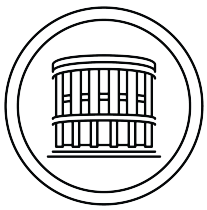
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



FINANČNÉ NÁSTROJE PRE DÔCHODKOVÉ INVESTOVANIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2026 Bc. Lukáš KOŠŤANY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

FINANČNÉ NÁSTROJE PRE DÔCHODKOVÉ INVESTOVANIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2026 **Bc. Lukáš KOŠŤANY**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Lukáš Košťany
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Finančné nástroje pre dôchodkové investovanie
Financial instruments for retirement investing

Anotácia: Garantované dôchodkové fondy sa často snažia vyhnúť krátkodobému poklesu. V dôsledku toho typicky investujú do dlhopisov s nízkou duráciou. Z dlhodobého hľadiska je však takáto investícia veľmi nebezpečná. V práci pôjde o analýzu vhodných nástrojov a stratégií dôchodkového investovania, ktoré dokážu súčasnú investíciu preniesť bezpečne (prinajmenšom ju ochrániť pred infláciou) do budúcich dôchodkov.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému Finančné nástroje pre dôchodkové investovanie, vrátane všetkých jej príloh a obrázkov, som vypracoval samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použil v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity.

Poďakovanie Touto cestou by som sa rád poďakoval svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za ochotu, konštruktívne pripomienky a usmernenia, ktoré mi boli prínosom pri vypracovaní tejto práce. Ďakujem taktiež svojej rodine za ich vytrvalú podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

KOŠŤANY, Lukáš: Finančné nástroje pre dôchodkové investovanie [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2026, 98 s.

Diplomová práca analyzuje vhodné finančné nástroje pre dôchodkové investovanie, pričom sa primárne zameriava na teoretické dôchodkové dlhopisy Standard of Living indexed, Forward-starting, Income-only Securities (SeLFIES) a ich praktickú implementáciu v podobe Tesouro RendA+, ktorá bola zavedená v roku 2023 v Brazílii. Predstavujú inovatívne, jednoduché, nízkonákladové a likvidné aktívum na dôchodkové sporenie, ktoré po dátume konverzie poskytuje počas určitého obdobia reálny mesačný príjem. V diplomovej práci taktiež popisujeme rozličné dôchodkové investičné stratégie, ktoré rozdeľujú prostriedky sporiteľa medzi akciový index S&P 500 a SeLFIES na základe rôznych alokačných kritérií. Prioritne skúmame Goal-based, Lifetime Income-focused Dynamic Strategy (GLIDeS), teda príjmovo orientovanú dynamickú stratégiu, ktorú porovnávame s dôchodkovými sporivými stratégiami využívanými v našej bakalárskej práci. Posudzujeme ich na základe náhradového pomeru dosiahnutého v rozličných historických obdobiach sporenia.

Kľúčové slová: dôchodkové dlhopisy, SeLFIES, Tesouro RendA+, garantovaný reálny dôchodkový príjem, dôchodkové investičné stratégie, dynamické príjmovo orientované stratégie, GLIDeS, náhradový pomer

Abstract

KOŠŤANY, Lukáš: Financial instruments for retirement investing [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2026, 98 p.

The diploma thesis analyzes suitable financial instruments for retirement investing, primarily focusing on theoretical retirement bonds Standard of Living indexed, Forward-starting, Income-only Securities (SeLFIES) and their practical implementation in the form of Tesouro RendA+, which was introduced in 2023 in Brazil. They represent an innovative, simple, low-cost, and liquid asset for retirement saving which, after the conversion date provides for a certain period a real monthly income. In the diploma thesis, we also describe various retirement investment strategies that allocate a saver's resources between the S&P 500 stock index and SeLFIES based on different allocation criteria. We primarily examine Goal-based, Lifetime Income-focused Dynamic Strategy (GLIDeS), so an income-oriented dynamic strategy, which we compare with retirement saving strategies used in our bachelor thesis. We assess them on the basis of the replacement rate achieved in various historical saving periods.

Keywords: retirement bonds, SeLFIES, Tesouro RendA+, guaranteed real retirement income, retirement investment strategies, dynamic income-oriented strategies, GLIDeS, replacement rate

Obsah

Úvod **10**

1 Dôchodkové dlhopisy **12**

1.1 SeLFIES . . . 12

1.2 Tesouro RendA+ . . . 12

1.2.1 Predpoklady na zavedenie . . . 13

1.2.2 Zavedenie . . . 14

1.2.3 Fungovanie . . . 15

1.2.4 Výhody . . . 17

1.2.5 Výzvy . . . 18

2 Využité dáta a ich spracovanie **20**

2.1 Výnosy do splatnosti amerických štátnych dlhopisov . . . 20

2.2 Výnosy do splatnosti TIPS . . . 21

2.3 Akciový index S&P 500 . . . 22

2.4 Očakávaná inflácia . . . 23

2.5 Index spotrebiteľských cien . . . 23

2.6 Index národnej priemernej mzdy . . . 24

2.7 Svenssonov model . . . 25

2.8 Reálna úroková miera . . . 27

3 Ocenenie, výnosy a volatilita finančných nástrojov **29**

3.1 SeLFIES . . . 29

3.1.1 Výpočet reálnej hodnoty . . . 29

3.1.2 Priemerný logaritmický reálny ročný výnos a volatilita . . . 30

3.1.3 Priemerný aritmetický reálny ročný výnos . . . 30

3.1.4 Reálna hodnota počiatočnej investície v čase . . . 32

3.2 Americké štátne dlhopisy . . . 34

3.2.1 Výpočet reálnej hodnoty . . . 34

3.2.2 Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a volatilita 35

3.2.3 Reálna hodnota počiatočnej investície v čase . . . 36

3.3 TIPS . . . 36
3.3.1 Výpočet reálnej hodnoty . . . 36
3.3.2 Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a volatilita 37
3.4 Akciový index S&P 500 . . . 38
3.4.1 Výpočet reálnej hodnoty . . . 38
3.4.2 Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a volatilita 39
3.4.3 Reálna hodnota počiatočnej investície v čase . . . 39

4 Reálny príjem z hodnoty finančného nástroja 40
4.1 N-faktorová Itôova lema . . . 40
4.2 Stochastický model . . . 40
4.3 Odvodenie vzorcov . . . 41
4.4 Výpočet . . . 45
4.5 Výsledky . . . 47

5 Dôchodkové investičné stratégie 49
5.1 Príjmovo orientované dynamické investičné stratégie . . . 50
5.2 GLIDeS . . . 52
5.2.1 Lineárny prístup . . . 53
5.2.2 Spojitý prístup . . . 54
5.2.3 AFS-TFS prístup . . . 56
5.2.4 Fungovanie . . . 58
5.3 Dôchodkové sporivé stratégie s konštantným pomerom aktív . . . 59
5.4 Predvolené investičné stratégie . . . 60
5.4.1 Slovensko . . . 60
5.4.2 Švédsko . . . 60
5.4.3 Čile . . . 61
5.5 Dôchodkové sporivé stratégie založené na dĺžke sporenia . . . 61
5.5.1 Aging(1) . . . 61
5.5.2 Aging(2) . . . 62
5.5.3 Aging(3) . . . 62
5.5.4 Aging(4) . . . 63

5.6 Dôchodkové investičné stratégie založené na výnose aktív 63
5.6.1 Discretive 63
5.6.2 CrossEMA 64
5.6.3 MaxMin 65
5.6.4 RiskTolerance 66
5.6.5 Černý-Melicherčík 67

6 Simulácie vývoja dôchodkového sporenia **69**
6.1 Reprezentatívny sporiteľ a predpoklady sporenia 69
6.2 Historická simulácia pre 40 ročné obdobie sporenia 70
6.2.1 Historické okolnosti 71
6.2.2 Výsledný náhradový pomer 72
6.2.3 Vývoj aktuálneho stavu financovania 74
6.2.4 Vývoj alokácie sporiteľových úspor do akciového indexu S&P 500 . 80
6.3 Výsledný náhradový pomer pre iné dĺžky obdobia sporenia 84
6.4 Zhrnutie pre GLIDeS a SeLFIES 87

Záver **89**

Zoznam použitej literatúry **91**

Úvod

Primárnym cieľom dôchodkového sporenia by malo byť zabezpečenie požadovanej úrovne reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa. Aktuálne predvolené dôchodkové investičné stratégie, ktoré presúvajú sporiteľove prostriedky z akciových, respektíve indexových fondov, do dlhopisových na základe veku investora, nedokážu spoľahlivo zaistiť naplnenie uvedeného cieľa z dvoch dôvodov. Prvý problém spočíva v tom, že nimi využívané bezrizikové finančné nástroje, akými sú napríklad štátne dlhopisy s nízkou duráciou, nepredstavujú z dlhodobého hľadiska bezpečné aktíva v zmysle garantovaného reálneho dôchodkového príjmu. Druhou komplikáciou je, že používané dôchodkové investičné stratégie sú vo veľkej miere, ak nie úplne, nezávislé od cieľa dosiahnutia sporiteľom stanoveného reálneho dôchodkového príjmu.

Riešením prvého nedostatku, spočívajúceho v absencii vhodného aktíva z hľadiska zabezpečenia reálneho dôchodkového príjmu, by mohli byť dôchodkové dlhopisy SeLFIES. Mohli by slúžiť ako bezpečné aktívum v dôchodkovom sporení a zahŕňať v sebe akumulačnú aj dekumulačnú fázu sporenia, keďže vyplácajú počas určitého časového obdobia po uplynutí doby konverzie reálny, teda inflačne upravený, príjem.

Na prekonanie druhej nevýhody súvisiacej s nezávislosťou investičných stratégií od nadobudnutia cieľového reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa by boli vhodné GLIDeS, čiže dynamické príjmovo orientované sporivé stratégie. Rozdeľujú prostriedky investora medzi akciový index a dlhopisy SeLFIES na základe aktuálneho stavu financovania stanoveného dôchodkového príjmu sporiteľa a zároveň podľa jeho rizikového profilu. Pokiaľ je hodnota aktuálneho stavu financovania nad hodnotou jedna, čiže sporiteľ už má teoreticky zabezpečený aspoň požadovaný dôchodkový príjem, tak GLIDeS alokujú prevažnú časť sporiteľových prostriedkov do SeLFIES, čím sa v maximálnej možnej miere eliminuje riziko. Na druhej strane, ak je investor výrazne vzdialený od dosiahnutia svojho cieľového dôchodkového príjmu, tak bude mať veľmi vysoký podiel zdrojov investovaných do akciového indexu, ktorý je spojený s potenciálne väčším výnosom, ale aj vyšším rizikom.

Problematikou v súčasnosti uplatňovaných dôchodkových sporivých stratégií a nimi využívaných bezpečných finančných nástrojov sa zaoberá Merton v článku [70]. Časopisecká práca [81] predstavuje zavedenie praktickej podoby SeLFIES s názvom Tesouro RendA+ v Brazílii. Metodika tvorby dynamických príjmovo orientovaných dôchodkových

investičných stratégií a analýza stratégií GLIDeS sa nachádza v [58]. Bakalárska práca [83] a diplomová práca [57] skúmajú iné možné vhodné aktíva na dôchodkové investovanie. Dôchodkové sporivé stratégie, ktoré sme využili na porovnanie s GLIDeS, sú opísané v knihách [72] a [75], pričom sme ich využívali v našej bakalárskej práci [60].

Cieľom našej diplomovej práce je predstavenie dôchodkových dlhopisov SeLFIES, respektíve ich praktickej formy Tesouro RendA+ zavedenej v Brazílii, ako možného vhodného finančného nástroja pre dôchodkové investovanie. Zároveň budeme skúmať rozličné investičné stratégie, ktoré alokujú sporiteľove prostriedky medzi SeLFIES a akcie, pričom primárne budeme analyzovať príjmovo orientované dynamické stratégie GLIDeS.

V úvodnej kapitole prezentujeme inovatívne dôchodkové dlhopisy SeLFIES a opisujeme proces zavedenia a fungovania ich praktickej podoby Tesouro RendA+ v Brazílii, ktorý je popísaný v časopiseckom článku [81].

Druhá kapitola predstavuje jednotlivé údaje, ktoré sme využívali pri výpočtoch v našej diplomovej práci a taktiež zachytáva spôsoby ako sme ich spracovávali.

V tretej kapitole sa venujeme oceneniu rozličných finančných nástrojov vhodných na dôchodkové investovanie a tiež výpočtu ich priemerných výnosov a volatility.

Štvrtá kapitola sa zaoberá zostavením modelu podľa článku [67] a odvodením vzorcov na výpočet reálneho príjmu kúpeného za hodnotu jednotlivých spomínaných aktív využitím stochastického kalkulu a Choleského dekompozície.

V piatej kapitole zhrnieme problémy súčasne uplatňovaných dôchodkových investičných stratégií a nimi používaných bezpečných aktív, ktoré sú spomínané v časopiseckom článku [70]. Tiež v nej predstavíme spôsob tvorby dynamických príjmovo orientovaných sporivých stratégií a opis stratégií GLIDeS z [58]. Zároveň v danej kapitole popíšeme rozličné dôchodkové investičné stratégie, ktoré sme využili v našej bakalárskej práci [60].

V záverečnej kapitole porovnáme jednotlivé predstavené dôchodkové sporivé stratégie na základe výsledného náhradového pomeru dosiahnutého v rozličných historických obdobiach sporenia. Výsledky vysvetľujeme na základe historických okolností, charakteristík jednotlivých stratégií a taktiež opisom vývoja aktuálneho stavu financovania cieľového dôchodkového príjmu sporiteľa a alokácie jeho zdrojov do akcií.

Dáta a kódy potrebné na vypracovanie našej diplomovej práce sú na linku (https://github.com/LukasKostany/DP_Financne_nastroje_pre_dochodkove_investovanie).

1 Dôchodkové dlhopisy

Primárnou úlohou dôchodkového sporenia by malo byť dosiahnutie cieľovej úrovne reálneho dôchodkového príjmu. Články [58] a [70] upozorňujú, že v súčasnosti využívané bezpečné aktíva, akými sú americké štátne dlhopisy s nízkou durráciou, nemusia byť výhodné pre typického dôchodkového sporiteľa, keďže sú rizikové z pohľadu schopnosti zabezpečenia garantovaného reálneho dôchodkového príjmu. Teda bez ohľadu na zvolenú dôchodkovú investičnú stratégiu zostáva problém v tom, že bez nových vhodných finančných nástrojov môže byť úroveň dosiahnutého dôchodkového príjmu vysoko variabilná. Potenciálnym riešením danej komplikácie by mohli byť dôchodkové dlhopisy SeLFIES.

1.1 SeLFIES

SeLFIES (Standard of Living indexed, Forward-starting, Income-only Securities), teda v preklade cenné papiere s výnosom indexovaným životnou úrovňou a s odloženým začiatkom vyplácania výnosov, sú podľa časopiseckej práce [81] nízkonákladové, jednoduché a likvidné inovatívne dlhopisy. Dali by sa definovať ako aktívum poskytujúce pevne stanovený, napríklad 1 peňažná jednotka, reálny, teda inflačne upravený, mesačný príjem, ktorý je vyplácaný počas určitého časového obdobia po uplynutí doby konverzie.

Podľa autorov [81] by mohli byť využité ako relatívne bezpečný finančný nástroj v DC (defined contribution), čiže príspevkovo definovaných dôchodkových schémach. Mali by prispieť k zníženiu ich rizikovosti, keďže v príspevkovo definovaných schémach sa definuje len výška príspevku, napríklad ako percento z platu sporiteľa, čiže konečná výška dôchodkového príjmu v nich je nejasná a riziko je čisto na strane sporiteľa. Zároveň by v sebe zahŕňali akumulačnú, teda sporiacu, aj dekumulačnú, čiže výplatnú fázu dôchodkového sporenia.

1.2 Tesouro RendA+

Brazília, teda krajina, ktorá v histórii čelila obdobiam hyperinflácie, sa stala prvým štátom, ktorý zaviedol dlhodobé dôchodkové dlhopisy určené pre individuálnych investorov. Pred ich uvedením do praxe, ale musela vykonať množstvo krokov na zabezpečenie ich efektívneho fungovania.

1.2.1 Predpoklady na zavedenie

Podľa časopiseckej práce [81] bola Brazília v jedinečnej pozícii na implementáciu SeLFIES v modifikovanej forme RendA+ (Retirement Extra Income), teda v preklade dodatočného dôchodkového príjmu, keďže mala už zavedené viaceré potrebné finančné inovácie.

Prvou z nich je Tesouro Direto (TD), teda program priameho predaja brazílskych štátnych dlhopisov fyzickým osobám, ktorý bol zavedený Štátnou pokladnicou v roku 2002 a v ktorom bolo podľa [79] zaregistrovaných ku koncu augusta roku 2025 vyše 33 miliónov jednotlivcov, čo predstavuje vyše 15 % Brazílskej populácie, z toho vyše 3 miliónov bolo aktívnych, teda takých, ktorí za posledných 90 dní vykonali aspoň jednu transakciu. Tesouro Direto, okrem predaja, prijíma denne všetky spätné predaje dlhopisov, čím poskytuje likviditu za spravodlivú cenu.

Podľa autorov článku [81] je dôležitou súčasťou TD SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), teda špeciálny systém vysporiadania a úschovy, ktorý zabezpečuje realizáciu transakcií a vedie evidenciu cenných papierov vydaných Štátnou pokladnicou. SELIC bol založený v roku 1979 a je spravovaný Brazílskou centrálnou bankou a využívaný Brazílskou burzou cenných papierov na prevádzkovanie platformy Tesouro Direto.

Brazília taktiež vytvorila likvidný a dlhodobý trh viazaný na rozšírený národný index spotrebiteľských cien označovaný v portugalčine ako IPCA (Índice Geral de Preços ao Consumidor Amplo), ktorý bol v roku 1999 zvolený Brazílskou centrálnou bankou ako referenčný index pre cielenie inflácie v Brazílii. IPCA bol podľa [81] vytvorený v roku 1979 inštitútom IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), teda v preklade Brazílskym inštitútom pre geografiu a štatistiku a meria infláciu pre rodiny s mesačným príjmom medzi jednou až štyridsiatimi minimálnymi mzdami.

Štátna pokladnica zvolila ako základ pre brazílsky dôchodkový dlhopis NTN-B (Nota do Tesouro Nacional—série B), teda v preklade štátne pokladničné poukážky série B, ktorých výnos je viazaný na zmenu IPCA a úrokovú mieru stanovenú v dobe nákupu a vypláca sa polročne. NTN-B boli uvedené na trh v októbri roku 2003 a ponúkajú okrem krátkodobejších splatností aj najdlhšie maturity spomedzi všetkých emitovaných štátnych dlhopisov, ktoré prevyšujú 30 rokov. Štátna pokladnica vydala v roku 2005 bezkupónový variant bežnej verzie štátneho dlhopisu NTN-B, ktorý je taktiež indexovaný pomocou IPCA, ale nevypláca žiadne kupóny, len jednorázovú splátku inflačne upravenej istiny.

Vydanie danej modifikácie NTN-B bolo dôležitým krokom smerom k návrhu RendA+. ([81])

Podľa publikácie [81] boli investori stotožnení s indexom IPCA, dlhopisom NTN-B ako dlhodobou investíciou a s Tesouro Direto ako spoľahlivou investičnou platformou. Tento proces budovania systému a dôvery k nemu vyústil po niekoľkých rokoch priamo k uvedeniu brazílskeho štátneho dôchodkového dlhopisu RendA+.

1.2.2 Zavedenie

Podľa časopiseckej práce [81] boli v novembri roku 2019 predstaviteľom brazílskej Štátnej pokladnice prezentované dôchodkové dlhopisy SeLFIES ako možná finančná inovácia.

Po období boja s dôsledkami pandémie COVID-19 ohlásila Štátna pokladnica v decembri roku 2021 zámer uvedenia dôchodkového dlhopisu na základe teoretického návrhu SeLFIES.

V decembri roku 2022 bol oficiálne vydaný brazílsky dôchodkový dlhopis NTN-B1, ktorý bol následne premenovaný na Tesouro RendA+, skrátene RendA+ na Tesouro Direto, kde bol oficiálne predstavený a obchodovaný od januára roku 2023.

Na zavedenie RendA+ bolo potrebné vykonať viacero modifikácií oproti prvotnému teoretickému návrhu SeLFIES. Jednou z nich je prepojenie na index IPCA, ktorý je všeobecne uznávaný index s už existujúcim likvidným trhom, namiesto naviazania na novovytvorený index spotreby na obyvateľa, čo však výrazne nepozmeňuje základné charakteristiky návrhu SeLFIES.

RendA+ sprevádzali pozitívne prvotné výsledky. V auguste roku 2025 boli podľa [79] predané štátne dôchodkové dlhopisy Tesouro RendA+ v hodnote 689 miliónov BRL, čiže vyše 127 miliónov USD, čo tvorilo necelých 11 % z celkovej hodnoty predaných dlhopisov na platforme Tesouro Direto v danom mesiaci. Spätne boli predané RendA+ v hodnote necelých 30 miliónov BRL, teda približne 5,5 milióna USD, čo predstavovalo iba necelé 1 % zo všetkých spätných predajov na spomínanej platforme. To ukazuje, že špeciálne obmedzenia na spätný predaj Tesouro RendA+ spolu so zvýhodneniami súvisiacimi s ich dlhodobým držaním sú účinné. Investori v auguste roku 2025 majú RendA+ v celkovej hodnote približne 8 miliárd BRL, čiže necelých 1,5 miliardy USD, čo sú vyše 4 % z celej hodnoty dlhopisov kúpených na platforme Tesouro Direto.

1.2.3 Fungovanie

Tesouro RendA+ podľa publikácie [76] vyplatí po dátume konverzie investorovi počas dvadsiatich rokov mesačne jednu platbu, teda dokopy 240 splátok vo forme kupónových platieb s výnosom stanoveným pri nákupe, ktoré sú indexované zmenou indexu IPCA od vydania dlhopisu až do dátumu jednotlivých platieb.

Dôchodkový štátny dlhopis RendA+ predstavuje čisto trhovo orientovaný finančný nástroj, ktorý umožňuje premeniť súčasnú hodnotu úspor sporiteľa na jeho garantovaný reálny budúci dôchodkový príjem. Podľa článku [81] sa cena RendA+ určí na základe štandardného oceňovania dlhopisov, teda jeho hodnota je daná ako súčet súčasných hodnôt všetkých 240 budúcich platieb diskontovaných podľa reálnej úrokovej miery.

Zmena IPCA sa kumuluje denne na základe predchádzajúcej trhovej predpovede publikovanej neziskovou organizáciou ANBIMA (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais), čiže v preklade Brazílskou asociáciou subjektov finančných a kapitálových trhov, a je mesačne korigovaná v deň uverejnenia hodnoty indexu.

Štátne dlhopisy RendA+ boli emitované Štátnou pokladnicou s ôsmimi rôznymi dátumami konverzie, konkrétne v rokoch 2030, 2035, 2040, 2045, 2050, 2055, 2060 a 2065.

V tabuľke 1 sú zaznamenané ročné výnosy RendA+ pre rôzne splatnosti.

Tabuľka 1: Ročný výnos dôchodkových štátnych dlhopisov Tesouro RendA+ pri nákupe a spätnom predaji na platforme Tesouro Direto pre ich rôzne splatnosti k dátumu 23.11.2025

Dlhopis	Ročný výnos - nákup	Ročný výnos - predaj	Splatnosť
Tesouro Renda+ 2030	IPCA + 7,21 %	IPCA + 7,09 %	15.12.2049
Tesouro Renda+ 2035	IPCA + 7,07 %	IPCA + 6,95 %	15.12.2054
Tesouro Renda+ 2040	IPCA + 7,00 %	IPCA + 6,88 %	15.12.2059
Tesouro Renda+ 2045	IPCA + 6,96 %	IPCA + 6,84 %	15.12.2064
Tesouro Renda+ 2050	IPCA + 6,95 %	IPCA + 6,83 %	15.12.2069
Tesouro Renda+ 2055	IPCA + 6,96 %	IPCA + 6,84 %	15.12.2074
Tesouro Renda+ 2060	IPCA + 6,97 %	IPCA + 6,85 %	15.12.2079
Tesouro Renda+ 2065	IPCA + 6,97 %	IPCA + 6,85 %	15.12.2084

(zdroj: vlastné spracovanie údajov z [77])

Na webovej stránke Tesouro Direto [78] je prístupná kalkulačka, ktorá umožňuje investorom zodpovedaním jednoduchých otázok zistiť, koľko majú investovať a ktorý konkrétny štátny dôchodkový dlhopis RendA+ si majú zvoliť, tak, aby dátum začiatku vyplácania jeho platieb bol relevantný vzhľadom na ich plánovaný dátum odchodu do dôchodku. Odpovedá sa na 3 povinné a 1 nepovinnú otázku v tvare:

- Koľko máte rokov?
- V akom veku chcete odísť do dôchodku?
- Aký dodatočný mesačný príjem si želáte? (Bude upravený o infláciu)
- Chcete urobiť nejakú počiatočnú investíciu? (Voliteľná)

Inšpirovaní časopiseckou prácou [81] sme simulovali výsledok spomínanej kalkulačky pre 25 ročného investora, ktorý chce odísť do dôchodku vo veku 65 rokov, teda o 40 rokov. Daný investor si želá doplnkový reálny dôchodkový mesačný príjem vo výške 500 USD, čo predstavuje približne 2700 BRL a má pripravených 1000 USD, teda okolo 5400 BRL ako počiatočnú investíciu. Kalkulačka nám odporučila kúpiť štátny dôchodkový dlhopis Tesouro RendA+ 2065, teda taký, ktorý vypláca mesačné kupónové platby od 15. 1. 2065 do 15. 12. 2084. Taktiež nám oznámila, že suma, ktorú bude musieť daný sporiteľ mesačne investovať, aby si zabezpečil na dobu 20 rokov požadovaný doplnkový reálny dôchodkový príjem vo výške 2 700 BRL upravených o infláciu, je 131,46 BRL, čiže vyše 24 USD a bude musieť vlastniť 114,02 dlhopisov Tesouro RendA+.

Podľa publikácie [81] má RendA+ špecifický režim spätného odkupu na platforme Tesouro Direto, ktorý spočíva v tom, že po dobu 60 dní od dátumu jeho nákupu nie je možný jeho spätný predaj. Tesouro RendA+ je jediný dlhopis s takýmto obmedzením likvidity, ktorého cieľom je podporovať dlhodobé dôchodkové investovanie a obmedzovať špekulatívne obchodovanie. Okrem spomínaného obmedzenia sú na RendA+ uplatňované aj ďalšie sankcie a daňové zaťaženia pri krátkodobom držaní. Podľa článku [81] platí, že ak sa investor rozhodne spätne predať vlastnené dôchodkové dlhopisy Tesouro RendA+, tak sa uplatňuje stupňovaný poplatok, ktorý je vo výške 0,50 % z predajnej ceny do 10 rokov od dátumu nadobudnutia dlhopisu, 0,20 % medzi 10. a 20. rokom a 0,10 % z predajnej ceny po 20. roku od kúpy dôchodkového dlhopisu RendA+.

Platforma Tesouro Direto má maximálnu povolenú mesačnú investíciu na úrovni 1 milión BRL, teda necelých 200 000 USD na jedného investora, čo sa vzťahuje aj na štátny dôchodkový dlhopis Tesouro RendA+.

Medzi brazílskym systémom sociálneho zabezpečenia a RendA+ neexistuje podľa [81] žiadne prepojenie. Štátny dôchodkový dlhopis Tesouro RendA+ bol navrhnutý ako doplnok k dôchodkovému príjmu zo sociálneho zabezpečenia a nie ako jeho náhrada. RendA+ má slúžiť pre brazílskych sporiteľov, ktorí si želajú dosiahnuť vyšší náhradový pomer, teda podiel mesačného dôchodkového príjmu k poslednej mzde sporiteľa, než aký im môže poskytnúť sociálny systém.

1.2.4 Výhody

Štátny dôchodkový dlhopis Tesouro RendA+ predstavuje finančný nástroj, ktorý umožňuje jednotlivcom v Brazílii plánovanie ich budúcej dôchodkovej životnej úrovne bez potreby dodatočného finančného vzdelávania, keďže zabezpečuje budúci garantovaný reálny doplnkový dôchodkový príjem.

Podľa publikácie [81] učí občanov nespoliehať sa výlučne iba na štát pri zabezpečení si ich budúceho dôchodkového príjmu a zjednodušuje premenu súčasnej hodnoty prostriedkov na budúcu reálnu životnú úroveň, čím sa taktiež znižuje pravdepodobnosť nevhodných rozhodnutí individuálnych sporiteľov týkajúcich sa ich úspor na doplnkový dôchodkový príjem.

RendA+ je na platforme TD podľa článku [81] zlomok dlhopisu NTN-B1. Umožnenie vlastníctva zlomkového podielu štátneho dlhopisu dovoľuje aj menej majetným občanom vlastniť štátne dlhopisy, ktoré majú zvyčajne vysokú nominálnu hodnotu. Čiže aj chudobnejší investori si môžu zakúpiť štátne dôchodkové dlhopisy Tesouro RendA+ a zabezpečiť si doplnkový reálny dôchodkový príjem.

Brazílska burza cenných papierov (B3) účtuje podľa časopiseckej práce [81] ročný poplatok za správu dlhopisov vo výške 0,20 % z celkovej hodnoty držaných dlhopisov investora. Avšak štátne dôchodkové dlhopisy Tesouro RendA+ majú odlišné podmienky, keďže B3 neúčtuje poplatky za ich správu až do limitu šiestich minimálnych miezd pre celkovú hodnotu všetkých vlastnených splatností RendA+, ak sú držané až do konečnej platby. Ak bude prekročený spomínaný limit, tak poplatok za správu štátnych dôchodko-

vých dlhopisov Tesouro RendA+ predstavuje 0,10 % z hodnoty nad stanovenou hranicou šiestich minimálnych miezd.

Mnohé ďalšie finančné nástroje je možné vytvoriť na báze fungovania dôchodkových dlhopisov SeLFIES, respektíve ich brazílskej podoby Tesouro RendA+. Príkladom môže byť štátny dlhopis na zabezpečenie budúcich výdavkov na vzdelávanie a školné, ktorý taktiež v sebe zahŕňa indexáciu peňažných tokov a ktorý bol zavedený v Brazílii v roku 2023 pod názvom EducA+.

1.2.5 Výzvy

Investori budú musieť prekonať obavy týkajúce sa priebežných zmien trhovej hodnoty štátneho dôchodkového dlhopisu Tesouro RendA+ a musia sa namiesto nej zamerať na reálny garantovaný doplnkový dôchodkový príjem poskytovaný daným dlhopisom. Autori v [81] upozorňujú, že by sa výnosnosť a riziko investícií v dôchodkovom sporení mali hodnotiť z hľadiska budúceho reálneho príjmu a nie podľa aktuálnej hodnoty úspor.

Platby z brazílskeho dôchodkového dlhopisu RendA+ podliehajú podľa článku [81] rovnakému zdaneniu ako platby z finančných nástrojov s pevným výnosom, teda 22,5 % pri aktívach držaných do 180 dní, 20 % pri držbe od 181 do 360 dní, 17,5 % pri držbe od 361 do 720 dní a 15 % pri držbe presahujúcej 721 dní. Tesouro RendA+ by mohlo podliehať špecifickým daňovým pravidlám, čo by ho mohlo urobiť ešte viac zaujímavým pre dôchodkových investorov.

Taktiež sa podľa autorov [81] objavujú pochybnosti ohľadom kreditného rizika vlády pri štátnom dlhopise s tak dlhou dobou splatnosti. Mnoho investorov je skeptických voči tomu, že je Brazília schopná v dlhodobom hľadisku splácať reálnu úrokovú mieru na úrovni vyše 6 % ročne.

Brazílska burza cenných papierov by mohla podľa publikácie [81] vytvoriť systém umožňujúci inkaso priamo z bežných účtov sporiteľov na pravidelný nákup štátnych dôchodkových dlhopisov Tesouro RendA+, čo by výrazne uľahčilo investovanie do nich pre jednotlivcov, ktorí nemajú dostatočnú disciplínu pravidelne investovať.

Dôchodkové dlhopisy SeLFIES boli teoreticky navrhnuté tak, aby s nimi mohli obchodovať okrem jednotlivcov aj inštitucionálni investori. Mali by sa stať základom pre ďalšie finančné inovácie, napríklad pre doživotné nástroje vydávané poisťovňami. Penzijné fondy

by takisto mohli investovať do štátnych dôchodkových dlhopisov Tesouro RendA+, aby garantovali budúci reálny dôchodkový príjem ich sporiteľov.([81])

Podľa časopiseckej práce [81] by mal IBGE vytvoriť index spotreby na obyvateľa, ktorý by bol založený na spotrebnej dani, teda dani z pridanej hodnoty. Daný index by na rozdiel od cenového okamžite zachytával zmeny v spotrebiteľskom správaní, nové produkty a substitučné efekty, ktoré cenový index zachytáva iba pomaly a čiastočne pri zmene spotrebného koša tovarov a služieb.

Dáta využívané v nasledujúcich kapitolách našej diplomovej práce a kódy použité na získanie všetkých výsledkov sú dostupné na linku (https://github.com/LukasKostany/DP_Financne_nastroje_pre_dochodkove_investovanie).

2 Využité dáta a ich spracovanie

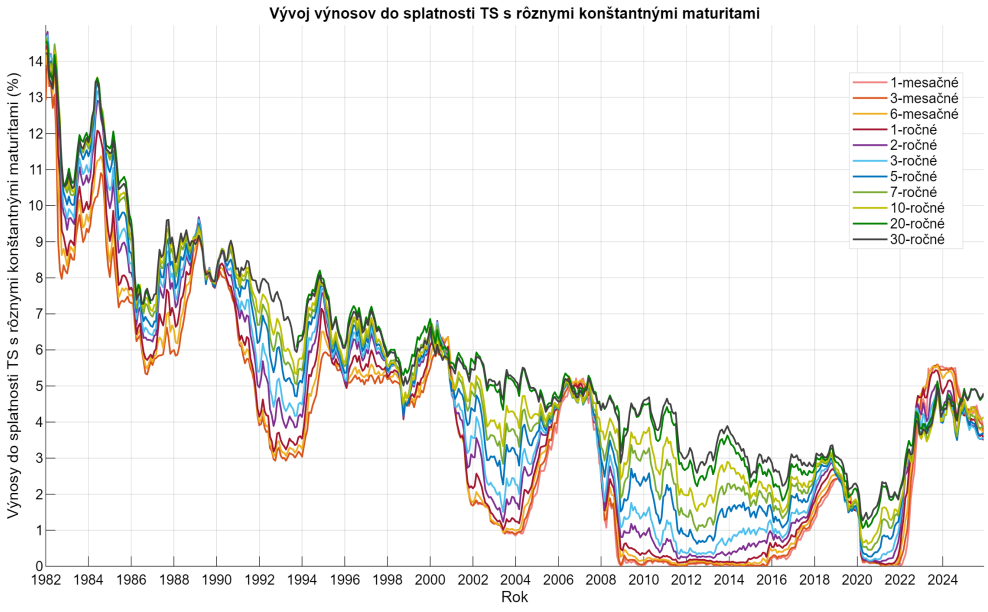
2.1 Výnosy do splatnosti amerických štátnych dlhopisov

Najprv sme získali údaje o výnosoch do splatnosti amerických štátnych dlhopisov (Treasury Securities (TS)) s konštantnými maturitami 1 mesiac, 3 mesiace, 6 mesiacov, 1 rok, 2 roky, 3 roky, 5 rokov, 7 rokov, 10 rokov, 20 rokov a 30 rokov zo stránky Federal Reserve Economic Data (FRED), teda v preklade zo stránky obsahujúcej ekonomické dáta Federálneho rezervného systému ([5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [15], [17] a [19]).

Dané výnosy do splatnosti sú uvádzané pre par bondy, teda dlhopisy, ktorých nominálna hodnota (face value) sa rovná ich trhovej cene (price), čiže výnos do splatnosti pre spomínané dlhopisy je zároveň aj ich kupónovou sadzbou (coupon rate).

Pre americké štátne dlhopisy platí, že kupóny vyplácajú polročne, teda dvakrát do roka.

Vývoj výnosov do splatnosti amerických štátnych dlhopisov s jednotlivými skúmanými konštantnými maturitami v období od 1.1.1982 do 1.12.2025 je zaznamenaný na obrázku 1.



Obr. 1: Časový vývoj výnosov do splatnosti amerických štátnych dlhopisov s rozličnými konštantnými maturitami za obdobie od začiatku roku 1982 do konca roku 2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z ([5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [15], [17], [19]))

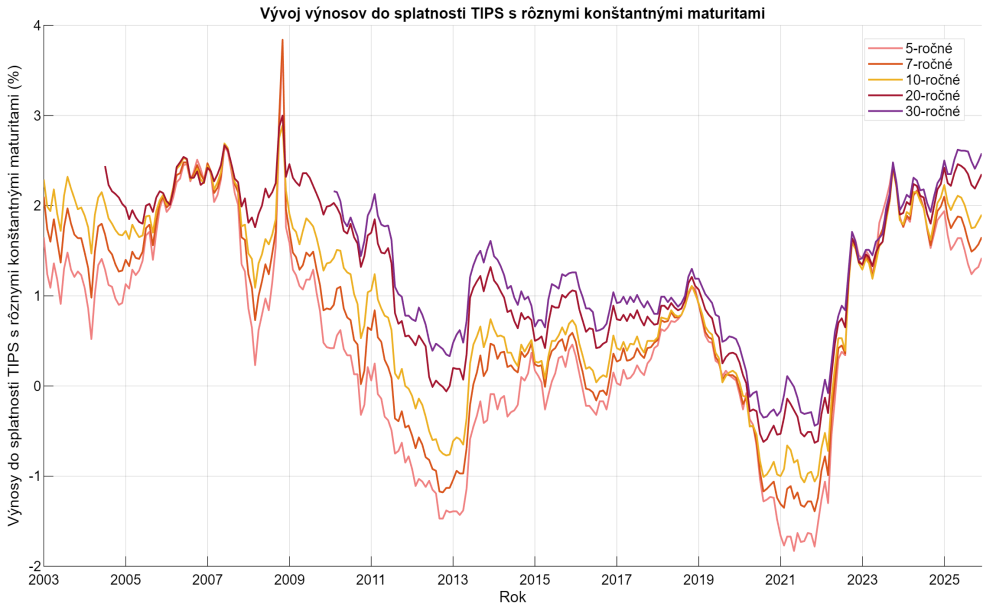
2.2 Výnosy do splatnosti TIPS

Treasury Inflation-Protected Securities (TIPS), teda v preklade americké štátne dlhopisy chránené proti inflácii, boli podľa [53] zavedené v roku 1997. Ich nominálna hodnota sa upravuje v závislosti od zmeny inflácie, ktorá je meraná indexom spotrebiteľských cien. Keď dôjde k nárastu inflácie, tak sa ich nominálna hodnota zvýši, čím sa navyšujú aj kupónové platby TIPS. V prípade deflácie je pri amerických štátnych dlhopisoch chránených proti inflácii zaručené, že investori dostanú pri splatnosti TIPS späť aspoň ich pôvodnú nominálnu hodnotu. Výmenou za ochranu proti inflácii ponúkajú TIPS zvyčajne nižšie kupónové sadzby ako bežné štátne dlhopisy.

Zobrali sme údaje o výnosoch do splatnosti amerických štátnych dlhopisov chránených proti inflácii s konštantnými maturitami 5 rokov, 7 rokov, 10 rokov, 20 rokov a 30 rokov zo stránky Federal Reserve Economic Data ([12], [14], [16], [18] a [20]).

Daný výnos do splatnosti je, ako v prípade štandardných amerických štátnych dlhopisov, uvádzaný pre par bond a taktiež pre TIPS platí, že vyplácajú kupón polročne.

Časový vývoj výnosov do splatnosti amerických štátnych dlhopisov chránených proti inflácii s danými skúmanými konštantnými maturitami za obdobie od začiatku roku 2003 do konca roku 2025 sa nachádza na obrázku 2.



Obr. 2: Časový vývoj výnosov do splatnosti TIPS s rozličnými konštantnými maturitami za obdobie od 1.1.2003 do 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z ([12], [14], [16], [18] a [20]))

2.3 Akciový index S&P 500

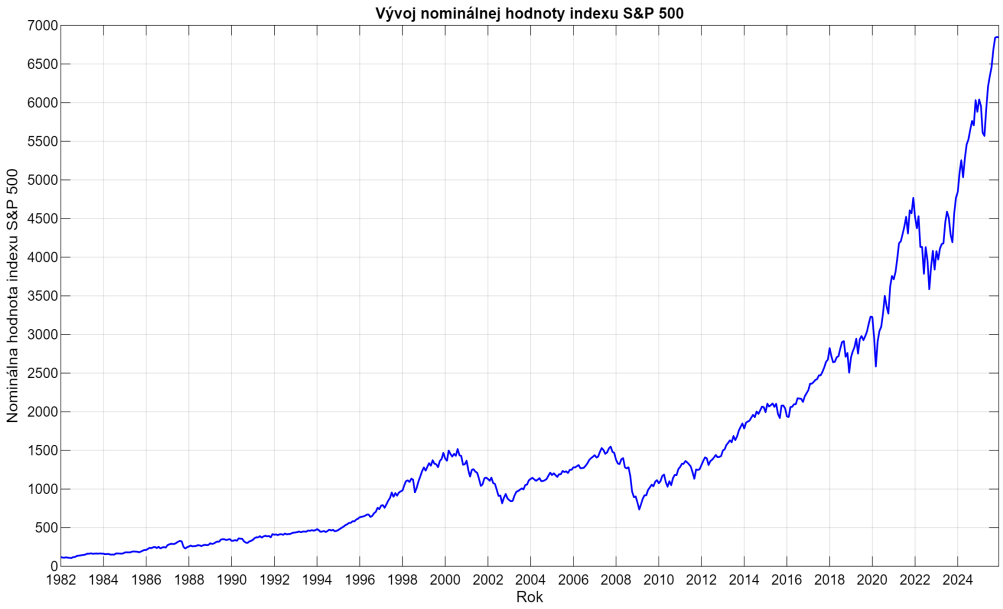
Standard and Poor's 500 (S&P 500) je podľa [56] akciový index vážený trhovou hodnotou spoločností, ktorý zostavuje od roku 1957 americká ratingová agentúra Standard and Poor's. Pozostáva z 500 najväčších verejne obchodovaných spoločností v Spojených štátoch amerických, ktoré spĺňajú aj dodatočné kritériá, akým je napríklad dostatočná likvidita ich akcií.

Spoločnosť s vyššou váhou v indexe má výraznejší vplyv na jeho hodnotu než spoločnosť s nižšou váhou, keďže zmena ceny jej akcií sa v dôsledku vyššej váhy viac premietne do celkovej hodnoty indexu.

Index podľa [56] zachytáva približne 80% z celkovej hodnoty amerického akciového trhu, a preto je považovaný za jeden z najlepších ukazovateľov aktuálnej situácie akciového trhu v Spojených štátoch amerických, ale aj globálne.

Nominálne hodnoty akciového indexu S&P 500 za obdobie od 1.1.1982 do 1.12.2025 sme získali zo stránky [54].

Obrázok 3 vykresľuje vývoj nominálnej hodnoty indexu S&P 500 od začiatku roku 1982 až do konca roku 2025.

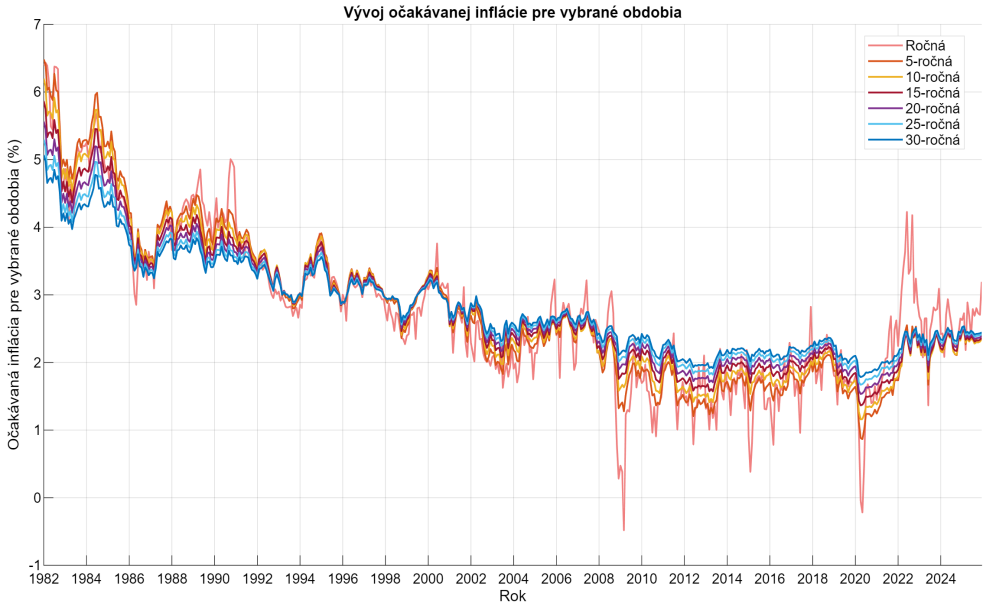


Obr. 3: Vývoj nominálnej hodnoty akciového indexu S&P 500 v období od 1.1.1982 do 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z [54])

2.4 Očakávaná inflácia

Zo stránky Federal Reserve Economic Data (FRED) sme taktiež stiahli dáta o očakávanej inflácii na obdobie 1 až 30 rokov vždy po jednom celom roku ([21] až [50]).

Časový vývoj očakávanej inflácie pre vybrané splatnosti od 1.1.1982 do 1.12.2025 je zachytený na obrázku 4.



Obr. 4: Časový vývoj očakávanej inflácie pre zvolené splatnosti od začiatku roku 1982 do konca roku 2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z ([21], [25], [30], [35], [40], [45] a [50])

2.5 Index spotrebiteľských cien

Nakoniec sme zo stránky Federal Reserve Economic Data zobrali hodnoty Consumer Price Index (CPI), teda v preklade indexu spotrebiteľských cien ([4]).

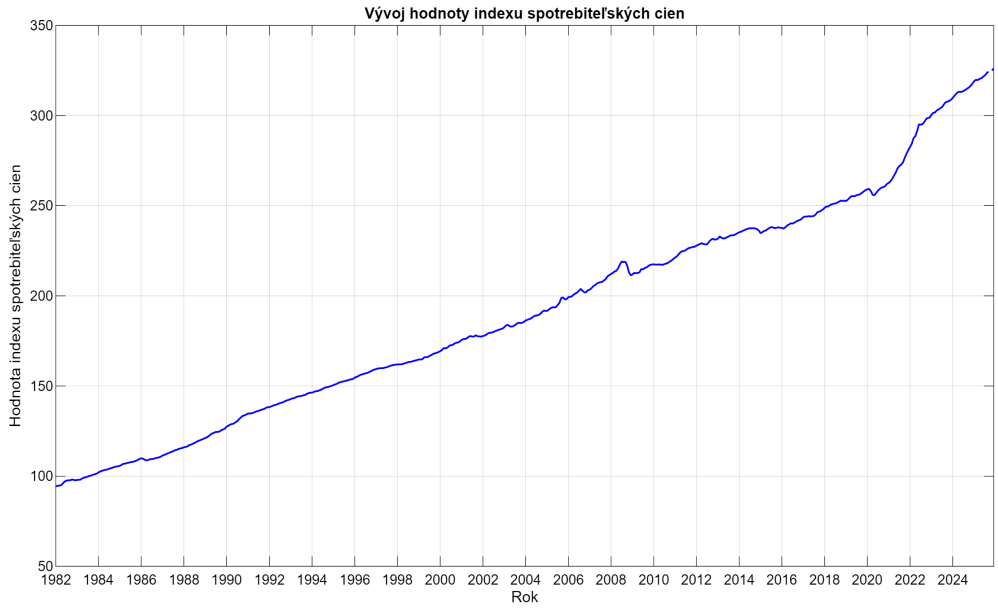
Podľa ([4]) daný index vyjadruje hodnotu spotrebného koša tvoreného produktami a službami, ktoré sú bežne využívané, akými sú jedlo, oblečenie, bývanie alebo bežné poplatky.

Pomocou zmeny hodnoty indexu spotrebiteľských cien sa vyjadruje inflácia za určité obdobie.

Zmeny hodnoty spomínaného indexu sme využili pri výpočte reálnych výnosov amerických štátnych dlhopisov, reálnych hodnôt akciového indexu S&P 500 a reálnej mzdy

reprezentatívneho sporiteľa.

Vývoj hodnoty indexu spotrebiteľských cien od začiatku roku 1982 až po koniec roku 2025 je prezentovaný na obrázku 5.



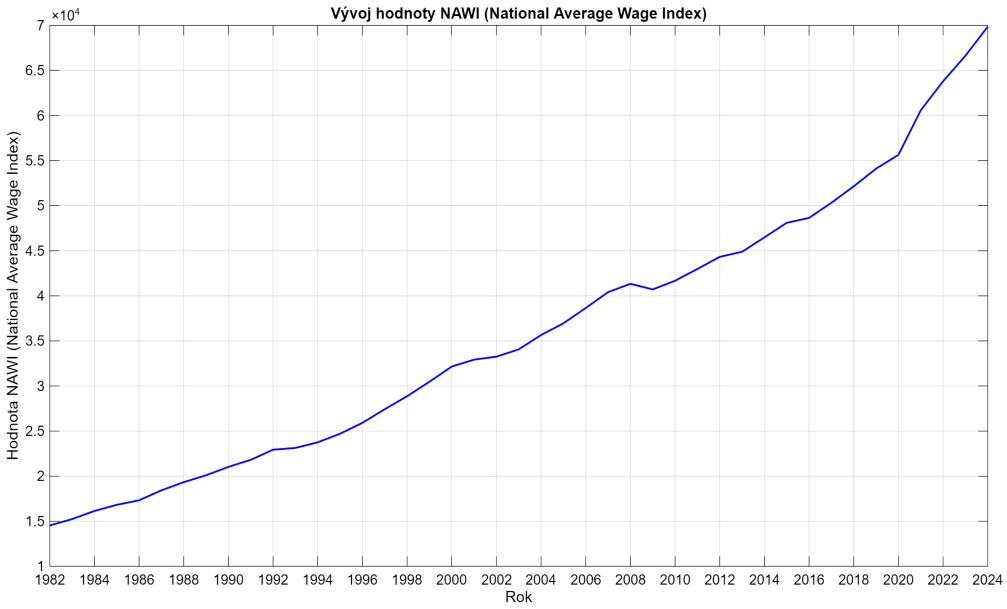
Obr. 5: Vývoj hodnoty indexu spotrebiteľských cien v období od 1.1.1982 do 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z [4])

2.6 Index národnej priemernej mzdy

Hodnoty National Average Wage Index (NAWI), teda v preklade indexu národnej priemernej mzdy v Spojených štátoch amerických, sme získali zo stránky Social Security Administration (SSA), čiže Úradu sociálneho zabezpečenia [74].

NAWI zachytáva rast ročnej priemernej hrubej nominálnej mzdy v Spojených štátoch amerických a podľa [55] je využívaný SSA na úpravy mzdy pri výpočte výšok dôchodkových dávok.

Na obrázku 6 je ilustrovaný časový vývoj NAWI od začiatku roku 1982 do konca roku 2024.



Obr. 6: Vývoj National Average Wage Index (NAWI) od roku 1982 do roku 2024 (zdroj: vlastné spracovanie dát z [74])

2.7 Svenssonov model

Keďže na ocenenie SeLFIES sme potrebovali hodnoty reálnej úrokovej miery so splatnosťou až do 64 rokov, tak sme extrapolovali získané výnosy do splatnosti amerických štátnych dlhopisov s rôznymi konštantnými maturitami, ktoré predstavovali nominálnu úrokovú mieru a taktiež údaje o očakávanej inflácii pre rozličné splatnosti využitím výnosových kriviek získaných pomocou Svenssonovho modelu.

Parametre Svenssonovho modelu sme získali pomocou MATLAB funkcie fitSvensson [64], ktorej vstupom boli dlhopisy vytvorené pomocou MATLAB funkcie fininstrument [63]. Dané dlhopisy mali pre účely kalibrácie nominálnej úrokovej miery výnosy do splatnosti, konštantné maturity a vlastnosti ako spomínané americké štátne dlhopisy, čiže predstavovali par bondy s polročným vyplácaním kupónov. Pre účely kalibrovania očakávanej inflácie to boli bezkupónové dlhopisy s výnosom rovným očakávanej inflácii a cenou danou vzorcom pre hodnotu bezkupónového dlhopisu:

$$P(T) = \frac{100}{(1+\pi_T)^T},$$

kde π_T je očakávaná inflácia za T rokov.

Následne sme pomocou MATLAB funkcie zerorates [66] dostali hodnoty nominálnej

úrokovej miery a očakávanej inflácie vo všetkých potrebných obdobiach.

Hodnota spotovej úrokovej miery sa vypočíta zo Svenssonovho modelu vzorcom z [64]:

$$s(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}\right) \left(-\frac{\tau_1}{m}\right) + \beta_2 \left[\left(1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}\right) \frac{\tau_1}{m} - e^{-\frac{m}{\tau_1}}\right] + \beta_3 \left[\left(1 - e^{-\frac{m}{\tau_2}}\right) \frac{\tau_2}{m} - e^{-\frac{m}{\tau_2}}\right],$$

kde podľa článku [82] $s(m)$ značí spotovú úrokovú mieru do času maturity m, β_0 reprezentuje limitnú úroveň pre dlhodobé splatnosti, β_1 ovplyvňuje sklon krivky pre krátke splatnosti, β_2 symbolizuje prvý hrb, čiže umožňuje vrchol pri stredne dlhých splatnostiach, β_3 ovplyvňuje druhý hrb, τ_1 určuje pozíciu prvého hrbu a τ_2 polohu druhého hrbu.

Pri hľadaní optimálnych hodnôt spomínaných parametrov sme nastavili počiatočný bod optimalizácie ako autori v článku [82] a dolné i horné hranice pre hodnoty jednotlivých parametrov sme zvolili podľa práce [51].

Hodnoty počiatočných bodov optimalizácie a hraníc pre parametre Svenssonovho modelu sú v tabuľke 2, pričom počiatočná hodnota parametra β_0 sa vypočítala podľa [82]:

$$\beta_0^I = \frac{y_{-3} + y_{-2} + y_{-1}}{3}, \tag{1}$$

kde y_{-3}, y_{-2} a y_{-1} sú výnosy finančných nástrojov s troma najdlhšími skúmanými maturitami a počiatočná hodnota parametra β_1 je určená vzorcom z [82] ako:

$$\beta_1^I = y_1 - \beta_0^I, \tag{2}$$

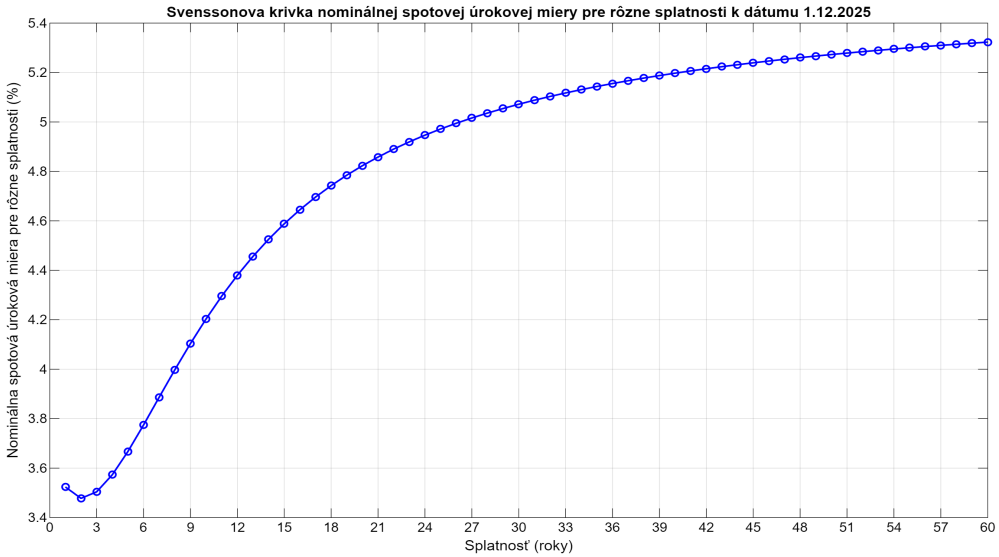
kde y_1 je výnos aktíva s najkratšou splatnosťou a β_0^I je počiatočná hodnota parametra β_0.

Tabuľka 2: Počiatočné hodnoty a hranice pre optimalizáciu parametrov Svenssonovho modelu

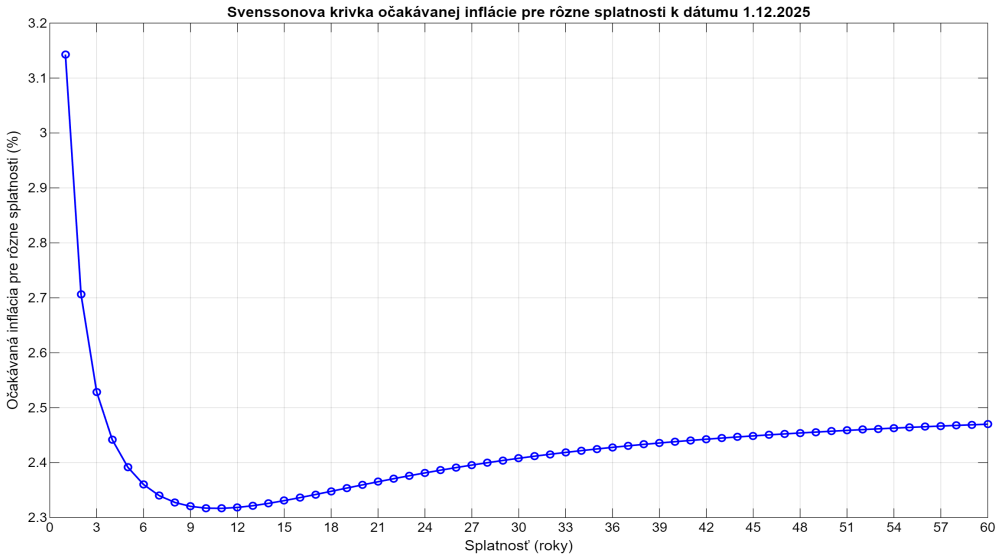
Parameter	Počiatočná hodnota	Dolná hranica	Horná hranica
β_0	β_0^I (1)	0	15
β_1	β_1^I (2)	-15	30
β_2	0	-30	30
β_3	0	-30	30
τ_1	1	0	2,5
τ_2	1	2,5	5,5

(zdroj: [82] a [51])

Spotová Svenssonova krivka nominálnej úrokovej miery pre jednotlivé maturity je zobrazená na obrázku 7 a očakávanej inflácie pre rôzne splatnosti je na obrázku 8.



Obr. 7: Svenssonova krivka pre spotovú nominálnu úrokovú mieru pre rôzne splatnosti k 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [15], [17], [19])



Obr. 8: Svenssonova krivka pre očakávanú infláciu pre rôzne splatnosti k dátumu 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát z [21] až [50])

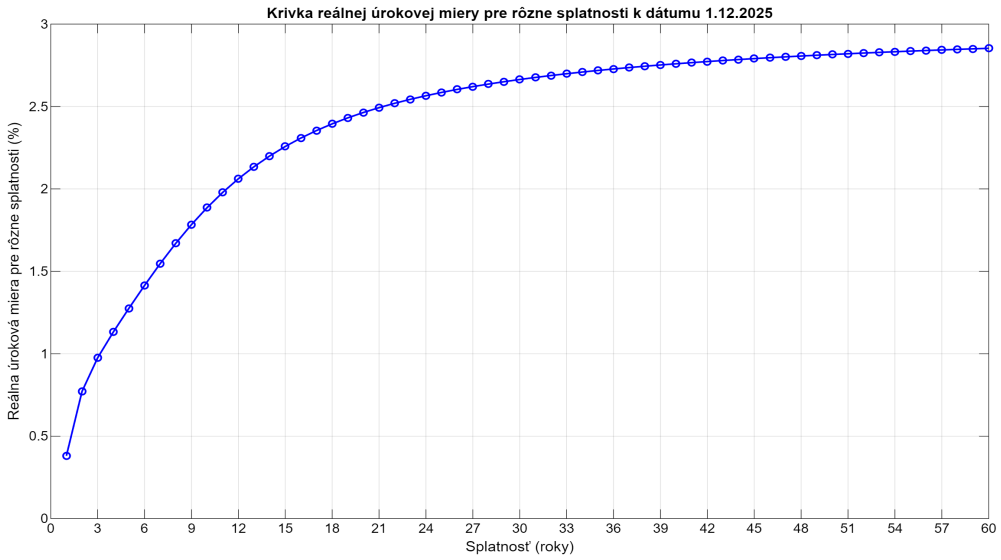
2.8 Reálna úroková miera

Reálnu úrokovú mieru sme vypočítali pomocou Fisherovej aproximácie ako:

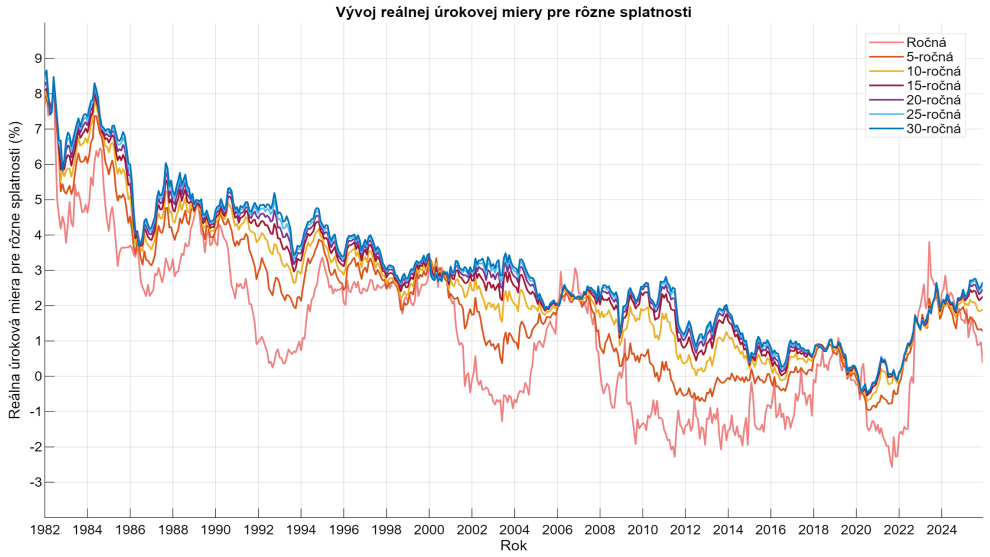
$$r_T \approx i_T - \pi_T,$$

kde r_T predstavuje reálnu úrokovú mieru do splatnosti T, i_T reprezentuje nominálnu úrokovú mieru do maturity T a π_T vyjadruje očakávanú infláciu do času T.

Obrázok 9 zaznamenáva krivku reálnej spotovej úrokovej miery pre rôzne splatnosti k dátumu 1.12.2025, vývoj reálnej úrokovej miery pre rôzne splatnosti je na obrázku 10.



Obr. 9: Krivka reálnej úrokovej miery pre rôzne splatnosti k dátumu 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 10: Časový vývoj reálnej úrokovej miery pre rôzne splatnosti od 1.1.1982 do 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát)

3 Ocenenie, výnosy a volatilita finančných nástrojov

3.1 SeLFIES

3.1.1 Výpočet reálnej hodnoty

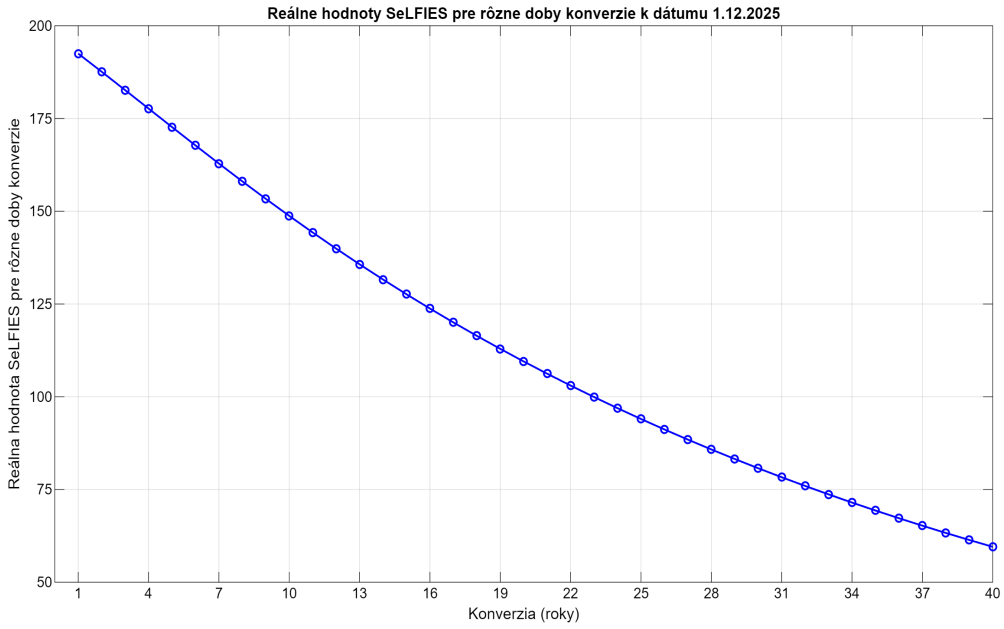
Pomocou reálnych úrokových mier sme ocenili SeLFIES, pričom sme predpokladali, že SeLFIES začnú mesiac po ich konverzii vyplácať po dobu 20 rokov, teda 240 mesiacov, každý mesiac jednu platbu v reálnej hodnote 1 peňažnej jednotky.

Reálnu hodnotu SeLFIES v jednotlivých mesiacoch sme vypočítali podľa vzorca:

$$V_{\text{SeLFIES}(T)_t} = \sum_{i=T+1}^{T+240} e^{-r_i \cdot \frac{i}{12}}, \tag{3}$$

kde $V_{\text{SeLFIES}(T)_t}$ predstavuje reálnu hodnotu SeLFIES s konštantným časom do konverzie T mesiacov v mesiaci t a r_i zodpovedá ročnej reálnej úrokovej miere so splatnosťou i mesiacov.

Reálne hodnoty SeLFIES s rôznymi celoročnými dobami do ich konverzie k dátumu 1.12.2025 sú vyobrazené na obrázku 11.



Obr. 11: Hodnoty SeLFIES s rozličnými konštantnými časmi do konverzie k dátumu 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát)

3.1.2 Priemerný logaritmický reálny ročný výnos a volatilita

Najprv sme získali logaritmické reálne mesačné výnosy SeLFIES s jednotlivými konštantnými dobami konverzie podľa vzorca:

$$r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t} = \log\left(\frac{V_{\mathrm{SeLFIES}(T-1)_t}}{V_{\mathrm{SeLFIES}(T)_{t-1}}}\right), \tag{4}$$

v ktorom $r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t}$ predstavuje logaritmický reálny mesačný výnos SeLFIES s konštantným časom do konverzie T mesiacov v mesiaci t a $V_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t}$ reprezentuje reálnu hodnotu SeLFIES s konštantnou dobou konverzie T mesiacov v mesiaci t vypočítanú podľa vzorca (3).

Následne sme vypočítali priemerný logaritmický reálny ročný výnos SeLFIES s jednotlivými konštantnými dobami konverzie T mesiacov, označený $\mu^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)}$, ako:

$$\mu^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)} = \frac{12}{N}\sum_{t=1}^{N} r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t}, \tag{5}$$

kde $r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t}$ symbolizuje logaritmický reálny mesačný výnos SeLFIES s konštantným časom do konverzie T mesiacov v mesiaci t získaný podľa rovnice (4) a N označuje počet mesiacov.

Taktiež sme dostali ročnú volatilitu daného reálneho výnosu SeLFIES s jednotlivými konštantnými dobami konverzie T mesiacov, reprezentovanú ako $\sigma^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)}$, pomocou vzorca:

$$\sigma^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)} = \sqrt{\frac{12}{N-1}\sum_{t=1}^{N}\left(r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t} - \frac{\mu^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)}}{12}\right)^2}, \tag{6}$$

v ktorom $r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t}$ vyjadruje logaritmický reálny mesačný výnos SeLFIES s konštantným časom do konverzie T mesiacov v mesiaci t vypočítaný ako v (4), $\mu^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)}$ je priemerný logaritmický reálny ročný výnos SeLFIES s konštantnou konverziou T mesiacov získaný pomocou (5) a N značí celkový počet mesiacov.

3.1.3 Priemerný aritmetický reálny ročný výnos

Vzťah pre výpočet aritmetických výnosov sme získali pomocou stochastického kalkulu, pričom sme využili Itôovu lemu, ktorej znenie podľa [69] je:
Nech $X_t(\omega)$ je Itôov proces, čiže:

$$dX_t(\omega) = u(t,\omega)\,dt + v(t,\omega)\,dW_t(\omega).$$

Nech $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Potom:

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

je tiež Itôov proces, pre ktorý platí, že:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)\, v^2\, dt.$$

Predpokladali sme, že reálna hodnota dôchodkového dlhopisu SeLFIES označená S sa vyvíja podľa geometrického Brownovho pohybu, teda:

$$\frac{dS}{S} = \mu_S\, dt + \sigma_S\, dW_t, \tag{7}$$

kde μ_S symbolizuje drift Itôovho procesu S, σ_S reprezentuje volatilitu Itôovho procesu S a W_t je Brownov pohyb.

Vynásobením oboch strán stochastickej diferenciálnej rovnice (7) výrazom S sme dostali:

$$dS = \mu_S\, S\, dt + \sigma_S\, S\, dW_t. \tag{8}$$

Na rovnicu (8) sme aplikovali vyššie uvedenú Itôovu lemu, pričom sme zvolili $g(t,x) = \ln(x)$ a $Y_t = g(t,S)$.

Pre funkciu $g(t,x) = \ln(x)$ platí, že:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln(x)) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \text{ a} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}. \tag{11}$$

Z Itôovej lemy sme dosadením výsledných parciálnych derivácií (9), (10) a (11) do stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,S)\, dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,S)\, dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,S)\, v^2\, dt$$

dostali:

$$dY_t = 0\, dt + \frac{1}{S}\, dS + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right) S^2\, \sigma_S^2\, dt.$$

Dosadením stochastickej diferenciálnej rovnice (8) za dS sme získali:

$$dY_t = \frac{1}{S}\left(\mu_S\, S\, dt + \sigma_S\, S\, dW_t\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2} S^2\, \sigma_S^2\, dt.$$

Po vykrátení členov S a S^2 sme mali výraz:

$$dY_t = \mu_S \, dt + \sigma_S \, dW_t - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \, dt.$$

Spojením členov pri dt sme dosiahli stochastickú diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$dY_t = \left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) dt + \sigma_S \, dW_t. \tag{12}$$

Dosadením $Y_t = \ln(S)$ do rovnice (12) sme získali stochastickú diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$d\ln(S) = \left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) dt + \sigma_S \, dW_t,$$

ktorú sme upravili do tvaru:

$$d\ln(S) = \mu_S^{\log} \, dt + \sigma_S \, dW_t,$$

kde:

$$\mu_S^{\log} = \mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2.$$

Teda hodnotu priemerného aritmetického reálneho ročného výnosu SeLFIES s jednotlivými konštantnými konverziami T mesiacov, symbolizovanú $\mu^{\text{arit}}_{\text{SeLFIES}(T)}$, sme vypočítali ako:

$$\mu^{\text{arit}}_{\text{SeLFIES}(T)} = \mu^{\log}_{\text{SeLFIES}(T)} + \frac{1}{2}\sigma^2_{\text{SeLFIES}(T)}, \tag{13}$$

kde $\mu^{\log}_{\text{SeLFIES}(T)}$ reprezentuje priemerný logaritmický reálny ročný výnos SeLFIES s konštantnou dobou konverzie T mesiacov vypočítaný ako (5) a $\sigma^2_{\text{SeLFIES}(T)}$ vyjadruje ročnú varianciu daného reálneho výnosu SeLFIES s konštantnou konverziou T mesiacov získanú umocnením výrazu (6).

Hodnoty priemerného ročného reálneho logaritmického a aritmetického výnosu a ročnej volatility reálneho logaritmického výnosu SeLFIES s celoročnými konštantnými časmi do konverzie vypočítané podľa vzorcov (5), (13) a (6) za obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025 sa nachádzajú v tabuľke 3. V danej tabuľke pozorujeme, že s nárastom konštantnej konverzie SeLFIES postupne rastú všetky pozorované hodnoty.

3.1.4 Reálna hodnota počiatočnej investície v čase

Nakoniec sme vypočítali v každom mesiaci reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky pre jednotlivé konštantné konverzie SeLFIES podľa vzorca:

$$\text{VI}_{\text{SeLFIES}(T)_t} = \exp\left(\sum_{i=1}^{t} r^{\log}_{\text{SeLFIES}(T)_i}\right),$$

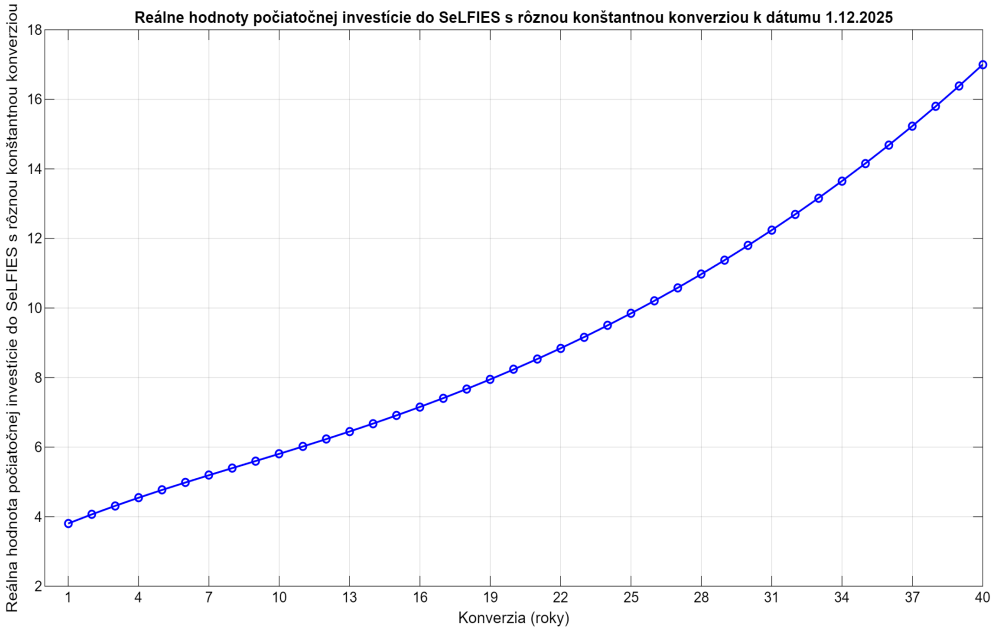
Tabuľka 3: Priemerný reálny ročný logaritmický a aritmetický výnos a ročná volatilita reálneho logaritmického výnosu SeLFIES s jednotlivými konštantnými celoročnými dobami konverzie za obdobie od začiatku roku 1986 po koniec roku 2025

Konv.	Log. (%)	Aritm. (%)	Vol. (%)	Konv.	Log. (%)	Aritm. (%)	Vol. (%)
1	3,35	3,54	6,13	21	5,37	7,28	19,52
2	3,51	3,74	6,73	22	5,46	7,51	20,26
3	3,66	3,93	7,35	23	5,55	7,76	21,01
4	3,79	4,11	7,96	24	5,64	8,01	21,77
5	3,91	4,28	8,59	25	5,73	8,27	22,52
6	4,02	4,45	9,21	26	5,82	8,53	23,29
7	4,13	4,61	9,85	27	5,91	8,80	24,05
8	4,22	4,77	10,49	28	6,00	9,08	24,83
9	4,32	4,94	11,14	29	6,09	9,37	25,60
10	4,41	5,10	11,79	30	6,18	9,66	26,38
11	4,50	5,27	12,46	31	6,27	9,96	27,16
12	4,58	5,44	13,13	32	6,37	10,27	27,94
13	4,67	5,62	13,81	33	6,46	10,58	28,72
14	4,76	5,81	14,50	34	6,55	10,90	29,51
15	4,84	6,00	15,19	35	6,64	11,23	30,30
16	4,93	6,19	15,89	36	6,73	11,56	31,09
17	5,02	6,40	16,61	37	6,82	11,91	31,89
18	5,11	6,61	17,32	38	6,91	12,25	32,68
19	5,19	6,82	18,05	39	7,01	12,61	33,48
20	5,28	7,05	18,78	40	7,10	12,97	34,28

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

kde $\mathrm{VI}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_t}$ vyjadruje reálnu hodnotu počiatočnej investície vo výške 1 peňažnej jednotky do SeLFIES s konštantnou konverziou T mesiacov v mesiaci t a $r^{\log}_{\mathrm{SeLFIES}(T)_i}$ je logaritmický reálny mesačný výnos SeLFIES s konštantným časom do konverzie T mesiacov v mesiaci i získaný vzorcom (4).

Na konci skúmaného 40 ročného obdobia od 1.1.1986 do 1.12.2025 by sme pri počiatočnej investícii 1 peňažnej jednotky do SeLFIES s jednotlivými celoročnými konštantnými konverziami mali nasporené reálne hodnoty vykreslené na obrázku 12.



Obr. 12: Reálna hodnota počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do SeLFIES s jednotlivými celoročnými konštantnými časmi do konverzie ku 1.12.2025, teda po 40 rokoch od 1.1.1986 (zdroj: vlastné spracovanie dát)

3.2 Americké štátne dlhopisy

3.2.1 Výpočet reálnej hodnoty

Pomocou MATLAB funkcie bndprice [62] sme ocenili americké štátne dlhopisy, teda par bondy s polročnou frekvenciou vyplácania kupónov, s konštantnou maturitou 2 roky, 3 roky, 5 rokov, 7 rokov, 10 rokov, 20 rokov a 30 rokov, pričom sme ich oceňovali po ubehnutí mesiaca od ich vydania, keď sa zmenil príslušný výnos do splatnosti, ale ich kupón ostal rovnaký.

Z funkcie bndprice sme získali $\mathrm{CP}_{\mathrm{TS}(T)_t}$, teda čistú nominálnu cenu amerického štátneho dlhopisu s konštantnou splatnosťou T rokov v mesiaci t a $\mathrm{AI}_{\mathrm{TS}(T)_t}$, čiže alikvotný úrok v mesiaci t, ktorý predstavuje nevyplatenú časť úroku, ktorý sa nahromadí medzi

dvoma výplatami kupónu TS s konštantnou maturitou T rokov. Ich sčítaním sme získali $\mathrm{DP}_{\mathrm{TS}(T)_t}$, teda hrubú nominálnu cenu amerického štátneho dlhopisu s konštantnou splatnosťou T rokov v mesiaci t:

$$\mathrm{DP}_{\mathrm{TS}(T)_t} = \mathrm{CP}_{\mathrm{TS}(T)_t} + \mathrm{AI}_{\mathrm{TS}(T)_t}.$$

Jej prenásobením inflačnou úpravou, ktorú sme vypočítali ako:

$$I_t = \frac{CPI_{t-1}}{CPI_t},$$

kde I_t je inflačná úprava nominálnej ceny v mesiaci t a CPI_t je hodnota indexu spotrebiteľských cien v mesiaci t, sme dostali $\mathrm{RDP}_{\mathrm{TS}(T)_t}$, čiže reálnu hrubú cenu amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou T rokov v mesiaci t:

$$\mathrm{RDP}_{\mathrm{TS}(T)_t} = \mathrm{DP}_{\mathrm{TS}(T)_t} \cdot I_t. \tag{14}$$

3.2.2 Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a volatilita

Ako prvé sme vypočítali logaritmické reálne mesačné výnosy amerických štátnych dlhopisov so skúmanými konštantnými maturitami podľa vzorca:

$$r^{\log}_{\mathrm{TS}(T)_t} = \log\left(\frac{\mathrm{RDP}_{\mathrm{TS}(T)_t}}{100}\right), \tag{15}$$

v ktorom $r^{\log}_{\mathrm{TS}(T)_t}$ predstavuje logaritmický reálny mesačný výnos amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou T rokov v mesiaci t a $\mathrm{RDP}_{\mathrm{TS}(T)_t}$ reprezentuje reálnu hrubú cenu amerického štátneho dlhopisu s konštantnou splatnosťou T rokov v mesiaci t vypočítanú pomocou rovnice (14).

Potom sme pomocou vzorcov uvedených v podkapitole 3.1.2, respektíve rovnice odvodenej v časti 3.1.3, získali hodnoty priemerného reálneho ročného logaritmického a aritmetického výnosu amerických štátnych dlhopisov s jednotlivými skúmanými konštantnými maturitami a ročnej volatility ich logaritmických reálnych výnosov.

Spomínané hodnoty za obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025 sú vypísané v tabuľke 4. (*) v danej tabuľke značí, že pre TS s konštantnou maturitou 20 rokov sme nepoznali ich výnosy do splatnosti v období od 1.1.1987 až do 1.9.1993, a preto sme pri výpočte priemerných výnosov a volatility pre americký štátny dlhopis s konštantnou splatnosťou 20 rokov uvažovali len údaje v čase od 1.1.1986 do 1.12.1986 a taktiež od 1.10.1993 do 1.12.2025.

Tabuľka 4: Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a ročná volatilita logaritmického reálneho výnosu amerických štátnych dlhopisov s vybranými konštantnými maturitami za obdobie od začiatku roku 1986 po koniec roku 2025 (*)

Maturita (roky)	Logaritmický výnos (%)	Aritmetický výnos (%)	Volatilita (%)
2	1,12	1,14	2,04
3	1,40	1,44	2,78
5	1,90	1,98	4,14
7	2,33	2,47	5,27
10	2,70	2,92	6,64
20 (*)	2,94 (*)	3,43 (*)	9,88 (*)
30	3,59	4,25	11,46

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

3.2.3 Reálna hodnota počiatočnej investície v čase

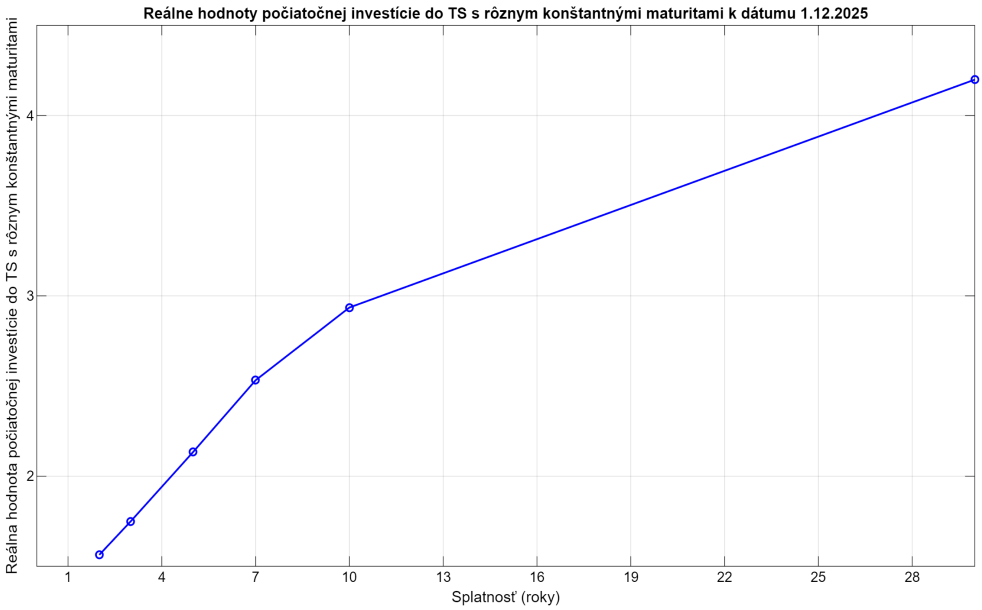
Podobne ako v podkapitole 3.1.4 sme vypočítali reálne hodnoty počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do amerických štátnych dlhopisov s jednotlivými konštantnými celoročnými maturitami.

Na záver 40 ročného obdobia od 1.1.1986 do 1.12.2025 by sme pri počiatočnej investícii 1 peňažnej jednotky do TS so skúmanými konštantnými maturitami mali nasporené reálne hodnoty zachytené na obrázku 13, pričom sme neuvažovali americké štátne dlhopisy s konštantnou splatnosťou 20 rokov, keďže k nim nám chýbali údaje za určité obdobie ako už sme spomínali v časti 3.2.2 (*).

3.3 TIPS

3.3.1 Výpočet reálnej hodnoty

Ako v sekcii 3.2.1 sme pomocou MATLAB funkcie bndprice [62] ocenili americké štátne dlhopisy chránené proti inflácii, teda par bondy s polročnou frekvenciou vyplácania kupónov, s konštantnými časmi do maturity 5 rokov, 7 rokov, 10 rokov, 20 rokov a 30 rokov, pričom sme ich oceňovali po ubehnutí mesiaca od ich emisie, keď sa zmenil príslušný



Obr. 13: Hodnota počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do amerických štátnych dlhopisov s jednotlivými konštantnými splatnosťami ku 1.12.2025, teda po 40 rokoch (zdroj: vlastné spracovanie dát)

výnos do splatnosti, ale ich kupón ostal rovnaký.

Využitím funkcie bndprice sme dostali $\mathrm{RCP}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}$, čiže reálnu čistú cenu amerického štátneho dlhopisu chráneného proti inflácii s konštantnou maturitou T rokov v mesiaci t a $\mathrm{AI}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}$, teda alikvotný úrok v mesiaci t, ktorý reprezentuje nevyplatenú časť úroku, ktorý sa nahromadí medzi dvoma výplatami kupónu TIPS s konštantnou splatnosťou T rokov. Sčítaním daných dvoch hodnôt sme dostali $\mathrm{RDP}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}$, čiže reálnu hrubú cenu amerického štátneho dlhopisu chráneného proti inflácii s konštantnou maturitou T rokov v mesiaci t:

$$\mathrm{RDP}_{\mathrm{TIPS}(T)_t} = \mathrm{RCP}_{\mathrm{TIPS}(T)_t} + \mathrm{AI}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}. \tag{16}$$

3.3.2 Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a volatilita

Vypočítali sme reálne mesačné logaritmické výnosy amerických štátnych dlhopisov chránených proti inflácii so skúmanými konštantnými maturitami podľa vzorca:

$$r^{\log}_{\mathrm{TIPS}(T)_t} = \log\left(\frac{\mathrm{RDP}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}}{100}\right), \tag{17}$$

kde $r^{\log}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}$ označuje logaritmický reálny mesačný výnos amerického štátneho dlhopisu chráneného proti inflácii s konštantnou splatnosťou T rokov v mesiaci t a $\mathrm{RDP}_{\mathrm{TIPS}(T)_t}$ vyjadruje reálnu hrubú cenu TIPS s konštantnou maturitou T rokov v mesiaci t, ktorá je vypočítaná podľa vzorca (16).

Využitím rovníc použitých v časti 3.1.2 a vzorca uvedeného v podkapitole 3.1.3 sme dostali hodnoty priemerného reálneho ročného logaritmického a aritmetického výnosu amerických štátnych dlhopisov chránených proti inflácii so skúmanými konštantnými maturitami a taktiež ročnej volatility ich logaritmických reálnych výnosov.

Vypočítané hodnoty sú zaznamenané v tabuľke 5, pričom dáta pre TIPS s konštantnými maturitami 5, 7 a 10 rokov sú pre obdobie od 1.1.2003 do 1.12.2025, ale pre konštantnú splatnosť 20 rokov od 1.7.2004 do 1.12.2025 (*), respektíve pre konštantnú maturitu 30 rokov od 1.2.2010 do 1.12.2025 (**).

Tabuľka 5: Priemerný reálny ročný logaritmický a aritmetický výnos a ročná volatilita reálneho logaritmického výnosu TIPS s vybranými konštantnými maturitami za obdobie od 1.1.2003/1.7.2004(*)/1.2.2010(**) do 1.12.2025

Maturita (roky)	Logaritmický výnos (%)	Aritmetický výnos (%)	Volatilita (%)
5	0,56	0,64	4,10
7	0,84	0,98	5,31
10	1,03	1,21	5,97
20 (*)	1,08 (*)	1,55 (*)	9,66 (*)
30 (**)	0,15 (**)	0,98 (**)	12,90 (**)

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

3.4 Akciový index S&P 500

3.4.1 Výpočet reálnej hodnoty

Vypočítali sme reálnu hodnotu akciového indexu S&P 500 $\mathrm{RV}_{\mathrm{S\&P}_t}$ v každom mesiaci t pomocou vzorca:

$$\mathrm{RV}_{\mathrm{S\&P}_t} = \frac{V_{\mathrm{S\&P}_t}}{\frac{\mathrm{CPI}_t}{\mathrm{CPI}_1}}, \tag{18}$$

v ktorom $V_{\mathrm{S\&P}_t}$ symbolizuje nominálnu hodnotu indexu S&P 500 v mesiaci t a CPI_t reprezentuje hodnotu indexu spotrebiteľských cien v mesiaci t.

3.4.2 Priemerný logaritmický a aritmetický reálny ročný výnos a volatilita

Najskôr sme získali logaritmické reálne mesačné výnosy akciového indexu S&P 500 ako:

$$r^{\log}_{\mathrm{S\&P}_t} = \log\left(\frac{\mathrm{RV}_{\mathrm{S\&P}_t}}{\mathrm{RV}_{\mathrm{S\&P}_{t-1}}}\right),$$

kde $r^{\log}_{\mathrm{S\&P}_t}$ vyjadruje logaritmický reálny mesačný výnos akciového indexu S&P 500 v mesiaci t a $\mathrm{RV}_{\mathrm{S\&P}_t}$ označuje reálnu hodnotu indexu S&P 500 v mesiaci t vypočítanú podľa rovnice (18).

Podobne ako v podkapitole 3.1.2 sme dostali priemerný logaritmický reálny ročný výnos akciového indexu S&P 500 za obdobie od začiatku roku 1986 do konca roku 2025, ktorý nám vyšiel 5,98 %.

Ďalej sme podobným postupom ako v časti 3.1.2 dosiahli ročnú volatilitu daného mesačného výnosu indexu S&P 500 pre obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025, pričom mala hodnotu 15,39 %.

Nakoniec sme pomocou vzorca z podkapitoly 3.1.3 vypočítali priemerný aritmetický reálny ročný výnos akciového indexu S&P 500 za obdobie od začiatku roku 1986 do konca roku 2025, ktorý bol 7,17 %.

3.4.3 Reálna hodnota počiatočnej investície v čase

Analogicky ako v časti 3.1.4 sme vypočítali reálnu konečnú hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do akciového indexu S&P 500, pričom nám vyšlo, že na konci 40 ročného obdobia sporenia od 1.1.1986 do 1.12.2025 by sme mali nasporených 10,89 peňažných jednotiek.

4 Reálny príjem z hodnoty finančného nástroja

4.1 N-faktorová Itôova lema

Podľa knihy [1], ak X je stochastický proces spĺňajúci:

$$dX_t = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t)\, dW_t^i + \mu_t\, dt$$

a f je deterministická, dvakrát spojito diferencovateľná funkcia, potom $Y_t := f(X_t)$ je tiež stochastický proces so stochastickým prírastkom:

$$dY_t = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i(t)\, f'(X_t)\right)\, dW_t^i + \left(\mu_t\, f'(X_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t)\, f''(X_t)\right) dt.$$

4.2 Stochastický model

Ako v článku [67] sme uvažovali n rozličných finančných nástrojov, menovite americké štátne dlhopisy s rozdielnymi konštantnými maturitami, inflačne indexované americké štátne dlhopisy s rozličnými konštantnými maturitami a akciový index S&P 500. Nech M_i symbolizuje reálnu, teda inflačne upravenú, hodnotu i-teho vyššie uvedeného finančného nástroja, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a S reprezentuje reálnu hodnotu dôchodkových dlhopisov SeLFIES s určitou konštantnou dobou konverzie. Predpokladali sme, že reálne hodnoty spomínaných aktív sa vyvíjajú podľa geometrických Brownových pohybov, teda platí:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\mu}\, dt + \boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{W_t}, \tag{19}$$

$$\frac{dS}{S} = \mu_S\, dt + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, d\mathbf{W_t}, \tag{20}$$

kde:

- $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, teda $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ označuje vektor driftov Itôovho procesu $\boldsymbol{M}$,
- $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{1*} \\ \sigma_{2*} \\ \vdots \\ \sigma_{n*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n+1} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,n+1} \end{pmatrix}$, čiže $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ predstavuje maticu volatilít Itôovho procesu $\boldsymbol{M}$,

- $\mathbf{W_t} = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ \vdots \\ W_t^{n+1} \end{pmatrix}$, takže $\mathbf{W_t} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times 1}$ vyjadruje vektor nekorelovaných Brownových pohybov,
- μ_S je drift Itôovho procesu S a
- $\boldsymbol{\sigma_{S*}} = \begin{pmatrix} \sigma_{S,1} & \sigma_{S,2} & \cdots & \sigma_{S,n+1} \end{pmatrix}$, teda $\boldsymbol{\sigma_{S*}} \in \mathbb{R}^{1\times(n+1)}$ značí vektor volatilít Itôovho procesu S.

Predpokladali sme regularitu kovariančnej matice logaritmických reálnych mesačných výnosov jednotlivých finančných nástrojov $\boldsymbol{\Sigma_M} = \boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}^\top$ a kovariančnej matice logaritmických reálnych mesačných výnosov finančných nástrojov a logaritmických reálnych mesačných výnosov SeLFIES:

$$\boldsymbol{\Sigma_{MS}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma_{S*}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma_{S*}} \end{pmatrix}^\top.$$

4.3 Odvodenie vzorcov

Pre i-ty finančný nástroj má stochastická diferenciálna rovnica (19) tvar:

$$\frac{dM_i}{M_i} = \mu_i\,dt + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,d\mathbf{W_t}, \tag{21}$$

kde μ_i reprezentuje i-ty prvok vektora driftov $\boldsymbol{\mu}$ Itôovho procesu $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{\sigma_{i*}}$ symbolizuje i-ty riadok matice volatilít $\boldsymbol{\sigma}$ Itôovho procesu $\boldsymbol{M}$.

Prenásobením oboch strán rovnice (21) výrazom M_i sme dostali stochastickú diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$dM_i = \mu_i\,M_i\,dt + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,M_i\,d\mathbf{W_t}. \tag{22}$$

Na rovnicu (22) sme aplikovali n-faktorovú Itôovu lemu popísanú v časti 4.1, pričom sme položili $Y_t = f(M_i) = \ln(M_i)$.

Pre funkciu $f(M_i) = \ln(M_i)$ platí, že:

$$f'(M_i) = (\ln(M_i))' = \frac{1}{M_i} \text{ a} \tag{23}$$

$$f''(M_i) = (f'(M_i))' = \left(\frac{1}{M_i}\right)' = -\frac{1}{M_i^2}. \tag{24}$$

Z Itôovej lemy sme dosadením výsledných derivácií (23) a (24) do stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dY_t = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i(t)\, f'(X_t)\right)\, dW_t^i + \left(\mu_t\, f'(X_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t)\, f''(X_t)\right) dt,$$

získali:

$$dY_t = \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, M_i\, \frac{1}{M_i}\, d\mathbf{W_t} + \left(\mu_i\, M_i\, \frac{1}{M_i} + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\, M_i^2\, \left(-\frac{1}{M_i^2}\right)\right) dt.$$

Po vykrátení členov M_i a M_i^2 sme dosiahli výraz:

$$dY_t = \left(\mu_i - \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) dt + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, d\mathbf{W_t}. \tag{25}$$

Integrovaním stochastickej diferenciálnej rovnice (25) na intervale $[0, t]$:

$$\int_0^t dY_s = \int_0^t \left(\mu_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{i*}}\boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) ds + \int_0^t \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, d\mathbf{W_s},$$

sme dostali výraz v tvare:

$$Y_t - Y_0 = \left(\mu_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \mathbf{W_t}. \tag{26}$$

Pripočítaním výrazu Y_0 k obom stranám rovnice (26) sme dosiahli:

$$Y_t = Y_0 + \left(\mu_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \mathbf{W_t}. \tag{27}$$

Keďže $Y_t = f(M_i) = \ln(M_i)$, tak po dosadení za výrazy Y_t, respektíve Y_0 v stochastickej rovnici (27) sme získali:

$$\ln(M_i) = \ln(M_{0_i}) + \left(\mu_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \mathbf{W_t}. \tag{28}$$

Exponenciáciou oboch strán rovnice (28) máme výsledný stochastický proces:

$$M_i = M_{0_i} \exp\left(\left(\mu_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \mathbf{W_t}\right). \tag{29}$$

Podobným postupom sme pre stochastickú diferenciálnu rovnicu (20) dostali stochastický proces:

$$S = S_0 \exp\left(\left(\mu_S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \mathbf{W_t}\right). \tag{30}$$

Zaviedli sme podľa článku [67] premennú $\widetilde{M_i}$, ktorá definuje pomer medzi reálnou, teda inflačne upravenou, súčasnou hodnotou i-teho finančného nástroja M_i a reálnou aktuálnou

hodnotou SeLFIES S, čiže vyjadruje, koľko kusov dôchodkových dlhopisov SeLFIES je možné zaobstarať za dané i-te aktívum, respektíve reálny dôchodkový príjem, ktorý si môže sporiteľ zakúpiť za súčasnú hodnotu i-teho finančného nástroja, takže:

$$\widetilde{M_i} = \frac{M_i}{S}. \tag{31}$$

Po dosadení stochastického procesu (29) za výraz M_i a procesu (30) za S v rovnici (31) sme získali výraz v tvare:

$$\widetilde{M_i} = \frac{M_{0_i} \exp\left(\left(\mu_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{i*}}\,\boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,\mathbf{W_t}\right)}{S_0 \exp\left(\left(\mu_S - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_{S*}}\,\boldsymbol{\sigma_{S*}^\top}\right) t + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\,\mathbf{W_t}\right)},$$

ktorý sme upravili na:

$$\widetilde{M_i} = \frac{M_{0_i}}{S_0} \exp\left[\left(\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\,\boldsymbol{\sigma_{S*}^\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,\boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right)\right) t + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}}\right)\mathbf{W_t}\right]. \tag{32}$$

Definovali sme Itôov proces v tvare:

$$X_t = \left(\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\,\boldsymbol{\sigma_{S*}^\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,\boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right)\right) t + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}}\right)\mathbf{W_t}, \tag{33}$$

teda platí:

$$dX_t = \left(\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\,\boldsymbol{\sigma_{S*}^\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,\boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right)\right) dt + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}}\right) d\mathbf{W_t}.$$

Využili sme n-faktorovú Itôovu lemu uvedenú v časti 4.1, pričom sme zvolili:

$$\widetilde{M_i} = f(X_t) = \frac{M_{0_i}}{S_0} e^{X_t}.$$

Pre funkciu $f(X_t) = \frac{M_{0_i}}{S_0} e^{X_t}$ platí, že:

$$f'(X_t) = \left(\frac{M_{0_i}}{S_0} e^{X_t}\right)' = \frac{M_{0_i}}{S_0} e^{X_t} \text{ a} \tag{34}$$

$$f''(X_t) = (f'(X_t))' = \left(\frac{M_{0_i}}{S_0} e^{X_t}\right)' = \frac{M_{0_i}}{S_0} e^{X_t}. \tag{35}$$

Z lemy sme dosadením derivácií (34) a (35) do stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$d\widetilde{M_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i(t)\, f'(X_t)\right)\, dW_t^i + \left(\mu_t\, f'(X_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t)\, f''(X_t)\right) dt,$$

dostali výraz:

$$d\widetilde{M_i} = \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}}\right) \frac{M_{0_i}}{S_0}\, e^{X_t}\, d\mathbf{W_t} + \left[\left(\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\,\boldsymbol{\sigma_{S*}^\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\,\boldsymbol{\sigma_{i*}^\top}\right)\right) \frac{M_{0_i}}{S_0}\, e^{X_t} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}}\right)\left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}}\right)^\top \frac{M_{0_i}}{S_0}\, e^{X_t}\right] dt,$$

ktorý sme upravili do tvaru:

$$d\widetilde{M}_i = \frac{M_{0_i}}{S_0}\, e^{X_t} \Bigg\{ \left[\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2} \left(\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right)^{\top} \right) \right] dt + \\ + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) d\mathbf{W_t} \Bigg\}. \tag{36}$$

Dosadením Itôovho procesu (33) za X_t do rovnice (36) sme získali výraz:

$$d\widetilde{M}_i = \frac{M_{0_i}}{S_0}\, \exp\left[\left(\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} \right) \right) t + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) \mathbf{W_t} \right] \cdot \\ \cdot \Bigg\{ \left[\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2} \left(\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right)^{\top} \right) \right] dt + \\ + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) d\mathbf{W_t} \Bigg\}. \tag{37}$$

Predelením stochastickej diferenciálnej rovnice (37) Itôovým procesom (32) sme dostali:

$$\frac{d\widetilde{M}_i}{\widetilde{M}_i} = \left[\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2} \left(\left(\boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right)^{\top} \right) \right] dt + \\ + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) d\mathbf{W_t}. \tag{38}$$

Roznásobením jednotlivých zátvoriek v rovnici (38) sme dosiahli:

$$\frac{d\widetilde{M}_i}{\widetilde{M}_i} = \Bigg[\mu_i - \mu_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} + \\ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} \Bigg] dt + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) d\mathbf{W_t}. \tag{39}$$

Odčítaním a sčítaním výrazov v stochastickej diferenciálnej rovnici (39) sme získali záverečný tvar:

$$\frac{d\widetilde{M}_i}{\widetilde{M}_i} = \left(\mu_i - \mu_S + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} \right) dt + \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) d\mathbf{W_t}.$$

Drift Itôovho procesu $\widetilde{M}_i$ označený $\widetilde{\mu}_i$ je daný vzťahom:

$$\widetilde{\mu}_i = \mu_i - \mu_S + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top}, \tag{40}$$

Ak označíme volatilitu Itôovho procesu $\widetilde{M}_i$ ako $\widetilde{\sigma}_i$, tak máme, že:

$$\widetilde{\sigma}_i^{\,2} = \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right)^{\top} = \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - 2 \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top},$$

teda:

$$\widetilde{\sigma}_i = \sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right) \left(\boldsymbol{\sigma_{i*}} - \boldsymbol{\sigma_{S*}} \right)^{\top}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{i*}}^{\top} + \boldsymbol{\sigma_{S*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top} - 2 \boldsymbol{\sigma_{i*}}\, \boldsymbol{\sigma_{S*}}^{\top}}. \tag{41}$$

4.4 Výpočet

Najprv sme pre vybrané celoročné konštantné doby konverzie dôchodkových dlhopisov SeLFIES vypočítali ročnú kovariančnú maticu logaritmických výnosov daného SeLFIES s logaritmickými výnosmi:

- amerických štátnych dlhopisov s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10, 20 (*) a 30 rokov za obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025, pričom pri 20 ročnej konštantnej splatnosti (*) označuje, že sme uvažovali len obdobie od 1.1.1986 do 1.12.1986 a taktiež od 1.10.1993 po 1.12.2025, keďže v období od 1.1.1987 do 1.9.1993 neboli uvádzané výnosy do splatnosti pre danú konštantnú maturitu TS,

- amerických štátnych dlhopisov chránených proti inflácii s konštantnými maturitami 5 (**), 7 (**), 10 (**), 20 (**) a 30 (**) rokov, kde (**) symbolizujú, že sme uvažovali mesačné logaritmické výnosy TIPS za obdobie, keď boli známe ich výnosy do splatnosti pre všetky konštantné splatnosti, teda od 1.2.2010 do 1.12.2025 a

- akciového indexu S&P 500 v období od 1.1.1986 do 1.12.2025,

Následne sme pomocou choleského rozkladu vypočítanej ročnej kovariančnej matice reálnych logaritmických výnosov daných aktív a SeLFIES $\boldsymbol{\Sigma_{MS}}$ získali $\boldsymbol{\sigma_{i*}}$, teda i-ty riadok matice volatilít $\boldsymbol{\sigma}$ Itôovho procesu $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{\sigma_{S*}}$, čiže vektor volatilít Itôovho procesu S.

Nakoniec sme pomocou vzorcov odvodených v časti 4.3 vypočítali drift stochastického procesu $\widetilde{M}_i$ pomocou rovnice (40) a volatilitu stochastického procesu $\widetilde{M}_i$, čiže $\widetilde{\sigma}_i$, vzorcom (41), pričom pri získaní hodnôt priemerného ročného reálneho aritmetického výnosu skúmaných finančných nástrojov k nim prislúchajúcim obdobiam, teda μ_i a μ_S, sme postupovali ako v častiach 3.1.3, 3.2.2 , 3.3.2, respektíve v podkapitole 3.4.2.

V tabuľke 6 je zaznamenaná ročná kovariančná matica reálnych logaritmických výnosov amerických štátnych dlhopisov s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10 a 30 rokov, akciového indexu S&P 500 a dôchodkového dlhopisu SeLFIES s konštantnou dobou konverzie 40 rokov.

V tabuľke 7 je vypísaný Choleského rozklad spomínanej ročnej kovariančnej matice zachytenej v tabuľke 6.

Tabuľka 6: Ročná kovariančná matica reálnych logaritmických výnosov amerických štátnych dlhopisov s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10 a 30 rokov, akciového indexu S&P 500 a dôchodkového dlhopisu SeLFIES s konštantnou dobou konverzie 40 rokov za obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025

Cov	TS 2	TS 3	TS 5	TS 7	TS 10	TS 30	S&P	SeLFIES40
TS 2	0,0004	0,0006	0,0008	0,0009	0,0011	0,0016	0,0001	0,0028
TS 3	0,0006	0,0008	0,0011	0,0014	0,0016	0,0024	0,0001	0,0043
TS 5	0,0008	0,0011	0,0017	0,0022	0,0026	0,0040	0,0001	0,0076
TS 7	0,0009	0,0014	0,0022	0,0028	0,0034	0,0054	0,0002	0,0109
TS 10	0,0011	0,0016	0,0026	0,0034	0,0044	0,0071	0,0003	0,0154
TS 30	0,0016	0,0024	0,0040	0,0054	0,0071	0,0131	0,0004	0,0321
S&P	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0237	0,0015
SeLFIES40	0,0028	0,0043	0,0076	0,0109	0,0154	0,0321	0,0015	0,1175

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

Tabuľka 7: Choleského rozklad ročnej kovariančnej matice reálnych logaritmických výnosov amerických štátnych dlhopisov s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10 a 30 rokov, akciového indexu S&P 500 a dôchodkového dlhopisu SeLFIES s konštantnou dobou konverzie 40 rokov za obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025

Chol	TS 2	TS 3	TS 5	TS 7	TS 10	TS 30	S&P	SeLFIES40
TS 2	0,0204	0	0	0	0	0	0	0
TS 3	0,0272	0,0057	0	0	0	0	0	0
TS 5	0,0379	0,0150	0,0075	0	0	0	0	0
TS 7	0,0454	0,0221	0,0135	0,0066	0	0	0	0
TS 10	0,0534	0,0295	0,0220	0,0108	0,0088	0	0	0
TS 30	0,0775	0,0461	0,0468	0,0336	0,0283	0,0295	0	0
S&P	0,0034	-0,0022	0,0049	-0,0010	0,0078	-0,0065	0,1535	0
SeLFIES40	0,1370	0,1005	0,1190	0,1348	0,1152	0,1177	0,0045	0,1707

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

4.5 Výsledky

V tabuľke 8 môžeme pozorovať drift $\widetilde{\mu}_i$ stochastického procesu $\widetilde{M}_i$ vypočítaný pomocou vzorca (40) a volatilitu $\widetilde{\sigma}_i$ stochastického procesu $\widetilde{M}_i$ získanú rovnicou (41) pre americké štátne dlhopisy s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10, 20 (*) a 30 rokov, americké štátne dlhopisy chránené proti inflácii s konštantnými splatnosťami 5, 7, 10, 20 a 30 rokov (**) a akciový index S&P 500 pre konštantné doby konverzie dôchodkových dlhopisov SeLFIES v dĺžke 10, 20, 30 a 40 rokov.

Hodnoty v tabuľke sú vypočítané pre obdobia spomínané v predchádzajúcej podkapitole 4.4, teda primárne od začiatku roku 1986 po koniec roku 2025 s výnimkami (*) pre TS s konštantnou splatnosťou 20 rokov a (**) pre TIPS.

Tabuľka 8: Drift $\widetilde{\mu}_i$ (%) a volatilita $\widetilde{\sigma}_i$ (%) Itôovho procesu $\widetilde{M}_i$ pre jednotlivé finančné nástroje a vybrané konštantné doby konverzie dôchodkových dlhopisov SeLFIES za obdobia z časti 4.4

	Konštantná doba konverzie SeLFIES							
	10		20		30		40	
Aktívum / Hodnota	$\widetilde{\mu}_i$	$\widetilde{\sigma}_i$	$\widetilde{\mu}_i$	$\widetilde{\sigma}_i$	$\widetilde{\mu}_i$	$\widetilde{\sigma}_i$	$\widetilde{\mu}_i$	$\widetilde{\sigma}_i$
TS 2	-2,69	10,91	-2,55	17,95	-1,79	25,59	-0,36	33,51
TS 3	-2,46	10,44	-2,35	17,52	-1,61	25,17	-0,21	33,12
TS 5	-2,06	9,49	-2,01	16,60	-1,34	24,29	0,00	32,25
TS 7	-1,71	8,59	-1,73	15,68	-1,12	23,38	0,15	31,37
TS 10	-1,43	7,54	-1,53	14,50	-1,02	22,20	0,16	30,19
TS 20 (*)	-0,73	5,50	-1,11	11,25	-0,94	18,55	-0,15	26,26
TS 30	-0,65	5,66	-1,13	10,59	-0,99	17,89	-0,18	25,77
S&P 500	3,40	19,10	3,56	23,90	4,34	30,14	5,79	37,17
TIPS 5 (**)	-1,19	10,11	-0,20	16,12	1,32	22,50	3,32	29,13
TIPS 7 (**)	-1,08	9,28	-0,14	15,26	1,32	21,64	3,27	28,28
TIPS 10 (**)	-0,97	8,43	-0,10	14,25	1,29	20,61	3,17	27,25
TIPS 20 (**)	-0,88	7,50	-0,23	12,00	0,94	17,96	2,61	24,44
TIPS 30 (**)	-1,04	7,90	-0,57	10,78	0,44	16,15	1,94	22,40

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

Môžeme pozorovať klesajúci trend vo volatilite $\widetilde{M}_i$, teda reálneho príjmu za hodnotu finančného nástroja, pre rastúce konštantné maturity amerických štátnych dlhopisov, ktorý je vo väčšine prípadov súčasne doprevádzaný rastom driftu $\widetilde{M}_i$. Keďže podľa vzorca (41) kladná kovariancia znižuje hodnoty $\widetilde{\sigma}_i$, tak daný trend je spôsobený postupne sa zvyšujúcou kovarianciou medzi výnosmi jednotlivých TS a SeLFIES s nárastom konštantnej maturity amerických štátnych dlhopisov, čo je možné pozorovať aj v kovariančnej matici zachytenej v tabuľke 6. Zvyšujúca sa kovariancia s narastajúcou maturitou amerických štátnych dlhopisov je spôsobená tým, že sa TS s rastúcou konštantnou maturitou čoraz viac približujú obdobiu, v ktorom SeLFIES vyplácajú platby. Zvyšujúcu sa pozitívnu závislosť medzi výnosmi amerických štátnych dlhopisov s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10 a 30 rokov a dôchodkovým dlhopisom SeLFIES s dobou konverzie 40 rokov možno pozorovať aj v korelačnej matici vypísanej v tabuľke 9. Z tabuľky 8 teda vidíme, že TS s nízkou duráciou, ktoré sú pri dôchodkovom sporení považované za bezpečné aktívum, predstavujú z hľadiska reálneho budúceho príjmu rizikovejší finančný nástroj ako americké štátne dlhopisy s vyššími duráciami.

V tabuľke 8 sledujeme, že najvyššie hodnoty driftu $\widetilde{\mu}_i$ dosahoval akciový index S&P 500, ale sú spojené prirodzene aj s najvyššími hodnotami volatility $\widetilde{\sigma}_i$.

Tabuľka 9: Korelačná matica logaritmických výnosov amerických štátnych dlhopisov s konštantnými maturitami 2, 3, 5, 7, 10 a 30 rokov, akciového indexu S&P 500 a dôchodkového dlhopisu SeLFIES s konštantnou dobou konverzie 40 rokov za obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025

Corr	TS 2	TS 3	TS 5	TS 7	TS 10	TS 30	S&P	SeLFIES40
TS 2	1,0000	0,9791	0,9145	0,8618	0,8049	0,6765	0,0220	0,3997
TS 3	0,9791	1,0000	0,9690	0,9292	0,8786	0,7443	0,0186	0,4510
TS 5	0,9145	0,9690	1,0000	0,9863	0,9572	0,8384	0,0206	0,5345
TS 7	0,8618	0,9292	0,9863	1,0000	0,9857	0,8933	0,0202	0,6057
TS 10	0,8049	0,8786	0,9572	0,9857	1,0000	0,9397	0,0274	0,6759
TS 30	0,6765	0,7443	0,8384	0,8933	0,9397	1,0000	0,0218	0,8171
S&P	0,0220	0,0186	0,0206	0,0202	0,0274	0,0218	1,0000	0,0286
SeLFIES40	0,3997	0,4510	0,5345	0,6057	0,6759	0,8171	0,0286	1,0000

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

5 Dôchodkové investičné stratégie

V súčasnosti sledujeme, že dávkovo definované dôchodkové systémy (Defined Benefit - DB) čelia problémom s udržateľnosťou v dôsledku nepriaznivého demografického vývoja, čo môže viesť k presunu rizika dosiahnutia požadovaného dôchodkového príjmu na sporiteľov. Podľa publikácie [70] však s týmto presunom dochádza aj k zmene v zmýšľaní pri dôchodkovom investovaní od dôchodkového príjmu k výnosnosti sporiteľových investícií. DB dôchodkové schémy sú spravované s cieľom poskytovať ich účastníkom garantovaný príjem, teda ich členovia vnímajú dôchodkové sporenie v zmysle príjmu. Avšak príspevkovo definované dôchodkové systémy (Defined Contribution - DC) sú riadené ako klasické investičné portfóliá, ktorých cieľom je zabezpečenie čo najväčšieho objemu prostriedkov, pričom komunikácia s účastníkmi je vedená v kontexte finančných nástrojov a ich dosiahnutých výnosov. Sporiteľa by však malo podľa autora [70] najviac zaujímať, aký dôchodkový príjem získa po konverzii jeho úspor.

Merton v článku [70] upozorňuje, že problém spočíva v tom, že ukazovatele, ktoré v súčasnosti riadia dôchodkové investovanie, akými sú celkový objem sporiteľových financií, dosahované výnosy a ich miera volatility, nie sú najvhodnejšie v prípade, keď je cieľom dosiahnutie stanoveného budúceho garantovaného dôchodkového príjmu. Prezentuje to na príklade 45-ročného dôchodkového sporiteľa, ktorý si želá garantovať stanovený dôchodkový príjem od veku 65 rokov. Relatívne bezpečným finančným nástrojom, ktorý by mu mohol zabezpečiť splnenie daného cieľa, sú dôchodkové dlhopisy SeLFIES, teda, ak by mal spomínaný investor dostatok nasporených prostriedkov a chcel by si zaobstarať daný dôchodkový príjem, tak by rozumnou voľbou bol nákup množstva SeLFIES zodpovedajúceho požadovanému príjmu. Z hľadiska vyššie spomínaných investičných ukazovateľov by však dlhopisy SeLFIES pôsobili ako veľmi riziková investícia, keďže ich súčasná trhová hodnota ako dlhopisov s dlhou duráciou výrazne kolíše vplyvom zmien úrokových sadzieb. Naproti tomu samotný garantovaný reálny dôchodkový príjem, ktorý budú SeLFIES v budúcnosti poskytovať, sa v čase nemení. Čiže sporiteľove zdroje by neboli alokované do aktív, ktoré sú považované za najbezpečnejšie z hľadiska garancie dôchodkového príjmu, naopak, boli by investované do finančných nástrojov, ktoré sú z pohľadu zabezpečenia dôchodkového príjmu rizikové, akými sú americké štátne dlhopisy s nízkou duráciou, ktoré sú využívané ako relatívne bezrizikové aktíva. Týmto časopisecká práca [70] poukazuje na

to, že existuje nesúlad medzi tým, čo sa považuje za rizikové a čo za relatívne bezrizikové, ak sú finančné nástroje v dôchodkovom sporení posudzované na základe ukazovateľov, akými sú výnos a jeho volatilita na jednej strane, respektíve na druhej strane na základe garantovaného dôchodkového príjmu.

Súčasné dôchodkové investičné stratégie v príspevkovo definovaných dôchodkových schémach presúvajú investorove prostriedky z akciových, respektíve indexových fondov, do dlhopisových na základe veku sporiteľa. Stratégie s preddefinovanou alokáciou úspor sporiteľov podľa ich veku nedokážu, podľa autorov časopiseckej práce [58], garantovať dosiahnutie cieleného dôchodkového reálneho príjmu z dvoch dôvodov:

- Súčasne využívané finančné nástroje, akými sú napríklad štátne dlhopisy s nízkou durráciou, nepredstavujú relatívne bezpečné aktívum z hľadiska garantovaného reálneho dôchodkového príjmu.

- Sporivé stratégie sú vo veľkej miere nezávislé od naplnenia cieľa dosiahnutia stanoveného dôchodkového príjmu.

Dané dôchodkové sporivé stratégie nemusia vo výsledku zabezpečiť okrem reálneho dôchodkového príjmu ani dôchodkové bohatstvo, keďže pozitívne výnosy nie sú vôbec garantované. Preto vhodnejšou voľbou sú dôchodkové investičné stratégie, ktoré sú robustnejšie voči možným zmenám na finančnom trhu, a súčasne sú previazané s cieľovým reálnym dôchodkovým príjmom sporiteľa.

Riešenie prvej komplikácie sme už popísali v kapitole 1, pričom publikácia [58] sa zameriava na druhý problém dôchodkových sporivých stratégií spočívajúci v ich nezávislosti od dosiahnutia cieleného príjmu na dôchodku. Cieľom jej autorov bolo vytvorenie jednoduchej dôchodkovej investičnej stratégie zameranej na získanie požadovaného dôchodkového príjmu.

5.1 Príjmovo orientované dynamické investičné stratégie

Autor publikácie [70] uvádza, že základným cieľom dôchodkovej investičnej stratégie by malo byť zvýšenie pravdepodobnosti dosiahnutia požadovaného dôchodkového príjmu a nie maximalizácia celkovej hodnoty sporiteľových prostriedkov. Merton tvrdí, že dôchodková sporivá stratégia by mala alokovať sporiteľove prostriedky do rizikových aktív, teda

napríklad indexov, a relatívne bezpečných finančných nástrojov, pričom pomer medzi spomínanými aktívami sa má meniť tak, aby sa maximalizovala pravdepodobnosť dosiahnutia cieľového dôchodkového príjmu.

Teda oproti klasickým dôchodkovým stratégiám nie je zmena rozloženia sporiteľovho majetku medzi bezrizikovým a rizikovým portfóliom v dynamickej investičnej stratégii mechanicky založená na investorovom veku. Podľa publikácie [58] by riziko malo byť považované za nástroj na dosiahnutie požadovaného dôchodkového príjmu. Pokiaľ by bol dosiahnuteľný len pomocou alokácie prostriedkov do SeLFIES, tak by bol celý majetok sporiteľa investovaný do nich, čím by sa minimalizovala pravdepodobnosť nenaplnenia dôchodkového príjmového cieľa sporiteľa. Naopak, čím by bol sporiteľ vzdialenejší od dosiahnutia svojho očakávaného dôchodkového príjmu, tým by mal vyšší podiel prostriedkov investovaných v rizikovom aktíve, ktoré je spojené s vyššou kolísavosťou výnosov, ale zároveň aj väčším výnosom, ktorý by mohol pomôcť zabezpečiť zaobstaranie požadovaného dôchodkového príjmu.

Pri zavádzaní dynamických príjmovo orientovaných stratégií existujú podľa časopiseckej práce [58] dve základné otázky:

1. Ako nastaviť priebežné ciele, ktoré zabezpečia, že sporiteľ bude na správnej ceste k dosiahnutiu jeho cieleného dôchodkového príjmu?

2. Aký finančný nástroj zvoliť ako relatívne bezrizikové aktívum vzhľadom ku zabezpečeniu dôchodkového príjmu?

Odpoveďou na prvú otázku by podľa autorov mohol byť Actual Funded Status (AFS), teda v preklade aktuálny stav financovania, na výpočet ktorého potrebujeme dva údaje:

1. Aktuálnu hodnotu celkových sporiteľových prostriedkov.

2. Súčasnú hodnotu budúcich peňažných tokov vyplatených dôchodkovou investičnou stratégiou po odchode sporiteľa do dôchodku.

Aktuálny stav financovania dôchodkového príjmu sa následne v každom čase vypočíta ako pomer aktuálnej hodnoty sporiteľových úspor k súčasnej hodnote záväzkov dôchodkovej sporivej stratégie.

Hodnota AFS sa bude vyvíjať nielen v dôsledku skracovania času odchodu do dôchodku, ale aj vplyvom poklesu alebo rastu cien akcií a zmien hodnôt úrokovej miery.

Je zjavné, že hodnota aktuálneho stavu financovania dôchodkového príjmu sporiteľa bude v počiatočných fázach sporenia na nízkych úrovniach, keďže hodnota majetku investora bude relatívne malá voči celkovej hodnote budúcich záväzkov dôchodkovej sporivej stratégie.

AFS na úrovni 100% a viac naznačuje, že celková nasporená suma je postačujúca na dosiahnutie cieleného dôchodkového príjmu, naopak aktuálny stav financovania pod 1 poukazuje na to, že sporiteľ ešte nemá dostatočný objem prostriedkov na zabezpečenie stanoveného dôchodkového príjmu.

Riešením druhej otázky by mohli byť už viackrát spomínané dlhopisy SeLFIES.

5.2 GLIDeS

Autori publikácie [58] predstavujú jednoduchú dôchodkovú investičnú stratégiu označovanú ako GLIDeS (Goal-based, Lifetime Income-focused Dynamic Strategy), teda v preklade dynamickú stratégiu zameranú na cieľ dôchodkového príjmu, ktorá rozdeľuje sporiteľove financie medzi rizikové a relatívne bezrizikové finančné nástroje na základe aktuálneho stavu financovania požadovaného reálneho dôchodkového príjmu.

Článok [58] popisuje, že GLIDeS alokujú prostriedky dôchodkového sporiteľa medzi dve aktíva:

1. Relatívne bezpečné dôchodkové dlhopisy SeLFIES s dátumom konverzie určeným termínom odchodu sporiteľa do dôchodku.

2. Rizikový finančný nástroj simulovaný akciovým indexom S&P 500.

Podiel zdrojov sporiteľa v daných finančných nástrojoch sa bude v čase meniť s vývojom aktuálnej hodnoty financovania požadovaného reálneho dôchodkového príjmu. Na počiatku sporenia, keď bude hodnota AFS relatívne malá, budú GLIDeS investovať väčšinu majetku sporiteľa do indexu S&P 500. S rastom hodnoty aktuálneho stavu financovania reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa bude jeho podiel v akciovom indexe S&P 500 klesať v prospech alokácie do SeLFIES. Pokiaľ bude mať sporiteľ dostatok úspor na zabezpečenie cieľového reálneho príjmu, tak AFS bude nad úrovňou 100 %, čo zapríčiní, že veľká časť alebo všetky jeho prostriedky budú investované do dlhopisov SeLFIES.

5.2.1 Lineárny prístup

Autori článku [58] poznamenali, že existuje viacero spôsobov definície dynamickej dôchodkovej sporivej stratégie ako funkcie aktuálneho stavu financovania reálneho dôchodkového príjmu. Jednoduchým prístupom môže byť lineárne pravidlo, v ktorom je podiel sporiteľových prostriedkov investovaných do akciového indexu S&P 500, stanovený podľa [58] ako:

$$w_{\mathrm{S\&P}_t} = \begin{cases} \max\left(1 - k \cdot \mathrm{AFS}_t,\, 0\right), & \text{ak } \mathrm{AFS}_t < 1, \\ 0, & \text{ak } \mathrm{AFS}_t \geq 1, \end{cases} \tag{42}$$

v ktorom $\mathrm{w}_{\mathrm{S\&P}_t}$ označuje pomer z celkovej hodnoty zdrojov sporiteľa investovaný do indexu S&P 500 v čase t a k reprezentuje averziu dôchodkového sporiteľa k riziku. Nízka hodnota parametra k značí vyššiu toleranciu investora voči riziku a opačne vyššia hodnota rizikovej averzie k prislúcha ku konzervatívnejšiemu investorovi. AFS_t vo vzorci (42) vyjadruje hodnotu aktuálneho stavu financovania cieleného reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa v čase t, ktorá sa vypočíta pomocou rovnice:

$$\mathrm{AFS}_t = \frac{\mathrm{RI}_{\mathrm{SeLFIES}_t} + \mathrm{RI}_{\mathrm{S\&P}_t}}{\mathrm{TRRI}_t}, \tag{43}$$

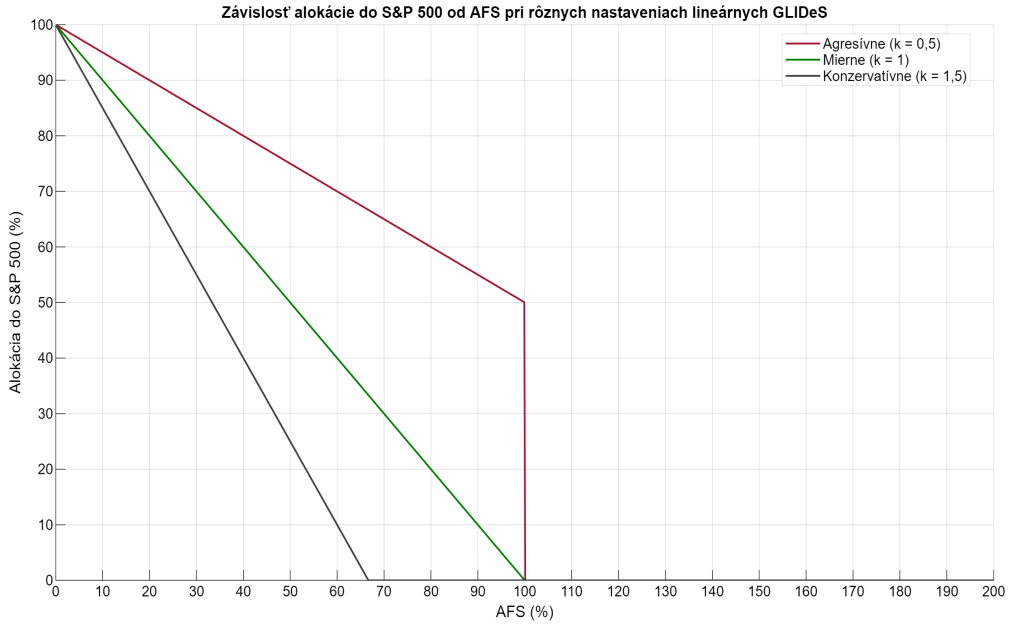
kde $\mathrm{RI}_{\mathrm{SeLFIES}_t}$ symbolizuje mesačný reálny dôchodkový príjem vyplývajúci z dôchodkových dlhopisov SeLFIES vlastnených v čase t, $\mathrm{RI}_{\mathrm{S\&P}_t}$ označuje výšku reálneho mesačného dôchodkového príjmu získaného zo SeLFIES, ktorý by bolo možné zakúpiť za celkový obnos sporiteľových financií investovaných do akciového indexu S&P 500 v čase t a TRRI_t reprezentuje cieľovú hodnotu mesačného reálneho príjmu investora na dôchodku v čase t. Autori publikácie [58] upozorňujú, že vyjadrenie aktuálneho stavu financovania vzorcom (43) sa líši od štandardnej definície AFS, ktorá je popísaná v časti 5.1, keďže funguje na princípe reálneho dôchodkového príjmu a nie na základe súčasnej trhovej hodnoty sporiteľových aktív a záväzku dôchodkovej sporivej stratégie.

Pomer zdrojov dôchodkového sporiteľa alokovaných do SeLFIES je daný ako:

$$\mathrm{w}_{\mathrm{SeLFIES}_t} = 1 - \mathrm{w}_{\mathrm{S\&P}_t}, \tag{44}$$

kde $\mathrm{w}_{\mathrm{SeLFIES}_t}$ symbolizuje podiel z celkovej hodnoty prostriedkov sporiteľa investovaný do dôchodkových dlhopisov SeLFIES v čase t a $\mathrm{w}_{\mathrm{S\&P}_t}$ vyjadruje časť sporiteľových zdrojov alokovanú do akciového indexu S&P 500 v čase t, ktorá sa vypočíta podľa rovnice (42).

Článok [58] upozorňuje, že možným problémom lineárnych GLIDeS je podmienenie investície do akciového indexu S&P 500 tým, že aktuálny stav financovania cieleného reálneho dôchodkového príjmu musí byť nižší než 1, čo by mohlo viesť k prudkým a rizikovým rebalansovaniam sporiteľovej alokácie prostriedkov v okolí hodnoty AFS = 100%. To potvrdzuje aj obrázok 14, ktorý vyjadruje percentuálny pomer úspor dôchodkového sporiteľa alokovaný do akciového indexu S&P 500 vzhľadom na aktuálny stav financovania jeho požadovaného dôchodkového reálneho príjmu pre nami zvolené nastavenia lineárnych GLIDeS, teda $k = 0,5$ pre agresívne, $k = 1$ pre mierne a $k = 1,5$ pre konzervatívne lineárne GLIDeS.



Obr. 14: Vzťah medzi percentuálnym zastúpením celkových prostriedkov sporiteľa v akciovom indexe S&P 500 a aktuálnym stavom financovania jeho cieľového dôchodkového reálneho príjmu pri použití stanovených nastavení stratégie lineárne GLIDeS (zdroj: vlastné spracovanie dát)

5.2.2 Spojitý prístup

Na prekonanie problému popísaného na konci časti 5.2.1 využili autori časopiseckej práce [58] logistickú funkciu, ktorá umožňuje spojitejší vývoj alokácie investorových celkových nasporených prostriedkov. V prípade spojitých GLIDeS je podiel sporiteľových financií

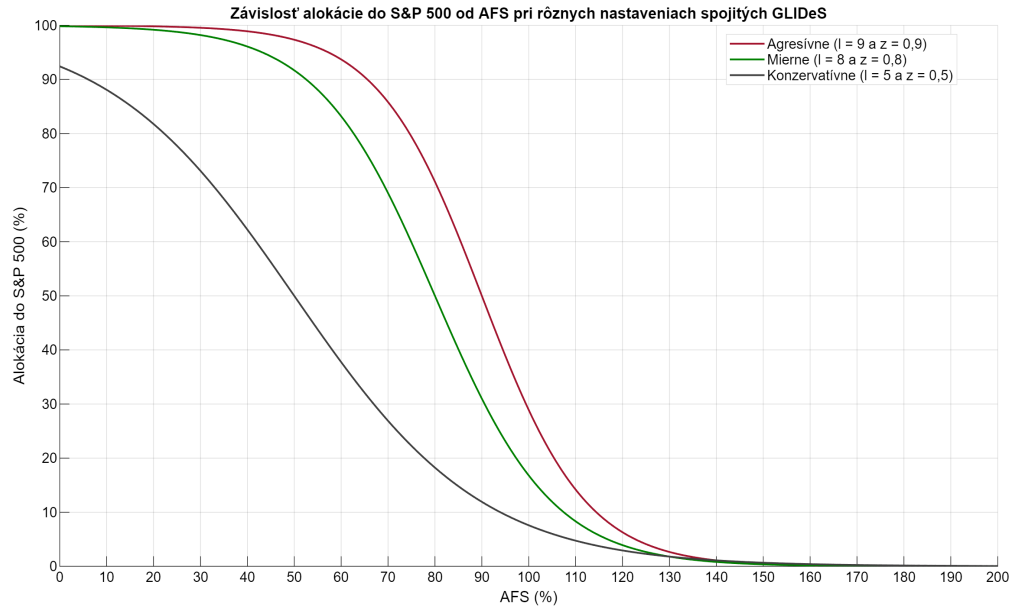
investovaných do akciového indexu S&P 500 definovaný vzťahom z [58]:

$$w_{S\&P_t} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-l(AFS_t - z)}}, \tag{45}$$

v ktorom $w_{S\&P_t}$ označuje časť zdrojov investora alokovanú do indexu S&P 500 v čase t, AFS_t reprezentuje hodnotu aktuálneho stavu financovania dôchodkového cieľa investora v čase t vypočítanú rovnicou (43), l je parameter určujúci strmosť logistickej krivky a z označuje polohu jej inflexného bodu, teda kde sa mení jej zakrivenie.

Parametre l a z sú kľúčové pre tvar logistickej funkcie a vyjadrujú jej citlivosť na hodnotu AFS. Ich voľba závisí od vzťahu investora k riziku, čiže na jeho miere averzie voči riziku. Autori publikácie [58] uvažovali tri varianty spojitých GLIDeS, ktoré sa líšili nastavením parametrov l a z, konkrétne agresívne spojité GLIDeS s hodnotami parametrov $l = 9$ a $z = 0,9$, mierne s $l = 8$ a $z = 0,8$ a konzervatívne s hodnotami $l = 5$ a $z = 0,5$.

Na obrázku 15 je znázornený vzťah medzi percentuálnym podielom majetku investovaného do akciového indexu S&P 500 a aktuálnym stavom financovania cieľového dôchodkového reálneho príjmu pri použití rôznych popísaných nastavení spojitých GLIDeS.



Obr. 15: Závislosť percentuálneho pomeru financií sporiteľa alokovaných do akciového indexu S&P 500 od aktuálneho stavu financovania jeho stanoveného dôchodkového reálneho príjmu pri použití daných nastavení stratégie spojité GLIDeS (zdroj: vlastné spracovanie dát podľa [58])

Časť majetku alokovaná do SeLFIES sa vypočíta pomocou rovnice (44).

5.2.3 AFS-TFS prístup

Autori časopiseckej práce [58] uvádzajú, že na vyhodnotenie, či sa v určitom čase nachádza sporiteľ na správnej ceste k požadovanému reálnemu dôchodkovému príjmu, aj keď je jeho aktuálny stav financovania pod úrovňou 100 %, pomáha Target Funded Status (TFS), teda v preklade cieľový stav financovania. TFS umožňuje porovnanie aktuálneho stavu financovania požadovaného reálneho dôchodkového príjmu s jeho očakávanou hodnotou kedykoľvek v čase. Na základe daného porovnania môžeme následne vykonať zmenu alokácie prostriedkov do jednotlivých finančných nástrojov. Ak by nastala situácia, že hodnota TFS je vyššia ako AFS, tak by sa mohlo pristúpiť k zvýšeniu podielu v relatívne bezrizikovom aktívu, teda v dôchodkových dlhopisoch SeLFIES a v opačnom prípade, keď je aktuálny stav financovania dôchodkového reálneho príjmu nižší ako očakávaný, tak by bolo vhodné zvážiť zvýšenie investičného rizika.

Článok [58] spomína, že neexistuje univerzálna zhoda ohľadom toho, ako by mala byť nastavená hodnota TFS v čase. Publikácia [58] prezentuje Modiglianiho jednoduchý spôsob výpočtu požadovaného stavu financovania cieleného dôchodkového reálneho príjmu ako podielu poradového čísla roku sporenia, v ktorom sa TFS počíta, a očakávanej dĺžky sporenia v rokoch. Pre našu stratégiu sme daný spôsob výpočtu mierne upravili do tvaru:

$$TFS_t = \frac{t}{T}, \tag{46}$$

kde TFS_t symbolizuje cieľový stav financovania stanoveného reálneho dôchodkového príjmu v mesiaci sporenia t a T reprezentuje celkovú očakávanú dĺžku doby sporenia v mesiacoch.

Aktuálny stav financovania cieľového reálneho dôchodkového príjmu AFS_t sa bude od požadovaného TFS_t v priebehu sporenia odlišovať, a preto by bolo podľa autorov článku [58] vhodné, aby bola alokačná funkcia dynamickej príjmovo orientovanej dôchodkovej investičnej stratégie nastavená tak, aby mohla sporiteľa v každej možnej situácii nasmerovať na cestu k dosiahnutiu cieleného reálneho dôchodkového príjmu. Z daného dôvodu sme vymysleli dôchodkovú sporivú stratégiu založenú na rozdieli medzi hodnotami AFS_t a TFS_t, ktorú sme pomenovali AFS-TFS GLIDeS. Pri definovaní alokačnej funkcie, ktorá určuje, aký podiel z celkových sporiteľových úspor bude investovaný do akciového indexu S&P 500, sme sa inšpirovali predpisom (45) pre spojité GLIDeS z publikácie [58], v ktorom

sme zamenili parameter z za hodnotu TFS_t. Teda pre našu dôchodkovú sporivú stratégiu AFS-TFS GLIDeS má spomínaná funkcia tvar:

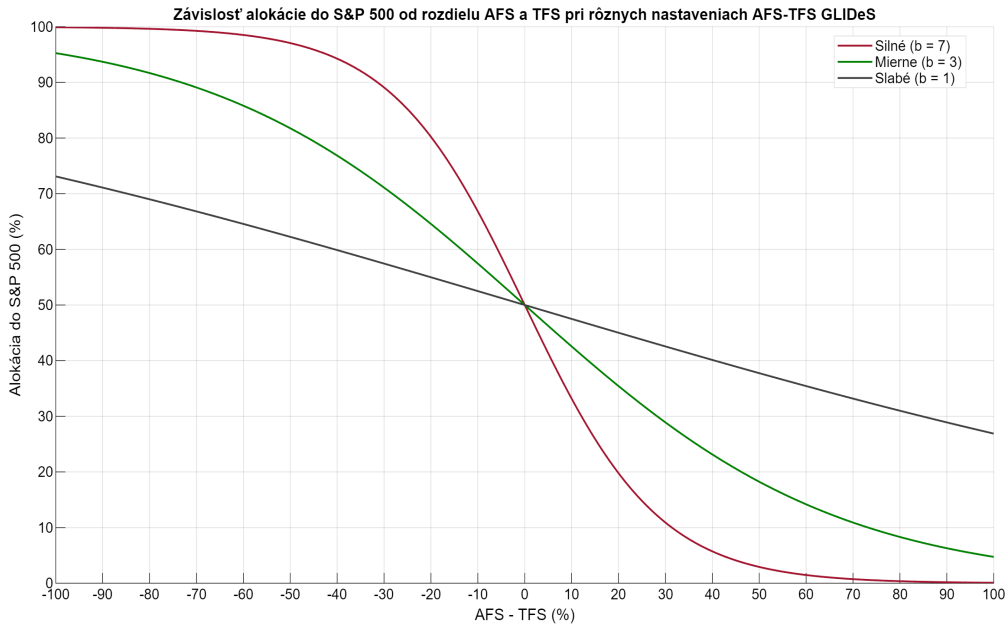
$$\mathrm{w}_{\mathrm{S\&P}_t} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-b(\mathrm{AFS}_t - \mathrm{TFS}_t)}}, \tag{47}$$

v ktorom $\mathrm{w}_{\mathrm{S\&P}_t}$ značí pomer prostriedkov sporiteľa investovaných do indexu S&P 500 v mesiaci sporenia t, AFS_t symbolizuje aktuálny stav financovania požadovaného reálneho dôchodkového príjmu v mesiaci t získaný vzťahom (43) a TFS_t reprezentuje cieľový stav financovania stanoveného dôchodkového reálneho príjmu v mesiaci sporenia t vypočítaný podľa vzorca (46). Parameter b udáva strmosť logistickej krivky, teda ide o parameter citlivosti na rozdiel medzi AFS a TFS, čiže definuje ako silno stratégia reaguje na daný rozdiel.

Podiel sporiteľových zdrojov alokovaných do dôchodkových dlhopisov SeLFIES sa aj pre AFS-TFS GLIDeS vypočíta rovnakým spôsobom ako pre lineárny a spojitý prístup, teda pomocou rovnice (44).

Pre potreby našej analýzy sme zvolili AFS-TFS GLIDeS s hodnotami parametra $b = 7$ pre silnú reakciu na rozdiel medzi aktuálnym a cieľovým stavom financovania požadovaného reálneho dôchodkového príjmu, $b = 3$ pre miernu reakciu na spomínaný rozdiel a hodnotu parametra $b = 1$ pre slabú. Treba brať do úvahy, že sila reakcie na daný rozdiel je rovnaká v prípade, že AFS je vyššie ako TFS, kedy sa znižuje podiel v akciovom indexe S&P 500 a aj v opačnej situácii, keď aktuálny stav financovania požadovaného dôchodkového príjmu je nižší ako cieľový, ktorá je spojená s nárastom alokácie do indexu S&P 500. Ak sa hodnoty AFS a TFS zhodujú, tak dôchodková sporivá stratégia AFS-TFS GLIDeS investuje 50 % financií sporiteľa do akciového indexu S&P 500 a rovnakú časť do dôchodkových dlhopisov SeLFIES.

Závislosť percentuálnej alokácie sporiteľových zdrojov do akciového indexu S&P 500 od rozdielu medzi aktuálnym stavom financovania stanoveného reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa (AFS) a cieľového stavu financovania daného príjmu (TFS) pre jednotlivé vyššie popísané nastavenia dôchodkovej investičnej stratégie AFS-TFS GLIDeS je zachytená na obrázku 16.



Obr. 16: Závislosť percentuálneho podielu investovaných sporiteľových úspor do akciového indexu S&P 500 od rozdielu medzi aktuálnym (AFS) a cieľovým stavom financovania (TFS) jeho požadovaného dôchodkového reálneho príjmu pri využití daných nastavení sporivej stratégie AFS-TFS GLIDeS (zdroj: vlastné spracovanie dát)

5.2.4 Fungovanie

V prvom mesiaci sporenia sú v prípade lineárnych a spojitých GLIDeS všetky zdroje dôchodkového sporiteľa investované do akciového indexu S&P 500, keďže hodnota aktuálneho stavu financovania cieleného reálneho dôchodkového príjmu je v danom mesiaci nulová. Pre AFS-TFS GLIDeS je alokácia do indexu S&P 500 v prvom mesiaci sporenia na úrovni 50 % z celkovej hodnoty majetku sporiteľa, keďže rozdiel medzi AFS a TFS je nulový.

V nasledujúcich mesiacoch sa alokácia investorových prostriedkov medzi dôchodkové dlhopisy SeLFIES a akciový index S&P 500 určí pomocou postupu z článku [58]:

1. Vypočíta sa hodnota aktuálneho stavu financovania požadovaného dôchodkového reálneho príjmu, teda AFS_t v danom mesiaci podľa vzorca (43) a v prípade AFS-TFS GLIDeS aj hodnota cieľového stavu financovania daného príjmu, čiže TFS_t v danom mesiaci sporenia pomocou rovnice (46).

2. Na základe zvolených nastavení jednotlivých typov GLIDeS, teda pri daných hod-

notách parametra k v lineárnom prístupe, parametrov l a z v spojitom prípade, respektíve parametra b v AFS-TFS verzii sa vypočíta alokácia zdrojov sporiteľa do indexu S&P 500 podľa rovnice (42) v lineárnom, (45) v spojitom a pomocou (47) v AFS-TFS prístupe, pričom zvyšok jeho úspor sa investuje do dôchodkových dlhopisov SeLFIES ako je ukázané vo vzorci (44).

3. Vzhľadom na rozdiel medzi aktuálnym a vypočítaným pomerom financií alokovaných do akciového indexu S&P 500, respektíve SeLFIES, sa buď určí aká časť nových príspevkov má byť alokovaná do jednotlivých aktív, alebo nastane potreba rebalancovať zdroje investované v daných finančných nástrojoch, teda investor bude musieť predať už vlastnené aktíva. V prípade, že dôjde k prudkému navýšeniu hodnoty AFS, môžu GLIDeS vyžadovať nákup dlhopisov SeLFIES v objeme, ktorý by nebolo možné pokryť len z príspevku sporiteľa, a preto bude musieť predať časť jeho podielu v indexe S&P 500. Naopak môže nastať situácia, keď výrazne klesne aktuálny stav financovania cieleného reálneho dôchodkového príjmu a je potrebné tak výrazne zvýšiť podiel v akciovom indexe S&P 500, že to vyžaduje predaj časti vlastnených SeLFIES.

5.3 Dôchodkové sporivé stratégie s konštantným pomerom aktív

Dôchodkové investičné stratégie založené na konštantnom podiele rozdelenia sporiteľových prostriedkov udržiavajú fixný pomer rozloženia celkových úspor sporiteľa medzi akciovým indexom S&P 500 a dôchodkovými dlhopismi SeLFIES počas celej doby sporenia.

Pre analýzu a vzájomné porovnanie s ostatnými popísanými dôchodkovými investičnými stratégiami sme zvolili rozličné konštantné podiely alokácie majetku medzi spomínanými aktívami. Skúmali sme agresívne nastavenie stratégie, ktoré vždy investovalo celé sporiteľove zdroje do indexu S&P 500, teda s fixným pomerom 100:0, respektíve ich väčšiu časť, čiže stratégiu 75:25. Taktiež sme analyzovali miernejšie zvolený konštantný pomer medzi indexom S&P 500 a dlhopismi SeLFIES, ktorý predstavuje stratégia 50:50. Testovali sme aj konzervatívne dôchodkové sporivé stratégie s fixným zastúpením aktív, ktoré investujú väčšiu časť úspor sporiteľa do dôchodkových dlhopisov SeLFIES, čiže s podielom 25:75, respektíve ich celú časť, teda stratégiu 0:100.

5.4 Predvolené investičné stratégie

Predvolené investičné stratégie stanovujú pomer rozloženia prostriedkov sporiteľa v príspevkovo definovaných dôchodkových schémach medzi rizikovejším fondom tvoreným akciami, respektíve indexmi, a konzervatívnejším dlhopisovým fondom na základe veku sporiteľa. Spočiatku typicky udržiavajú fixné rozdelenie prostriedkov medzi spomínanými dôchodkovými fondmi, pričom všetky alebo väčšia časť sporiteľových financií je investovaná do rizikovejších aktív do predom stanoveného veku sporiteľa, ktorý môže byť pri agresívnejších stratégiách daný len niekoľko rokov pred odchodom do dôchodku, ale aj výrazne nižší pri konzervatívnejších stratégiách. Následne po prekročení určeného vekového limitu sa buď postupne lineárne v určitých menších objemoch alebo skokovo naraz, respektíve viackrát vo vyšších objemoch presúvajú zdroje sporiteľa do menej rizikových aktív.

V našej simulácii reprezentoval agresívnejší dôchodkový fond akciový index S&P 500 a konzervatívny relatívne bezpečný fond tvorili dôchodkové dlhopisy SeLFIES.

5.4.1 Slovensko

Predvolená investičná stratégia (PIS) investuje 100 % úspor sporiteľa v dôchodkovom starobnom sporení do negarantovaného indexového fondu, čiže v našej analýze do indexu S&P 500, do dovŕšenia veku 50 rokov. Po prekročení danej vekovej hranice sa za každý dožitý rok zníži podiel prostriedkov sporiteľa investovaných do akciového indexu S&P 500 o 4 percentuálne body voči alokácii do garantovaného dlhopisového dôchodkového fondu, ktorý je v našom prípade reprezentovaný dlhopismi SeLFIES.

Podrobnejší popis a analýza Predvolenej investičnej stratégie sa nachádza v našej bakalárskej práci [60].

5.4.2 Švédsko

Podľa článku [80] alokuje predvolená sporivá stratégia vo Švédsku celý majetok dôchodkového sporiteľa do dosiahnutia veku 55 rokov do akciového fondu, ktorý je v našej analýze simulovaný akciovým indexom S&P 500. Po prekonaní stanoveného vekového limitu sa znižuje podiel prostriedkov alokovaných do indexu S&P 500 o 3,5 percentuálneho bodu v prospech pomeru zdrojov v dlhopisovom fonde tvoreného v našom prípade dôchodkovými

dlhopismi SelFIES.

5.4.3 Čile

Čilská predvolená investičná stratégia na základe informácií z publikácie [72] udržiava do dožitia sa 35 rokov pomer investovaných financií sporiteľov do rizikových fondov, ktoré sú v našej simulácii zastúpené akciovým indexom S&P 500, na úrovni 60 %, pričom zvyšných 40 % ich majetku je alokovaných do konzervatívnych fondov, ktoré sú v našom prípade nahradené dôchodkovými dlhopismi SeLFIES. Po prekročení určenej vekovej hranice sa časť ich zdrojov v indexe S&P 500 zníži na 40 %, teda podiel v dlhopisoch SeLFIES vzrastie na 60 %. Po dovŕšení 55 rokov klesne alokácia do S&P 500 na finálnych 20 % z celkovej hodnoty úspor sporiteľov, teda do SeLFIES je investovaných 80 % ich majetku.

5.5 Dôchodkové sporivé stratégie založené na dĺžke sporenia

Dôchodkové investičné stratégie vychádzajúce zo súčasnej dĺžky sporenia, respektíve aktuálneho veku sporiteľa, sú buď nastavené konzervatívne, keď postupne v priebehu sporenia znižujú alokáciu sporiteľových úspor do akciového indexu S&P 500, alebo agresívne, keď pomer nimi investovaných prostriedkov do indexu S&P 500 časom narastá.

5.5.1 Aging(1)

Príkladom dôchodkovej sporivej stratégie založenej na aktuálnom veku investora je stratégia lineárneho poklesu alokácie zdrojov do akciového indexu S&P 500 s rastúcim vekom sporiteľa, ktorá dostala v publikácii [75] pomenovanie Aging(1). Podiel financií sporiteľa vložený do indexu S&P 500 počas roku sporenia y v dôchodkovej sporivej stratégii Aging(1), teda $\text{Aging}(1)_y$, je v knihe [75] určený ako:

$$\text{Aging}(1)_y = 1 - \frac{x_y}{100}, \tag{48}$$

kde x_y reprezentuje sporiteľov vek v danom roku sporenia y.

Zo vzorca (48) vyplýva, že percentuálna časť prostriedkov sporiteľa alokovaná do S&P 500 klesá o jeden percentuálny bod za každý dožitý rok sporiteľa, čiže percentuálny podiel jeho zdrojov investovaných do dôchodkových dlhopisov SeLFIES narastá a je rovný

aktuálnemu veku sporiteľa. Teda dôchodková sporivá stratégia Aging(1) je počas doby sporenia postupne viac konzervatívna.

5.5.2 Aging(2)

Prvou stratégiou vychádzajúcou z aktuálnej dĺžky sporenia je dôchodková investičná stratégia, ktorá bola v publikácii [75] nazvaná ako Aging(2). Alokácia prostriedkov sporiteľa do akciového indexu S&P 500 sa v dôchodkovej sporivej stratégií Aging(2) vypočíta pomocou vzťahu z [75] ako:

$$\text{Aging}(2)_y = 1 - \frac{y}{Y}, \tag{49}$$

v ktorom $\text{Aging}(2)_y$ symbolizuje zastúpenie zdrojov sporiteľa v indexe S&P 500 v roku sporenia y, pričom platí, že $y \in \langle 1, Y \rangle$, kde Y zodpovedá celkovej dĺžke doby sporenia vyjadrenej v rokoch.

Podľa rovnice (49) ide o dôchodkovú investičnú stratégiu poklesu podielu úspor v S&P 500, respektíve nárastu pomeru financií investovaných do dôchodkových dlhopisov SeLFIES s rastúcou dĺžkou sporenia na dôchodok, čiže s pribúdajúcim časom predstavuje čoraz konzervatívnejšiu sporivú stratégiu.

5.5.3 Aging(3)

Stratégia lineárneho nárastu časti investovaných prostriedkov do akciového indexu S&P 500 s rastúcim vekom sporiteľa, ktorá je pomenovaná v knihe [75] ako Aging(3), je protikladom dôchodkovej investičnej stratégie Aging(1) popísanej v časti 5.5.1. Zastúpenie zdrojov investora v indexe S&P 500 pri sporení pomocou stratégie Aging(3) v roku sporenia y, teda $\text{Aging}(3)_y$, je podľa vzorca z publikácie [75] dané ako:

$$\text{Aging}(3)_y = \frac{x_y}{100}, \tag{50}$$

kde x_y označuje vek dôchodkového sporiteľa v roku sporenia y.

Vzorec (50) vyjadruje, že percentuálna alokácia úspor sporiteľa do S&P 500 je rovná jeho súčasnému veku, čiže s rastúcim vekom sa navyšuje jeho podiel v rizikovejšom aktíve, teda dôchodková sporivá stratégia Aging(3) sa stáva viac agresívnejšou.

5.5.4 Aging(4)

Opakom stratégie Aging(2) spomenutej v podkapitole 5.5.2 je dôchodková sporivá stratégia označená autormi publikácie [75] ako Aging(4). Pomer úspor sporiteľa investovaných do akciového indexu S&P 500 je v stratégií Aging(4) vyjadrený vzťahom z knihy [75] ako:

$$\text{Aging(4)}_y = \frac{y}{Y}, \tag{51}$$

v ktorom Aging(4)_y vyjadruje alokáciu sporiteľa do indexu S&P 500 v roku sporenia y, kde $y \in \langle 1, Y \rangle$ a Y značí dĺžku doby sporenia v rokoch.

Z rovnice (51) vychádza, že dôchodková investičná stratégia Aging(4) predstavuje stratégiu nárastu časti majetku sporiteľa v S&P 500, teda s pribúdajúcimi rokmi sporenia predstavuje čoraz agresívnejšiu sporivú stratégiu.

5.6 Dôchodkové investičné stratégie založené na výnose aktív

Nasledujúce dôchodkové sporivé stratégie pochádzajúce z knihy [75] investujú sporiteľove úspory do akciového indexu S&P 500 a do amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov na základe výnosov spomínaných aktív. Namiesto dôchodkových dlhopisov SeLFIES sme ako relatívne bezpečné aktívum zvolili TS s konštantnou maturitou 7 rokov, keďže sme spomínali, že by sme sa nemali sústrediť na výnos SeLFIES, ale na nimi poskytovaný reálny príjem. Zároveň nám to umožňuje porovnať výsledky aj pre stratégie, ktoré využívajú iné relatívne bezrizikové aktívum.

5.6.1 Discretive

Dôchodková sporivá stratégia, ktorá bola v publikácii [75] pomenovaná Mešťanom a Králikom ako Discretive, alokuje každý mesiac sporenia všetky prostriedky sporiteľa do akciového indexu S&P 500 alebo amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov na základe nerovnosti z [75]:

$$\sum_{t=T-n+1}^{T} \frac{\text{VI}_{\text{S\&P}_t} - \text{VI}_{\text{S\&P}_{t-1}}}{\text{VI}_{\text{S\&P}_{t-1}}} > \sum_{t=T-o+1}^{T} \frac{\text{VI}_{\text{TS(7)}_t} - \text{VI}_{\text{TS(7)}_{t-1}}}{\text{VI}_{\text{TS(7)}_{t-1}}}, \tag{52}$$

kde $\text{VI}_{\text{S\&P}_t}$ reprezentuje reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky (p.j.) do indexu S&P 500 v mesiaci sporenia t, ktorej výpočet sme opísali v časti 3.4.3, $\text{VI}_{\text{TS(7)}_t}$

symbolizuje reálnu úroveň počiatočnej investície 1 p.j. do TS s konštantnou maturitou 7 rokov v mesiaci t, ktorej získanie sme popísali v podkapitole 3.2.3. V nerovnosti (52) ďalej T predstavuje poradové číslo súčasného mesiaca dôchodkového sporenia, n a o vyjadrujú počty mesiacov, ktoré sa započítajú do súčtu výnosov S&P 500, respektíve amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov. Keďže autori stratégie Discretive v publikácii [75] spomínajú, že musí byť splnená podmienka $n > o$, tak sme zvolili $n = 6$, čiže do sumy sa započítavali výnosy indexu S&P 500 za posledný polrok a $o = 4$, teda sa pozeralo na výnosy TS s konštantnou maturitou 7 rokov za posledné 4 mesiace, pričom ak vychádzalo v sume $t < 1$, tak sme počítali s $n = T$, respektíve s $o = T$.

V prípade, že je splnené rozhodovacie kritérium dôchodkovej sporivej stratégie Discretive, čiže platí nerovnosť (52), tak celý majetok sporiteľa je investovaný do akciového indexu S&P 500. V opačnom prípade sú všetky nasporené financie sporiteľa alokované do amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov.

5.6.2 CrossEMA

Ďalším príkladom je stratégia založená na pretnutí exponenciálnych kĺzavých priemerov s názvom CrossEMA, ktorá bola zostrojená Šebom a popísaná v knihe [75]. Daná dôchodková investičná stratégia investuje na mesačnej báze celý majetok sporiteľa buď do akciového indexu S&P 500 alebo amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov na základe alokačného kritéria daného nerovnosťou z [75]:

$$\mathrm{EMA}_t(p_S) > \mathrm{EMA}_t(p_L), \tag{53}$$

v ktorej $\mathrm{EMA}_t(p)$ vyjadruje hodnotu exponential moving average (EMA), čiže v preklade exponenciálneho kĺzavého priemeru vypočítaného pre posledných p mesiacov v mesiaci sporenia t. Hodnota $\mathrm{EMA}_t(p)$ sa získa pomocou vzorca z publikácie [75] ako:

$$\mathrm{EMA}_t(p) = \mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_t} \cdot \frac{2}{p+1} + \mathrm{EMA}_{t-1}(p) \cdot \left(1 - \frac{2}{p+1}\right),$$

kde $\mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_t}$ predstavuje reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do indexu S&P 500 v mesiaci sporenia t, ktorú sme vypočítali v časti 3.4.3.

V rozhodovacej podmienke (53) sme ako krátke obdobie výpočtu exponenciálneho kĺzavého priemeru zvolili 2 mesiace, čiže $p_S = 2$ a ako dlhé pol roka, teda $p_L = 6$.

Keď platí nerovnosť (53), tak dôchodková sporivá stratégia CrossEMA alokuje všetky zdroje sporiteľa do S&P 500 a ak nie je splnená, tak sú celé úspory sporiteľa investované do TS s konštantnou maturitou 7 rokov.

5.6.3 MaxMin

Dôchodková investičná stratégia s pomenovaním MaxMin, ktorá bola vysvetlená v publikácii [75], funguje na princípe prekonania lokálneho extrému, teda maxima alebo minima reálnej hodnoty počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do určitého finančného nástroja. MaxMin alokuje mesačne všetky sporiteľove prostriedky do akciového indexu S&P 500 alebo amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov na základe rozhodovacieho mechanizmu z [75]:

$$\text{Stop} - \text{Loss} = 0 \wedge \text{BUY} = 1. \tag{54}$$

Podmienka Stop - Loss v alokačnom kritériu (54) je reprezentovaná nerovnosťou:

$$\text{VI}_{\text{S\&P}_t} \leq \min \text{EMA}_{\text{VI}_{\text{S\&P}_{t,\,t-5}}} \cdot \text{cit}_t, \tag{55}$$

v ktorej $\text{VI}_{\text{S\&P}_t}$ vyjadruje reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 p.j. do indexu S&P 500 v mesiaci sporenia t, ktorej získanie sme opísali v podkapitole 3.4.3, a $\min \text{EMA}_{\text{VI}_{\text{S\&P}_{t,\,t-5}}}$ symbolizuje minimálnu hodnotu exponenciálneho kĺzavého priemeru počítaného za obdobie posledných 6 mesiacov sporenia. Hodnota EMA v mesiaci t sa získa pomocou vzorca z knihy [75]:

$$\text{EMA}_t = [\text{VI}_{\text{S\&P}_t} \cdot k + \min \text{VI}_{\text{S\&P}_{t,\,t-5}} \cdot (1-k)]\text{cit}_t, \tag{56}$$

pričom k označuje koeficient, ktorý je stanovený ako podiel čísla 2 a počtu mesiacov zarátaných do výpočtu exponenciálneho kĺzavého priemeru, čo v našom prípade bolo 6 mesiacov, zvýšeného o 1, teda:

$$k = \frac{2}{6+1} = \frac{2}{7}.$$

Ďalej v rovnici (56) značí $\min \text{VI}_{\text{S\&P}_{t,\,t-5}}$ minimálnu reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do S&P 500 za predošlých 6 mesiacov a cit_t reprezentuje sporiteľovu citlivosť k prepadu celkovej hodnoty nasporených prostriedkov, ktorá sa postupne k obdobiu odchodu do dôchodku zvyšuje a vypočíta sa ako:

$$\text{cit}_t = \frac{t^{\frac{t}{T}} + t}{2T},$$

kde t je súčasný mesiac sporenia a T označuje celkovú dĺžku doby sporenia v mesiacoch.

Ak nie je nerovnosť (55) splnená, tak rozhodovací mechanizmus Stop-Loss = 0 a keď platí, tak Stop-Loss = 1.

Nerovnosť pre pravidlo BUY má tvar:

$$\mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_t} \geq \max \mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_{t,\,t-5}}, \tag{57}$$

kde $\max \mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_{t,\,t-5}}$ značí maximálnu dosiahnutú reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 p.j. do S&P 500 v období posledných 6 mesiacov.

Vždy keď nastala situácia, že $t - 5 < 1$, tak sme zvolili maximálny možný počet mesiacov sporenia.

Keď platí nerovnosť (57), tak rozhodovací mechanizmus BUY = 1 a ak nie je splnená, tak BUY = 0.

Ak je splnené kritérium (54) potom dôchodková sporivá stratégia MaxMin investuje celé úspory sporiteľa do akciového indexu S&P 500 a keď neplatí, tak všetok majetok sporiteľa je alokovaný do amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov.

5.6.4 RiskTolerance

Nasledovným príkladom je stratégia predstavená v publikácii [75] ako RiskTolerance, ktorá je postavená na princípe tolerancie rizika u dôchodkového sporiteľa. RiskTolerance investuje na mesačnej báze časť sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500, ktorá sa vypočíta podľa knihy [75] ako:

$$w_t = \frac{\sum_{i=t-n}^{t} \mathrm{BUY}_i}{n+1}, \tag{58}$$

kde w_t reprezentuje pomer z celkového majetku sporiteľa alokovaný do indexu S&P 500 v mesiaci sporenia t, n značí počet predchádzajúcich mesiacov pre ktoré sa započítava hodnota BUY do sumy, pričom my sme si zvolili $n = 5$, teda suma sa počíta pre obdobie posledného pol roka. Hodnotu BUY_t zo vzorca (58) získame pomocou vzťahu:

$$\mathrm{BUY}_t = 1 - \mathrm{DR}_t,$$

v ktorom DR_t označuje dynamické riziko v mesiaci sporenia t, ktoré je vypočítané ako:

$$\mathrm{DR}_t = \begin{cases} \frac{D_{\max_t} - \mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_t}}{D_{\max_t} - D_{\min_t}} & , \text{ak } D_{\max_t} > D_{\min_t}, \\ 0 & , \text{ak } D_{\max_t} = D_{\min_t}. \end{cases} \tag{59}$$

Vo výraze (59) $\mathrm{VI}_{\mathrm{S\&P}_t}$ symbolizuje reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do S&P 500 v mesiaci sporenia t, vypočítanú v časti 3.4.3, $D_{\max_t}$ vyjadruje maximálnu reálnu úroveň počiatočnej investície 1 p.j. do S&P 500 v časovom intervale $\langle k, t\rangle$ a $D_{\min_t}$ reprezentuje minimálnu reálnu hodnotu počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do indexu S&P 500 za časové obdobie $\langle k, t\rangle$. Hodnotu premennej k získame pomocou vzťahu z publikácie [75]:

$$k = \max(1;\, 2t - T),$$

v ktorom t je poradové číslo súčasného mesiaca sporenia a T popisuje celkovú dĺžku doby sporenia v mesiacoch.

Keď nastala situácia, že $i < 1$, tak sme uvažovali $n = t - 1$.

Zvyšná časť úspor sporiteľa je v prípade stratégie RiskTolerance alokovaná do amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov.

5.6.5 Černý-Melicherčík

Dôchodková sporivá stratégia založená na Samuelsonovej teórii celoživotného cyklu, ktorá bola v knihe [75] nazvaná ako Černý-Melicherčík a ktorej odvodenie bolo popísané v časopiseckom článku [2] a publikácii [68], alokuje každý mesiac financie sporiteľa do akciového indexu S&P 500 a amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov na základe riešenia optimalizačnej úlohy:

$$w = \arg\max_{z \in \mathcal{C}} \left\{ z(\mu - r) - \frac{1}{2} z\gamma(\sigma\sigma^{\intercal}) z^{\intercal} \right\}, \tag{60}$$

kde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{\mathrm{arit}}_{\mathrm{S\&P}} \\ \mu^{\mathrm{arit}}_{\mathrm{TS(7)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0717 \\ 0,0247 \end{pmatrix}$$

reprezentuje dvojrozmerný vektor priemerných ročných reálnych aritmetických výnosov indexu S&P 500 a amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov, pričom spôsob získania spomínaných hodnôt sme opísali v časti 3.2.2 pre TS, respektíve v podkapitole 3.4.2 pre S&P 500. Ďalej vo vzorci (60) r symbolizuje bezrizikovú mieru, ktorej hodnotu sme zvolili 2 %, γ predstavuje sporiteľov koeficient averzie voči riziku, ktorý sme stanovili ako 9 a

$$\sigma\sigma^{\top} = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mathrm{S\&P}} & \sigma_{\mathrm{S\&P,\,TS(7)}} \\ \sigma_{\mathrm{S\&P,\,TS(7)}} & \sigma^2_{\mathrm{TS(7)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0237 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0028 \end{bmatrix}$$

je ročná kovariančná matica reálnych výnosov akciového indexu S&P 500 a amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov, pričom $\sigma^2_{\text{S\&P}}$ značí ročnú varianciu reálnych výnosov indexu S&P 500, $\sigma_{\text{S\&P, TS(7)}}$ ročnú kovarianciu reálnych výnosov indexu S&P 500 a TS s konštantnou maturitou 7 rokov a $\sigma^2_{\text{TS(7)}}$ ročnú varianciu reálnych výnosov amerických štátnych dlhopisov s konštantnou maturitou 7 rokov.

Predpokladáme, že podiel sporiteľa v žiadnom zo spomínaných finančných nástrojov nemôže byť záporný, čiže riešenie optimalizačnej úlohy (60) musí pochádzať z konvexnej množiny $\mathcal{C}$, ktorá je vyjadrená v knihe [75] ako:

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : z \geq 0 \wedge z_1 + z_2 = \alpha \right\},$$

pričom

$$\alpha = \frac{U_t}{U_t + C_t^{\text{NPV}}}, \tag{61}$$

kde U_t predstavuje celkovú hodnotu úspor dôchodkového sporiteľa v čase t a C_t^{NPV} vyjadruje net present value (NPV), teda v preklade čistú súčasnú hodnotu budúcich príspevkov sporiteľa na dôchodkové sporenie s tým, že v našej analýze sme predpokladali, že od súčasného mesiaca sporenia t budú všetky nasledujúce príspevky až do odchodu do dôchodku v rovnakej výške ako bol v danom mesiaci a diskontovali sme ich bezrizikovou mierou r.

Výsledok optimalizačnej úlohy (60) sa viaže k celkovej hodnote prostriedkov sporiteľa v danom mesiaci sporenia zvýšenej o čistú súčasnú hodnotu všetkých budúcich príspevkov na dôchodkové sporenie. Teda alokačný pomer medzi akciovým indexom S&P 500 a americkými štátnymi dlhopismi s konštantnou maturitou 7 rokov vzťahujúci sa len na skutočnú veľkosť majetku sporiteľa v danom mesiaci sporenia sa vypočíta pomocou vzorca z publikácie [75] ako:

$$w^* = \frac{w}{\alpha},$$

v ktorom w^* reprezentuje zastúpenie zdrojov sporiteľa v spomínaných aktívach pri využití dôchodkovej investičnej stratégie Černý-Melicherčík, w symbolizuje optimálne riešenie úlohy (60) a α je získaná pomocou rovnice (61).

Optimalizačnú úlohu (60) sme riešili pomocou MATLAB funkcie quadprog [65].

6 Simulácie vývoja dôchodkového sporenia

6.1 Reprezentatívny sporiteľ a predpoklady sporenia

Predpokladali sme, že reprezentatívny sporiteľ bude pracovať bez prerušenia do dosiahnutia veku 65 rokov, pričom sme uvažovali rozličné dĺžky doby sporenia.

Reálny mesačný príjem reprezentatívneho dôchodkového sporiteľa sme získali predelením priemerného nominálneho ročného príjmu v Spojených štátoch amerických v jednotlivých rokoch sporenia, ktorého získanie sme popísali v časti 2.6, a jeho následnou inflačnou úpravou, teda ako:

$$\mathrm{RW}_t = \frac{\frac{\mathrm{NAWI}_{\lceil \frac{t}{12} \rceil}}{12}}{\frac{\mathrm{CPI}_t}{\mathrm{CPI}_1}}, \tag{62}$$

kde RW_t vyjadruje reálnu mesačnú mzdu sporiteľa v mesiaci sporenia t, $\mathrm{NAWI}_{\lceil \frac{t}{12} \rceil}$ reprezentuje hodnotu nominálnej priemernej ročnej mzdy v prislúchajúcom roku sporenia a CPI_t symbolizuje hodnotu indexu spotrebiteľských cien v mesiaci t. V roku 2025 sme použili nominálny ročný plat z roku 2024, keďže za rok 2025 nebol ešte zverejnený.

Predpokladali sme fixnú mieru príspevkov na dôchodkové sporenie vo výške 12 % z reálnej mzdy sporiteľa, teda sme neuvažovali možnosť, že by sa príspevky mohli v čase meniť a ich dynamická úprava by mohla zlepšiť výsledný dôchodkový reálny príjem.

Stanovili sme si, že cieľ reprezentatívneho dôchodkového sporiteľa v mesiaci sporenia t je dosiahnuť od momentu odchodu do dôchodku po dobu dvadsiatich rokov mesačný garantovaný reálny dôchodkový príjem na úrovni sporiteľovej reálnej mzdy v danom mesiaci sporenia, čiže:

$$\mathrm{TRRI}_t = \mathrm{RW}_t,$$

kde TRRI_t je menovateľ vo vzorci (43) na výpočet aktuálneho stavu financovania dôchodkového reálneho garantovaného príjmu v mesiaci sporenia t, teda AFS_t a RW_t je reálna mesačná mzda sporiteľa v mesiaci t vypočítaná pomocou rovnice (62).

Stanovili sme, že reprezentatívny dôchodkový sporiteľ alokuje svoje prostriedky do dôchodkových dlhopisov SeLFIES s dobou konverzie vždy zodpovedajúcej času jeho odchodu do dôchodku.

Pre zjednodušenie sme uvažovali, že sporiteľ bude poberať dôchodok po dobu dvadsiatich rokov, tým sme však nepokryli riziko dlhovekosti, ktoré by sa dalo riešiť napríklad

nákupom SeLFIES v čase, keď je už reprezentatívny sporiteľ na dôchodku.

Predpokladali sme, že v okamihu odchodu sporiteľa do dôchodku sa premení jeho celá konečná hodnota investície do akciového indexu S&P 500 na dvadsaťročný reálny dôchodkový príjem získaný zo SeLFIES s dobou konverzie 0. Mohla by existovať možnosť, že by sa sporiteľ mohol rozhodnúť, že v prípade, že ešte nedosiahol svoj požadovaný dôchodkový reálny príjem, tak bude pokračovať v investovaní do indexu S&P 500 aj po odchode do dôchodku.

Základným predpokladom simulácie bolo, že nákup, respektíve predaj dôchodkových dlhopisov SeLFIES s jednotlivými konverziami, amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov a akciového indexu S&P 500 nie je spojený so žiadnymi obmedzeniami alebo poplatkami.

Reprezentatívny dôchodkový sporiteľ si počas celého historického obdobia sporil vždy využitím iba jednej zvolenej dôchodkovej investičnej stratégie, ktorej alokácia sa vyhodnocovala na mesačnej báze. Simulovali sme lineárne GLIDeS popísané v časti 5.2.1 s hodnotou parametra $k = 0,5$ pre agresívne, $k = 1$ pre mierne a $k = 1,5$ pre konzervatívne nastavenie stratégie. Taktiež sme použili spojité GLIDeS predstavené v podkapitole 5.2.2 so zvolenými hodnotami parametrov podľa článku [58], teda $l = 9$ a $z = 0,9$ pre agresívny, $l = 8$ a $z = 0,8$ pre mierny a $l = 5$ a $z = 0,5$ pre konzervatívny prístup. Tiež sme analyzovali AFS-TFS GLIDeS predstavené v časti 5.2.3 s hodnotou parametra $b = 7$ pre silnú, $b = 3$ pre miernu a $b = 1$ pre slabú citlivosť na rozdiel medzi aktuálnym stavom financovania stanoveného reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa (AFS) a jeho cieľovou hodnotou (TFS). Testovali sme aj dôchodkové sporivé stratégie, ktoré sme využívali v našej bakalárskej práci [60] a ktoré pochádzali z publikácie [72] a knihy [75]. Všetky spomínané stratégie sme detailnejšie popísali v kapitole 5.

6.2 Historická simulácia pre 40 ročné obdobie sporenia

Ako prvú sme vykonali historickú simuláciu dôchodkového sporenia za časové obdobie od 1.1.1986 do 1.12.2025. Uvažovali sme teda 40 ročné akumulačné, teda sporiace obdobie a dvadsaťročnú dekumulačnú dobu, čiže dĺžku poberania dôchodku, čo simuluje historický vývoj dôchodkového sporenia 25 ročného investora, ktorý do dôchodku odíde ako 65 ročný.

6.2.1 Historické okolnosti

Podľa [52] mala zásadný vplyv na celý akciový trh na prelome prvého a druhého tisícročia takzvaná dotcom alebo internetová bublina, ktorá začala prudkým až niekoľkonásobným nárastom hodnoty akcií technologických spoločností v Spojených štátoch amerických koncom 90. rokov, ktorý bol poháňaný veľkými investíciami do internetových startupov. Dané firmy často nemali žiadne zmysluplné obchodné plány a vykazovali nízke zisky, čo nakoniec viedlo na začiatku druhého tisícročia ku kolapsu trhu, keď cena akcií viacerých technologických podnikov klesla až o 80%.

Ďalšou udalosťou, ktorá ovplyvnila finančné trhy, bola podľa článku [73] globálna finančná kríza prebiehajúca v rokoch 2007 až 2009, ktorá bola vyvolaná najmä kolapsom trhu s nehnuteľnosťami v Spojených štátoch amerických spôsobeným poskytovaním hypoték rizikovým klientom. Dané úvery boli sekuritizované do komplexných finančných produktov, čo viedlo k podceneniu ich skutočného rizika. Po poklese cien nehnuteľností a náraste úrokových sadzieb nedokázalo mnoho dlžníkov splácať svoje záväzky, čo vyústilo do vysokých strát pre finančné inštitúcie a následnú stratu dôvery medzi bankami. Kríza spôsobila krach množstva finančných inštitúcií, z ktorých najvýznamnejšou bola americká banka Lehman Brothers, čo krízu ešte prehĺbilo a rozšírila sa do celej ekonomiky, pričom jej následkom bol výrazný pokles cien akcií.

Globálna pandémia ochorenia COVID-19 spôsobila na začiatku roku 2020 prudký prepad cien akcií v dôsledku vysokej neistoty a očakávaného útlmu ekonomiky. Hodnota akciového indexu S&P 500 klesla podľa [59] veľmi rýchlo o viac než 35 %, avšak následne došlo k rýchlemu zotaveniu cien akcií a ich pokračujúcemu rastu.

Krátkodobé negatívne dôsledky na finančné trhy mali podľa článku [3] aj vojnové konflikty na Ukrajine a Blízkom východe, ktoré boli sprevádzané zvýšenou neistotou ohľadom vplyvu zavedených ekonomických sankcií na ceny významných hospodárskych komodít.

Hlavným hnacím motorom rastu hodnoty akciového indexu S&P 500 sú v posledných rokoch podľa [61] technologické spoločnosti, ktoré investujú značné prostriedky do vývoja Artificial Intelligence (AI), teda v preklade umelej inteligencie. Spolu s rapídnym nárastom cien akcií daných firiem sa čoraz častejšie objavujú obavy z potenciálneho nadhodnotenia AI spoločností a vzniku novej technologickej bubliny, ktorá by mohla mať v prípade prasknutia podobné následky ako spomínaná dotcom bublina z prelomu tisícročí.

6.2.2 Výsledný náhradový pomer

V tabuľke 10 sú uvedené finálne hodnoty stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu, respektíve výsledného náhradového pomeru, ktorý predstavuje podiel poberaného mesačného dôchodkového príjmu a poslednej vyplatenej mzdy sporiteľa, získaného pomocou skúmaných dôchodkových investičných stratégií za 40 ročné historické obdobie sporenia od začiatku roku 1986 do konca roku 2025.

Môžeme sledovať, že cielený náhradový pomer, ktorý sme stanovili na hodnote 1, respektíve 100 %, teda, že sme požadovali, aby bol reálny dôchodkový mesačný príjem sporiteľa aspoň na úrovni jeho poslednej reálnej mzdy, dosiahli iba agresívne lineárne GLIDeS, všetky nastavenia AFS-TFS GLIDeS, stratégia s konštantným alokačným pomerom 75:25 medzi akciovým indexom S&P 500 a dôchodkovými dlhopismi SeLFIES, stratégie založené na dĺžke sporenia, respektíve veku sporiteľa Aging(3) a Aging(4). Taktiež výsledný náhradový pomer nad stanovenou úrovňou zabezpečili investičné stratégie, ktoré boli založené na výnosoch aktív a využívali ako relatívne bezpečné aktívum americký štátny dlhopis s konštantnou maturitou 7 rokov namiesto SeLFIES, s názvami Discretive a CrossEMA. Väčšina dôchodkových sporivých stratégií nedosiahla požadovaný náhradový pomer, ale veľa z nich sa mu priblížilo, keďže dosiahlo výsledok okolo 80 až 90 %. Stratégia postavená na teórii celoživotného cyklu Černý-Melicherčík, ktorá investovala do indexu S&P 500 a TS s konštantnou maturitou 7 rokov namiesto SeLFIES, nadobudla ako jediná finálny náhradový pomer nižší ako 50 %, teda pri sporení využitím danej stratégie by bol reálny mesačný dôchodkový príjem sporiteľa nižší ako polovica jeho poslednej reálnej mzdy.

Zo skúmaných dynamických príjmovo orientovaných dôchodkových sporivých stratégií GLIDeS dosiahli najvyššie náhradové pomery, ktoré aj presiahli cieľovú úroveň 1, AFS-TFS GLIDeS, pričom najvyšší náhradový pomer dosiahlo nastavenie so silnou reakciou na rozdiel medzi aktuálnym (AFS) a cieľovým stavom financovania (TFS) stanoveného dôchodkového reálneho príjmu. Z ostatných prístupov presiahli požadovaný náhradový pomer iba lineárne agresívne GLIDeS. Zároveň v tabuľke 10 pozorujeme len minimálne rozdiely medzi výsledkami pre spojité GLIDeS.

Najvyšší výsledný náhradový pomer dosiahla dôchodková sporivá stratégia založená na dĺžke sporenia Aging(4), ktorá postupom času investuje čoraz viac prostriedkov sporiteľa do akciového indexu S&P 500, teda v období najväčšieho rastu hodnoty daného indexu

Tabuľka 10: Finálny náhradový pomer (%) dosiahnutý pomocou jednotlivých skúmaných dôchodkových sporivých stratégií za 40 ročné obdobie sporenia od 1.1.1986 do 1.12.2025

Stratégia	Finálny náhradový pomer (%)
Agresívne lineárne GLIDeS	101,30
Mierne lineárne GLIDeS	90,50
Konzervatívne lineárne GLIDeS	74,17
Agresívne spojité GLIDeS	93,88
Mierne spojité GLIDeS	92,84
Konzervatívne spojité GLIDeS	89,96
Silné AFS-TFS GLIDeS	121,68
Mierne AFS-TFS GLIDeS	118,70
Slabé AFS-TFS GLIDeS	106,94
Konštantné 100:0	98,73
Konštantné 75:25	101,66
Konštantné 50:50	98,01
Konštantné 25:75	87,38
Konštantné 0:100	71,61
PIS Slovensko	67,70
PIS Švédsko	82,55
PIS Čile	73,64
Aging(1)	83,36
Aging(2)	61,32
Aging(3)	113,59
Aging(4)	145,10
Discretive	111,25
CrossEMA	130,35
MaxMin	56,44
RiskTolerance	68,07
Černý-Melicherčík	48,18

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

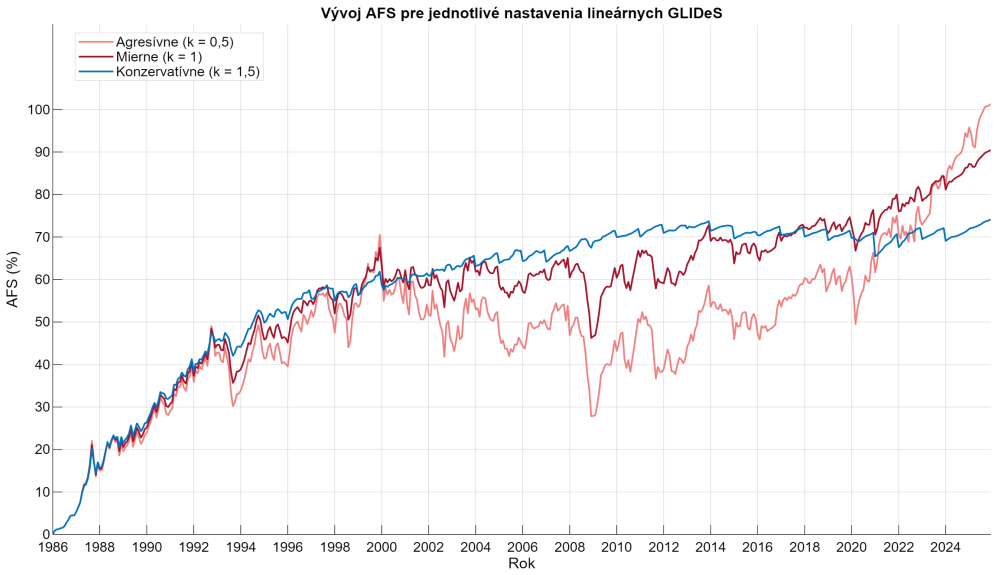
do neho alokovala prevažnú väčšinu úspor dôchodkového sporiteľa.

Zaujímavé je aj porovnanie finálneho náhradového pomeru medzi dôchodkovými investičnými stratégiami, ktoré ako relatívne bezrizikový finančný nástroj využívali dôchodkové dlhopisy SeLFIES a tými, ktoré využívali TS so 7 ročnou konštantnou maturitou. V tabuľke 10 sledujeme, že agresívnejšie stratégie Discretive a CrossEMA, ktoré investujú 100 % majetku sporiteľa do S&P 500 alebo amerického štátneho dlhopisu so 7 ročnou konštantnou maturitou dosiahli druhý, respektíve šiesty najlepší výsledok a na druhej strane stratégie, ktoré alokujú len časť sporiteľových financií do daného indexu alebo majú konzervatívnejšiu alokačnú podmienku mali jedny z najnižších hodnôt náhradového pomeru.

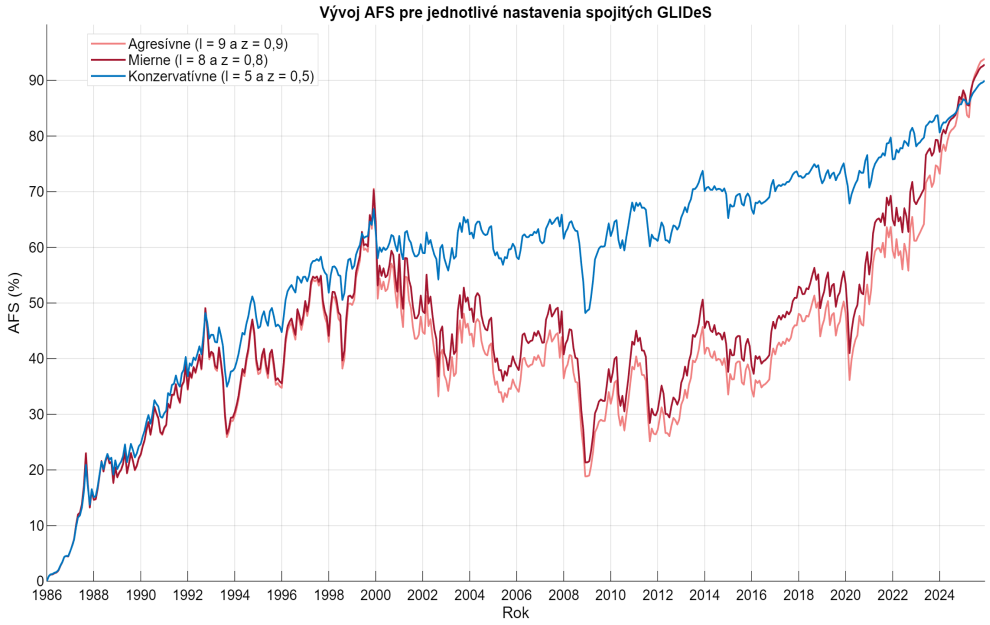
Lepší pohľad na dosiahnutý náhradový pomer nám poskytne preskúmanie vývoja aktuálneho stavu financovania budúceho dôchodkového reálneho príjmu a percentuálnej alokácie sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500 v čase.

6.2.3 Vývoj aktuálneho stavu financovania

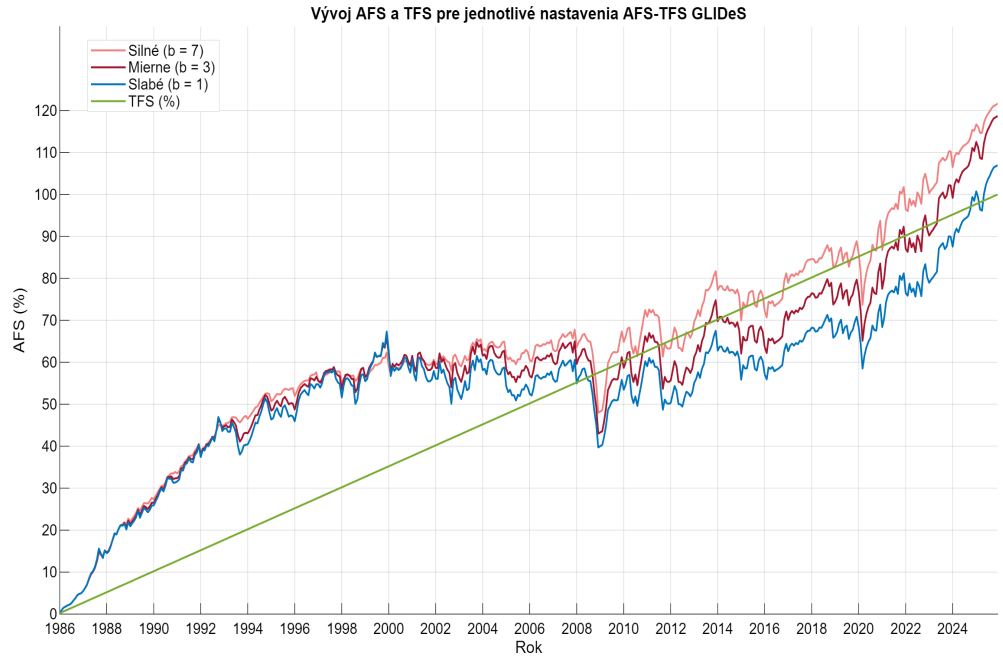
Na obrázkoch 17 až 23 sú zaznamenané časové priebehy aktuálneho stavu financovania (Actual Funded Status - AFS) reálneho budúceho dôchodkového príjmu sporiteľa dosiahnutého pomocou jednotlivých popísaných sporivých stratégií.



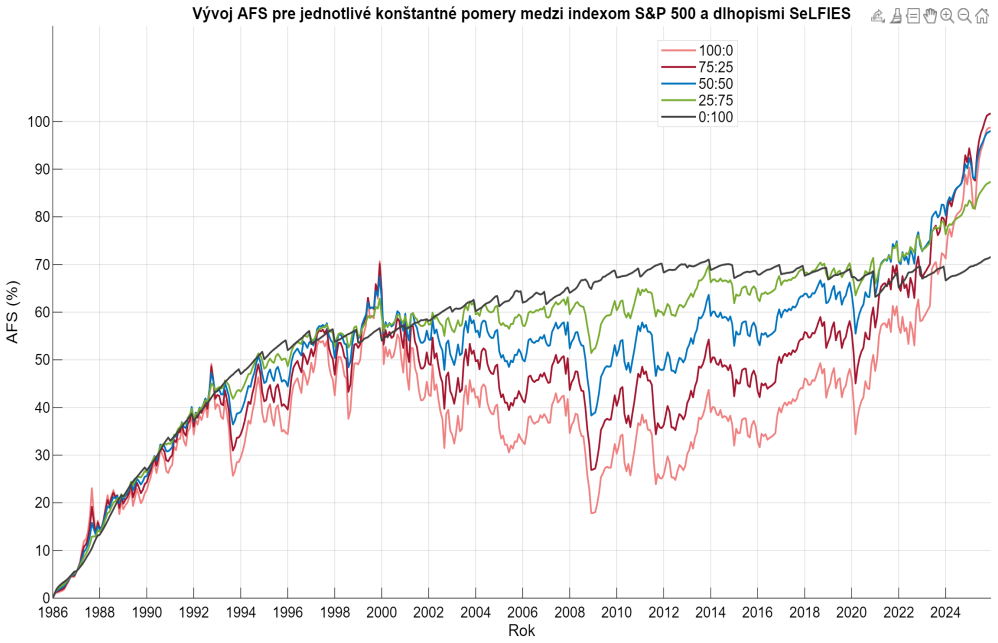
Obr. 17: Vývoj aktuálneho stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou lineárnych GLIDeS s danými nastaveniami (zdroj: vlastné spracovanie dát)



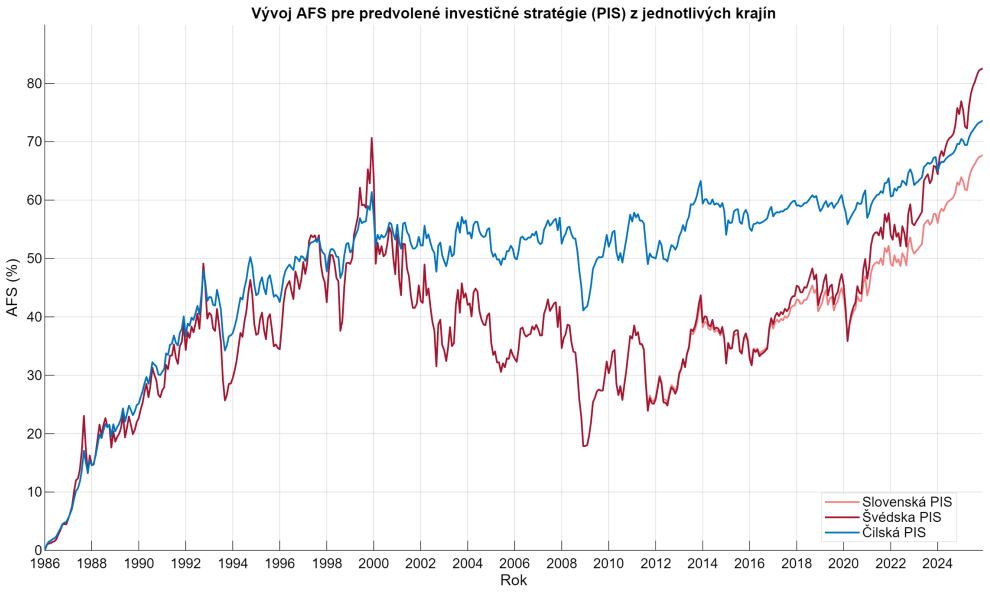
Obr. 18: Vývoj aktuálneho stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou spojitých GLIDeS s danými nastaveniami (zdroj: vlastné spracovanie dát)



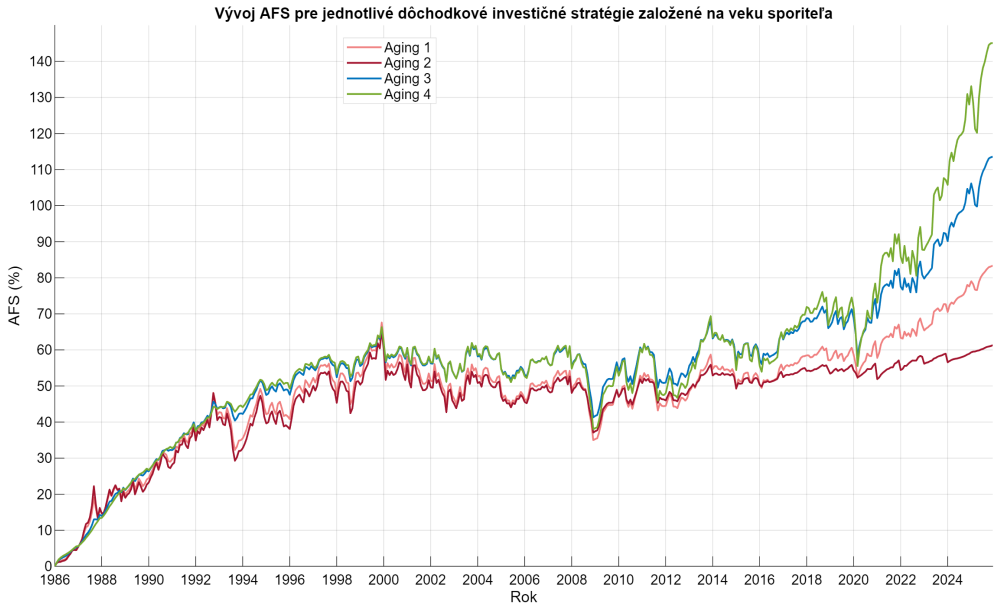
Obr. 19: Vývoj aktuálneho (AFS) a cieľového stavu financovania (TFS) reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou AFS-TFS GLIDeS s danými nastaveniami (zdroj: vlastné spracovanie dát)



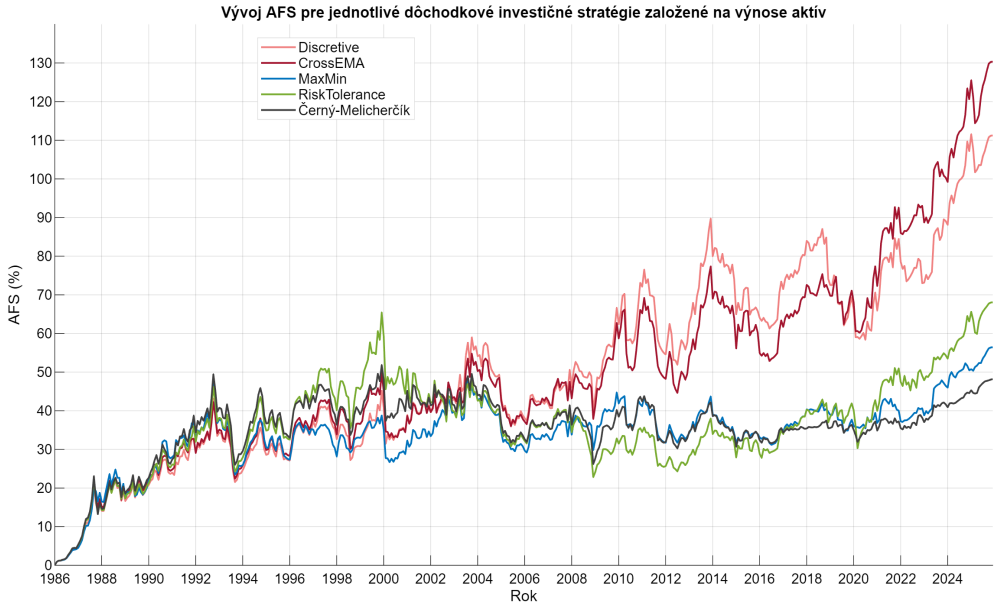
Obr. 20: Vývoj aktuálneho stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou investičných stratégií s danými konštantnými alokačnými pomermi medzi akciovým indexom S&P 500 a dlhopismi SeLFIES (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 21: Vývoj aktuálneho stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou predvolených investičných stratégií (PIS) z daných krajín (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 22: Vývoj aktuálneho stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou daných investičných stratégií založených na veku sporiteľa (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 23: Vývoj aktuálneho stavu financovania reálneho garantovaného dôchodkového príjmu získaného pomocou daných investičných stratégií založených na výnose aktív (zdroj: vlastné spracovanie dát)

V prípade lineárnych GLIDeS bol vývoj aktuálneho stavu financovania sporiteľovho cieleného reálneho dôchodkového príjmu veľmi podobný pre všetky nastavenia až do obdobia prelomu tisícročí, kde po prasknutí technologickej bubliny kleslo AFS prevažne agresívnemu nastaveniu a mierne začalo jemne zaostávať za konzervatívnym. Veľký prepad aktuálneho stavu financovania pre mierne a agresívne nastavenie lineárnych GLIDeS nastal počas globálnej finančnej krízy, kedy sa výrazne vzdialili od konzervatívneho. Následne mierne a agresívne postupne začali postupne dobiehať AFS konzervatívnych, pričom ich predbehli počas obdobia rozvoja umelej inteligencie. V danom období dosiahli agresívne lineárne GLIDeS aj najvyššie hodnoty aktuálneho stavu financovania dôchodkového reálneho príjmu sporiteľa zo všetkých typov GLIDeS.

Spojité GLIDeS mali podobný priebeh AFS ako lineárne, keď spočiatku rástlo podobne pre všetky nastavenia, potom nastal prepad po dotcom bubline nasledovaný ešte výraznejším pádom cez finančnú krízu v rokoch 2007 až 2009 a nakoniec rast AFS počas AI rozmachu. Agresívne a mierne nastavenie spojitých GLIDeS predbehlo konzervatívne len teste pred obdobím odchodu do dôchodku. Odlišnosťou oproti lineárnym bol fakt, že pri konzervatívnych spojitých GLIDeS došlo k zníženiu aktuálneho stavu financovania počas globálnej krízy. Tiež vidíme, že rozdiel v aktuálnom stave financovania dôchodkového reálneho príjmu medzi agresívnymi a miernymi spojitými GLIDeS bol menej výrazný ako u lineárnych, keďže voľba parametrov l a z bola pre spomínané nastavenia podobná.

Pri AFS-TFS GLIDeS pozorujeme podobný vývoj AFS pre všetky 3 nastavenia citlivosti na rozdiel medzi hodnotami aktuálneho a cieľového stavu financovania sporiteľovho stanoveného dôchodkového reálneho príjmu. Najprv AFS rástlo, následne po období prasknutia internetovej bubliny nastal čas stagnácie nasledovaný prepadom v čase globálnej finančnej krízy, po ktorej prišlo k postupnému zvyšovaniu aktuálneho stavu financovania s krátkym poklesom v čase pandémie COVID-19. Do krízy bola hodnota aktuálneho stavu financovania vyššia ako požadovaná, ale následne AFS kleslo pod TFS pre všetky nastavenia stratégie AFS-TFS GLIDeS. Pre silnú verziu aktuálny stav následne osciloval okolo požadovaného až do obdobia rastu akciových trhov spôsobeného masívnymi investíciami do umelej inteligencie. Do daného obdobia bolo AFS pre mierne a slabé nastavenie nižšie ako TFS a prekonalo ho až počas spomínanej expanzie trhu.

Pre dôchodkové sporivé stratégie s konštantným alokačným pomerom medzi akciovým

indexom S&P 500 a dôchodkovými dlhopismi SeLFIES je priebeh AFS podobný predchádzajúcim investičným stratégiám, pričom agresívnejšie stratégie predbehli najkonzervatívnejšiu na začiatku obdobia nárastu hodnoty indexu spôsobeného investovaním do umelej inteligencie. Rozdiel je len vo vývoji aktuálneho stavu financovania pre najkonzervatívnejšiu stratégiu 0:100 alokujúcu celý objem majetku sporiteľa do SeLFIES, pri ktorej má AFS spočiatku rastúcu tendenciu a neskôr len stagnuje, pričom ale počas väčšiny sporenia má najvyššiu hodnotu financovania. Zaujímavé pozorovanie je, že najvyšší finálny náhradový pomer dosiahla stratégia s pomerom rozdelenia prostriedkov sporiteľa medzi index S&P 500 a dlhopisy SeLFIES 75:25 a nie najagresívnejšia možnosť 100:0.

Slovenská a švédska predvolená investičná stratégia mali identický vývoj aktuálneho stavu financovania až do obdobia pred odchodom do dôchodku, keďže alokovali 100 % financií sporiteľa do akciového indexu S&P 500 do veku 50, respektíve 55 rokov a následne zmenšovali daný podiel v prospech dôchodkových dlhopisov SeLFIES o 3,5 %, respektíve 4 %. Agresívnejšie nastavenie švédskej predvolenej investičnej stratégie voči slovenskej v čase rastu hodnoty indexu S&P 500 v posledných rokoch dôchodkového sporenia malo za následok, že dosiahla vyšší výsledný náhradový pomer a prekonala aj konzervatívnu čilskú PIS. Tá investuje spočiatku len 60 %, následne 40 % a nakoniec iba 20 % majetku sporiteľa do S&P 500, ale mala skoro počas celej doby sporenia najvyšší aktuálny stav financovania reálneho dôchodkového príjmu a nakoniec predbehla agresívnejšiu slovenskú predvolenú investičnú stratégiu, keďže ju nezasiahol až tak výrazne prepad trhu počas dotcom bubliny a globálnej finančnej krízy.

Pri dôchodkových investičných stratégiách založených na veku sporiteľa, respektíve dĺžke jeho sporenia, bol priebeh aktuálneho stavu financovania dôchodkového cieľového reálneho príjmu pre jednotlivé typy stratégií rovnaký až do začiatku prudkého rastu hodnoty S&P 500 spôsobeného AI. V spomínanom období investovali sporivé stratégie Aging(3) a Aging(4), ktoré postupne zvyšujú alokáciu do akciového indexu S&P 500, prevažnú časť objemu úspor sporiteľa práve do indexu, čo spôsobilo rýchly vzostup hodnoty AFS u daných stratégií a ich odchýlenie od konzervatívnejších typov Aging(1) a Aging(2), ktoré priebežne znižovali alokáciu do indexu S&P 500.

Pre dôchodkové sporivé stratégie založené na výnose aktív, ktoré investovali sporiteľove prostriedky do akciového indexu S&P 500 alebo amerických štátnych dlhopisov s

konštantnou maturitou 7 rokov, vyzeral vývoj AFS do obdobia globálnej finančnej krízy pomerne rovnako. Následne aktuálny stav financovania reálneho dôchodkového príjmu pre stratégie Discretive a CrossEMA výrazne vzrástol, zatiaľ čo pre stratégie MaxMin, RiskTolerance a Černý-Melicherčík ostal oscilovať okolo podobnej hodnoty a až nakoniec narástol. Hlavným dôvodom je, že stratégie Discretive a CrossEMA investujú 100 % majetku do indexu S&P 500 alebo TS s konštantnou maturitou 7 rokov a majú menej prísnu alokačnú podmienku pre S&P 500 ako zvyšné stratégie.

Lepší pohľad na výsledky pre stratégie, v ktorých nie je jasne daný podiel sporiteľovho majetku alokovaného do indexu S&P 500, nám dá vykreslenie vývoja daného pomeru.

6.2.4 Vývoj alokácie sporiteľových úspor do akciového indexu S&P 500

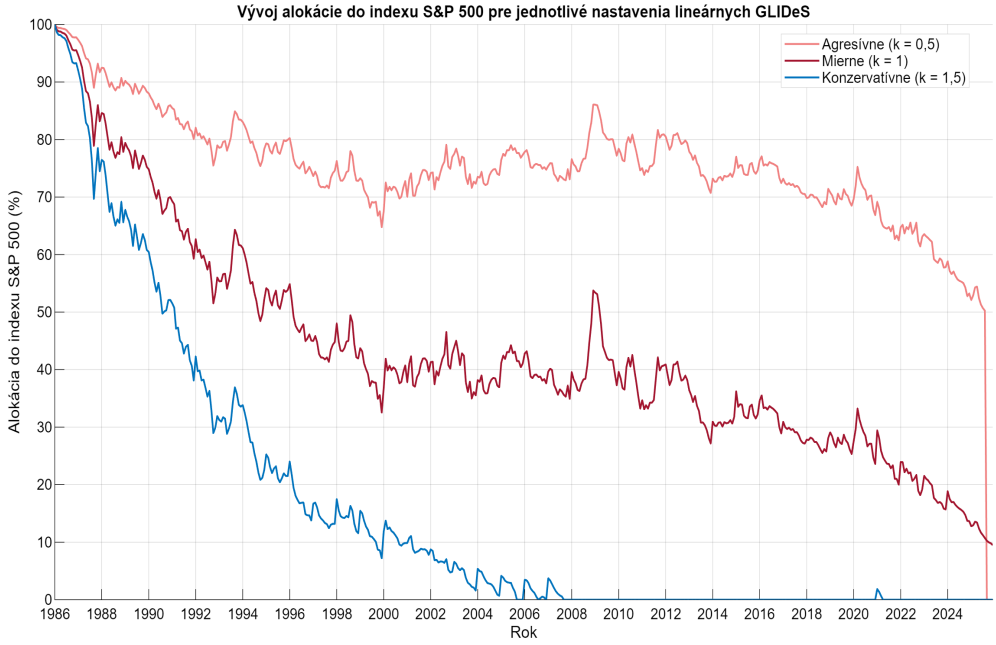
Na obrázkoch 24 až 27 sú vykreslené časové vývoje percentuálnej alokácie sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500 pri investovaní pomocou jednotlivých typov GLIDeS s rozličnými nastaveniami a vybranými sporivými stratégiami založenými na výnose aktív, teda pre také dôchodkové investičné stratégie, pri ktorých nie je alokačný pomer zjavný z ich predpisu.

V tabuľke 11 je vypísaný absolútny a percentuálny počet koľkokrát investovali dôchodkové sporivé stratégie založené na výnose aktív Discretive, CrossEMA a MaxMin prostriedky sporiteľa do indexu S&P 500, respektíve amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov, keďže dané stratégie alokujú vždy 100 % z majetku sporiteľa do práve jedného z daných finančných nástrojov.

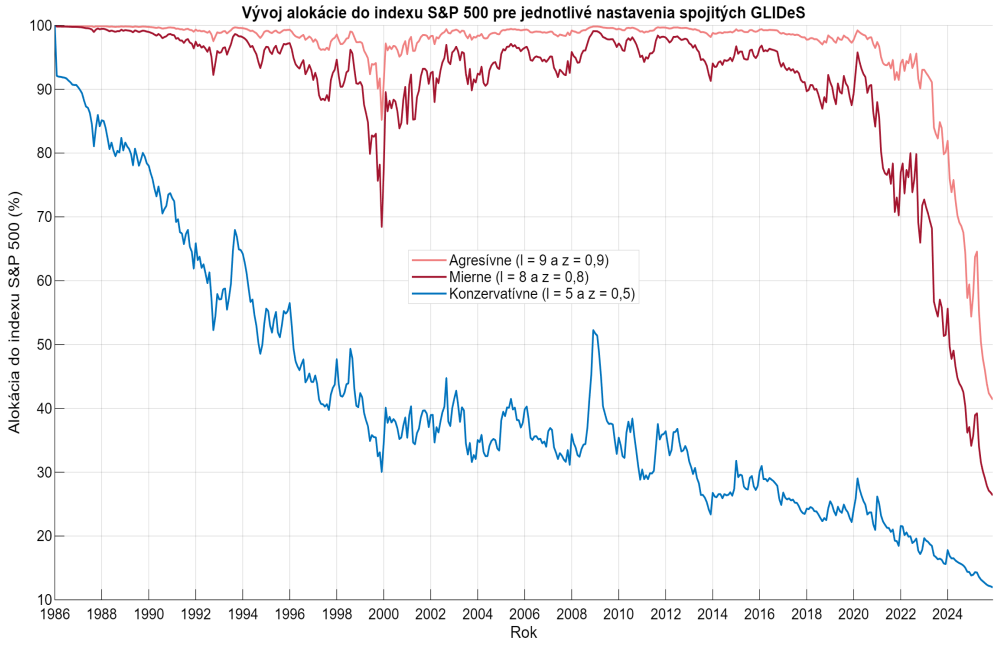
Tabuľka 11: Absolútne a percentuálne vyjadrenie počtu koľkokrát alokovali dôchodkové investičné stratégie Discretive, CrossEMA a MaxMin celý objem úspor sporiteľa do akciového indexu S&P 500 alebo amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov počas 40 ročného obdobia sporenia od 1.1.1986 do 1.12.2025, teda zo 480 možných alokácií

Stratégia	S&P 500	S&P 500 (%)	TS 7	TS 7 (%)
Discretive	326	67,92%	154	32,08%
CrossEMA	347	72,29%	133	27,71%
MaxMin	189	39,38%	291	60,62%

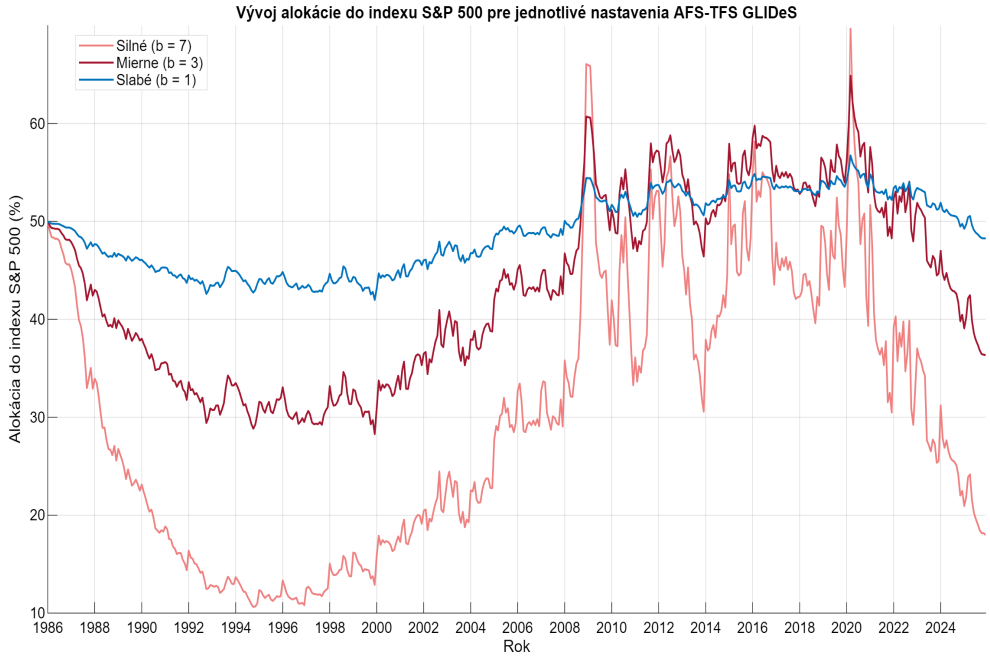
(zdroj: vlastné spracovanie dát)



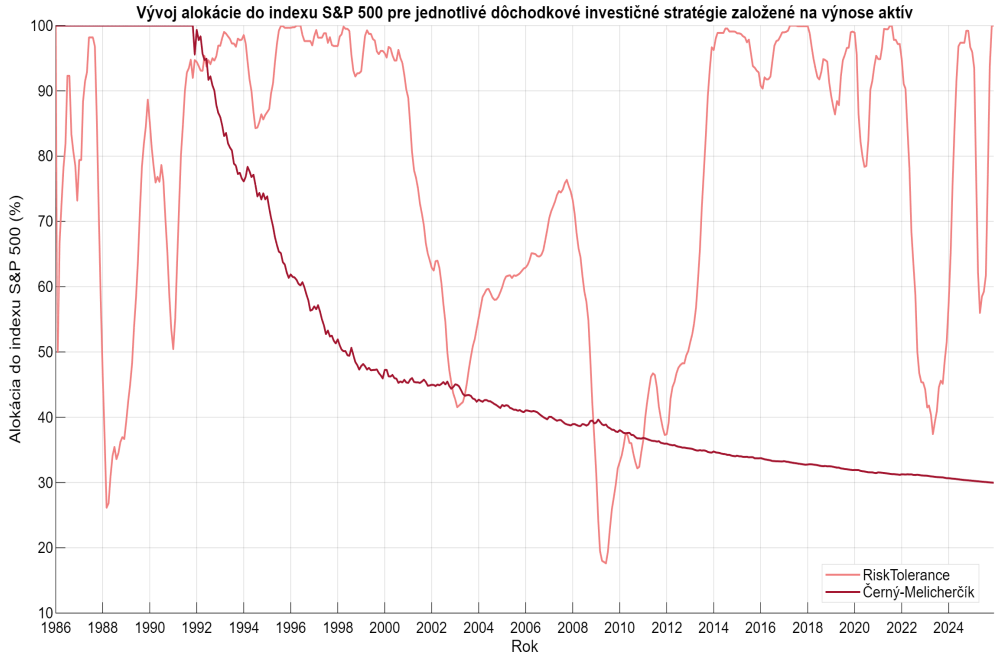
Obr. 24: Vývoj percentuálnej alokácie sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500 pri sporení lineárnymi GLIDeS s danými nastaveniami (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 25: Vývoj percentuálnej alokácie sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500 pri sporení spojitými GLIDeS s danými nastaveniami (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 26: Vývoj percentuálnej alokácie sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500 pri sporení AFS-TFS GLIDeS s danými nastaveniami (zdroj: vlastné spracovanie dát)



Obr. 27: Vývoj percentuálnej alokácie sporiteľových prostriedkov do akciového indexu S&P 500 pri sporení danými stratégiami založenými na výnose aktív (zdroj: vlastné spracovanie dát)

V prípade lineárnych GLIDeS pozorujeme, že s nárastom, respektíve prepadom aktuálneho stavu financovania cieľového dôchodkového reálneho príjmu sporiteľa klesá, respektíve vzrastá percentuálne zastúpenie sporiteľových zdrojov v indexe S&P 500 úmerne veľkosti parametra k. Preto spočiatku sledujeme stabilný pokles alokácie do S&P 500 nasledovaný nárastom pre mierne a agresívne nastavenie lineárnych GLIDeS v časoch po prasknutí technologickej bubliny, či globálnej finančnej krízy a ukončenie výraznejším poklesom v období pred odchodom do dôchodku spôsobeným rastom akciového trhu vplyvom umelej inteligencie. Vidíme taktiež, že konzervatívny typ lineárnych GLIDeS už od obdobia začiatku finančnej krízy investoval všetky prostriedky sporiteľa len do dôchodkových dlhopisov SeLFIES. Tiež si všímame, že keď AFS presiahlo hodnotu 100 % pri agresívnom nastavení, tak alokácia do akciového indexu S&P 500 ihneď klesla na 0 %.

Agresívne nastavenie spojitých GLIDeS ponechávalo, okrem jemného zníženia v čase dotcom bubliny, takmer celé úspory dôchodkového sporiteľa investované do indexu S&P 500 až do obdobia prudkého navýšenia hodnoty spomínaného indexu, ktoré bolo spojené s nárastom aktuálneho stavu financovania a teda poklesom alokácie do indexu. Skoro identický bol aj priebeh pre mierne nastavenie, keďže voľba parametrov l a z je veľmi podobná. Pre konzervatívny typ spojitých GLIDeS bol vývoj značne odlišný, keď alokácia sporiteľových financií do S&P 500 najprv postupne klesala, následne v období prasknutia technologickej bubliny stagnovala až do momentu, kedy sa výrazne zvýšila v čase globálnej krízy, po ktorej sa až do odchodu do dôchodku znižovala.

Pre AFS-TFS GLIDeS sledujeme pokles percentuálnej alokácie do akciového indexu S&P 500 v čase, keď bola hodnota aktuálneho stavu financovania (AFS) požadovaného reálneho dôchodkového príjmu sporiteľa vyššia ako cieľová (TFS). Postupný nárast danej alokácie nastal v období internetovej bubliny, pričom v čase globálnej finančnej krízy prudko vzrástla pre silné a mierne nastavenie v dôsledku výrazného poklesu AFS. Po kríze, teda v čase, keď bola hodnota AFS pod úrovňou TFS, sa miera majetku sporiteľa investovaného do indexu S&P 500 pre silné, ale aj mierne nastavenie AFS-TFS GLIDeS výrazne menila, pričom k najvýraznejšiemu nárastu došlo počas pandémie COVID-19, po ktorom nasledoval už len pokles v čase rozmachu AI. Pozorujeme, že pre investičnú stratégiu AFS-TFS GLIDeS so slabou citlivosťou na rozdiel medzi aktuálnym a cieľovým stavom financovania stanoveného dôchodkového príjmu sporiteľa sa počas celej doby

sporenia pohyboval pomer zdrojov sporiteľa v S&P 500 okolo hodnoty 50 %.

Pri dôchodkovej sporivej stratégii založenej na Samuelsonovej teórii celoživotného cyklu s názvom Černý-Melicherčík bol podiel financií investovaných do akciového indexu S&P 500 najskôr 100 %, následne nastal prudší prepad a ku koncu sporenia percentuálna alokácia sporiteľa do S&P 500 už len pomaly klesala. V prípade investičnej stratégie založenej na výnose aktív RiskTolerance sa percentuálna alokácia do indexu S&P 500 pomerne často výrazne mení, pričom veľakrát sa približuje hodnote 100 %. Najväčšie poklesy pomeru majetku sporiteľa v indexe S&P 500 nastali na začiatku sporenia, po prasknutí dotcom bubliny, v čase hospodárskej krízy, počas pandémie COVID-19 a v období začiatku vojnových konfliktov. Pre zvyšné sporivé stratégie, ktoré investujú celý objem zdrojov dôchodkového sporiteľa do akciového indexu S&P 500 alebo amerického štátneho dlhopisu s konštantnou maturitou 7 rokov, z tabuľky 11 pozorujeme, že stratégie Discretive a CrossEMA boli výrazne agresívnejšie ako stratégia MaxMin, keď v približne 70 % prípadov investovali celé úspory sporiteľa do indexu S&P 500, pričom stratégia MaxMin iba v 30 % prípadov. Daný rozdiel je spôsobený tým, že investícia do S&P 500 je v prípade stratégie MaxMin podmienená splnením až dvoch alokačných kritérií oproti iba jednému v prípade dvoch zvyšných spomínaných stratégií.

6.3 Výsledný náhradový pomer pre iné dĺžky obdobia sporenia

Taktiež sme zrealizovali historické simulácie pre odlišné dĺžky sporenia ako v predchádzajúcej časti využitých 40 rokov a to konkrétne kratšie 36 ročné obdobie s použitím potrebných hodnôt od 1.1.1990 po 1.12.2025 a zároveň dlhšie 44 ročné obdobie sporenia s dátami od začiatku roku 1982 po koniec roku 2025. Simulovali sme teda vývoj úspor pre 21, respektíve 29 ročného sporiteľa, ktorý bude pracovať do dovŕšenia veku 65 rokov.

V tabuľke 12 sú uvedené hodnoty výsledného náhradového pomeru, teda podielu dosiahnutého dôchodkového reálneho mesačného príjmu k poslednej reálnej výplate sporiteľa, nadobudnutého pomocou jednotlivých simulovaných dôchodkových sporivých stratégií za kratšie 36 ročné, respektíve dlhšie 44 ročné obdobie sporenia do 1.12.2025.

Pozorujeme, že pre kratšie 36 ročné obdobie sporenia dosiahli cieľový náhradový pomer, ktorý sme si stanovili na úrovni 100 %, iba 3 dôchodkové sporivé stratégie a to konkrétne Silné AFS-TFS GLIDeS, stratégia založená na dĺžke doby sporenia Aging(4)

Tabuľka 12: Náhradový pomer (%) získaný jednotlivými stratégiami za kratšie 36 ročné obdobie sporenia od 1.1.1990 do 1.12.2025 a dlhšie 44 ročné obdobie sporenia od 1.1.1982 do 1.12.2025

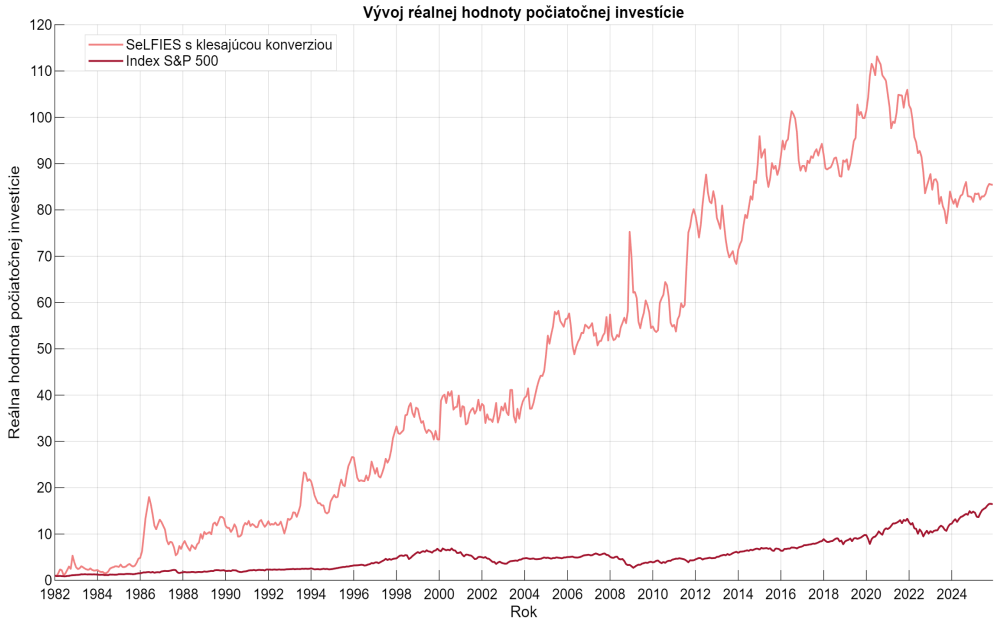
Stratégia	Náhrad. pomer - kratšie	Náhrad. pomer - dlhšie
Agresívne lineárne GLIDeS	76,15	147,31
Mierne lineárne GLIDeS	70,23	154,84
Konzervatívne lineárne GLIDeS	61,75	153,98
Agresívne spojité GLIDeS	77,52	154,78
Mierne spojité GLIDeS	75,45	154,56
Konzervatívne spojité GLIDeS	69,47	154,59
Silné AFS-TFS GLIDeS	101,40	154,57
Mierne AFS-TFS GLIDeS	89,81	174,10
Slabé AFS-TFS GLIDeS	78,55	199,12
Konštantné 100:0	79,23	127,88
Konštantné 75:25	77,39	153,76
Konštantné 50:50	71,71	172,43
Konštantné 25:75	62,49	172,76
Konštantné 0:100	50,96	150,65
PIS Slovensko	54,52	87,40
PIS Švédsko	66,33	106,81
PIS Čile	54,61	122,36
Aging(1)	62,48	127,57
Aging(2)	45,87	89,67
Aging(3)	81,72	223,52
Aging(4)	106,03	289,10
Discretive	90,26	141,82
CrossEMA	104,64	165,88
MaxMin	47,11	68,71
RiskTolerance	55,51	87,91
Černý-Melicherčík	41,61	58,81

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

a stratégia založená na výnose aktív s názvom CrossEMA. Lineárne a spojité GLIDeS zaznamenali v kratšom období sporenia podobné výsledné náhradové pomery a to v okolí 70 %, pričom z dynamických príjmovo orientovaných stratégií ho mali vo všetkých nastaveniach najvyšší AFS-TFS GLIDeS. Pri stratégiách s konštantným pomerom rozloženia sporiteľových prostriedkov platilo, že s klesajúcim podielom v akciovom indexe S&P 500, respektíve rastúcim podielom v dôchodkových dlhopisoch SeLFIES, klesal finálny náhradový pomer. Predvolené investičné stratégie v Čile a na Slovensku dosiahli skoro identický výsledok, pričom Švédska pomerne lepší. Pre stratégie založené na veku sporiteľa, respektíve dĺžke jeho sporenia, vidíme, že agresívne stratégie, ktoré na začiatku sporenia alokovali väčšinu zdrojov do dlhopisov SeLFIES a na konci väčšiu časť úspor do indexu S&P 500, mali vyšší náhradový pomer ako konzervatívne. Pri stratégiách, ktoré investovali namiesto SeLFIES do amerického štátneho dlhopisu s konštantnou 7 ročnou maturitou tiež platilo, že agresívnejšie stratégie, ktoré alokovali celý majetok sporiteľa do indexu pri splnení iba jedného kritéria skončili s lepším náhradovým pomerom ako konzervatívne.

V prípade dlhšieho 44 ročného obdobia sporenia pozorujeme, že skoro všetky dôchodkové sporivé stratégie, okrem slovenskej predvolenej investičnej stratégie, stratégie založenej na dĺžke doby sporenia Aging(2) a konzervatívnych stratégií založených na výnose aktív, ktoré buď investovali časť financií sporiteľa do S&P 500 a zvyšok do TS s konštantnou maturitou 7 rokov alebo všetky do indexu pri splnení až 2 alokačných podmienok, dosiahli výsledný náhradový pomer nad cieľovou úrovňou 100 %. Dané obdobie je špecifické, keďže na počiatku sporenia, teda začiatkom osemdesiatych rokov dvadsiateho storočia boli veľké hodnoty reálnej úrokovej miery, ktoré podľa článku [71] vyplývali z vysokých nominálnych úrokových mier nastavených Federal Reserve System (FED), teda centrálnou bankou Spojených štátov amerických, ako reakcia na dosahované vysoké úrovne inflácie. Dané vysoké nominálne úrokové sadzby boli následne dlhšie ponechané aj po poklese inflácie, a teda reálna úroková miera dosahovala podľa obrázku 10 v danom období hodnoty až 8 %, čo malo za následok veľmi nízku reálnu cenu SeLFIES. Lineárne aj spojité GLIDeS zaznamenali veľmi podobné hodnoty finálneho náhradového pomeru, keďže pomerne rýchlo dosiahli vysoké AFS nákupom lacných dôchodkových dlhopisov SeLFIES a následne alokovali už len celý majetok sporiteľa do nich. Vidíme, že konzervatívnejšie nastavenia konštantného pomeru medzi akciovým indexom S&P 500 a

dôchodkovými dlhopismi SeLFIES mali lepší náhradový pomer ako agresívnejšie a taktiež to platí aj pre PIS, kde najkonzervatívnejšia čilská dosiahla najvyšší výsledný náhradový pomer. Zo všetkých investičných stratégií získala najlepší finálny náhradový pomer stratégia založená na dĺžke sporenia Aging(4), ktorá na začiatku sporenia alokovala všetky sporiteľove prostriedky do nákupu lacných SeLFIES a na konci sporenia investovala celé úspory do indexu S&P 500 v čase jeho rastu. Dané vysvetlenie podporuje aj obrázok 28, ktorý zobrazuje časový vývoj reálnej hodnoty počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do SeLFIES s postupne klesajúcou začiatočnou konverziou 44 rokov, respektíve do akciového indexu S&P 500 v období od začiatku roku 1982 do konca roku 2025.



Obr. 28: Vývoj reálnej hodnoty počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do dôchodkových dlhopisov SeLFIES s klesajúcou počiatočnou konverziou 44 rokov a akciového indexu S&P 500 za obdobie od 1.1.1982 do 1.12.2025 (zdroj: vlastné spracovanie dát)

6.4 Zhrnutie pre GLIDeS a SeLFIES

V tabuľke 13 sú vypísané hodnoty výsledného náhradového pomeru dosiahnuté pomocou jednotlivých typov príjmovo orientovaných dôchodkových investičných stratégií GLIDeS s rôznymi nastaveniami za kratšie 36 ročné, pôvodné 40 ročné a dlhšie 44 ročné obdobie sporenia do 1.12.2025.

Tabuľka 13: Finálny náhradový pomer (%) získaný jednotlivými druhmi GLIDeS s rozličnými nastaveniami za kratšie 36 ročné obdobie od 1.1.1990, pôvodné 40 ročné obdobie od 1.1.1986 a dlhšie 44 ročné obdobie sporenia od 1.1.1982 do 1.12.2025

Stratégia / Náhradový pomer za obdobie	Kratšie - 36	Pôvodné - 40	Dlhšie - 44
Agresívne lineárne GLIDeS	76,15	101,30	147,31
Mierne lineárne GLIDeS	70,23	90,50	154,84
Konzervatívne lineárne GLIDeS	61,75	74,17	153,98
Agresívne spojité GLIDeS	77,52	93,88	154,78
Mierne spojité GLIDeS	75,45	92,84	154,56
Konzervatívne spojité GLIDeS	69,47	89,96	154,59
Silné AFS-TFS GLIDeS	101,40	121,68	154,57
Mierne AFS-TFS GLIDeS	89,81	118,70	174,10
Slabé AFS-TFS GLIDeS	78,55	106,94	199,12

(zdroj: vlastné spracovanie dát)

V tabuľke 13 pozorujeme, že všetky druhy AFS-TFS GLIDeS a agresívnejšie nastavenia lineárnych a spojitých dynamických príjmovo orientovaných sporivých stratégií dosahujú výsledky v pomernej blízkosti a aj nad cieľovým náhradovým pomerom stanoveným na úrovni 100 %. Preto by dané typy GLIDeS mohli byť vhodné stratégie pre investorov s miernym vzťahom k riziku, ktorí by chceli dosiahnuť výsledok v okolí požadovaného cieľového náhradového pomeru, pričom by ale nemuseli získať maximálne možné hodnoty výsledného náhradového pomeru dosiahnuteľné najagresívnejšími investičnými stratégiami.

Z tabuliek 10 a 12 vyplýva, že agresívnejšie dôchodkové investičné stratégie využívajúce dlhopisy SeLFIES ako relatívne bezrizikové aktívum boli schopné zabezpečiť podobný a aj vyšší výsledný náhradový pomer ako agresívne sporivé stratégie používajúce americký štátny dlhopis s konštantnou maturitou 7 rokov namiesto SeLFIES. Taktiež konzervatívne stratégie využívajúce TS s konštantnou maturitou 7 rokov dosiahli jedny z najnižších finálnych náhradových pomerov. Teda SeLFIES by mohli byť považované za vhodný relatívne bezpečný finančný nástroj na dôchodkové investovanie.

Záver

Cieľom našej diplomovej práce bolo uviesť možné riešenia problémov v súčasnosti využívaných dôchodkových investičných stratégií, ktoré boli prezentované v článku [70] a ktoré spočívajú v nevhodnej voľbe bezrizikového aktíva z hľadiska zabezpečenia reálneho dôchodkového príjmu a nezávislosti stratégií od cieľa nadobudnutia sporiteľovho požadovaného dôchodkového príjmu. Ako potenciálnu odpoveď na prvú slabinu súvisiacu s problematickou voľbou bezpečného aktíva z pohľadu garancie reálneho príjmu sme v našej práci predstavili inovatívne dôchodkové dlhopisy SeLFIES poskytujúce reálny, čiže inflačne upravený, mesačný príjem počas určitej doby po uplynutí stanoveného času. Na prípadné riešenie druhej komplikácie spočívajúcej v absencii prepojenia sporivých stratégií s cieleným dôchodkovým príjmom sporiteľa sme prezentovali dynamické príjmovo orientované dôchodkové investičné stratégie GLIDeS, ktoré alokujú prostriedky sporiteľa na základe aktuálneho stavu financovania požadovaného príjmu na dôchodku.

V úvodnej kapitole 1 sme prezentovali inovatívne, jednoduché, nízkonákladové a likvidné dôchodkové dlhopisy SeLFIES a ich brazílsku praktickú implementáciu vo forme Tesouro RendA+, ktorá je popísaná v časopiseckej práci [81]. Vysvetlili sme, prečo boli SeLFIES aplikované ako prvé práve v Brazílii, opísali sme proces ich zavedenia a spôsob ich fungovania, uviedli sme ich výhody, ale aj výzvy, ktorým čelia a ich prvotné výsledky.

Kapitola 2 bola venovaná dátam, ktoré sme využívali vo výpočtoch v diplomovej práci, ako napríklad výnosy do splatnosti alebo rozličné indexy a tiež spôsobom ich spracovania.

V časti 3 sme pomocou údajov z predchádzajúcej kapitoly vypočítali reálne hodnoty možných vhodných finančných nástrojov na dôchodkové investovanie, menovite SeLFIES, amerických štátnych dlhopisov, TIPS a akciového indexu S&P 500. Využitím daných údajov sme následne získali priemerné logaritmické a aritmetické ročné reálne výnosy a ich volatilitu pre spomínané aktíva. Taktiež sme vykreslili, respektíve vypísali konečné reálne hodnoty počiatočnej investície 1 peňažnej jednotky do popísaných nástrojov.

Kapitola 4 zachytáva vytvorenie modelu podľa článku [67], pomocou ktorého sme s využitím n-faktorovej Itôvej lemy definovanej v časti 4.1 a stochastického kalkulu odvodili vzorce na výpočet driftu a volatility reálneho príjmu kúpeného za hodnoty TS, TIPS a indexu S&P 500. V tabuľke 8 sme ukázali, že americké štátne dlhopisy s nízkou duráciou sú z dlhodobého hľadiska rizikovým aktívom v zmysle reálneho garantovaného príjmu.

V časti 5 sme zhrnuli problémy aktuálne uplatňovaných dôchodkových sporivých stratégií a ich možné riešenia. Taktiež sme popísali metodiku tvorby dynamických príjmovo orientovaných dôchodkových investičných stratégií, prezentovali sme stratégie GLIDeS, ktoré sú opísané v časopiseckej práci [58] a ktorých sme vytvorili aj vlastnú verziu. Zároveň sme predstavili rozličné dôchodkové sporivé stratégie, akými boli predvolené investičné stratégie využívané v rôznych krajinách, stratégie založené na udržiavaní konštantného pomeru medzi aktívami, taktiež postavené na dĺžke sporenia alebo na výnose aktív. V prípade stratégií využívajúcich výnosy finančných nástrojov sme pre účely porovnania zvolili namiesto SeLFIES ako bezpečné aktívum TS s konštantnou maturitou 7 rokov.

Časť 6.1 kapitoly 6 definuje reprezentatívneho dôchodkového sporiteľa a investičné predpoklady. V danej kapitole sme tiež prezentovali výsledky historickej simulácie pre 40 ročné obdobie sporenia, konkrétne finálny náhradový pomer pre jednotlivé stratégie, vývoj ich aktuálneho stavu financovania a taktiež sme znázornili priebeh alokácie prostriedkov do indexu S&P 500 pre stratégie, kde nie je jasne daný. Výsledky sme vysvetlili na základe historických súvislostí uvedených v sekcii 6.2.1, ale aj pomocou nastavení jednotlivých stratégií. Zároveň sme v časti 6.3 uviedli aj porovnanie s výsledkami za kratšie 36 a dlhšie 44 ročné obdobie sporenia. Na konci kapitoly sme zhodnotili výsledky jednotlivých simulácií pre GLIDeS, pričom sme konštatovali, že by mohli predstavovať relevantné dôchodkové sporivé stratégie.

Za prínos našej diplomovej práce pokladáme predstavenie inovatívnych dôchodkových dlhopisov SeLFIES, ktoré zabezpečujú reálny mesačný príjem, ako vhodného relatívne bezrizikového finančného nástroja z hľadiska zabezpečenia dôchodkového príjmu. Zaujímavo vnímame aj pozorovanie, že americké štátne dlhopisy s nízkou duráciou nie sú z dlhodobého hľadiska bezpečným aktívom vzhľadom na garanciu reálneho dôchodkového príjmu. Zároveň ako pozitívum považujeme prezentáciu príjmovo orientovaných dynamických investičných stratégií GLIDeS a ich vzájomné porovnanie s inými stratégiami.

Možným rozšírením našej diplomovej práce by bolo zavedenie dynamickej zmeny výšky mesačných príspevkov na dôchodkové sporenie a vykonanie Monte Carlo simulácií dôchodkového sporenia.

Zoznam použitej literatúry

[1] Baxter, M., Rennie, A.: *Financial Calculus An introduction to derivative pricing*, Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, 1996

[2] Černý, A., Melicherčík, I.: *Simple explicit formula for near-optimal stochastic lifestyling*, European Journal of Operational Research 284 (2020), 769-778, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221719310720?via%3Dihub

[3] D'Souza, D.: *The Impact of War on the Stock Markets- What Investors Need To Know*, Investopedia, 3.3.2026, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/the-impact-of-war-on-the-stock-markets-what-investors-need-to-know-11918505

[4] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Consumer Price Index for All Urban Consumers: All Items in U.S. City Average*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/CPIAUCSL

[5] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 1-Month Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS1M

[6] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 3-Month Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS3M

[7] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 6-Month Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS6M

[8] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS1

[9] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 2-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS2

[10] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 3-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS3

[11] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 5-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS5

[12] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 5-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis, Inflation-Indexed*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/FII5

[13] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 7-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS7

[14] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 7-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis, Inflation-Indexed*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/FII7

[15] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS10

[16] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis, Inflation-Indexed*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/FII10

[17] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 20-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS20

[18] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 20-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis, Inflation-Indexed*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/FII20

[19] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 30-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/GS30

[20] Federal Reserve Economic Data (FRED): *Market Yield on U.S. Treasury Securities at 30-Year Constant Maturity, Quoted on an Investment Basis, Inflation-Indexed*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/FII30

[21] Federal Reserve Economic Data (FRED): *1-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF1YR

[22] Federal Reserve Economic Data (FRED): *2-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF2YR

[23] Federal Reserve Economic Data (FRED): *3-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF3YR

[24] Federal Reserve Economic Data (FRED): *4-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF4YR

[25] Federal Reserve Economic Data (FRED): *5-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF5YR

[26] Federal Reserve Economic Data (FRED): *6-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF6YR

[27] Federal Reserve Economic Data (FRED): *7-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF7YR

[28] Federal Reserve Economic Data (FRED): *8-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF8YR

[29] Federal Reserve Economic Data (FRED): *9-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF9YR

[30] Federal Reserve Economic Data (FRED): *10-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF10YR

[31] Federal Reserve Economic Data (FRED): *11-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF11YR

[32] Federal Reserve Economic Data (FRED): *12-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF12YR

[33] Federal Reserve Economic Data (FRED): *13-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF13YR

[34] Federal Reserve Economic Data (FRED): *14-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF14YR

[35] Federal Reserve Economic Data (FRED): *15-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF15YR

[36] Federal Reserve Economic Data (FRED): *16-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF16YR

[37] Federal Reserve Economic Data (FRED): *17-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF17YR

[38] Federal Reserve Economic Data (FRED): *18-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF18YR

[39] Federal Reserve Economic Data (FRED): *19-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF19YR

[40] Federal Reserve Economic Data (FRED): *20-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF20YR

[41] Federal Reserve Economic Data (FRED): *21-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF21YR

[42] Federal Reserve Economic Data (FRED): *22-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF22YR

[43] Federal Reserve Economic Data (FRED): *23-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF23YR

[44] Federal Reserve Economic Data (FRED): *24-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF24YR

[45] Federal Reserve Economic Data (FRED): *25-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF25YR

[46] Federal Reserve Economic Data (FRED): *26-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF26YR

[47] Federal Reserve Economic Data (FRED): *27-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF27YR

[48] Federal Reserve Economic Data (FRED): *28-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF28YR

[49] Federal Reserve Economic Data (FRED): *29-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF29YR

[50] Federal Reserve Economic Data (FRED): *30-Year Expected Inflation*, dostupné na internete (23.4.2026): https://fred.stlouisfed.org/series/EXPINF30YR

[51] Gilli, M., Große, S., Schumann, E.: *Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model*, COMISEF Working Papers Series No. 031, 30.3.2010, dostupné na internete (23.4.2026): https://enricoschumann.net/COMISEF/wps031.pdf

[52] Hayes, A.: *Understanding the Dotcom Bubble: Causes, Impact, and Lessons*, Investopedia, 11.4.2026, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/terms/d/dotcom-bubble.asp

[53] Chen, J.: *What Are Treasury Inflation-Protected Securities (TIPS)?*, Investopedia, 30.9.2025, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/terms/t/tips.asp

[54] Investing.com: *S&P 500 Historical Data*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investing.com/indices/us-spx-500-historical-data

[55] Kagan, J.:*National Average Wage Index (Nawi): Meaning, Example*, Investopedia, 25.9.2022, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/terms/n/national-average-wage-index-nawi.asp

[56] Kenton, W.:*S&P 500 Index: What It's for and Why It's Important in Investing*, Investopedia, 20.11.2025, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp

[57] Kižlinová, A.: *Individuálne dôchodkové sporenie*, diplomová práca, EKF TUKE, Košice, 2016, dostupné na internete (23.4.2026): https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioForm&sid=093FABE64BBAAF12013EFF6F11AD

[58] Kobor, A., Muralidhar, A.: *Ensuring Retirement Security with Simple GLIDeS*, draft, 18.6.2019

[59] Kolakowski, M.:*Investing Lessons Learned from the Pandemic*, Investopedia, 22.9.2021, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/investing-lessons-learned-from-the-pandemic-5200463

[60] Košťany, L.: *Predvolené investičné stratégie*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2024, dostupné na internete (23.4.2026): https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioFormChildC1PBT&sid=A6A9937D4AB687F47BC48EA9E4AF&seo=CRZP-detail-kniha

[61] Laidley, C.:*AI Stocks Have Fueled the Bull Market for 3 Years—Will the Momentum Continue?*, Investopedia, 1.10.2025, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/ai-stocks-have-fueled-the-bull-market-for-3-years-will-the-momentum-continue-11820797

[62] MathWorks, Inc.: *bndprice*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.mathworks.com/help/releases/R2025a/finance/bndprice.html

[63] MathWorks, Inc.: *fininstrument*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.mathworks.com/help/releases/R2025a/fininst/fininstrument_function.html

[64] MathWorks, Inc.: *fitSvensson*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.mathworks.com/help/releases/R2025a/fininst/fitsvensson.html

[65] MathWorks, Inc.: *quadprog*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.mathworks.com/help/releases/R2025a/optim/ug/quadprog.html?s_tid=doc_ta

[66] MathWorks, Inc.: *zerorates*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.mathworks.com/help/releases/R2025a/fininst/parametercurve.zerorates_paramcurve.html?overload=zerorates+false

[67] Melicherčík, I.: *Income-oriented retirement investment model*, draft, 27.3.2026

[68] Melicherčík, I.: *Pension saving strategies based on Samuelson's lifecycle theory*, Pension - Ageing - Public Finances: Future challenges and opportunities, EU SAV, Bratislava, 2017, dostupné na internete (23.4.2026): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/melichercik/papers/melichercik_Pension_saving_strategies.pdf

[69] Melicherčík, I.: *Stochastický kalkulus a aplikácie, Prezentácia č. 5*, slajdy z prednášok, FMFI UK, Bratislava

[70] Merton, R., C.: *The Crisis in Retirement Planning*, Harvard Business Review, July-August 2014

[71] Niedens, L.: *One Year of Rate Hikes Ends Decades of Bond Market Prosperity*, Investopedia, 24.3.2023, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/bonds-bear-market-7370474

[72] OECD: *OECD Pensions Outlook 2020*, OECD Publishing, Paris, 2020

[73] Singh M.: *The 2008 Financial Crisis Explained*, Investopedia, 25.11.2025, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.investopedia.com/articles/economics/09/financial-crisis-review.asp

[74] Social Security Administration (SSA): *National Average Wage Index*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.ssa.gov/oact/cola/AWI.html

[75] Šebo, J., Melicherčík, I., Mešťan, M., Králik, I.: *Aktívna správa úspor v systéme starobného dôchodkového sporenia*, Wolters Kluwer, Bratislava, 2017

[76] Tesouro Direto: *Cálculo da Rentabilidade dos Títulos Públicos Ofertados no Tesouro Direto Tesouro RendA+ – NTN-B1* , dostupné na internete (23.4.2026): https://www.tesourodireto.com.br/documents/d/guest/tesouro_renda_mais

[77] Tesouro Direto: *Rendimento dos Títulos*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.tesourodireto.com.br/produtos/dados-sobre-titulos/rendimento-dos-titulos#0

[78] Tesouro Direto: *Tesouro RendA+*, dostupné na internete (23.4.2026): https://www.tesourodireto.com.br/produtos/titulos/renda-mais

[79] Tesouro Nacional: *Balanço do Tesouro Direto – Agosto 2025*, 24.9.2025, dostupné na internete (23.4.2026): https://cdn.tesouro.gov.br/sistemas-internos/apex/producao/sistemas/thot/arquivos/publicacoes/52955_2436639/Balan%C3%A7o%20TD%20-%20Arte%20correta%20-%20Agosto%202025.pdf

[80] Tím Oranžová Obálka: *Predvolená sporivá stratégia v II. pilieri – čo tak odkopírovať Švédov?*, 11.10.2022, dostupné na internete (23.4.2026): https://oranzovaobalka.sk/dochodok-a-sporenie/predvolena-sporiva-strategia-v-ii-pilieri-co-tak-odkopirovat-svedov/

[81] Vitorino, A., Muralidhar, A.: *How Brazil's RendA+ Bond Could Render DC Retirement Risk Obsolete: A Case Study*, Retirement Management Journal 12 (2023), No 1, 32-43

[82] Wahlstrøm, R. R., Paraschiv, F., Schürle, M.: *A Comparative Analysis of Parsimonious Yield Curve Models with Focus on the Nelson-Siegel, Svensson and Bliss Versions*, Computational Economics 59 (2022), 967–1004, dostupné na internete (23.4.2026): https://link.springer.com/article/10.1007/s10614-021-10113-w

[83] Zboroňová, P.: *Štvrtý pilier dôchodkového sporenia*, bakalárska práca, EF UMB, Banská Bystrica, 2016, dostupné na internete (23.4.2026): https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioForm&sid=6CC5FEA37B0036024DF13D918D04