým modelom darí. Modely porovnáme pomocou vybraných metrík a taktiež na testovacom období zobrazíme kumulatívne výnosy jednotlivých modelov.

4.3.1 Analýza na testovacom období 01. 01. 2020 do 31. 12. 2022

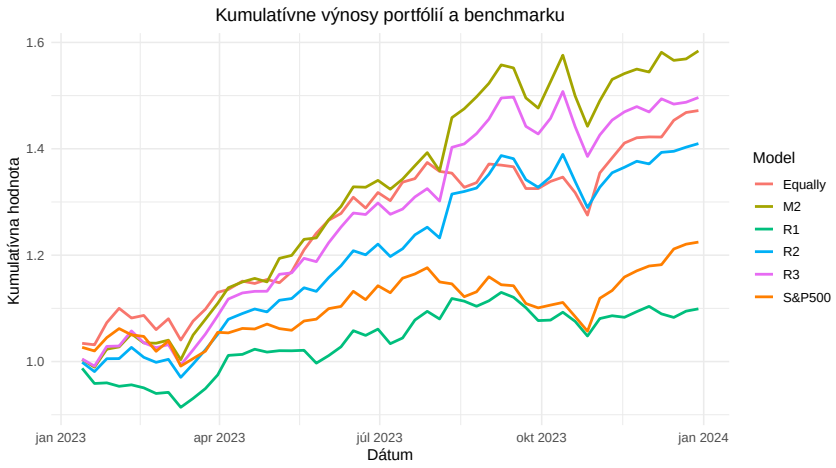
V tejto časti sa pozrieme ako by vyzeralo optimálne portfólio sledované na tomto období a porovnáme ho s referenčnými modelmi (R1) - (R4) na testovacom období, ktoré bude pre tento prípad 01. 01. 2023 - 31. 12. 2023 (156 trénovacích a 51 testovacích scenárov).

V Tabuľke C1 v Prílohe C uvádzame optimálne zloženie portfólia pre model SSD (M2) a taktiež aj pre referenčné modely (R1), (R2) a (R3) okrem Equally modelu (R4), ktorý má pre každé aktívum váhu 1/30. Môžeme pozorovať, že aktíva ako NVDA, ORCL, LLY, XOM, ABBV majú v každom modeli zastúpenie.

Keďže sme zistili zloženie optimálneho portfólia pre každý nami využívaný model, môžeme prejsť na testovacie obdobie a porovnať jednotlivé modely pomocou metrík.

Tabuľka 8: Porovnanie výkonnostných metrík na testovacom období (01. 01. 2023 - 31. 12. 2023)

Metrika	M2	R1	R2	R3	Equally
Očak. výnos	0.0093	0.0020	0.0069	0.0082	0.0078
Volatilita	0.0229	0.0169	0.0199	0.0223	0.0202
Sharpe	0.3814	0.0836	0.3210	0.3403	0.3584
Sortino	0.6886	0.1307	0.5626	0.6072	0.6712
VaR 95%	-0.0358	-0.0257	-0.0312	-0.0370	-0.0273
CVaR 95%	-0.0410	-0.0282	-0.0357	-0.0400	-0.0330
MDD	0.0848	0.0860	0.0720	0.0810	0.0721
Tracking Error	0.1485	0.1235	0.1289	0.1433	0.0510
Information Ratio	2.4850	-1.0388	1.4724	1.9456	4.9766



Obr. 9: Kumulatívne výnosy na testovacom období (01. 01. 2023 - 31. 12. 2023)

V Tabuľke 8 sú uvedené vybrané výkonnostné metriky jednotlivých modelov, vypočítané pre testovacie obdobie roku 2023.

Z Tabuľky 8 vyplýva, že model Equally (R4) dosahuje najvyššiu hodnotu Information ratio, avšak zároveň vykazuje najvyšší Tracking Error. SSD model (M2) dosahuje najvyšší výnos spomedzi všetkých uvažovaných modelov, ako aj najlepšie hodnoty Sharpe ratio, Sortino ratio a Tracking Erroru. Na druhej strane, model (M2) vykazuje aj najhoršie hodnoty CVaR, čo naznačuje, že v nepriaznivých trhových podmienkach môže byť vystavený najväčším stratám.

Model (R1) sa vyznačuje najnižšou volatilitou, no zároveň aj najnižším výnosom. Okrem toho dosahuje najvýraznejšie prepady a najhoršie hodnoty Information ratio.

Na Obr. 9 je znázornený priebeh kumulatívnych výnosov jednotlivých modelov. Z tohto pohľadu dosahuje najlepšie výsledky model (M2), nasledovaný modelom (R3). Model (R1) zaostáva za benchmarkom, čo korešponduje aj so zápornou hodnotou Information ratio.

Na základe uvedených zistení by bolo možné považovať model (M2) za najvhodnejší pre investora, pričom je potrebné zohľadniť jeho vyššie riziko v nepriaznivých obdobiach. Na potvrdenie tohto záveru však pristúpime k analýze ďalších časových období.

4.3.2 Analýza na testovacom období 01. 01. 2020 do 31. 12. 2023

V tejto časti sa pozrieme ako by vyzeralo optimálne portfólio sledované na tomto období a porovnáme ho s referenčnými modelmi (R1) - (R4) na testovacom období, ktoré bude pre tento prípad 01. 01. 2024 - 31. 12. 2024 (208 trénovacích a 52 testovacích scenárov).

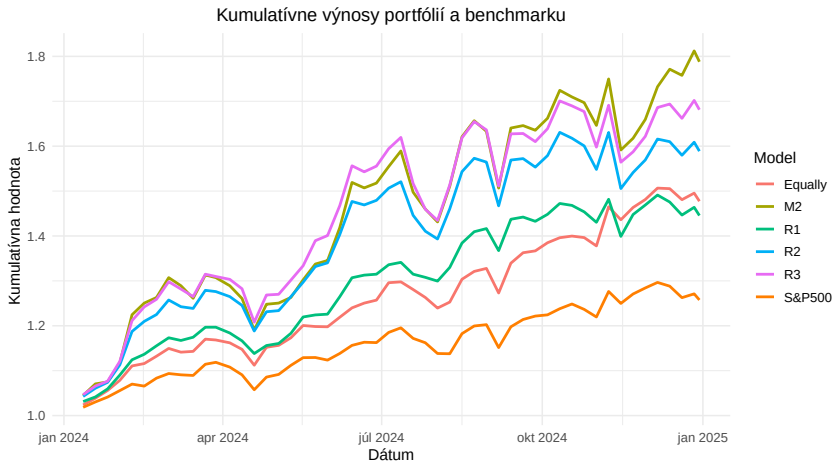
V Tabuľke C2 v Prílohe C uvádzame optimálne zloženie portfólia pre model (M2) a taktiež aj pre referenčné modely (R1, R2, R3), okrem Equally modelu (R4), ktorý má pre každé aktívum váhu 1/30. Aktíva NVDA, AVGO, ORCL, LLY, ABBV vybral každý model.

V Tabuľke 9 sú uvedené hodnoty výkonnostných metrík jednotlivých modelov pre testovacie obdobie. Výsledky naznačujú, že model (R4) dosahuje najlepšie hodnoty rizikovo upravených metrík spomedzi všetkých prístupov, najmä z hľadiska Sharpeho pomeru, Sortinovho pomeru a Information ratio.

SSD model (M2) síce poskytuje najvyšší očakávaný výnos, avšak za cenu vyššej volatility, vyššieho maximálneho poklesu (MDD) a najnepriaznivejšej hodnoty VaR. Celkovo

Tabuľka 9: Porovnanie výkonnostných metrík portfóliových modelov na testovacom období (01. 01. 2024 - 31. 12. 2024)

Metrika	M2	R1	R2	R3	Equally
Očak. výnos	0.0119	0.0073	0.0094	0.0107	0.0077
Volatilita	0.0381	0.0202	0.0310	0.0363	0.0192
Sharpe	0.2984	0.3327	0.2851	0.2784	0.3716
Sortino	0.5171	0.5778	0.4756	0.4617	0.7397
VaR 95%	-0.0566	-0.0217	-0.0473	-0.0604	-0.0192
CVaR 95%	-0.0752	-0.0382	-0.0627	-0.0716	-0.0306
MDD	0.0995	0.0558	0.0839	0.1142	0.0496
Tracking Error	0.1890	0.0722	0.1377	0.1744	0.0392
Information Ratio	2.8063	2.6033	2.4072	2.4290	5.6051



Obr. 10: Kumulatívne výnosy na testovacom období (01. 01. 2024 - 31. 12. 2024)

sa ukazuje, že jednoduchý prístup rovnomernej diverzifikácie môže v praxi konkurovať aj sofistikovanejším optimalizačným metódam.

Na Obr. 10 je znázornený priebeh kumulatívnych výnosov v testovacom období. Z tohto pohľadu dosahuje najlepšie výsledky model SSD (M2), ktorý vykazuje najvyššie kumulatívne výnosy. Naopak, najslabšie výsledky dosahuje model (R1), čo je v súlade s jeho najnižším očakávaným výnosom.

V závere tejto časti sa zameriame na out-of-sample analýzu za celé sledované obdobie.

4.3.3 Analýza na testovacom období 01. 01. 2020 do 31. 12. 2024

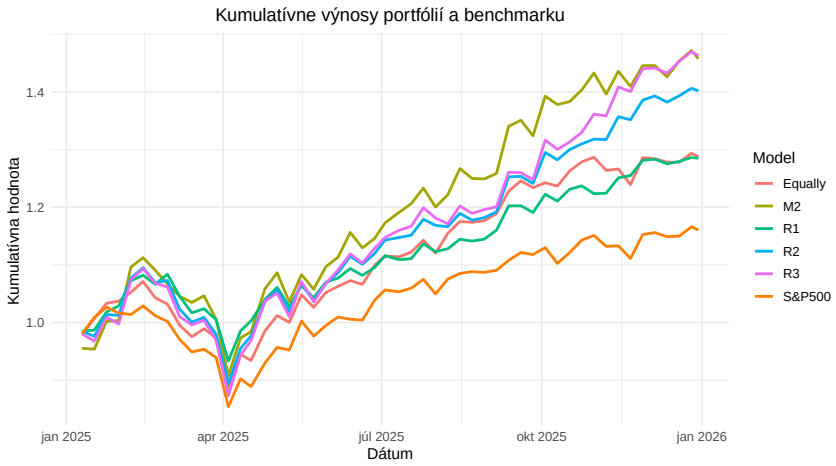
V tejto časti sa pozrieme ako by vyzeralo optimálne portfólio sledované na tomto období a porovnáme ho s referenčnými modelmi (R1) - (R4) na testovacom období, ktoré bude pre tento prípad 01. 01. 2025 - 31. 12. 2025 (261 trénovacích a 52 testovacích scenárov).

V Tabuľke C3 v Prílohe C vidíme zloženie optimálneho portfólia na testovacom období. Toto testovacie obdobie je zároveň naše používané obdobie pri skoršej analýze portfólia v Sekcii 4.2.

Tabuľka 10: Výkonnostné metriky portfóliových modelov (out-sample) na roku 2025

Metrika	**M2**	**R1**	**R2**	**R3**	**Equally**
Očak. výnos	0.0078	0.0051	0.0069	0.0078	0.0052
Volatilita	0.0339	0.0218	0.0280	0.0321	0.0248
Sharpe	0.2141	0.2064	0.2261	0.2264	0.1855
Sortino	0.3625	0.3197	0.3704	0.3823	0.2864
VaR 95%	-0.0417	-0.0293	-0.0320	-0.0367	-0.0236
CVaR 95%	-0.0628	-0.0462	-0.0563	-0.0620	-0.0500
MDD	0.1843	0.1390	0.1839	0.2017	0.1714
Tracking Error	0.1640	0.1093	0.1290	0.1495	0.0470
Information Ratio	1.8121	1.1397	1.8726	2.0237	2.7065

V Tabuľke 10 sú zobrazené hodnoty metrík na testovacom období. Výsledky ukazujú, že rozdiely medzi stratégiami sú menšie ako v predchádzajúcom prípade v časti 4.3.2, avšak určité trendy zostávajú konzistentné. Equally model (R4) dosahuje najvyššie Information



Obr. 11: Priebeh kumulatívnych výnosov v období od 01. 01. 2025 do 31. 12. 2025

Ratio, čo naznačuje najlepšiu schopnosť generovať nadvýnos vzhľadom na Tracking error, aj keď má najnižšie Sharpe ratio spomedzi všetkých stratégií. Markowitzove varianty (R1) – (R3) poskytujú mierne vyššie Sharpe a Sortino hodnoty, pričom (R3) dosahuje najlepší Sharpe a Sortino spomedzi optimalizačných modelov. Model (M2) vykazuje vyvážený pomer výnosu a rizika, no neprevyšuje modely (R1) - (R3). Z hľadiska rizika majú všetky portfóliá podobné hodnoty VaR a CVaR, pričom rozdiely sa viac prejavujú v MDD. Celkovo výsledky naznačujú, že pri tejto sade aktív sa rozdiely medzi optimalizačnými prístupmi zmenšujú a výkonnosť je viac závislá od samotnej diverzifikácie než od zvoleného modelu. Ak sa pozrieme na priebeh kumulatívnych výnosov na Obr. 11 vidíme, že najlepšie skončil SSD model (M2) spolu s modelom (R3).

Výsledky out of sample analýzy naznačujú, že neexistuje jednoznačne dominujúca stratégia vo všetkých sledovaných kritériách. Equally (R4) predstavuje najstabilnejší prístup, keďže dosahuje najvyššie Information Ratio, čo poukazuje na vysokú konzistentnosť výkonnosti voči referenčnému indexu. Z tohto dôvodu ho možno odporučiť investorom s preferenciou nižšej aktívnej odchýlky a vyššej stability portfólia.

Naopak, z pohľadu klasických metrík, najlepšie výsledky dosahuje model (R3), ktoré maximalizuje Sharpeho aj Sortinov pomer pri zachovaní prijateľnej úrovne rizika. Tento prístup je preto vhodný pre investorov, ktorí preferujú vyšší pomer výnosu k riziku a sú ochotní akceptovať mierne vyššiu kolísavosť výkonnosti.

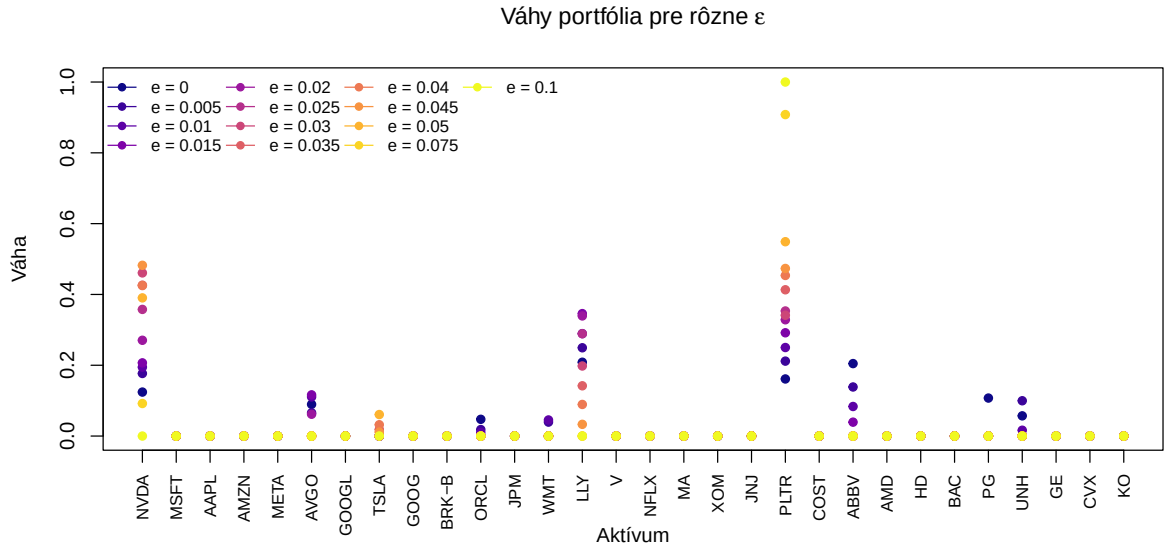
Ostatné optimalizačné prístupy (R1), (R2) a (M2) nepreukazujú jednoznačnú dominanciu, keďže ich výsledky sú vyvážené medzi výnosom a rizikom, avšak bez konzistent-

ného prevýšenia vyššie uvedených stratégií. Celkovo sa ukazuje, že v analyzovanom období a pre daný súbor aktív je efekt diverzifikácie a jednoduchej váhovej konštrukcie rovnako, ak nie viac, rozhodujúci ako samotná zložitosť optimalizačného modelu.

4.4 Výsledky optimalizácie portfólia rozšíreného modelu

Po analýze modelu (M2) sa v tejto časti zameriavame na model (M4), ktorý je jeho rozšírenou verziou. V tejto časti budeme sledovať ako voľba parametra ε ovplyvňuje finančné metriky v optimálnom portfóliu. Zmenu budeme zobrazovať pomocou grafov pre lepšiu čitateľnosť. Hodnoty ε budeme uvažovať z množiny $M_\epsilon = \{0\%,\ 0.5\%,\ 1\%,\ 1.5\%,\ 2\%,\ 2.5\%,\ 3\%,\ 3.5\%,\ 4\%,\ 4.5\%,\ 5\%,\ 7.5\%,\ 10\%\}$.

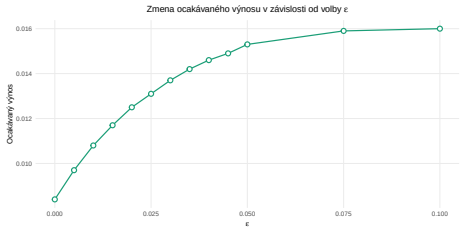
Ako prvé sme sa pozreli na to, ako voľba parametra ε ovplyvňuje zloženie optimálneho portfólia. Zloženie optimálneho portfólia pre jednotlivé voľby parametra ε je zobrazené na Obrázku 12 a taktiež aj v Tabuľke D1 v Prílohe D.



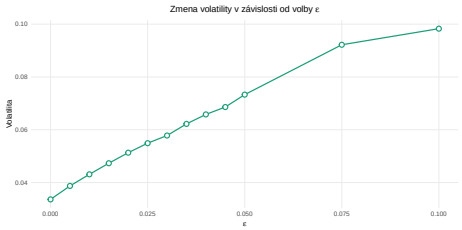
Obr. 12: Optimálne zloženie portfólia pre rôzne voľby hodnoty parametra ε

Na Obr. 12 môžeme vidieť ako sa mení zloženie portfólia v závislosti od voľby parametra ε. Zaujímavým výsledkom je že pri voľbe $\varepsilon = 10\%$ je optimálne portfólio zložené len s aktíva PLTR.

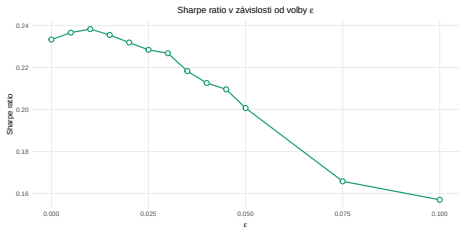
Obr. 13 prezentuje rizikovo-výnosové charakteristiky portfólií optimalizovaných pomocou modelu (M4) pre rôzne hodnoty parametra ε. S rastúcou hodnotou ε dochádza k



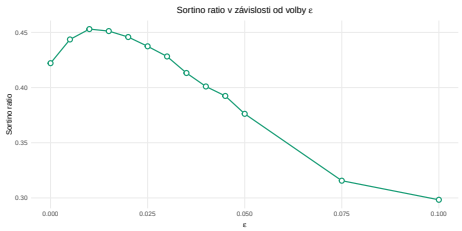
(a) Zmena očakávaného výnosu SSD portfólia v závislosti od parametra ε



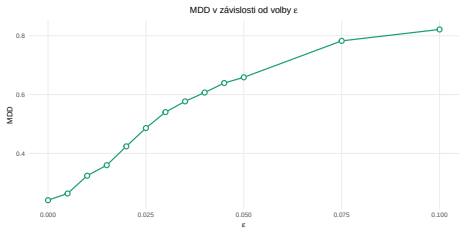
(b) Zmena volatility SSD portfólia v závislosti od parametra ε



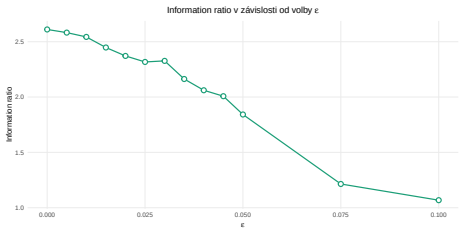
(c) Zmena Sharpe ratia SSD portfólia v závislosti od parametra ε



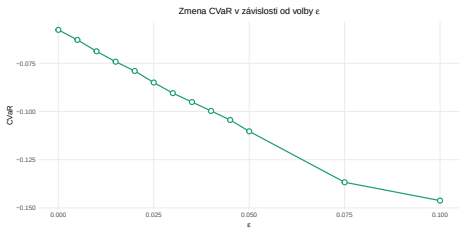
(d) Zmena Sortino ratia SSD portfólia v závislosti od parametra ε



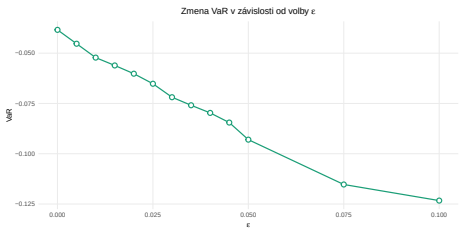
(e) Zmena Maximum drawdown SSD portfólia v závislosti od parametra ε



(f) Zmena Information ratia SSD portfólia v závislosti od parametra ε



(g) Zmena CVaR SSD portfólia v závislosti od parametra ε



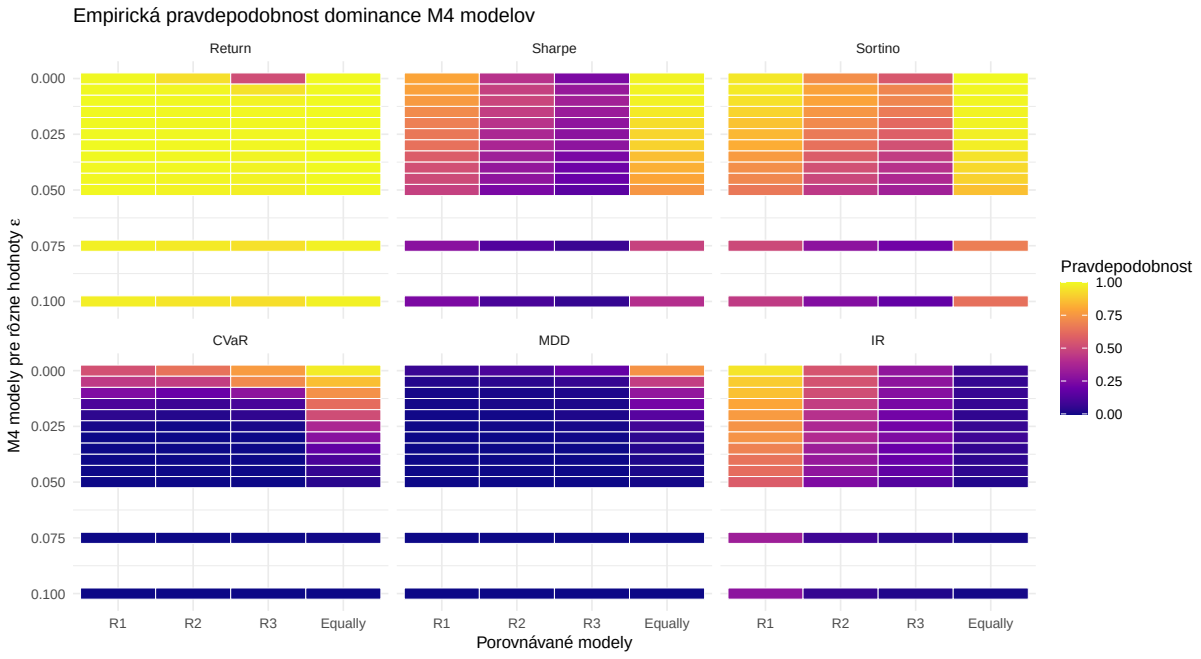
(h) Zmena VaR SSD portfólia v závislosti od parametra ε

Obr. 13: Zmena vybraných metrík SSD portfólia v závislosti od parametra ε

postupnému zvyšovaniu očakávaného výnosu portfólia, avšak zároveň rastie aj volatilita a maximálny pokles (MDD), čo naznačuje vyššie podstupované riziko. Zhoršujú sa tiež rizikovo upravené ukazovatele výkonnosti, ako sú Sharpeho a Sortinov pomer, ktoré dosahujú najvyššie hodnoty pri nižších hodnotách ε . Podobný trend je viditeľný aj pri ukazovateli Information Ratio, ktorý s rastúcim ε postupne klesá. Zároveň sa zvyšuje hodnota rizikových mier VaR a CVaR (v absolútnej hodnote), čo poukazuje na väčšie potenciálne straty v extrémnych situáciách. Celkovo teda vyššie hodnoty parametra ε vedú k agresívnejším portfóliám s vyšším výnosovým potenciálom, ale aj výrazne vyšším rizikom.

4.4.1 Bootstrap metóda

V tejto časti práce budeme skúmať, ako sa správajú jednotlivé rozšírené modely pomocou bootstrap metódy. Budeme porovnávať empirické pravdepodobnosti pre rôzne hodnoty parametra ε. Rozšírené modely porovnáme s modelmi (R1) - (R4). Empirické pravdepodobnosti budeme počítať pre vybrané metriky, ktoré považujeme za vhodné pre investorov.



Obr. 14: Empirická pravdepodobnosť dominanice (M4) modelov pre rôzne hodnoty ε

Hodnoty na Obr. 14 predstavujú empirické pravdepodobnosti, s akou SSD model (M4) pri danej hodnote parametra ε prekonáva jednotlivé porovnávané portfóliá (R1), (R2), (R3) a Equally (R4) vo vybraných metrikách. Hodnoty preto možno interpretovať

ako mieru robustnosti (M4) prístupu voči alternatívnym stratégiám. Vo všeobecnosti je viditeľné, že pri nízkych hodnotách ε dosahuje SSD model (M4) veľmi vysokú pravdepodobnosť dominancie, najmä voči Equally modelu (R4), kde sa hodnoty pre výnos a Sharpe pohybujú takmer na úrovni 1. To naznačuje, že pri mierne uvoľnených podmienkach SSD model takmer určite prekonáva (R4) v týchto kritériách. S rastúcim ε dochádza k postupnému poklesu pravdepodobnosti dominancie, čo je najvýraznejšie pri rizikovo citlivých ukazovateľoch ako Sharpe, Sortino a CVaR. Tento trend naznačuje, že vyššia tolerancia odchýlky od SSD kritéria znižuje schopnosť modelu systematicky prekonávať ostatné portfóliá. Zaujímavé je, že pokles nie je úplne monotónny najmä pri Information Ratio, kde sa objavujú lokálne výkyvy, čo môže naznačovať, že relatívna výkonnosť voči benchmarku závisí nielen od úrovne ε, ale aj od štruktúry samotných portfólií. Z hľadiska rizika (CVaR a MDD) je však trend jednoznačný, s rastúcim ε klesá pravdepodobnosť dominancie SSD modelu, čo odráža oslabenie jeho schopnosti kontrolovať extrémne straty voči alternatívnym stratégiám. Celkovo výsledky ukazujú, že parameter ε funguje ako regulačný prvok medzi silou SSD dominancie a jej robustnosťou, pričom nízke hodnoty zabezpečujú takmer úplnú dominanciu nad ostatnými modelmi, zatiaľ čo vyššie hodnoty vedú k postupnej strate tejto výhody.

Záver

Táto diplomová práca sa zaoberala optimalizáciou investičného portfólia so stochastickými ohraničeniami. V prvej kapitole boli systematicky predstavené základné koncepty stochastickej dominancie. Vlastným prínosom tejto časti práce je ucelené spracovanie vzťahu medzi kritériom strednej hodnoty a variability a stochastickou dominanciou druhého rádu pri porovnávaní investícií. Ukázali sme, že ak je dvojica investícií porovnateľná podľa oboch kritérií, výsledné usporiadanie investícií je zhodné. Súčasne sme však prezentovali aj situácie, v ktorých dominancia nastáva iba podľa jedného z kritérií, zatiaľ čo podľa druhého nie. Ďalším prínosom práce je formulácia tvrdení umožňujúcich porovnanie dvoch rovnomerne rozdelených investícií tak z pohľadu stochastickej dominancie druhého rádu, ako aj z pohľadu kritéria strednej hodnoty a variability.

V druhej kapitole sme predstavili modely obsahujúce stochastickú dominanciu druhého rádu (SSD) v ohraničeniach, ktoré následne využívame v numerickej časti práce. Model (M2) je prevzatý z literatúry a vychádza z prístupu [9], pričom umožňuje zahrnúť preferencie investora prostredníctvom SSD obmedzení. Následne sme predstavili aj vlastný rozšírený model (M4), ktorý vznikol relaxáciou SSD ohraničení. Táto modifikácia umožňuje väčšiu flexibilitu modelu, keďže pripúšťa čiastočné porušenie podmienok dominancie výmenou za potenciálne vyšší výnos portfólia. Zároveň sme ukázali, že pri diskrétne rozdelených výnosoch je možné, sledujúc postup ako podľa [9], oba modely formulovať ako úlohy lineárneho programovania, čo umožňuje ich efektívne numerické riešenie.

Tretia kapitola bola venovaná opisu použitých dát, ich frekvencie a základných štatistických charakteristík. Osobitná pozornosť sa sústredila na analýzu šikmosti a špicatosti výnosov, pričom boli predstavené aj štatistické testy slúžiace na overenie týchto vlastností. Ďalej boli definované referenčné prístupy použité na porovnanie s modelmi založenými na stochastickej dominancii druhého rádu. Ich výber zahŕňal jednak všeobecne známe investičné stratégie, ako trhové portfólio a naivnú diverzifikáciu, ale aj modely konštrukčne nadväzujúce na prístupy predstavené v druhej kapitole. Konkrétne išlo o model založený na podmienke dominancie v zmysle kritéria strednej hodnoty a variability a o Markowitzov model dosahujúci minimálne rovnaký výnos ako SSD portfólio. Kapitola zároveň predstavila metriky využité na hodnotenie a vzájomné porovnanie výkonnosti jednotlivých prístupov. Súčasťou analýzy bola aj bootstrapová metóda, použitá na overenie stability

získaných výsledkov a posúdenie, či pozorované závery nie sú iba dôsledkom náhodnosti v dátach.

Ťažisko práce spočívalo v analýze modelu stochastickej dominancie druhého rádu (M2) a jeho rozšírenia (M4), ktoré boli konfrontované s viacerými referenčnými stratégiami vrátane Markowitzových modelov (R1), (R2), (R3) a portfólia s rovnakými váhami (Equally). Na hodnotenie ich vlastností boli využité vybrané rizikovo-výnosové ukazovatele, najmä Sharpe ratio, Sortino ratio a Information ratio. Súčasťou analýzy bolo aj bootstrapové overenie, ktoré umožnilo posúdiť stabilitu výsledkov a empiricky odhadnúť úspešnosť jednotlivých prístupov vzhľadom na zvolené metriky.

Model (M2) bol následne podrobený out-of-sample analýze v troch rôznych časových oknách. Získané výsledky naznačili, že tento prístup má potenciál dosahovať vyššie očakávané výnosy, pričom je však spravidla sprevádzaný väčšou mierou volatility v porovnaní s referenčnými modelmi. Na druhej strane sa model (R3) ukázal ako najstabilnejší z pohľadu klasických rizikovo-výnosových charakteristík, predovšetkým podľa Sharpeho a Sortinovho pomeru, čo poukazuje na jeho vhodnosť pre konzervatívnejšie orientovaných investorov.

Do budúcna by bolo možné rozšíriť výskum o vyššie rády stochastickej dominancie, širšiu množinu aktív, prípadne o dynamické prístupy k optimalizácii portfólia v čase. Perspektívnym smerom je aj porovnanie SSD modelov s modernými robustnými optimalizačnými metódami alebo prístupmi strojového učenia v oblasti riadenia portfólia.

Zoznam použitej literatúry

[1] Apostol, T., M.: *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, 2. dopl. vyd., New York, John Wiley & Sons, 1967

[2] Bai, J., Ng, S.: *Tests for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series Data*, Journal of Business & Economic Statistics, 23 (2005) 49-60, dostupné na internete (25.10.2025)
http://www.columbia.edu/~jb3064/papers/2005_Testing_skewness_kurtosis_and_normality_for_time_series_data.pdf

[3] Bono, R., Arnau, J., Alarcón, R., Blanca, M. J.: *Bias, Precision, and Accuracy of Skewness and Kurtosis Estimators for Frequently Used Continuous Distributions*, Symmetry 12 (2020), dostupné na internete (25.10.2025)
https://www.researchgate.net/publication/338120030_Bias_Precision_and_Accuracy_of_Skewness_and_Kurtosis_Estimators_for_Frequently_Used_Continuous_Distributions

[4] Cont, R.: *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, Quantitative finance, 1 (2001) 223–236, dostupné na internete (25.10.2025)
http://rama.cont.perso.math.cnrs.fr/pdf/empirical.pdf

[5] Dagkus, B.: *Forecasting the risk-free rates: Practical forecasting model for the future of 10-year US Treasury yield through exogenous variables*, Working Paper, SSRN Electronic Jurnal, 2024, dostupné na internete (25.10.2025)
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4780234&utm_source

[6] D'Agostino, R. B.: *Transformation to Normality of the Null Distribution of G1* Biometrika, 57 (1970) 679-681, dostupné na internete (25.10.2025)
https://www.jstor.org/stable/2334794?seq=1

[7] D'Agostino, R. B., Pearson, E. S.:*Tests for Departure from Normality. Empirical Results for the Distributions of b2 and* $\sqrt{b1}$, Biometrika, 60 (1973) 613-622, dostupné na internete (25.10.2025)

https://www.jstor.org/stable/2335012?searchText=D%27Agostino+Pearson&searchUri=%2Faction%2FdoBasicSearch%3FQuery%3DD%2527Agostino%2B%2526%2BPearson%26so%3Drel&ab_segments=0%2Fspellcheck_basic_search%2Fcontrol&refreqid=fastly-default%3A160bf7801b5db554ab6aa0dbab64b876&seq=4

[8] DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. *Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?*, Review of Financial Studies, 22 (2009), 1915–1953

[9] Dentcheva, D., Ruszczyński, A.: *Portfolio optimization with stochastic dominance constraints*, Journal of Banking & Finance 30 (2006) 433–451

[10] Dentcheva, D., Ruszczyński, A.: *Robust stochastic dominance and its application to risk-averse optimization*, Mathematical Programming, 123 (2010), 85-100

[11] Dukát, M.: *Stochastická dominancia a správa portfólia*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2024, dostupné na internete (25.10.2025) https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioForm&sid=A6A9937D4AB687F47BCB85A9E4AF

[12] Farahani, H., Serota, R. A.: *Asymmetry in Distributions of Accumulated Gains and Losses in Stock Returns*, economies, 13 (2025), 176, dostupné na internete (25.10.2025) https://www.mdpi.com/2227-7099/13/6/176

[13] Grůza, D.: *Ověřování normality*, diplomová práca, Masarykova univerzita prírodovedecká fakulta, Brno, 2007, dostupné na internete (25.10.2025) https://is.muni.cz/th/kcaqe/diplomova_prace.pdf

[14] Hadar, J., Russell, W. R.: *Rules for ordering uncertain prospects*, The American Economic Review 59 (1969), 25–34, dostupné na internete (25.10.2025) https://www.jstor.org/stable/1811090

[15] Hwang, S., Satchell, S. E.: *Tracking Error: Ex-Ante versus Ex-Post Measures*, Working Paper, Financial Econometrics Research Centre, 2001, dostupné na internete

(25.10.2025)
https://www.researchgate.net/publication/37144609_Tracking_Error_Ex-Ante_versus_Ex-Post_Measures

[16] Chekhlov, A., Uryasev, S., Zabarankin, M.: *Portfolio optimization with drawdown constraints*, Supply Chain and Finance, World Scientific, 2004, 209–228

[17] Israelsen, C.: *A refinement to the Sharpe ratio and information ratio*, Journal of Asset Management, Vol. 5, No. 6, 2005, s. 423–427

[18] Jiang, Y., Martin, R. D.: *Turning Long and Short Return Histories into Equal Histories: A Better Way to Backfill Returns* , Working Paper, SSRN Electronic Jurnal, 2016, dostupné na internete (25.10.2025)
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2833057

[19] Joanes, D. N., Gill, C. A.:*Comparing Measures of Sample Skewness and Kurtosis*, Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician), 47 (1998), 183-189, dostupné na internete (25.10.2025)
https://www.jstor.org/stable/2988433?seq=1

[20] Kececi, N. F., Kuzmenko, V., Uryasev, S.:*Portfolios Dominating Indices: Optimization with Second-Order Stochastic Dominance Constraints vs. Minimum and Mean Variance Portfolios*, Journal of Risk and Financial Management 9 (2016)

[21] Kopa M.: *Utility functions in portfolio optimization*, dizertačná práca Univerzita Karlova Matematicko-fyzikálna fakulta, Praha, 2006

[22] Kopa, M., Chovanec, P.: *A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure*, Kybernetika 44 (2008), 243-258, dostupné na internete (25.10.2025)
https://www.kybernetika.cz/content/2008/2/243/paper.pdf

[23] Kourtis, A.: *The Sharpe ratio of estimated efficient portfolios*, Finance Research Letters, 17 (2016), 72–78, dostupné na internete (25.10.2025)
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1544612316000106?utm_source=chatgpt.com

[24] Le Sourd, V.: *Performance measurement for traditional investment*, Financial Analysts Journal, 58 (2007), 36–52

[25] Levy, H.: *Stochastic Dominance Investment Decision Making under Uncertainty*, 3. dopl. vyd., Springer, Switzerland, 2016

[26] Markowitz, H.: *Portfolio selection*, Journal of Banking & Finance 7 (1952), 77-91

[27] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.:*Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Slovensko, 2005

[28] Miskolczi, P.: *Note on simple and logarithmic return*, Applied Studies in Agribusiness and Commerce, 11 (2017), 127-136

[29] Page, S.: *How to combine long and short return histories efficiently* Financial Analysts Journal, 69 (2013) 45–52

[30] Post, T.: *Empirical tests for stochastic dominance efficiency*, The Journal of finance, 58 (2003), 1905-1931

[31] Pedersen, C. S., Rudholm-Alfvin, T.: *Selecting a risk-adjusted shareholder performance measure*, Journal of Asset Management, 4 (2003), 152–172

[32] Rice, J. A.:*Mathematical Statistics and Data Analysis*, 3. dopl. vyd., Duxbury/ Thomson Brooks/Cole, California 2017

[33] Rothschild, M., Stiglitz, J.: *Increasing risk: I. A definition*, Journal of Economic Theory 2 (1970), 225-243

[34] Russell, W. R., Seo, T. K.: *Efficient Portfolios by Stochastic Dominance*, Southern Economic Journal 46 (1980), 877-882, dostupné na internete (25.10.2025) https://www.jstor.org/stable/1057156

[35] Siegrist, K.: *Probability, Mathematical Statistics, and Stochastic Processe*, Statistics LibreTexts, 2022, dostupné na internete (25.10.2025) https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Probability_Theory/Probability_Mathematical_Statistics_and_Stochastic_Processes_

%28Siegrist%29/04%3A_Expected_Value/4.07%3A_Conditional_Expected_Value?utm_source=chatgpt.com

[36] Stambaugh, R. F.: *Analyzing investments whose histories differ in length*, Journal of Financial Economics, 45 (1997) 285–331

[37] Zoubir, A. M., Iskander, D. R.: *Bootstrap Methods and Applications*, IEEE Signal Processing Magazine, 24 (2007) 10-19, dostupné na internete (25.10.2025) https://www.researchgate.net/publication/3321899_Bootstrap_Methods_and_Applications

[38] [UI Informačné systémy], (2026). Online. In: ChatGPT. Verzia 5. Dostupné na: OpenAI

Kódy

Modely (M2) a (M4) sme implementovali pomocou programu Matlab. Praktickú analýzu dát sme realizovali prostredníctvom programovacieho jazyka R. Kódy prikladáme ako prílohy k práci. Pri tvorbe kódov v praktickej časti boli využité nástroje umelej inteligencie [38]. Tieto nástroje slúžili najmä ako podpora pri štruktúrovaní kódu, úprave syntaxe, ladení implementácie a kontrole konzistencie jednotlivých častí modelu. Výsledné skripty však boli následne manuálne overené a upravené autorkou práce.

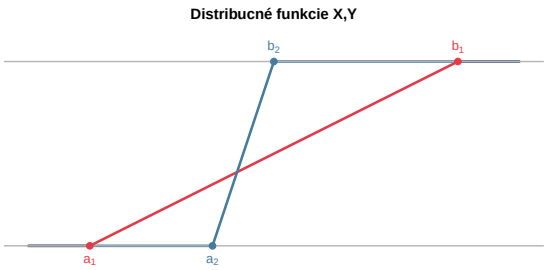
- *nacitanie_dat.R* - Kód obsahuje načítanie finančných dát, kde zmenou dátumov získavame dáta pre nami používané obdobie.
- *statistika_DagoTest.R* - Obsahuje výpočet očakávaného výnosu, volatility, šikmosti, špicatosti a korelácie. Taktiež v súbore sú vykonané testy šikmosti a špicatosti.
- *Dentcheva_SSD.m* - obsahuje naprogramované modely (M2) a (M4) pomocou cvx prostredia.
- *metriky.R* - Obsahuje výpočet referenčných modelov a taktiež výpočet finančných ukazovateľov pre referenčné modely a pre model (M2).
- *bootstrap.R* - Obsahuje realizáciu metódy bootstrap na modeli (M2) a výpočet empirických pravdepodobností.
- *out_of_sample_analyza.R* - Tento kód sa viaže k časti 4.3, kde sme zmenou dátumov získali výsledky analýzy.
- *metriky_rozsireny_model.R* - Kód obsahuje výpočet metrík pre model (M4).
- *bootstrap_rozsireny_model.R* - Obsahuje výpočet bootstrap metódy pre model (M4).

Príloha A

Dôkaz prvej časti Tvrdenia 1.2 o stochastickej dominancii druhého rádu pri podmienkach $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$.

Predpokladajme, že platí $\mu_Y \geq \mu_X$. Chceme dokázať, že potom $Y \succ_2 X$. Najprv si zapíšeme distribučné funkcie:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} & x \in [a_1, b_1], \\ 1 & x > b_1, \end{cases} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < a_2, \\ \dfrac{x - a_2}{b_2 - a_2} & x \in [a_2, b_2], \\ 1 & x > b_2. \end{cases} \tag{A.1}$$



Obr. A.1: Distribučné funkcie F_X a F_Y

Na Obrázku A.1 vidíme priebeh distribučných funkcií náhodných premenných X a Y.

Zaveďme funkciu

$$S(x) = \int_{-\infty}^{x} (F_X(t) - F_Y(t))\, dt.$$

Podľa vety o SSD 1.2 (časť ii)) platí, že $Y \succ_2 X$ práve vtedy, keď $S(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a existuje x_0, pre ktoré $S(x_0) > 0$.

Z predpisov distribučných funkcií F_X a F_Y je jasné, že na intervale $[a_2, b_2]$ je ich rozdiel $F_X(x) - F_Y(x)$ spojito diferencovateľná funkcia [1], ktorá v krajných bodoch intervalu nadobúda opačné znamienka. Navyše je $F_X(x) - F_Y(x)$ na intervale $[a_2, b_2]$ klesajúca, keďže jej derivácia je tam záporná:

$$(F_X(x) - F_Y(x))' = \frac{1}{b_1 - a_1} - \frac{1}{b_2 - a_2} < 0 \text{ pre } x \in [a_2, b_2].$$

Teda existuje práve jedno $x^* \in (a_2, b_2)$ také, že $F_X(x^*) - F_Y(x^*) = 0$. Navyše platí:

$$F_X(x) - F_Y(x) \begin{cases} = 0 & \text{pre } x \in (-\infty, a_1], \\ > 0 & \text{pre } x \in (a_1, x^*), \\ \leq 0 & \text{pre } x \in [x^*, \infty). \end{cases}$$

Z toho priamo vidíme, že

$$S(x) = \int_{-\infty}^{x} (F_X(t) - F_Y(t))dt \begin{cases} = 0 & \text{pre } x \in (-\infty, a_1], \\ > 0 & \text{pre} x \in (a_1, x^*) \end{cases}$$

Pre $x \in [x^*, b_1]$ je

$$S'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} (F_X(t) - F_Y(t))dt \right)' = F_X(x) - F_Y(x) \leq 0,$$

teda $S(x)$ je na (x^*, b_1) nerastúca. Pre $x \in [b_1, \infty$ je $S'(x) = 0$, teda $S(x)$ je na danom intervale konštantná. Z toho priamo dostávame, že $S(x) \geq S(b_1)$ pre všetky $x \in (x^*, \infty)$.

Teda ak $S(b_1) \geq 0$, tak podľa časti ii) Vety 1.2 $Y \succ_2 X$. A naopak, ak $S(b_1) < 0$, tak medzi X a Y SSD dominancia nenastáva.

Počítajme teda $S(b_1)$. Keďže F_X a F_Y sú na $[-\infty, a_1]$ nulové, platí

$$S(b_1) = \int_{a_1}^{b_1} F_X(t) - F_Y(t)dt.$$

Vieme, že na (a_2, b_2) majú $F_X(x)$ a $F_Y(x)$ práve jeden priesečník x^*. Navyše z tvaru distribučných funkcií vidíme, že $S(b_1)$ vieme dostať ako rozdiel obsahov dvoch trojuholníkov vymedzených distribučnými funkciami pozri Obr. A.1 Označme obsahy trojuholníkov zľava postupne T_1, T_2 a počítajme ich obsahy.

$$T_1 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)F_X(x^*),$$
$$T_2 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)(1 - F_X(x^*)).$$

Z toho postupnými úpravami a využitím $F_X(x^*) = F_Y(x^*)$ a vyjadrení distribučných funkcií (A.1) dostávame:

$$\begin{aligned} S(b_1) = T_1 - T_2 &= \frac{1}{2}F_X(x^*)(a_2 - a_1 + b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(b_1 - b_2) = \\ &= \frac{1}{2}F_X(x^*)(b_1 - a_1) - \frac{1}{2}F_Y(x^*)(b_2 - a_2) - \frac{1}{2}(b_1 - b_2) = \\ &= \frac{1}{2}(x^* - a_1 - (x^* - a_2)) - \frac{1}{2}(b_1 - b_2) = \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2} = \mu_Y - \mu_X. \end{aligned}$$

Teraz vieme ľahko nahliadnuť, že $\mu_Y > \mu_X$ priamo zaručuje $Y \succ_2 X$. A naopak $\mu_Y < \mu_X$ implikuje, že nijaká SSD dominancia medzi X a Y nenastáva. Analogické úvahy platia aj opačným smerom. □

Príloha B

Štatistika výnosov a výsledky DagoTestu

Tabuľka B1: Štatistiky týždenných jednoduchých výnosov vybraných akcií a indexu S&P 500

Ticker	Očakávaný výnos	Smerodajná odchýlka	Šikmosť	Špicatosť
NVDA	0.0144	0.0676	0.3090	0.5673
MSFT	0.0046	0.0362	0.1522	1.0310
AAPL	0.0056	0.0399	-0.1917	2.0260
AMZN	0.0043	0.0458	0.0309	0.9859
META	0.0057	0.0581	0.2079	3.0974
AVGO	0.0098	0.0557	0.8963	3.7565
GOOGL	0.0049	0.0427	0.1953	0.5749
TSLA	0.0146	0.0953	0.4780	0.9083
GOOG	0.0049	0.0427	0.1770	0.6041
BRK-B	0.0031	0.0287	-0.4035	2.9996
ORCL	0.0055	0.0407	0.4898	1.5983
JPM	0.0035	0.0427	0.0555	4.5039
WMT	0.0039	0.0297	-0.8078	8.0435
LLY	0.0080	0.0440	0.2170	1.3056
V	0.0027	0.0358	-0.0719	3.3844
NFLX	0.0057	0.0585	-0.7779	8.2558
MA	0.0031	0.0400	-0.5292	5.0991
XOM	0.0036	0.0478	-0.0503	2.2723
JNJ	0.0008	0.0254	-0.0646	2.0349
PLTR	0.0160	0.0983	1.2982	4.2951
COST	0.0053	0.0336	-0.4063	3.3097
ABBV	0.0041	0.0360	-0.8447	5.7891
AMD	0.0060	0.0702	0.4374	0.4922
HD	0.0036	0.0426	-0.1833	9.3504
BAC	0.0025	0.0485	0.1883	3.3612
PG	0.0020	0.0262	-0.4175	2.8287
UNH	0.0033	0.0423	-0.2720	6.1039
GE	0.0055	0.0536	-0.0614	1.6623
CVX	0.0026	0.0470	-0.7797	6.7455
KO	0.0016	0.0311	-1.2370	9.8727
S&P 500	0.0027	0.0278	-0.5378	5.7551

Tabuľka B2: Výsledky D'Agostino testu pre šikmosť a špicatosť

Akcia	p_skewness	Rozhodnutie	p_kurtosis	Rozhodnutie
NVDA	0.041506	Zamietame H0	0.091535	Nezamietame H0
MSFT	0.307785	Nezamietame H0	0.009940	Zamietame H0
AAPL	0.200427	Nezamietame H0	0.000094	Zamietame H0
AMZN	0.835359	Nezamietame H0	0.012368	Zamietame H0
META	0.165475	Nezamietame H0	0.000001	Zamietame H0
AVGO	0.000000	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
GOOGL	0.192242	Nezamietame H0	0.088353	Nezamietame H0
TSLA	0.002131	Zamietame H0	0.018024	Zamietame H0
GOOG	0.236544	Nezamietame H0	0.077140	Nezamietame H0
BRK-B	0.008648	Zamietame H0	0.000002	Zamietame H0
ORCL	0.001685	Zamietame H0	0.000659	Zamietame H0
JPM	0.708618	Nezamietame H0	0.000000	Zamietame H0
WMT	0.000001	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
LLY	0.148109	Nezamietame H0	0.002638	Zamietame H0
V	0.628543	Nezamietame H0	0.000000	Zamietame H0
NFLX	0.000003	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
MA	0.000755	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
XOM	0.735081	Nezamietame H0	0.000032	Zamietame H0
JNJ	0.663782	Nezamietame H0	0.000090	Zamietame H0
PLTR	0.000000	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
COST	0.008228	Zamietame H0	0.000001	Zamietame H0
ABBV	0.000000	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
AMD	0.004648	Zamietame H0	0.129199	Nezamietame H0
HD	0.220534	Nezamietame H0	0.000000	Zamietame H0
BAC	0.208345	Nezamietame H0	0.000000	Zamietame H0
PG	0.006719	Zamietame H0	0.000003	Zamietame H0
UNH	0.071557	Nezamietame H0	0.000000	Zamietame H0
GE	0.679730	Nezamietame H0	0.000489	Zamietame H0
CVX	0.000002	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
KO	0.000000	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0
S&P 500	0.000631	Zamietame H0	0.000000	Zamietame H0

Príloha C

Optimálne zloženia portfólií v out of sample analýze

Tabuľka C1: Optimálne váhy aktív v jednotlivých portfóliových modeloch pre obdobie od 01. 01. 2020 do 31. 12. 2022

Aktívum	R1	R2	R3	M2
NVDA	0.0011	0.0280	0.0491	0.1098
AMZN	0.0154	-	-	-
AVGO	0.0086	0.0321	0.0148	-
TSLA	-	0.0607	0.1069	0.0866
ORCL	0.1274	0.0963	0.0564	0.0650
WMT	0.1423	-	-	-
LLY	0.1111	0.3535	0.4377	0.4496
XOM	0.0758	0.1079	0.1184	0.0020
JNJ	0.2106	-	-	-
COST	0.0151	0.0922	0.0083	-
ABBV	0.1410	0.2293	0.2084	0.2870
PG	0.1516	-	-	-

Tabuľka C2: Optimálne portfóliové váhy vybraných aktív na testovacom období 01. 01. 2020 do 31. 12. 2023

Aktívum	R1	R2	R3	M2
NVDA	0.0432	0.1188	0.1680	0.1374
AMZN	0.0076	-	-	-
META	0.0252	-	-	-
AVGO	0.0669	0.1106	0.1351	0.1940
TSLA	-	-	0.0197	0.0232
BRK-B	0.0017	-	-	-
ORCL	0.0831	0.0554	0.0026	0.0098
WMT	0.1399	-	-	-
LLY	0.1710	0.3313	0.4195	0.3692
XOM	0.0699	0.0727	0.0627	-
JNJ	0.0804	-	-	-
PLTR	-	0.0169	0.0210	0.0615
COST	0.0955	0.1761	0.1134	-
ABBV	0.1195	0.1182	0.0581	0.2050
PG	0.0895	-	-	-
GE	0.0066	-	-	-

Tabuľka C3: Optimálne portfóliové váhy vybraných aktíva na testovacom období 01. 01. 2020 do 31. 12. 2024

Aktívum	R1	R2	R3	M2
NVDA	0.0598	0.1328	0.1929	0.1242
META	0.0186	-	-	-
AVGO	0.0423	0.0642	0.0796	0.0896
GOOG	0.0068	-	-	-
BRK-B	0.0686	-	-	-
ORCL	0.0464	0.0394	0.0064	0.0473
WMT	0.2406	0.2465	0.1961	-
LLY	0.1337	0.2111	0.2727	0.2085
XOM	0.0657	0.0839	0.0693	-
JNJ	0.0255	-	-	-
PLTR	0.0246	0.0500	0.0734	0.1612
COST	0.0138	0.0273	-	-
ABBV	0.1092	0.1388	0.1097	0.2047
PG	0.1405	0.0061	-	0.1074
UNH	-	-	-	0.0571
GE	0.0040	-	-	-

Príloha D

Zmena zloženia optimálneho portfólia podľa hodnoty ε

Tabuľka D1: Optimálne zloženie portfólia pre rôzne hodnoty parametra ε

ε %	NVDA	AVGO	TSLA	LLY	PLTR	ORCL	WMT	ABBV	PG	UNH
0	0.1242	0.0896	-	0.2085	0.1612	0.0473	-	0.2047	0.1074	0.0571
0.5%	0.1768	0.0656	-	0.2494	0.2117	0.0184	0.0394	0.1386	-	0.0997
1%	0.1946	0.1105	-	0.2893	0.2501	0.01	0.0455	0.0835	-	0.0164
1.5%	0.2067	0.1164	-	0.3459	0.2917	-	-	0.0393	-	-
2%	0.2705	0.0616	-	0.3393	0.3285	-	-	-	-	-
2.5%	0.3578	-	-	0.289	0.3533	-	-	-	-	-
3%	0.4608	-	-	0.1979	0.3412	-	-	-	-	-
3.5%	0.4261	-	0.0187	0.142	0.4132	-	-	-	-	-
4%	0.4251	-	0.0319	0.0893	0.4537	-	-	-	-	-
4.5%	0.4823	-	0.0112	0.0331	0.4734	-	-	-	-	-
5%	0.3903	-	0.0608	-	0.5489	-	-	-	-	-
7.5%	0.0919	-	-	-	0.908	-	-	-	-	-
10%	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-