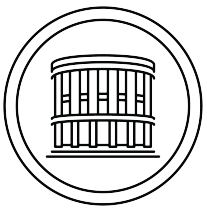
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Metódy najbližších vzorov v obálkovej analýze dát

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2026 Bc. Matej KULA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Metódy najbližších vzorov v obálkovej analýze dát

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	ekonomicko-finančná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2026 **Bc. Matej KULA**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Matej Kula
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Metódy najbližších vzorov v obálkovej analýze dát
The closest target methods in data envelopment analysis

Anotácia: V obálkovej analýze dát sa výkonnosť jednotlivých útvarov odvodzuje pomocou rozličných mier efektivity, ktoré hľadajú najvzdialenejšie vzory na efektívnej hranici. Výhodou je, že sa to dá urobiť pomocou jedinej úlohy lineárneho programovania. Existujú však aj iné prístupy, ktoré odvodzujú efektivitu pomocou efektívnych vzorov, ktoré sú v určitom zmysle najbližšie k testovanému útvaru. Tieto vedú na potrebu identifikácie všetkých efektívnych útvarov a potom nad nimi definujú úlohu lineárneho programovania, do ktorej navyše vstupuje podmienka komplementarity.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „Metódy najbližších vzorov v obálkovej analýze dát“ vrátane všetkých jej príloh a obrázkov som vypracoval samostatne a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použil v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie sa vzťahuje výlučne na formálnu úpravu textu, preto v práci ďalej nie sú osobitne označené.

V Bratislave dňa 6.5.2026

.....

Bc. Matej Kula

Poďakovanie Ďakujem svojej školiteľke a vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za ochotu, pomoc, podporu a trpezlivosť pri písaní tejto práce, za poskytnuté zdroje literatúry a všetok investovaný čas.

Abstrakt v štátnom jazyku

KULA, Matej: Metódy najbližších vzorov v obálkovej analýze dát [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2026, 88 s.

Diplomová práca sa zaoberá metódami najbližších vzorov v obálkovej analýze dát. Štandardné slack-based DEA modely identifikujú efektívne vzory maximalizovaním rezerv - slackov, čím získavajú vzhľadom na danú mieru najvzdialenejší vzor na silne efektívnej hranici. Tieto vzory však môžu byť pre neefektívne útvary v krátkodobom horizonte ťažko dosiahnuteľné. Metódy najbližších vzorov tento problém z časti eliminujú tým, že hľadajú efektívny vzor, ktorého dosiahnutie vyžaduje najmenšiu zmenu vo vstupoch a výstupoch.

V práci nadväzujeme na článok autorov Aparicio et al. (2007) [2] a navrhujeme zjednodušenú a zovšeobecnenú charakterizáciu silne efektívnej hranice pre variabilné aj konštantné výnosy z rozsahu, ktorá nevyžaduje vopred identifikovať extremálne efektívne útvary a podmienku komplementarity odvodzuje priamo z vlastností opornej nadroviny. V práci najskôr predstavíme Všeobecný slack-based model a jeho troch reprezentantov, ktorými sú Aditívny model s váhami, Slack-based measure model a Russell Measure model a popíšeme ich vlastnosti. Následne na základe našej reprezentácie silne efektívnej hranice produkčnej množiny formulujeme Všeobecný slack-based model najbližších vzorov a jeho troch reprezentantov.

Modely implementujeme v jazyku *Python* s použitím komerčného solvera *Gurobi* a aplikujeme na dáta 27 európskych komerčných bánk v rámci tzv. *intermediation* prístupu. Pre každý neefektívny útvar následne nájdeme jeho optimálny a najbližší vzor v zmysle spomínaných modelov a na ich porovnaní ukazujeme, že prechod metódu najbližších vzorov vedie k ľahšie dosiahnuteľným cieľom.

Kľúčové slová: Data Envelopment Analysis (DEA), Najbližšie vzory, Slack-based modely, Podmienka komplementarity, Oporná nadrovina, Efektívna hranica, Efektivita bánk

Abstract

KULA, Matej: The closest target methods in data envelopment analysis [Master's thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2026, 88 pages.

This thesis investigates closest target methods in data envelopment analysis. Standard slack-based DEA models identify efficient targets by maximizing slacks, thereby obtaining, with respect to the given measure, the farthest target on the strongly efficient frontier. Such targets, however, may be difficult to attain for inefficient units in the short run. Closest target methods partially eliminate this problem by seeking an efficient target whose attainment requires the smallest possible change in inputs and outputs.

In this thesis, we build on the article by Aparicio et al. (2007) [2] and propose a simplified and generalized characterization of strongly efficient frontier under both variable and constant returns to scale. This characterization does not require prior identification of extreme efficient units and derives the complementarity condition directly from properties of the supporting hyperplane. In the thesis we first introduce the General slack-based model and its three representatives, the Weighted additive model, the Slack-based measure model, and the Russell Measure model, and describe their properties. Subsequently, based on our representation of the strongly efficient frontier of the production set, we formulate the General slack-based model for closest targets and its three representatives.

We implement the models in *Python* using the commercial solver *Gurobi* and apply them to data from 27 European commercial banks within the so-called *intermediation* approach. For each inefficient unit we then determine its optimal and closest target in the sense of the mentioned models, and show through their comparison that the transition to the closest target method leads to more easily attainable benchmarks.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), Closest targets, Slack-based models, Complementarity condition, Supporting hyperplane, Efficient frontier, Bank efficiency

Obsah

Úvod **10**

1 Úvod do DEA **12**

1.1 Úvod do DEA a základná symbolika 12

1.2 Aproximácia technologickej množiny 13

1.3 Efektívny bod v T 15

1.4 Oporná nadrovina k T 17

2 Modely založené na slackoch **18**

2.1 Aditívne modely s váhami 21

2.2 SBM model 23

2.3 Russell measure model 25

3 Najbližšie vzory v DEA **28**

3.1 História najbližších vzorov v DEA 28

3.2 Charakterizácia $\partial^S T$ pomocou podmienky komplementarity 31

3.3 Podmienka komplementarity a jej implementácia 33

4 Slack-based modely najbližších vzorov **34**

4.1 Všeobecný slack-based model 34

4.2 Aditívne modely s váhami 36

4.3 SBM model 37

4.4 Russell Measure model 38

5 Empirická ilustrácia **42**

5.1 Dáta 42

5.2 Implementácia modelov 44

5.2.1 Aditívne modely s váhami AD^w a mAD^w 46

5.2.2 Modely SBM a $mSBM$ 47

5.2.3 Modely RM a mRM 49

5.3 Porovnanie štandardných a najbližších vzorov 51

5.3.1 MONETA Money Bank 51

5.3.2 Oberbank . . . 52
5.3.3 Barclays . . . 53
5.3.4 OTP Group . . . 54
5.3.5 ING Group . . . 55
5.3.6 ABN AMRO . . . 56
5.3.7 Záverečné zhrnutie . . . 57
5.4 Porovnanie referenčných množín . . . 58

Záver **60**

Príloha A **65**
Optimálne vzory v AD^w modeli . . . 65
Najbližšie vzory v mAD^w modeli . . . 66
Optimálne vzory v SBM modeli . . . 67
Najbližšie vzory v $mSBM$ modeli . . . 68
Optimálne vzory v RM modeli . . . 69
Najbližšie vzory v mRM modeli . . . 70

Príloha B **71**
Referenčné množiny v AD^w modeli . . . 71
Referenčné množiny v mAD^w modeli . . . 72
Referenčné množiny v SBM modeli . . . 73
Referenčné množiny v $mSBM$ modeli . . . 74
Referenčné množiny v RM modeli . . . 75
Referenčné množiny v mRM modeli . . . 76

Kód v *Python* **77**

Úvod

Obálková analýza dát (ďalej hlavne Data Envelopment analysis, DEA) je neparametrická metóda ktorá sa zaoberá meraním efektivity jednotlivých sledovaných útvarov. Sledovanými útvarmi môžu byť napríklad školy, nemocnice, ale aj pobočky komerčnej banky (analyzované v [23]). Jej teóriu položil Farrell v článku [7] z roku 1957, na ktorý nadviazali autori Charnes, Cooper a Rhodes v roku 1978 publikáciou [16]. V spomínanom článku sformulovali úlohu zlomkového programovania na meranie efektivity útvarov a z nej odvodili prvý DEA model lineárneho programovania. Skupina DEA modelov sa od pôvodného modlu postupne rozširovala a dnes pokrýva širokú paletu radiálnych aj neradiálnych prístupov.

Pri meraní efektivity a hľadaní efektívnych útvarov sa v DEA používa aproximácia technologickej množiny, získanou ako konvexná obálka z pozorovaných dát rozšírená o vlastnosť tzv. *free disposability*. Efektívne útvary sú tie, ktoré ležia na hranici tejto množiny a pre neefektívne útvary na tejto hranici hľadáme tzv. efektívne vzory, teda projekcie naň. Neefektívny útvar tým dostáva hodnoty, na ktoré musí znížiť vstupy a/alebo zvýšiť výstupy aby sa stal tiež efektívnym.

V *slack-based* modeloch sa tieto projekcie získavajú maximalizáciou slackov, teda vstupných a výstupných rezerv. Touto maximalizáciou slackov zachytávajú neefektivitu v každej zložke a zaručujú, že výsledná projekcia leží na silne efektívnej hranici. Zároveň touto maximalizáciou zaručujeme, že nájdený vzor bude od sledovaného útvaru najvzdialenejší a teda na jeho dosiahnutie bude potrebné vynaložiť relatívne najväčšie úsilie. Hlavne v krátkodobom horizonte môžu byť takéto vzory pre neefektívny útvar nedosiahnuteľné.

Metódy najbližších vzorov, ktorým sa budeme v tejto diplomovej práci zaoberať tento problém eliminujú. Ich výsledkom je bod na silne efektívnej hranici, na ktorého dosiahnutie je potrebné vynaložiť čo najmenšie úsilie a zmenu na vstupoch a výstupoch. Tieto metódy musia byť navrhnuté tak, aby zachovávali projekciu na efektívnu hranicu technologickej množiny a preto je potrebné túto hranicu analyticky popísať spôsobom vhodným na numerickú realizáciu. Dôvod, prečo táto úloha nie je triviálna spočíva v tom, že efektívna hranica technologickej množiny vo všeobecnosti nie je konvexná.

Hľadaniu najbližších vzorov sa v DEA literatúre venuje pozornosť už niekoľko desať-

ročí, pričom kľúčový posun priniesla práca autorov Aparicio et al. [2], ktorá umožnila formulovať túto úlohu jednotne v rámci matematického programovania.

V našej práci budeme z článku Aparicio et al. vychádzať. Ich charakterizáciu hranice však zjednodušíme a zovšeobecníme a pomocou nej sformulujeme ekvivalenty štandardných slack-based modelov v tvare hľadania najbližších vzorov. Jednotlivé modely následne implementujeme v jazyku *Python* s použitím komerčného solvera *Gurobi* a aplikujeme na dátach z bankového sektora. Analyzovať budeme 27 európskych komerčných bánk za rok 2025 v rámci tzv. *intermediation* prístupu. Výsledné dosiahnuté najbližšie vzory a zmeny vo vstupoch a výstupoch potrebné na ich dosiahnutie porovnáme so vzormi získanými pomocou štandardných modelov a ukážeme, ako prechod na metódu najbližších vzorov ovplyvňujú dosiahnuteľnosť navrhovaných cieľov v praxi.

Práca je organizovaná nasledovne. V Kapitole 1 zavedieme základné pojmy a symboliku DEA, ktorú budeme v práci používať. V kapitole 2 si predstavíme Všeobecný slack-based model a jeho 3 reprezentantov, ktorých si ilustrujeme na jednoduchých príkladoch. Tieto modely budú tvoriť referenčný rámec v našej práci . Kapitola 3 obsahuje historický prehľad metód najbližších vzorov, pôvodný výsledok práce Aparicio et al. [2]. Ďalej formuluje a dokazuje našu charakterizáciu silne efektívnej hranice a náš návrh numerickej implementácie. V Kapitole 4 z tejto charakterizácie odvodíme Všeobecný slack-based model najbližších vzorov a ekvivalentných reprezentantov, ktorých si taktiež ilustrujeme na príkladoch. Kapitola 5 obsahuje empirickú aplikáciu na bankové dáta a porovnanie štandardných a najbližších vzorov pre jednotlivé útvary.

1 Úvod do DEA

Pre správne a jednoznačné porozumenie problematiky obálkovej analýzy dát (DEA) a jej modelov si v prvej kapitole zavedieme základné pojmy a symboliku. Hlavným zdrojom, z ktorého preberieme značenie, budú skriptá [10] a kniha [6], ktoré zdieľajú základné značenie s pôvodným článkom uvádzajúcim DEA [16].

1.1 Úvod do DEA a základná symbolika

Obálková analýza dát je metodológia na získavanie relatívnej efektivity sledovaných útvarov (DMUs) pri vykonávaní pozorovanej činnosti. V ekonomickej teórii pozorovanú činnosť označujeme ako technológiu alebo produkciu. Technológiu všeobecne charakterizujeme pomocou m vstupov $I_i, i = 1, \ldots, m$ a s výstupov $O_r, r = 1, \ldots, s$. Za vstupy môžeme považovať rôzne náklady, ktoré sa v technológii spotrebovávajú a výstupy y sú produkty z technológie. Zvyčajne sa v DEA modeloch za vstupy považujú napríklad finančné a personálne náklady a za výstupy kvantifikovateľné služby, počet vyrobených produktov alebo tržby.

Konkrétne hodnoty vstupov a výstupov sú pre technológiu označované vektormi $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^s$.

Produkčná množina našej technológia je každá dvojica (x, y), ktorá je pre ňu prípustná, teda v danej technológii vieme z množstva x vstupov vyrobiť y výstupov. Táto množina všetkých prípustných dvojíc sa tiež nazýva množina produkčných možností (PPS), prípadne technologická množina T.

$$T = \{(x, y) \mid \text{produkcia } y \text{ je dosiahnuteľná zo vstupov } x\} \tag{1.1}$$

Vlastnosti množiny T sa podrobne analyzujú v ekonómii. Pre potreby DEA modelov vychádzajú z jednorozmerného prípadu, teda pre technológiu jedného vstupu a výstupu, kde zostrojíme T ako hypograf rastúcej a konkávnej produkčnej funkcie. Z tejto konštrukcie dostávame konvexnosť množiny T, vlastnosť *free disposability* a prípadne druh výnosov z rozsahu.

Nakoľko vo všeobecnosti nepoznáme teoretickú technologickú množinu, v obálkovej analýze dát pracujeme s jej aproximáciou spĺňajúcou vyššie spomenuté vlastnosti. Tieto vlastnosti aplikujeme na pozorované dáta útvarov, ktoré analyzujeme.

V analýze sledujeme n homogénnych útvarov, samostatne rozhodovacích sa jednotiek (*Decision making unit*). V DEA ich označujeme skratkou DMU_j, pre $j = 1, 2, ...n$. Každé DMU môže reprezentovať jednotlivého výrobcu alebo inštitúciu, ktorú analyzujeme a rozhoduje o premieňaní vstupov na výstupy samé za seba, nezávisle od rozhodovania ostatných pozorovaných útvarov. Pre každé DMU_j označujeme vektor vstupov x_j a vektor výstupov y_j:

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

kde x_{ij} reprezentuje hodnotu $i-$teho vstupu a y_{rj} hodnotu $r-$tého výstupu pre $j-$ty útvar.

Celú sadu pozorovaných dát môžeme teda maticovo zapísať pomocou matice vstupov X a matice výstupov Y: $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matice vstupov a $Y \in \mathbb{R}^{s \times n}$:

$$X := \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1j} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \ldots & x_{ij} & \ldots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mj} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}, \qquad Y := \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1j} & \ldots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \ldots & y_{rj} & \ldots & y_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \ldots & y_{rj} & \ldots & y_{rn} \end{pmatrix}$$

Teda vektor vstupov x_j pre DMU_j predstavuje $j-$ty stĺpec matice X a vektor výstupov y_j pre DMU_j predstavuje $j-$ty stĺpec matice Y.

Pre aktuálne analyzovaný útvar budeme používať index $o \in \{1, \ldots, n\}$, takže vektory vstupov a výstupov pre analyzovaný útvar budú x_o, respektíve y_o.

1.2 Aproximácia technologickej množiny

Označíme si množinu pozorovaných bodov $Z := \{(x_j, y_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$. Nakoľko pozorované hodnoty (x_j, y_j) sú aj prípustnými pre skúmanú technologickú množinu, $Z \subset T$.

Keď už máme zadefinované základné značenie, môžeme zostrojiť aproximáciu technologickej množiny.

Technologická množina T v DEA spĺňa nasledujúce axiómy obsiahnuté v [24]:

(A1) **Inklúzia**: Všetky generujúce body patriace Z patria aj do T - $\forall(x, y) \in Z, (x, y) \in T$

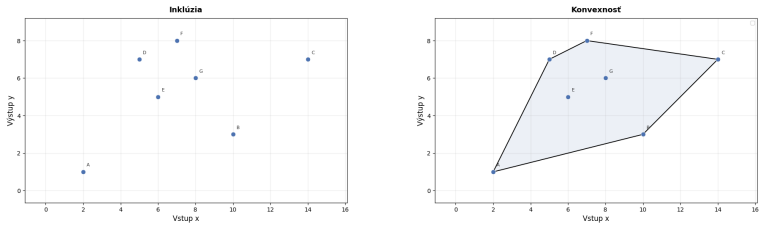
(A2) **Konvexnosť**: Množina T je konvexná - $\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T, \forall\lambda \in [0, 1], \lambda\cdot(x_1, y_1)+(1-\lambda)\cdot(x_2, y_2) \in T$

(A3) **Free disposability**: S každým bodom množina T obsahuje aj všetky body, ktoré majú väčšie, nanajvýš rovné vstupy a menšie, nanajvýš rovnaké výstupy - $\forall(x, y) \in T, (x', y') : x' \geq x, y' \leq y \in T$

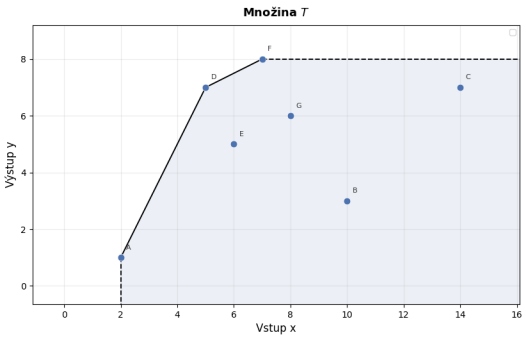
(A4) **Typ výnosov z rozsahu**: Doplňujúce ohraničenia podľa zvolených výnosov z rozsahu.

(A5) **Minimálna aproximácia**: Technologická množina T je najmenšia možná množina spĺňajúca axiómy (A1)-(A4).

Konštrukcia množiny T v prípade jedného vstupu a jedného výstupu s variabilnými výnosmi z rozsahu je zobrazená na Obr.1 a 2.



Obr. 1: Aproximácia množiny T po aplikovaní (A1) a (A2)



Obr. 2: Finálna Aproximácia množiny T pre variabilné výnosy z rozsahu

V tejto práci budeme pracovať s dvomi typmi produkčných množín. Prvou je množina popísaná v [10] ako

$$T_{VRS} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m+s}} \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}. \tag{1.2}$$

Táto množina, ako aproximácia množiny produkčných možnosti odpovedá variabilným výnosom z rozsahu.
Množina, ktorá odpovedá konštantným výnosom z rozsahu má zápis v tvare

$$T_{CRS} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m+s}} \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0 \right\}. \tag{1.3}$$

Takto zostrojená množina T_{VRS} je uzavretá konvexná polyedrická množina a je ohraničená v smeroch určených vektormi $(x_S, y_S) : x_S \leq 0_m, y_S \geq 0_s$. Podobe množina T_{CRS} je uzavretý konvexný polyedrický kužeľ ohraničený v smeroch (x_S, y_S).

1.3 Efektívny bod v T

V rámci DEA modelovania sa zaoberáme efektivitou jednotlivých útvarov. Aby sme vedeli určiť, či je sledovaný útvar DMU_o v našich modeloch efektívny, musíme si definovať *Pareto-Koopmans*-efektívne body pomocou dominancie.

Na správne zadefinovanie dominancie medzi bodov v priestore $\mathbb{R}^{\mathbf{m+s}}$ si zavedieme značenia vektorových nerovností.

Pre vektory $x, x' \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ hovoríme, že vektor x' je menší, nanajvýš rovný ako x práve vtedy, keď je každá zložka vektora x' menšia, nanajvýš rovná ako korešpondujúca vektora x, teda $x' \leq x \Leftrightarrow x'_i \leq x_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$.
Podobne hovoríme, že vektor x' je ostro menší ako x práve vtedy, keď je jeho každá zložka ostro menšia ako korešpondujúca zložka vektora x. V matematickom zápise teda dostávame $x' < x \Leftrightarrow x'_i < x_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Tieto tvrdenia platia analogicky pre $y, y' \in \mathbb{R}^{\mathbf{s}}$ a pre opačné nerovnosti.

Typy dominancií: Hovoríme, že bod (x', y') **slabo dominuje** bodu (x, y) ($(x', y') \succeq (x, y)$), ak platí: $x' \leq x, y' \geq y$.
Navyše ak aspoň jedna z daných nerovností je ostrá, teda $(x', y') \neq (x, y)$, bod (x', y') **dominuje** bodu (x, y) ($(x', y') \succnsim (x, y)$).
Ak sú obe nerovnosti ostré, teda $x' < x, y' > y$, hovoríme o **silnej dominancii** bodu (x', y') nad bodom (x, y) ($(x', y') \succ (x, y)$).
Medzi týmito pojmami existuje vzťah silná dominancia $\Rightarrow$ dominancia $\Rightarrow$ slabá dominancia.

Po zadefinovaní týchto dominancií môžeme hovoriť o efektívnosti bodov.

Bod $(x, y) \in T$ je **(silne) efektívny** (*(strongly) efficient*), ak neexistuje $(x', y') \in T : (x', y') \not\succeq (x, y)$. Podobne bod $(x, y) \in T$ je **slabo efektívny** (*weakly efficient*), ak neexistuje $(x', y') \in T : (x', y') \succ (x, y)$.

Bod, ktorý nie je efektívny, ani slabo efektívny nazývame **neefektívnym** bodom v T.

Z týchto definícií je zrejmé, že efektívne body ležia na hranici T. Medzi efektívnymi bodmi platí, že každý silne efektívny bod je zároveň aj slabo efektívny. Slabo efektívne body teda tvoria hranicu technologickej množiny ∂T. Túto hranicu si následne vieme rozložiť na:

Množinu

$$\partial^S T := \{(x, y) \in T \mid \nexists (x', y') \in T : (x', y') \succsim (x, y)\}, \tag{1.4}$$

teda množinu silne efektívnych bodov v T budeme ďalej v práci nazývať **(silno) efektívna hranica** a množinu slabo, ale nie silne efektívnych bodov v T,

$$\partial^W T := \{(x, y) \in T \mid \exists (x', y') \in T : (x', y') \succsim (x, y)\} \tag{1.5}$$

budeme nazývať **slabo efektívna hranica**.

Potom zrejme $\partial T = \partial^S T \cup \partial^W T$, a $\partial^W T = \partial T \setminus \partial^S T$, respektíve z opačnej strany $\partial^S T = \partial T \setminus \partial^W T$ a $\partial^S T \cap \partial^W T = \emptyset$.

Z množiny silne efektívnych bodov vieme vybrať podmnožinu takzvaných **extremálnych bodov** (extrémne efektívnych bodov). Extrémne efektívne body sú tie body ležiace na silne efektívnej hranici, ktoré nie sú vyjadriteľné ako lineárna kombinácia iných bodov definujúcich hranicu $\partial^S T$. Takéto body budeme označovať E.

Pre každé $(x, y) \in T$ vieme definovať pojem jeho vzoru a efektívneho vzoru.

Nech $(x, y) \in T$. Potom **vzorom** bodu (x, y) v množine T rozumieme ľubovoľný bod $(x', y') \in T$, ktorý slabo dominuje bodu (x, y). Navyše, ak je vzor (x', y') efektívny v množine T, teda neexistuje bod v množine T, ktorý by mu dominoval, nazývame ho **efektívnym vzorom**.

Z definície vyššie je zrejmé, že ak bod $(x', y') \in T$ je efektívnym bodom v T, nemá okrem samého seba žiadne vzory v T.

1.4 Oporná nadrovina k T

Je zrejmé, že obe technologické množiny, T_{VRS} a T_{CRS} sú polyedrické množiny a vieme ich teda zapísať ako prienik konečného počtu afinných polpriestorov $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. V našom ponímaní dát $x \in \mathbb{R}^m$ a $y \in \mathbb{R}^s$ môžeme predpokladať afinné polpriestory v $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ v tvare

$$\mathcal{H}(u, v, \sigma) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s : u^T y - v^T x \leq \sigma\right\}, \tag{1.6}$$

pričom uvažujeme nenulový vektor $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ a konštantu $\sigma \in \mathbb{R}$. Poznamenajme, že bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať nezápornosť u, v. Ďalej si zadefinujeme nadrovinu priestoru $\mathcal{H}(u, v, \sigma)$ ako jeho hranicu, teda

$$\mathbb{H}(u, v, \sigma) := \partial\mathcal{H}(u, v, \sigma) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s : u^T y - v^T x = \sigma\right\}. \tag{1.7}$$

Nadrovina $\mathbb{H}(u, v, \sigma)$ sa nazýva **opornou nadrovinou** k T, ak $T \subseteq \mathcal{H}(u, v, \sigma)$ a zároveň $\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in T : (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{H}(u, v, \sigma)$. Alternatívne zapísané, ak $\forall(x, y) \in T : u^T y - v^T x \leq \sigma \wedge \exists(\bar{x}, \bar{y}) \in T : u^T \bar{y} - v^T \bar{x} = \sigma$.

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom známeho výsledku z konvexnej analýzy (napr. [22]):

Tvrdenie 1.1 (Existencia opornej nadroviny)**.** *Pre každý bod $(x, y) \in \partial T$ existuje oporná nadrovina $\mathbb{H}(u, v, \sigma)$ k T v bode (x, y).*

V našej práci budeme využívať aj nasledovné, v DEA často používané tvrdenie (napr. [14]).

Tvrdenie 1.2 (Efektívna hranica a oporná nadrovina)**.** *Nech $(x, y) \in T$. Potom $(x, y) \in \partial^S T$ vtedy a len vtedy, ak existuje taká oporná nadrovina $\mathbb{H}(u, v, \sigma)$ k T v bode (x, y), že $u > 0, v > 0$.*

2 Modely založené na slackoch

V tejto kapitole predstavíme modely založené na slackoch (ang. *slack-based models*), ktoré tvoria jednotný základ pre neorientované, tzv. grafové miery efektivity v obálkovej analýze dát.

Na rozdiel od radiálnych modelov [13] (ang. *path-based models*), ktoré hľadajú optimálny vzor sledovaním parametrickej krivky od sledovaného útvaru smerom k hranici množiny T , a teda radiálne skracujú vstupy alebo predlžujú výstupy, slack-based modely merajú neefektívnosť individuálne pre každý vstup a výstup. Túto neefektívnosť merajú pomocou slackov $s^x \in \mathbb{R}^m$ a $s^y \in \mathbb{R}^s$.

Všeobecný *slack-based model* s aditívnymi slackmi aplikovaný DMU_o sa formuluje v tvare:

$$\begin{aligned} GSB_o := \min_{\lambda, s^x, s^y} \mathcal{A}_o(s^x, s^y) \\ X\lambda = x_o - s^x \\ Y\lambda = y_o + s^y \\ e^T\lambda = 1 \\ s^x \geq 0, s^y \geq 0, \lambda \geq 0, \end{aligned}$$

respektíve v skrátenej forme

$$GSB_o := \min_{\lambda, s^x, s^y} \left\{ \mathcal{A}_o(s^x, s^y) \mid (x_o - s^x, y_o + s^y) \in T, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s \right\}, \tag{2.1}$$

kde predpokladáme, že $\mathcal{A}_o(s^x, s^y) : \mathbb{R}^{m+s} \to \mathbb{R}$, je spojitá a konvexná funkcia, klesajúca v každej zložke s^x, s^y a zároveň spĺňajúca podmienku, že $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ dosahuje hodnotu 1 vtedy a len vtedy, keď sú oba vektory slackov nulové, teda $s^x = \mathbf{0} \wedge s^y = \mathbf{0}$ [11].

Voľbou nezáporných slackov s^x, s^y sa zo sledovaného bodu (x_o, y_o) posúvame smerom k hranici množiny T. Tento posun meriame funkciou $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ a z klesajúcosti tejto funkcie jej minimalizáciou dostávame najväčší možný posun. Hodnota v optime $\mathcal{A}_o^* \leq 1$ potom značí efektivitu útvaru.

Definícia 2.1 (Projekcia $(\hat{x}, \hat{y})$ bodu (x_o, y_o))**.** *Nech* $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ *je optimálne riešenie v úlohe* (2.1)*. Potom projekciu útvaru* (x_o, y_o) *definujeme ako:*

$$P_o(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*}) := (\hat{x}, \hat{y}) = (x_o - s^{x*}, y_o + s^{y*}) = (X\lambda^*, Y\lambda^*) \tag{2.2}$$

Nakoľko takto zadefinovaný model zachytáva neefektivitu vo všetkých zložkách vstupov a výstupov zvlášť a vďaka vyššie uvedenému dostávame vlastnosť *indikácie*, teda hodnota miery je rovná jednej vtedy a len vtedy, keď je sledovaný útvar silno efektívny.

Tvrdenie 2.2. *Slack-based modely spĺňajú vlastnosť indikácie, t.j.* $\mathcal{A}_o^* = 1 \Leftrightarrow (x_o, y_o) \in \partial^S T$. *[11]*

Vlastnosť indikácie je jednou z viacerých vlastností DEA modelov nazývaných v DEA literatúre ako žiadúce vlastnosti. V práci [11] je táto vlastnosť označená ako (P2). Všeobecné slack-based modely okrem indikácie spĺňajú aj ďalšie vlastnosti definované a dokázané v [11], ktorými sú:

(P1) Efektívnosť projekcie: Každá projekcia $(\tilde{x}, \tilde{y})$ bodu (x_o, y_o) leží na silne efektívnej hranici množiny T.

(P3) Miera superefektivity: Po modifikovaní základnej úlohy dostávame dobre definovanú mieru superefektivity pre efektívny útvar (x_o, y_o), pričom optimálna hodnota tejto úlohy $\mathcal{A}_{to}^* \geq 1$, kde sa hodnota $\mathcal{A}_{to}^* = 1$ nadobúda práve vtedy, keď $(x_o, y_o) \in \mathbf{T}_t$. Technologická množina $\mathbf{T}_t$ je množina generovaná všetkými útvarmi, až na (x_o, y_o). Viac o superefektivite napríklad v [10].

Ďalšie žiadúce vlastnosti (P4)-(P8) popísané v [11] neplatia pre slack-based modely všeobecne, sú ale viazané na špecifické vlastnosti jednotlivých modelov daných zvoleným typom účelovej fukcie. Sú to:

(P4) Ostrá monotónnosť: Ak útvar $D = (x_D, y_D)$ dominuje útvaru $C = (x_C, y_C)$ v technologickej množine, potom $\mathcal{A}_D^* > \mathcal{A}_C^*$.

(P5) Ohraničenosť optimálnej hodnoty $\mathcal{A}_o^*$: Účelová funkcia nadobúda hodnoty [0,1] a $\mathcal{A}_o^* = 1$ iba ak je (x_o, y_o) efektívny.

(P6) Invariantnosť na zmenu jednotiek: Hodnota $\mathcal{A}_o^*$ ostáva nezmenená, keď i-ty vstup alebo r-tý výstup prenásobíme kladným číslo.

(P7) Invariantnosť na posun: Hodnota $\mathcal{A}_o^*$ ostáva nezmenená, keď k i-temu vstupu alebo r-tému výstupu pripočítame nejaké číslo pri všetkých útvaroch.

(P8) Jednoznačnosť projekcie.

Podmienky na platnosť vlastností (P4)-(P8) sú bližšie popísané a dané tvrdenia dokázané v [11]. Autori v tomto článku tiež ukázali, že žiaden z bežných reprezentantov slack-based modelov, ako sú aditívne, aditívne s váhami, SBM, alebo Russellove modely, nespĺňa podmienku na platnosť (P8). Pri implementácii teda môžeme dostať viacero optimálnych riešení a tým aj projekcií $P_o(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ pre model (2.1).

V našej práci budeme tieto projekcie nazývať *optimálnym vzorom* v zmysle daného modelu. Optimálny vzor v zmysle modelu (2.1) je vzorom útvaru (x_o, y_o), nakoľko mu z definície 2.1 (slabo) dominuje a zároveň je ako projekcia podľa vlastnosti (P1) silne efektívny. Optimálny vzor GSB modelu je najvzdialenejším efektívnym vzorom (x_o, y_o), keďže ide o bod získaný ako riešenie optimalizačnej úlohy, je optimálny vzhľadom na účelovú funkciu príslušného modelu. Pri štandardných slack-based modeloch preto predstavuje najvzdialenejší efektívny vzor v zmysle použitej miery neefektivity.

Definícia 2.3. *Nech Λ_o^* je množina všetkých alternatívnych λ-optimálnych riešení v úlohe* (2.1)*. Potom definujeme množinu optimálnych vzorov modelu* (2.1) *pre bod (x_o, y_o) ako:*

$$\mathbf{P}_o = \{P_o(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*}) \mid \lambda^* \in \Lambda_o^*\}. \tag{2.3}$$

Tvrdenie 2.4 (Konvexnosť množiny optimálnych vzorov)**.** *Množina optimálnych vzorov $\mathbf{P}_o$ v úlohe* (2.1)*, daná ako $\mathbf{P}_o = \{(\hat{x}(\lambda_o^*), \hat{y}(\lambda^*)), \lambda^* \in \Lambda^*\}$, je konvexná.*

Dôkaz. Úloha (2.1) je úlohou konvexného programovania a teda jej množina optimálnych riešení Λ^* je konvexná. Zobrazenie $\varphi : \lambda \to (X\lambda, Y\lambda)$ je lineárne a teda obraz konvexnej množiny $\mathbf{P}_o = \varphi(\Lambda^*)$ je konvexná množina. Explicitne, nech $(\hat{x_1}, \hat{y_1}), (\hat{x_2}, \hat{y_2}) \in \mathbf{P}_o$. Potom pre $\alpha \in [0, 1]$ existujú $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \Lambda_o^*$ také, že $(\hat{x_1}, \hat{y_1}) = (X\lambda_1^*, Y\lambda_1^*), (\hat{x_2}, \hat{y_2}) = (X\lambda_2^*, Y\lambda_2^*)$ a $\lambda^* := \alpha\lambda_1^* + (1 - \alpha)\lambda_2^*$. Z konvexnosti Λ^* dostávame $\lambda^* \in \Lambda^*$ a z linearity φ dostávame $\alpha(\hat{x_1}, \hat{y_1}) + (1 - \alpha)(\hat{x_2}, \hat{y_2}) = (X\lambda^*, Y\lambda^*) \in \mathbf{P}_o$. □

Okrem samotného optimálneho vzoru modelu sa pri DEA modelovaní identifikujú aj efektívne útvary, ktorých kombinácia tvorí danú projekciu. Tieto útvary slúžia ako konkrétni rovesníci s ktorými sa útvar porovnáva. Túto skupinu útvarov nazývame referenčnou množinou.

Definícia 2.5 (Referenčná množina pre (x_o, y_o))**.** *Nech* $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ *je optimálne riešenie* (2.1)*. Referenčnou množinou útvaru* (x_o, y_o) *potom nazývame množinu tých útvarov z množiny pozorovaných útvarov* Z*, ktorých konvexná kombinácia tvorí optimálny vzor modelu* (2.1)*:*

$$R(x_o, y_o) := \{DMU_j \in Z \mid \lambda_j^* > 0\}. \tag{2.4}$$

Poznamenajme, že referenčná množina nemusí byť určená jednoznačne a jednotlivé útvary môžu mať viaceré referenčné množiny dokonca aj vtedy, ak majú jedinú projekciu. Môžeme si všimnúť, že pre efektívny útvar je množina $R(x_o, y_o) = \{DMU_o\}$ pozostávajúca len zo seba samého, jeho referenčnou množinou.

2.1 Aditívne modely s váhami

Aditívny model je neorientovaný DEA model s $m + s$ parametrami. Patrí teda do triedy *slack-based modelov* [11], ktoré individuálne skracuje jednotlivé vstupy a predlžuje jednotlivé výstupy.

Účelová funkcia $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ pre základný aditívny model (Charnes et al., 1985) [18] je v tvare

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = 1 - (e^T s^x + e^T s^y) \tag{2.5}$$

Pri základnom aditívnom modeli nemáme žiadne predpoklady na dáta. Účelová funkcia môže nadobúdať hodnoty v rozmedzí $(-\infty, 1]$. Model v tomto tvare meria neefektivitu útvaru maximalizovaním l_1 vzdialenosti hodnoteného bodu (x_o, y_o) od dominujúcej časti efektívnej hranice. Štandardný aditívny model vykazuje okrem vlastností (P1)-(P3) aj (P4) a (P7).

Hlavným reprezentantom pre aditívne modely je zovšeobecnený Aditívny model s váhami (Lovell, Pastor, 1995) [19], pre ktorý dostávame účelovú funkciu v tvare

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = 1 - ((w_o^x)^T s^x + (w_o^y)^T s^y), \tag{2.6}$$

kde $w_i^x = \frac{1}{(m+s)R_i^x}, i = 1, \ldots, m$ a $w_r^y = \frac{1}{(m+s)R_r^y}, r = 1, \ldots, s$.

V tomto prípade potrebujeme predpoklady na nenulovosť váh, a teda pri niektorých voľbách váh implicitne aj na dáta (x_o, y_o). Jednotlivé koeficienty R_i^x, respektíve R_r^y možno nastavovať podľa hodnôt uvedených v Tabuľke 1:

R^x	R^y	Názov modelu	Autori
e_m	e_s	NAD (Normalized Additive Model)	Charnes et al., 1985[18]
x_o	y_o	MEP (Measure of efficiency proportions)	Cooper, Park, Pastor, 1999[5]
$x^M - x^m$	$y^M - y^m$	RAM (Range Adjusted measure)	Cooper, Park, Pastor, 1999[5]

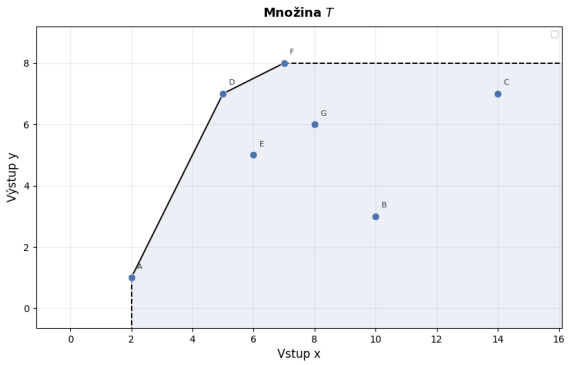
Tabuľka 1: Príklady niektorých aditívnych modelov s ich použitými váhami. Tu x^M je vektor maximálnych hodnôt vstupov, $x_i^M = max_j x_{ij}, i = 1, \ldots, m$, y^M je vektor maximálnych hodnôt výstupov, $y_r^M = max_j y_{rj}, r = 1, \ldots, s$, x^m je vektor minimálnych hodnôt vstupov, $x_i^m = min_j x_{ij}$ a y^m je vektor minimálnych hodnôt výstupov, $y_r^m = min_j y_{rj}$

Oproti základnému AD_o modelu, v ktorom je účelová funkcia a jej výsledok závislá od jednotiek, v ktorých sú vyjadrené hodnoty vstupov a výstupov, tu voľba váh v MEP a RAM modeloch zabezpečuje invariantnosť modelu na zmenu jednotiek, teda oproti základnému aditívnemu modelu aj vlastnosť (P6) a pre niektoré voľby váh, ako napríklad RAM model pri variabilných výnosoch z rozsahu aj vlastnosť (P5)[11].

Príklad 2.1 (**Ilustrácia AD modelu).** Uvažujme úlohu pre dáta z Tabuľky 3a, kde príslušná množina T_{VRS} je zakreslená na Obr.3b.

DMU	x	y
A	2	1
B	10	3
C	14	7

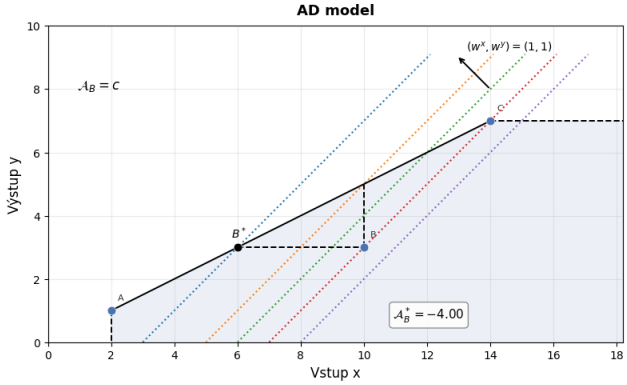
(a) Vstupné dáta



(b) Množina T_{VRS}

Obr. 3: Dáta a príslušná T_{VRS} v Príklade 2.1

Grafické riešenie základného aditívneho modelu AD_B s účelovou funkciou (2.5) pomocou úrovňových množín je uvedené na Obr. 4.



Obr. 4: Riešenie Príkladu 2.1 použitím základného aditívneho modelu

Úrovňové množiny účelovej funkcie aditívneho modelu sú rovnobežné priamky, ktoré sú kolmé na vektor váh. Optimálnym vzorom pre aditívny model je bod B'.

2.2 SBM model

Ďalší z triedy slack-based modelov je SBM model, teda Slack-based measure model. Predstavili ho Pastor et al. v roku 1999[21] a je pomenovaný podľa princípu merania rezerv hodnotami veličín.

Účelová funkcia $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ je pre SBM model (Pastor et al., 1999) v tvare:

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = \left(1 - \frac{1}{m}(s^x)^T x_o^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{s}(s^y)^T y_o^{-1}\right)^{-1}. \tag{2.7}$$

Pre SBM model máme predpoklad na kladné dáta. Účelová funkcia nadobúda hodnoty $(0, 1]$. SBM model meria efektivitu maximalizovaním rezerv - slackov medzi sledovaným (x_o, y_o) a časťou $\partial^S T$, ktorá mu dominuje. SBM model okrem vlastností (P1)-(P3) vykazuje aj vlastnosti (P4)-(P6).

Účelová funkcia SBM modelu sa formuluje ako nelineárna, pomocou úprav uvedených napríklad v [15] sa táto úloha dá formulovať v tvare lineárneho programovania. Po zavedení substitúcie:

$$\beta = \left(1 + \frac{1}{s}(s^y)^T y_o^{-1}\right)^{-1}, \tag{2.8}$$

$$t^y = \beta s^y, \tag{2.9}$$

$$t^x = \beta s^x, \tag{2.10}$$

$$\mu = \beta\lambda, \tag{2.11}$$

dostávame SBM model v lineárnom tvare:

$$\min_{\mu,t^x,t^y} \beta - \frac{1}{m}(t^x)^T x_o^{-1} \tag{2.12}$$

$$\beta + \frac{1}{s}(t^y)^T y_o^{-1} = 1, \tag{2.13}$$

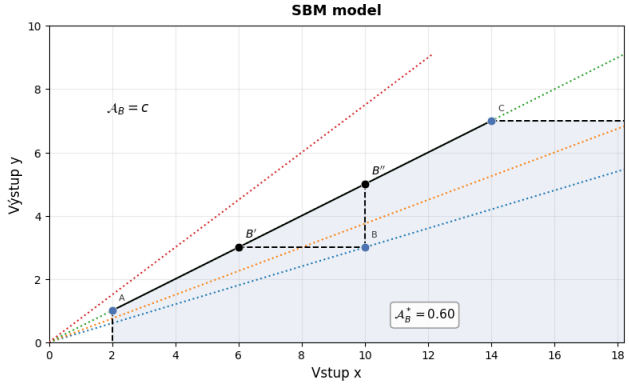
$$X\mu = \beta x_o - t^x, \tag{2.14}$$

$$Y\mu = \beta y_o + t^y, \tag{2.15}$$

$$e^T\mu = \beta, \tag{2.16}$$

$$\beta \geq 0, t^x \geq 0, t^y \geq 0, \mu \geq 0. \tag{2.17}$$

Príklad 2.2 (**Ilustrácia SBM modelu - viacnásobné riešenia).** Uvažujme rovnaké dáta a teda aj množinu T ako v Príklade 2.1, pri ktorej sme si predstavili riešenie AD_B modelu. Riešenie pomocou úrovňových množín pre bod B v SBM modeli je uvedené na Obr 5.



Obr. 5: Grafické riešenie Príkladu 2.2 použitím SBM modelu

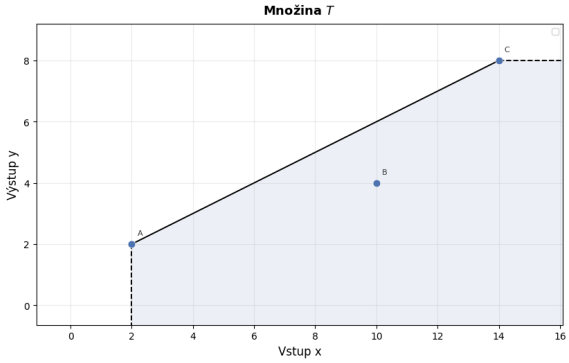
Úrovňové množiny účelovej funkcie v SBM modeli pre $m = s = 1$ sú rôznobežné priamky, ktoré prechádzajú počiatkom súradnicovej sústavy. V tomto špeciálnom prípade dostávame úrovňovú množinu pre úroveň $c = \frac{3}{5}$, ktorá je zároveň opornou nadrovinou množiny T. Projekciou B na $\partial^S T$ je teda celá úsečka $|B''B'|$, ktorá reprezentuje prienik $\partial^S T$ s množinou bodov dominujúcich B.

Na lepšie vyobrazenie projektovania SBM modelu a pre následné porovnanie optimálneho vzoru pre štandardný SBM model s najbližším vzorom pre nami zadefinovaný SBM model uvažujme mierne upravenú verziu Príkladu 2.2 v nasledujúcom príklade:

Príklad 2.3 (**Ilustrácia SBM modelu - jediné riešenie).** Uvažujme úlohu pre dáta a príslušnú T_{VRS} z Obr.6.

DMU	x	y
A	2	2
B	10	4
C	14	8

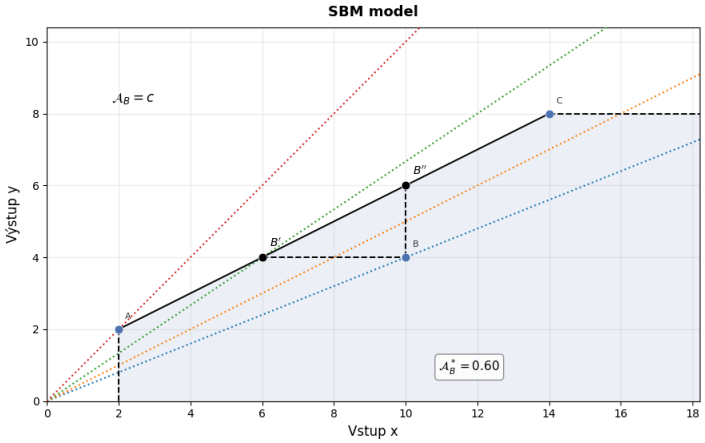
(a) Vstupné dáta pre upravený príklad



(b) Množina T_{VRS}

Obr. 6: Dáta a množina T_{VRS} v Príklade 2.3

Grafické riešenie je prezentované na Obr. 7. V tomto upravenom príklade už dostávame ako optimálny vzor iba jediný bod B'.



Obr. 7: Grafické riešenie v Príklade 2.3 použitím SBM modelu

2.3 Russell measure model

Tretím modelom, ktorým sa budeme v tejto práci venovať a ktorý budeme neskôr formulovať aj v tvare hľadania najbližšieho vzoru je Russell measure (RM) model, v literatúre nazývaný aj Russell graph measure model. Ide o predchodcu SBM modelu, rovnako s nelineárnou účelovou funkciou $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$, pričom sa pri RM modeli tejto nelinearity zbaviť nevieme.

V slack-based podobe dostávame minimalizáciu funkcie (Färe and Lovell, 1978 [9], respektíve 1985 [8])[1]

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = \frac{1}{m+s}\left((x_o - s^x)^T x_o^{-1} + y_o^T (y_o + s^y)^{-1}\right) \tag{2.18}$$

Podobne ako pre SBM model, riešenia nadobúdajú hodnoty $(0, 1]$, pričom ako slack-based model spĺňa vlastnosť indikácie, teda $\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = 1$ pre efektívne útvary. Hodnota $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ ako miera efektivity predstavuje súčet parciálnych efektivít. Okrem vlastností (P1)–(P3) a spomínanej (P6), rovnako ako SBM model vykazuje aj vlastnosti (P4) a (P5). Pre RM model požadujeme kladné hodnoty vstupov a výstupov.

Pre potreby našej implementácie si RM model sformulujeme aj v tzv. *General Russell-type scheme*[11], ktorá je ekvivalentná s našim zápisom.

$$\min_{\theta,\phi,\lambda} \frac{1}{m+s}(e^T\theta + e^T\phi^{-1}) \tag{2.19}$$

$$X\lambda = \theta \circ x_o \tag{2.20}$$

$$Y\lambda = \phi \circ y_o \tag{2.21}$$

$$e^T\lambda = 1 \tag{2.22}$$

$$\theta \leq 1, \phi \geq 1, \lambda \geq 0 \tag{2.23}$$

Ekvivalenciu týchto dvoch zápisov pre $s^x := x_o - \theta \circ x_o$ a $s^y := \phi \circ y_o - y_o$ môžno nájsť v [11] Veta 2.

Tento tvar RM modelu upravíme do SOCP formulácie. Autori Halická a Trnovská v [12] tento model previedli do SDP formulácie a pripravili schému aj pre SOCP problém, ktorú pre túto prácu použijeme.

$$\min_{\theta,\phi\psi,\lambda} \frac{1}{m+s}(e^T\theta + e^T\psi) \tag{2.24}$$

$$X\lambda = \theta \circ x_o \tag{2.25}$$

$$Y\lambda = \phi \circ y_o \tag{2.26}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\psi + \phi) \\ \frac{1}{2}(\psi - \phi) \\ e_s \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{\|.\|_2} \tag{2.27}$$

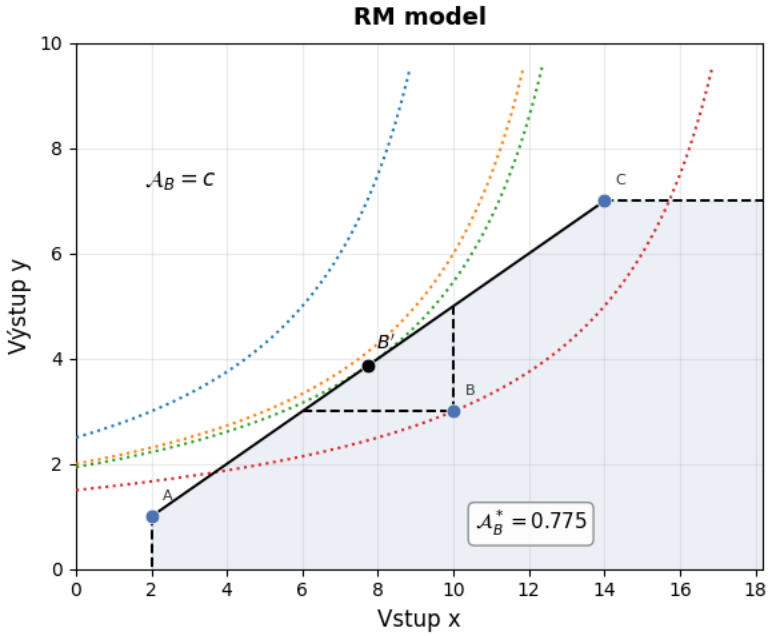
[1]Pre vektor $x \in \mathbb{R}^m_{++}$ v tejto práci používame značenie $x^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_m} \end{pmatrix}^T$

$$e^T \lambda = 1 \tag{2.28}$$

$$\theta \leq e_m, \phi \geq e_s, \lambda \geq 0 \tag{2.29}$$

Podobne, ako predchádzajúce dva modely si riešenie RM modelu ukážeme na príklade.

Príklad 2.4 (Ilustrácia RM modelu). Uvažujme rovnaké dáta a teda aj množinu T ako v Príklade 2.1. Grafické riešenie pre bod B môžeme vidieť na Obr. 8.



Obr. 8: Grafické riešenie Príkladu 2.4 použitím RM modelu

Ako môžeme vidieť, úrovňové množiny RM modelu sú nelineárne konvexné krivky. Riešením úlohy je bod B' ako projekcia bodu B na efektívnu časť hranice.

3 Najbližšie vzory v DEA

Ako sme v úvode spomínali, klasické *slack-based* DEA modely sa formulujú v maximalizačnom tvare. Maximalizujú istú formu slackov, teda pozložkových neefektivít sledovaných útvarov. Hľadaním maxima dostávame najvzdialenejší vzor na efektívnej hranici, na ktorého dosiahnutie je potrebné veľké úsilie. V praxi môže byť dosiahnutie týchto vzorov často nerealistické. Metódy najbližších vzorov tento problém zmierňujú a hľadajú také vzory pre neefektívne útvary, pre ktoré je potrebná čo najmenšia zmena na vstupoch a výstupoch. Takto zadefinovaný efektívny vzor je pre neefektívny útvar jednoduchšie dosiahnuteľný.

Pre hľadanie najbližšieho vzoru ale nemôžeme iba zmeniť účelovú funkciu z maximalizácie na minimalizáciu, nakoľko by sme pri ponechaní ohraničení z pôvodne naformulovanej úlohy dosahovali optimálnu hodnotu v sledovanom útvare. Minimalizáciou súčtu slackov by sme teda na efektívnu hranicu nedosiahli. Modely najbližších vzorov musia byť navrhnuté tak, aby sme minimalizovali vzdialenosť od bodu na efektívnej hranici, na ktorej projekciu musíme zachovať. Preto je jednou z úloh najbližších vzorov v DEA modeloch túto hranicu popísať.

3.1 História najbližších vzorov v DEA

Potrebou hľadať najbližšie vzory, na rozdiel od štandardných najvzdialenejších, sa v obálkovej analýze dát autori zaoberajú už od 90-tych rokov. Identifikovanie najbližších vzorov, teda hľadanie najmenšej vzdialenosti k efektívnej hranici $\partial^S T$ ako prvý použil Briec v [3], [4]. Tieto prvé postupy používali dvojfázovú metódu určovania vzorov. V prvej fáze sa určili všetky silne efektívne útvary, pomocou ktorých sa vyskladali všetky steny efektívnej hranice a v druhej fáze sa minimalizovala vzdialenosť neefektívnych útvarov od jednotlivých stien a vybrala sa najmenšia z nich.

Tieto metódy sú neefektívne a výpočtovo náročné, prípadne navrhnuté verzie, ktoré sa snažia tieto dva problémy vyriešiť, nenájdu všetky steny a teda nezaručujú nájdenie skutočne globálneho najbližšieho vzoru.

V roku 2007 vydali Aparicio et al. prelomový článok [2], v ktorej navrhli novú metódu hľadania najbližších vzorov. Táto metóda už nevyžadovala vopred identifikovať efektívne

steny, od ktorých sa meria vzdialenosť. Autori navrhli jednofázové riešenie úlohy lineárneho programovania, do ktorej vstupuje podmienka komplementarity. Týmto novým spôsobom teda minimalizujeme súčet slackov ako účelovú funkciu iba nad efektívnou hranicou, ktorá je popísaná pomocou oporných nadrovín. Autori navrhli reprezentáciu efektívnej časti hranice pomocou množiny takzvaných extremálne efektívnych bodov, označenej E. Extremálne efektívne útvary sú tie efektívne DMU na stenách technologickej množiny, ktoré sa nedajú vyjadriť ako lineárna kombinácia ostatných útvarov [17]. Svoju prácu sformulovali do nasledujúcej vety.

Veta 3.1. *[Popis ∂^S podľa [2]] Nech D_o je množina Pareto-efektívnych bodov v T dominujúcich útvaru DMU_o. Potom,*

$(X,Y) \in D_o \Leftrightarrow \exists \lambda_j, d_j \geq 0, b_j \in 0,1, j \in E, v_i \geq 1, i = 1,\ldots,m, u_r \geq 1, r = 1,\ldots,s, s^x_{io} \geq 0, i = 1,\ldots,m$ *a* $s^y_{ro}, r = 1,\ldots,s$ *také, že:*

$$X = \sum_{j\in E} \lambda_j X_j, \tag{3.1}$$

$$Y = \sum_{j\in E} \lambda_j Y_j, \tag{3.2}$$

$$\sum_{j\in E} \lambda_j x_{ij} = x_{io} - s^x_{io}, \qquad i = 1,\ldots,m, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j\in E} \lambda_j y_{rj} = y_{ro} + s^y_{ro}, \qquad r = 1,\ldots,s, \tag{3.4}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j = 0 \qquad j \in E, \tag{3.5}$$

$$d_j \leq M b_j \qquad j \in E, \tag{3.6}$$

$$\lambda_j \leq M(1 - b_j), \qquad j \in E, \tag{3.7}$$

kde M je veľké kladné číslo.

Dôkaz v [2].

Rovnice (3.1) a (3.2) zabezpečujú, že body (x,y) sú kónickou[3] kombináciou extremálne efektívnych bodov E. Pomocou rovníc (3.3) a (3.4) dostávame body (x,y), ktoré dominujú DMU_o. Rovnice (3.5) spolu s predpokladom $u \geq 1, v \geq 1$ predstavujú oporné

[3]Autori pracovali s T_{CRS}, teda bez ohraničenia $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Pre T_{VRS} by sme uvažovali konvexnú kombináciu bodov E.

nadroviny prechádzajúce jednotlivými extremálne efektívnymi bodmi. Nakoľko všetky $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ ležia na alebo pod takýmito nadrovinami, tieto rovnice ohraničujú body (x, y) tak, aby boli z technologickej množiny. Nakoniec (3.6) a (3.7) sú prepísanou podmienkou komplementarity $\lambda_j d_j = 0,\ j \in E$ použiteľnou už pri výpočtoch a implementácii. Teda pre $\lambda_j > 0$ dostávame z (3.7) $b_j = 0$ a pomocou (3.6) $d_j = 0$. Takže ak je DMU_j v referenčnej množine pre DMU_o, automaticky spĺňa aj rovnicu (3.5) s konštantou $d_j = 0$.

Týmto postupom autori popísali množinu D_o, teda prienik $\partial^S T$ s bodmi dominujúcimi DMU_o ako kombináciu extremálne efektívnych útvarov pomocou lineárnych ohraničení. Na takto popísanú množinu možno následne projektovať neefektívne útvary a hľadať či už štandardné najvzdialenejšie vzory s použitím vyššie definovaných $\mathcal{A}_\wr(s^x, s^y)$ účelových funkcií, alebo práve najbližšie vzory zámenou minimalizácie v úlohe za maximalizáciu. Na použitie a nájdenie takýchto vzorov stačí podľa [2] nájsť extremálne efektívne útvary, zadefinovať vzdialenostnú funkciu a riešiť *MILP* problém (úloha zmiešaného celočíselného programovania) pre každý útvar.

Výsledok tohto článku bol inšpiráciou pre náš postup navrhnutý v časti 3.2, v ktorom sme túto metódu zjednodušili a upravili tak, aby nebolo potrebné dopredu identifikovať extremálne body a zároveň aby bola implementačná časť pomocou big M oddelená od charakterizácie efektívnej hranice pomocou podmienky komplementarity. V práci [2] autori prevzali podmienku komplementarity, ako aj ohraničenia na riadenie v tvare $u \geq e, v \geq e$ z duality v aditívnom modeli, v ktorom medzi riešením primárnej a duálnej úlohy platia tieto vzťahy. Pri aplikácii ich Vety 3.1 však môže vzniknúť otázka, do akej miery je voľba jednotkových dolných ohraničení podstatná v prípade, keď sa veta použije s inou než obyčajnou aditívnou účelovou funkciou. Prínos nášho postupu spočíva v tom, že odvodenie je nezávislé od konkrétneho modelu: podmienku komplementarity vyvodíme priamo z Tvrdenia 1.2 spolu s predpokladom kladnosti váh u,v, pričom tieto váhy možno dodatočne zdola ohraničiť ľubovoľnými kladnými hodnotami.

3.2 Charakterizácia $\partial^S T$ pomocou podmienky komplementarity

Autori v [2], [1] nepopísali celú $\partial^S T_{CRS}$, ale iba jej prienik s bodmi dominujúcimi sledovanému DMU_o. Takáto charakterizácia množinu, na ktorej hľadáme λ - optimálny vzor je špecifická až k jednotlivým *slack-based* modelom. Zároveň na jej popis nepoužili všetky efektívne útvary, ale iba extremálne efektívne. Tie je tiež potrebné pri implementácii identifikovať a tým sa zvyšuje náročnosť úloh. Zároveň pri analytickom zápise prieniku týchto množín používajú zápis podmienky komplementarity $\lambda_j d_j = 0$ v implementačnom tvare pomocou tzv. *big M* a celočíselnej premennej b_j.

V našej práci vyjdeme z Tvrdenia 1.2 a popíšeme celú efektívnu časť hranice $\partial^S T$, pri ktorej charakterizácii nebudeme uvažovať dominanciu bodov. Prienik efektívnej časti hranice množiny T s bodmi dominujúcimi sledovanému útvaru budeme ako prípustnú množinu optimálnej projekcie uvažovať až pri implementácii jednotlivých modelov. Navyše tento popis zovšeobecníme pre variabilné výnosy z rozsahu.

Veta 3.2. *Bod* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial^S T \Leftrightarrow$

$$\exists\ \bar{\lambda} \geq 0,\ \mathbf{e}^T\bar{\lambda} = 1,\ X\bar{\lambda} = \bar{x},\ Y\bar{\lambda} = \bar{y}, \tag{3.8}$$

$$\exists\ u > 0_s,\ v > 0_m, \sigma \in \mathbb{R}: \tag{3.9}$$

$$u^T\bar{y} - v^T\bar{x} - \sigma = 0, \tag{3.10}$$

$$u^T y_j - v^T x_j - \sigma \leq 0, \quad \forall j. \tag{3.11}$$

Podľa (3.8) dostávame, že bod $(\bar{x}, \bar{y})$ je konvexnou kombináciou generujúcich bodov z množiny Z. Popisujeme tým množinu T_{VRS} bez uvažovania axiómy (A3), teda bez *free disposability* predlžovania vstupov, respektíve skracovania výstupov.

Z vyššie uvedeného teda dostávame, že bod $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$. Musí byť však aj z efektívnej hranice. Podľa Tvrdenia 1.2 je takýto bod z efektívnej hranice T práve vtedy, keď existuje oporná nadrovina ku T v danom bode s kladnými u,v. Túto skutočnosť nám zabezpečuje (3.9) spolu s (3.10) a (3.11). Reprezentáciu tejto opornej nadroviny rovnicami pomocou vyššie zadefinovaných rovníc prepísať. V rovnici (3.10)

$$u^T\bar{y} - v^T\bar{x} - \sigma = 0$$

vďaka reprezentácii bodu $(\bar{x}, \bar{y})$ v (3.8) dostávame

$$u^T Y\bar{\lambda} - v^T X\bar{\lambda} - \sigma = 0.$$

Člen $Y\bar{\lambda}$, respektíve $X\bar{\lambda}$ vieme rozložiť po zložkách ako $\sum_{j=1}^{n} y_j\bar{\lambda_j}$ a $\sum_{j=1}^{n} x_j\bar{\lambda_j}$ a keďže uvažujeme variabilné výnosy z rozsahu, $\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda_j} = 1$, vieme týmto súčtom prenásobiť σ. Týmto dostávame

$$u^T \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{\lambda_j} - v^T \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{\lambda_j} - \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda_j}\sigma = 0.$$

Spomínanú sumu $\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda_j}$ vieme nakoniec vyňať pred ostatné členy a dostávame pre rovnicu (3.10) tvar:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda_j}(u^T y_j - v^T x_j - \sigma) = 0. \tag{3.12}$$

Z predpokladu nezápornosti $\bar{\lambda_j}, \forall j = 1, \ldots, n$ a z nekladnosti $(u^T y_j - v^T x_j - \sigma)$ danou predpokladom (3.11) dostávame súčet n nekladných čísel, ktorý musí byť rovný 0 a tak teda každý sčítanec musí byť rovný 0. Namiesto (3.10) teda po týchto úpravách dostávame

$$\bar{\lambda_j}(u^T y_j - v^T x_j - \sigma) = 0. \tag{3.13}$$

Označme si $(u^T y_j - v^T x_j - \sigma) \leq 0$ ako $-d_j$, pričom $d_j \geq 0$. Dostávame prepis (3.10) v nami požadovanom tvare podmienky komplementarity $\bar{\lambda_j} d_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n$.

Ako výsledok našich úvah dostávame nasledovnú vetu.

Tvrdenie 3.3 (Reprezentácia $\partial^S T_{VRS}$)**.** *Bod $(\bar{x}, \bar{y})$ je zo silne efektívnej časti hranice $\partial^S T_{VRS}$ práve vtedy, keď*

(a) existuje také $\bar{\lambda} \geq 0,\ \mathbf{e}^T\bar{\lambda} = 1$ a zároveň

(b) existujú také $u > 0_s,\ v > 0_m,\ \sigma \in \mathbb{R}$ a $d \geq 0_n$, že platí:

$$X\bar{\lambda} = \bar{x}, \tag{3.14}$$

$$Y\bar{\lambda} = \bar{y}, \tag{3.15}$$

$$u^T y_j - v^T x_j - \sigma + d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.16}$$

$$\bar{\lambda_j} d_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Všimnime si, že ak Veta 3.3 platí s nejakými $u > 0, v > 0$, potom platí aj s ľubovoľným kladným násobkom týchto vektorov a preto môžeme bez straty na všeobecnosti žiadať $u \geq \mathbf{e}, v \geq \mathbf{e}$. Takáto zmena ostrých ohraničení za neostré napomôže jednoduchšej implementácii výsledného modelu. Túto zmenu sformulujeme ako nasledovný dôsledok:

Dôsledok 3.4. *Veta 3.3 platí aj keď v podmienke (b) nahradíme $\bar{u} > 0_s, \bar{v} > 0_m$ podmienkami $u \geq \mathbf{e}, v \geq \mathbf{e}$.*

Veta 3.3 je sformulovaná pre $\partial^S T_{VRS}$. Jej znenie a dôkaz stačí jemne modifikovať tak, aby platila aj pre $\partial^S T_{CRS}$:

Dôsledok 3.5 (Reprezentácia $\partial^S T_{CRS}$)**.** *Ak vo formulácii Vety 3.3, odstránime v podmienkach (a) požiadavku* $\mathbf{e}^T\bar{\lambda} = 1$ *a v časti (b) budeme žiadať, aby* $\sigma = 0$*, dostaneme verziu vety pre* T_{CRS}*.*

Dôkaz: Pre konštantné výnosy z rozsahu dostávame v reprezentácii opornej nadroviny (1.7) člen $\sigma = 0$ (napr. podľa [11]). To sa prenesie do Vety 3.2 a teda aj do Vety 3.3. □

3.3 Podmienka komplementarity a jej implementácia

Podmnienku komplementarity (3.17) následne môžeme pri implementácii preformulovať do tvaru použitom v [2]. Výraz $\bar{\lambda_j} d_j$ si môžeme pre každé $j = 1, \ldots, n$ rozložiť pomocou veľkého čísla $M >> 0$ a binárnej premennej $b \in \{0, 1\}$ nasledovne:

$$d_j \leq M b_j, \tag{3.18}$$

$$\bar{\lambda}_j \leq M(1 - b_j), \tag{3.19}$$

$$b_j \in \{0, 1\}, \tag{3.20}$$

$$\bar{\lambda}_j \geq 0, \tag{3.21}$$

$$d_j \geq 0. \tag{3.22}$$

Táto formulácia dodržiava schému $d_j > 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_j = 0$, respektíve $\bar{\lambda}_j > 0 \Rightarrow d_j = 0$ nasledovne:

- Ak je $b_j = 0$, z (3.18) spolu s (3.22) dostávame $d_j = 0$ a zároveň z (3.19) spolu s (3.21) ohraničenie na $\bar{\lambda}_j$ ako $\bar{\lambda}_j \in [0, M]$
- Naopak, ak je $b_j = 1$, z (3.19) spolu s (3.21) dostávame $\bar{\lambda}_j = 0$ a zároveň z (3.18) spolu s (3.22) ohraničenie na d_j v znení $d_j \in [0, M]$

Takéto ohraničenia sú pre dostatočne veľké M ekvivalentné s nezápornosťou daných premenných.

Týmito úpravami sme dostali ohraničenia úlohy zmiešaného celočíselného lineárneho programovania, ktorú dokážu moderné solvery riešiť.

4 Slack-based modely najbližších vzorov

V tejto kapitole si už predstavené slack-based modely naformulujeme v tvare hľadania najbližších vzorov. Pri formulácii týchto modelov použijeme reprezentáciu efektívnej časti hranice, ktorú sme v navrhli v tejto práci pri variabilných výnosoch z rozsahu. Následne si ukážeme, ako tieto úlohy modifikovať pri uvažovaní konštantných výnosov z rozsahu.

4.1 Všeobecný slack-based model

Podobne ako v Kapitole 2 pri predstavení štandardných slack-based modelov, aj pri formulovaní úloh na hľadanie najbližších vzorov použijeme všeobecný tvar účelovej funkcie popísaný v [11]. Model formulujeme pre DMU_o v tvare

$$mGSB_o := \max_{\lambda, s^x, s^y} \mathcal{A}_o(s^x, s^y) \tag{4.1}$$

$$X\lambda = x_o - s^x \tag{4.2}$$

$$Y\lambda = y_o + s^y \tag{4.3}$$

$$u^T y_j - v^T x_j - \sigma + d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

$$\lambda_j d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.5}$$

$$e^T \lambda = 1 \tag{4.6}$$

$$s^x \geq 0, s^y \geq 0, \lambda \geq 0 \tag{4.7}$$

$$u > 0, v > 0, d \geq 0. \tag{4.8}$$

respektíve v skrátenej forme

$$mGSB_o := \max_{\lambda, s^x, s^y} \left\{ \mathcal{A}_o(s^x, s^y) \mid (x_o - s^x, y_o + s^y) \in \partial^S T_{VRS}, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s \right\}. \tag{4.9}$$

V prípade, ak uvažujeme konštantné výnosy z rozsahu, podľa Dôsledku 3.5 položíme v ohraničení (4.4) $\sigma = 0$ a odstránime ohraničenie (4.6). Pri skrátenom zápise nám stačí žiadať, aby projekcia $(x_o - s^x, y_o + s^y)$ patrila efektívnej hranici T_{CRS}, pričom vyššie spomínané zmeny sú implicitne zahrnuté.

Rovnako ako pri štandardných slack-based modeloch, aj pri hľadaní najbližších vzorov predpokladáme, že $\mathcal{A}_o(s^x, s^y) : \mathbb{R}^{m+s} \to \mathbb{R}$ je konvexná spojitá funkcia klesajúca v každej zložke s^x, s^y. Rovnako dané účelové funkcie pre jednotlivé modely navrhujeme tak, že $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ dosahuje hodnotu 1 vtedy a len vtedy, keď sú všetky zložky slackov nulové.

Analogicky ako pre GSB_o v kapitole 2, aj pre $mGSB_o$ sa voľbou nezáporných slackov s^x, s^y posúvame od sledovaného bodu (x_o, y_o) smerom k hranici množiny T. V prípade štandardných modelov bola hranica T ako silne efektívna hranica uvažovaná implicitne, respektíve všetky slack-based modely spĺňajú vlastnosť (P1) - minimalizáciou jednotlivých slackov sme mali zaručenú optimálnu projekciu patriacu $\partial^S T$, pri modeloch najbližších vzorov máme projekciu na túto hranicu explicitne zadanú. Funkcia $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ nám následne tento posun meria a jej optimálna hodnota $\mathcal{A}_o^*(s^x, s^y) \leq 1$ značí efektivitu sledovaného útvaru. V prípade modelov najbližších vzorov funkciu $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$ maximalizujeme, teda z klesajúcosti tejto funkcie dostávame čo najmenší posun, pričom táto projekcia ostáva na efektívnej hranici množiny T. Toto je v súlade s filozofiou najbližších vzorov.

Analogicky ako pre štandardné slack-based modely (Definícia 2.1), definujeme pojem projekcie:

Definícia 4.1 (Projekcia $(\hat{x}, \hat{y})$ bodu (x_o, y_o) v modeloch najbližších vzorov)**.** *Nech* $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y}*)$ *je optimálne riešenie v úlohe* (4.9)*. Potom projekciu útvaru* (x_o, y_o) *definujeme ako:*

$$mP_o(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*}) := (\hat{x}, \hat{y}) = (x_o - s^{x*}, y_o + s^{y*}) = (X\lambda^*, Y\lambda^*) \tag{4.10}$$

Projekciu pre model (4.9) budeme v našej práci nazývať *najbližším vzorom* v zmysle daného modelu. Obdobne ako tomu bolo pre optimálny vzor GSB modelu, aj najbližší vzor $mGSB$ modelu je skutočne efektívnym vzorom. Rozdielom je, že pri $mGSB$ modeli ide o najbližší efektívny vzor (x_o, y_o) vzhľadom na mieru účelovej funkcie daného modelu.

Ani pri modeloch najbližších vzorov nedostávame jednoznačnú projekciu, ktorá by znamenala jediný najbližší vzor modelu. Množina najbližších vzorov našich modelov, na rozdiel od množiny optimálnych vzorov štandardných modelov nemusí byť ani len konvexná. Túto vlastnosť strácame pre maximalizáciu konvexnej funkcie nad nekonvexnou kompaktnou množinou $\partial^S T$. Existenciu optimálneho riešenia dostávame zo spojitosti účelovej funkcie a kompaktnosti prieniku $\partial^S T$ s bodmi dominujúcimi DMU_o. Množina optimálnych riešení Λ^* je teda neprázdna, ale už nemusí byť konvexná. Ak má úloha alternatívne riešenia, definujeme množinu najbližších vzorov modelu (4.9), **mP** analogicky ako množinu optimálnych vzorov v štandardných modeloch (Definícia 2.3).

Rovnako, Definícia 2.5 referenčnej množiny platí pre modely najbližších vzorov analogicky, bez nutnosti zmien.

Ďalej budeme uvažovať 3 typy funkcií $\mathcal{A}_o(s^x, s^y)$.

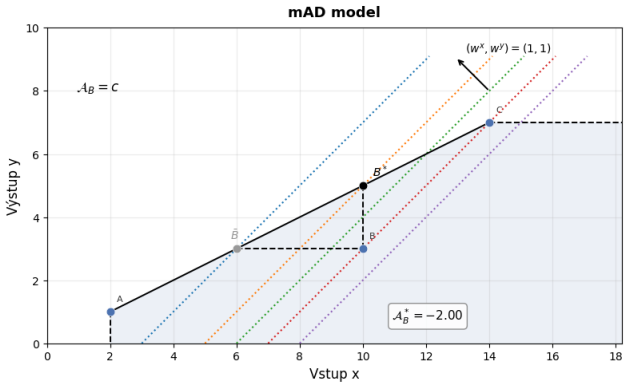
4.2 Aditívne modely s váhami

Podobne ako v Kapitole 2, prvým modelom, ktorým sa budeme zaoberať bude Aditívny model s váhami. Účelová funkcia pre aditívny model s váhami je, rovnako ako v Kapitole 2.1 v tvare:

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = 1 - ((w_o^x)^T s^x + (w_o^y)^T s^y), \tag{4.11}$$

kde váhy w_i^x, w_r^y sú rovné 1, pre štandardný aditívny model mAD_o, alebo $w_i^x = \frac{1}{(m+s)R_i^x}, i = 1, \ldots, m$ a $w_r^y = \frac{1}{(m+s)R_r^y}, r = 1, \ldots, s$ pre zovšeobecnený Aditívny model s váhami mAD_o^w. Koeficienty R_i^x a R_r^y možno nastavovať podľa tabuľky 1. Rovnako ako pre štandardnú formu aditívneho modelu, aj pre mAD_o^w nadobúda účelová funkcia hodnoty $(-\infty, 1]$, respektíve $[0, 1]$ pre vhodnú voľbu váh, pričom hodnota $\mathcal{A}_o^* = 1$ sa nadobúda práve pre efektívne útvary.

Príklad 4.1 (Príklad 2.1 riešený metódou najbližších vzorov)**.** Na názornú ilustráciu uvažujme rovnaké dáta a teda aj množinu T ako v Príklade 2.1, pri ktorej sme si predstavili riešenie AD_B modelu.



Obr. 9: Riešenie Príkladu 4.1 použitím aditívneho modelu najlbližších vzorov

Rovnako ako v Príklade 2.1, zvolili sme vektor váh $(w^x, w^y) = (1, 1)$, a teda dostávame rovnaký tvar úrovňových množín $\mathcal{A}_B = c$. Najbližším vzorom v tomto príklade je bod B^*, pre ktorý nadobúda účelová funkcia hodnotu -2. Na Obrázku 9 máme vyznačený aj štandardný, najvzdialenejší vzor, bod $\bar{B}$. Tento bod bol riešením Príkladu 2.1 spolu s úrovňovou množinou, ktorá cez neho prechádza. Pozrime sa na vzdialenosť jednotlivých vzorov od útvaru B. Na dosiahnutie vzoru $\bar{B}$ potrebuje nami sledovaný útvar znížiť hodnotu vstupu x o 4 jednotky, pričom hodnota výstupu y ostáva rovnaká. Na dosiahnutie

vzoru B^* mu stačí zachovať hodnotu vstupu a výstup zvýšiť iba o 2 jednotky. Pre nami zvolený vektor váh je účelová funkcia rovná $1-(s^x+s^y)$, a teda pri tejto miere efektivity útvaru B na jej dosiahnutie stačí vynaložiť polovičné úsilie.

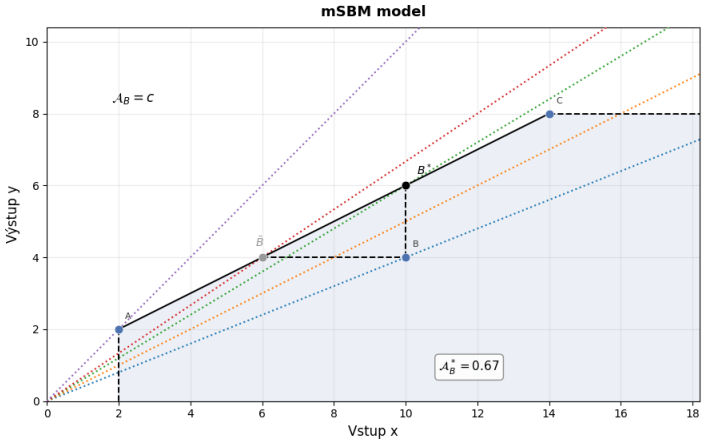
4.3 SBM model

Ako druhý model, ktorý si sformulujeme v tvare hľadania najbližších vzorov a budeme analyzovať je Slack-based measure model. Účelová funkcia $mSBM$ modelu je v tvare:

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = \left(1 - \frac{1}{m}(s^x)^T x_o^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{s}(s^y)^T y_o^{-1}\right)^{-1}. \tag{4.12}$$

Rovnakými úvahami, ako v Kapitole 2.2 vieme dostať lineárnu formu $mSBM$ modelu. Po zavedených substitúciách dostávame MILP model.

Príklad 4.2 (Príklad 2.3 riešený metódou najbližších vzorov)**.** Nakoľko v príklade 2.2 sme dostali ako optimálne riešenie celú množinu D_o, teda všetky vzory na $\partial^S T$ sú vzhľadom na účelovú funkciu v SBM modeli rovnako vzdialené, rovnaký výsledok dostávame aj pri hľadaní najbližšieho vzoru. Pozrime sa teda na Príklad 2.3, v ktorom sme dostali jediný štandardný vzor. Uvažujme množinu T definovanú v Tabuľke 6a.



Obr. 10: Riešenie Príkladu 4.2 použitím SBM modelu najbližších vzorov

Riešením tohto príkladu je najbližší vzor ležiaci na množine D_o, ktorým je B^*. Rovnako ako tomu bolo v Príklade 4.1 pre aditívny model, pre dosiahnutie vzoru B^* potrebuje útvar B zvýšiť hodnotu výstupu o 2, pričom pre dosiahnutie štandardného vzoru $\bar{B}$ by potreboval znížiť hodnotu vstupov o 4 jednotky. Vzhľadom na tvar účelovej funkcie dostávame menšiu zmenu v hodnote jeho efektivity a to z $\mathcal{A}_B^* = 0.60$ pre štandardnú úlohu

na $\mathcal{A}_B^* = 0.67$. Pri hľadaní najbližších vzorov dostávame podľa predpokladu vyššiu mieru efektivity sledovaného útvaru.

4.4 Russell Measure model

Posledným typom funkcie, ktorú budeme v tejto práci uvažovať je účelová funkcia Russell Measure modelu. Ten je v jeho základnom tvare

$$\mathcal{A}_o(s^x, s^y) = \frac{1}{m+s}\left((x_o - s^x)^T x_o^{-1} + y_o^T (y_o + s^y)^{-1}\right), \tag{4.13}$$

respektíve pre jeho nelinearitu v používanejšej *Russell type* schéme:

$$\max_{\theta,\phi,\lambda} \frac{1}{m+s}(e^T\theta + e^T\phi^{-1}) \tag{4.14}$$

$$X\lambda = \theta \circ x_o \tag{4.15}$$

$$Y\lambda = \phi \circ y_o \tag{4.16}$$

$$u^T y_j - v^T x_j - \sigma + d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.17}$$

$$\lambda_j d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.18}$$

$$e^T\lambda = 1 \tag{4.19}$$

$$\theta \leq e_m, \phi \geq e_s, \lambda \geq 0 \tag{4.20}$$

$$u > 0, v > 0, d \geq 0 \tag{4.21}$$

Zavedením novej premennej $\psi = \phi^{-1}$ sa zbavíme nelineárnej zložky v účelovej funkcii. Nakoľko ide o maximalizačnú úlohu, nevieme túto formuláciu upraviť do SOCP úlohy. Pri reformulácii štandardného RM modelu sme použili rovnakú substitúciu a podľa [12] sme ju nahradili konvexnou nerovnosťou $\psi_r \cdot \phi_r \geq 1$, nakoľko pri minimalizácii sa v optime nadobúda rovnosť. Pri úlohe hľadania najbližších vzorov dostávame maximalizačnú úlohu, teda táto relaxácia stráca platnosť. Dostávame nekonvexnú úlohu s bilinearitou v ohraničeniach, s ktorou si ale solver *Gurobi* tiež dokáže algoritmicky poradiť. Model implementujeme v tvare:

$$\max_{\theta,\phi\psi,\lambda} \frac{1}{m+s}(e^T\theta + e^T\psi) \tag{4.22}$$

$$\phi \circ \psi = e_s \tag{4.23}$$

$$X\lambda = \theta \circ x_o \tag{4.24}$$

$$Y\lambda = \phi \circ y_o \tag{4.25}$$

$$u^T y_j - v^T x_j - \sigma + d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.26}$$

$$\lambda_j d_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.27}$$

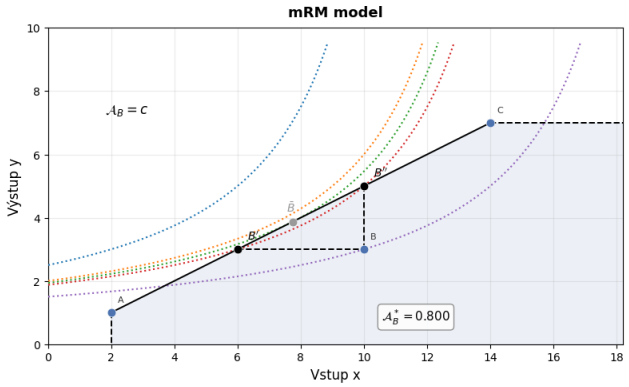
$$e^T \lambda = 1 \tag{4.28}$$

$$\theta \leq e_m, \phi \geq e_s, \lambda \geq 0 \tag{4.29}$$

$$u > 0, v > 0, d \geq 0 \tag{4.30}$$

Ukážme si mRM model na príklade.

Príklad 4.3 (Príklad 2.4 riešený metódou najbližších vzorov)**.** Uvažujme dáta z Príkladu 2.4. Po aplikácii metódy najbližších vzorov dostávame nasledujúci výsledok.



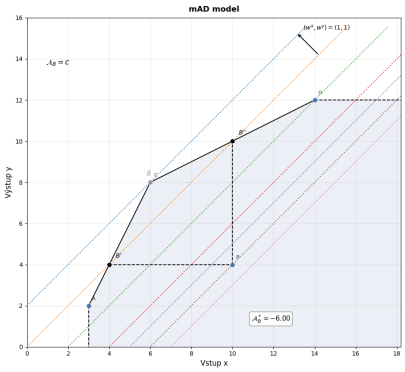
Obr. 11: Riešenie Príkladu 4.3 použitím RM modelu najlbližších vzorov

Ako môžeme vidieť na Obrázku 11, ako optimálny vzor dostávame body B' a B''. Hodnotu efektivity pre útvar B dostávame pre oba body rovnú 0.8, teda viac ako 0.775 pre optimálny vzor štandardného modelu. Oba vzory B' a B'', a teda silne efektívnu hranicu vie útvar B dosiahnuť s menším úsilím, ako optimálny vzor pre Russell measure model $\bar{B}$. Môžeme si všimnúť, že dostávame nekonvexnú množinu optimálnych vzorov, 2 samostatné body.

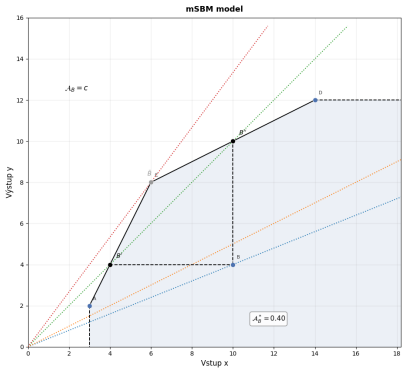
Príklad 4.3 konkrétne ilustruje nekonvexnosť množiny najbližších vzorov modelu. Dostávame množinu tvorenú dvoma izolovanými bodmi.

Výsledná množina najbližších vzorov modelu môže byť jednoprvková, teda jediný vzor pre použitý model $(\hat{x}(\lambda^*), \hat{y}(\lambda^*))$, celý úsek efektívnej hranice v prieniku s dominujúcimi

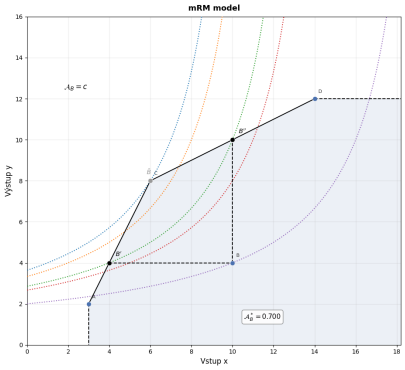
bodmi (úsečka v 2D) ako konvexná množina, alebo nekonvexný set izolovaných bodov. Na Obrázku 12 môžeme vidieť príklady pre všetky 3 spomínané modely, kedy je množina najbližších vzorov nekonvexná, pre všetky modely rovnaké krajné body B' a B'', pričom najvzdialenejším vzorom pre štandardné modely je jediný bod $\bar{B}$. Na Obrázku 12e môžeme vidieť riešenie Príkladu 2.2 použitím $mSBM$ modelu, v ktorom dostávame ako optimálny najbližší vzor celú úsečku $|B'B''|$, rovnako ako tomu bolo pre štandardný SBM model. Na poslednom Obrázku 12c vidíme riešenie Slack-based measure modelu, ktorého štandardný najvzdialenejší vzor je celá hrana $|\bar{B}C|$, pričom najbližší vzor je jediný bod B^*. Príklady jednobodových množín najbližších vzorov sme si pri všetkých modeloch ukázali v príkladoch 4.1, 4.2 a 4.3.



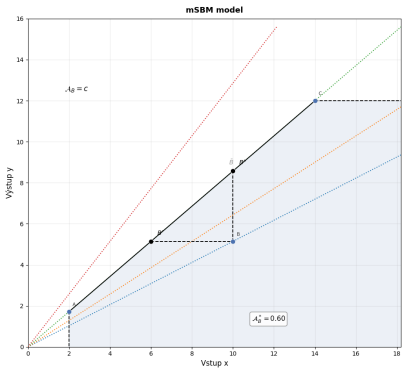
(a) Príklad nekonvexnej množiny najbližších vzorov pre mAD model



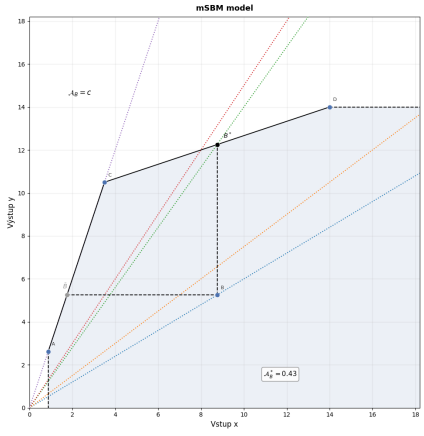
(b) Príklad nekonvexnej množiny najbližších vzorov pre $mSBM$ model



(c) Príklad nekonvexnej množiny najbližších vzorov pre mRM model



(d) Príklad celej úsečky $|B'B''|$ ako najbližší vzor pre $mSBM$ model zároveň najvzdialenejší vzor SBM modelu



(e) Príklad jediného vzoru $mSBM$ modelu a celej úsečky $|\bar{B}C|$ ako vzoru pre SBM model

Obr. 12: Príklady rôznych typov množín najbližších a najvzdialenejších vzorov pre modely AD, SBM a RM a ich ekvivalenty najbližších vzorov.

5 Empirická ilustrácia

V tejto kapitole aplikujeme predstavené modely v predchádzajúcich kapitolách na reálnych dátach z bankového sektora. Naším cieľom v tejto kapitole bude prakticky ukázať dôležitosť metód najbližších vzorov v rámci DEA modelovania pri evaluácii neefektívnych útvarov a pri určovaní dosiahnuteľných cieľov. Ukážeme si rozdiely v navrhovaných efektívnych vzoroch a zmeny vo vstupoch a výstupoch potrebné k dosiahnutiu týchto vzorov.

Dáta sme pozbierali z výročných správ a finančných reportov európskych bánk[2].

5.1 Dáta

Súbor dát pozostáva z $n = 27$ európskych komerčných bánk, ktoré budú predstavovať naše sledované $DMUs$. Banky sme vyberali tak, aby reprezentovali rôzne veľkostné kategórie a geografické oblasti európskeho trhu, od najväčších bánk s globálnym dosahom aj mimo európskeho trhu, cez najväčšie kontinentálne európske banky až po menšie regionálne banky pôsobiace iba v rámci regiónov či jednotlivých krajín.

Pre každú banku sme z jej výročnej správy a finančného reportu pozbierali údaje pre 2 vstupné a 2 výstupné premenné za rok 2025. Za **vstupy** x sme zvolili:

- *Počet zamestnancov* Zachytáva personálnu náročnosť prevádzky banky. Banky s väčším počtom pobočiek majú prirodzene viac zamestnancov, ako centralizované a automatizované banky. Tento vstup reprezentuje počet zamestnancov prepočítaný na plné úväzky (FTE), uvádzame ho v jednotkách.

- *Operačné náklady* Je to miera celkovej spotreby zdrojov, ktorá zahŕňa personálne administratívne a prevádzkové náklady. Spolu s počtom zamestnancov sú to 2 z najdôležitejších vstupov na evaluáciu. Tento vstup reprezentuje neúrokové náklady jednotlivých bánk a uvádzame ho v miliónoch eur. Pre banky, ktoré uvádzajú tieto hodnoty v inej mene ako v eurách sme použili oficiálny kurz Európskej centrálnej banky k 31.12.2025.

Za **výstupy** y sme do našich modelov zvolili:

[2]Všetky pôvodné súbory, z ktorých sme dáta čerpali sú dostupné na stiahnutie na davinci.fmph.uniba.sk/~kula9/files/DP/Diplomovka_Annual_reports.zip

- *Celkové hrubé príjmy* Schopnosť banky generovať tržby. Ide o súčet hrubých príjmov z úrokov, poplatkov a provízií a ostatných hrubých príjmov, pred odpočítaním ich protichodných nákladov. Pre nami sledované banky tvorí väčšinu príjmov úrokový príjem. Tento výstup uvádzame v miliónoch eur a podobne ako pre Operačné náklady sme použili konverzné kurzy Európskej centrálnej banky k 31.12.2025 pre útvary reportujúce v inej mene.

- *Celkový objem poskytnutých úverov* Kvantitatívny ukazovateľ úverovej aktivity banky. Vyjadruje objem pôžičiek zákazníkom a iným bankovým inštitúciám. Ako výstup vyjadruje zapojenosť bánk v ekonomike a jej podporu a jeho výška výrazne ovplyvňuje aj úrokové príjmy. Ako výstup ho uvádzame v miliónoch eur pri použití konverzných kurzov ECB k 31.12.2025.

Zvolená kombinácia vstupov a výstupov sa s rôznymi ďalšími kombináciami objavuje v DEA literatúre zameranej na bankový sektor, ako to dokumentuje aj prehľadová štúdia z roku Paradiho a Zhua z roku 2013 [20]. Tento výber zodpovedá tzv. *intermediation* prístupu k modelovaniu bánk a ich aktivít. Všetky premenné nadobúdajú kladné hodnoty pre každý útvar.

V modeloch budeme uvažovať voľnejšie, variabilné výnosy z rozsahu. Náš súbor aj s výraznou rezervou spĺňa pravidlo na minimálny počet sledovaných útvarov $n \geq 3(m+s)$, pre nás $27 > 12$, takže výsledky nebudú výrazne skreslené v dôsledku malej vzorky dát.

DMU	Vstupy x		Výstupy y	
Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady (v mil €)	Príjmy (v mil €)	Pôžičky (v mil €)
ABN AMRO	25342	5630	17372	257930
Barclays	93000	20335.8	62585.4	414305.5
BBVA	127174	14705	79084	495514
BNP Paribas Fortis	34463	5969	20603	248994
Banco BPM	18975	2839	9054	135526
Groupe BPCE	90006	17290	68678	1001780
Commerzbank	39867	6940	24356	373936

DMU	Vstupy x		Výstupy y	
Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady (v mil €)	Príjmy (v mil €)	Pôžičky (v mil €)
Crédit Agricole S.A.	81948	14285	73025	1129354
Deutsche Bank	89879	20658	64160	472995
DZ BANK Group	34444	4804	22625	360512
Erste Group	45700	5583	22718	252812
Helaba	3708	1211	7394	144115
HSBC Europe	6101	2792	9208	48550
ING Group	62770	12584	61099	742909
Intesa Sanpaolo	88072	12304	41468	463091
KBC Group	37979	5265	24219	243386
LBBW	7888	2538	31132	237166
Mediobanca	5533	2330.9	7604.4	55865.6
MONETA Money Bank	2429	240.9	1006.3	14589.2
Oberbank	2163	401.8	1404.1	21960.9
OTP Group	40845	3745.7	12124.9	72233.8
Raiffeisen Bank	42425	4134	12010	155508
Santander	198403	24711	122316	1126301
Prima banka	779	72.364	239.366	6744.007
Société Générale	117000	17338	65811	530791
Swedbank	17911	2155	10288.7	177536.4
UniCredit	67118	12215	39638	586100

Tabuľka 2: Tabuľka vstupov a výstupov pre vybrané európske banky

5.2 Implementácia modelov

Modely predstavené v Kapitole 2 a Kapitole 4 sme implementovali v programe *Python* s použitím komerčného solvera *Gurobi*.

Na dáta sme aplikovali všetkých 6 predstavených modelov, pričom pri aditívnom modeli s váhami sme zvolili RAM váhy. Efektivity jednotlivých bánk vyšli nasledovne:

DMU	AD^w	mAD^w	SBM	$mSBM$	R	mR
ABN AMRO	0.9061	0.9550	0.3085	0.6020	0.6049	0.7891
Barclays	0.7440	0.8519	0.3892	0.6016	0.6745	0.7840
BBVA	0.8887	0.9260	0.6627	0.7568	0.8476	0.8855
BNP Paribas Fortis	0.8917	0.9386	0.2792	0.5467	0.5892	0.7756
Banco BPM	0.9132	0.9642	0.2524	0.4634	0.5319	0.6996
Groupe BPCE	0.9220	0.9566	0.7768	0.8731	0.8868	0.9356
Commerzbank	0.9046	0.9505	0.4358	0.6469	0.6891	0.8485
Crédit Agricole S.A.	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Deutsche Bank	0.7610	0.8675	0.4379	0.6583	0.7029	0.8149
DZ BANK Group	0.9396	0.9757	0.5291	0.7613	0.7513	0.8726
Erste Group	0.8890	0.9296	0.2882	0.5225	0.5986	0.7423
Helaba	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
HSBC Europe	0.9330	0.9700	0.2689	0.3421	0.5404	0.7088
ING Group	0.9496	0.9668	0.8443	0.8877	0.9219	0.9431
Intesa Sanpaolo	0.8114	0.9051	0.3740	0.6557	0.6644	0.8297
KBC Group	0.9049	0.9408	0.3129	0.5802	0.6212	0.7877
LBBW	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Mediobanca	0.9432	0.9779	0.3089	0.3963	0.5673	0.7092
MONETA Money Bank	0.9940	0.9972	0.3921	0.5104	0.6490	0.7552
Oberbank	0.9899	0.9968	0.3734	0.5257	0.6604	0.7629
OTP Group	0.8630	0.9200	0.1488	0.2321	0.3893	0.5701
Raiffeisen Bank	0.8730	0.9248	0.1943	0.3587	0.4603	0.6177
Santander	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Prima banka	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Société Générale	0.7766	0.8947	0.4576	0.7029	0.7107	0.8449
Swedbank	0.9478	0.9804	0.3733	0.6366	0.6598	0.7988
UniCredit	0.8647	0.9336	0.5153	0.7161	0.7410	0.8658

Tabuľka 3: Hodnoty efektivít jednotlivých bánk podľa modelov

Z nášho datasetu bánk pri vybraných vstupoch a výstupoch definuje hranicu technologickej množiny T 5 útvarov. Sú to **Santander**, ako banka s najvyššími príjmami, pričom objem pôžičiek má druhý najväčší. Druhá z efektívnych bánk na základe veľkosti je **Crédit Agricole S.A.**, ako banka s najvyšším objemom vydaných poskytnutých pôžičiek, navyše s tretími najväčšími príjmami. Na opačnej strane, ako banka s

najmenšími vstupmi aj v počte zamestnancov a aj v operačných nákladoch je slovenská **Prima banka**. Ďalšie 2 efektívne banky sú efektívne z dôvodu jednotlivých pomerov vstupov a výstupov. **Helaba** má najväčší pomer poskytnutých pôžičiek ku počtu zamestnancov ako aj ku operačným nákladom. Poslednou efektívnou bankou je **LBBW** ako banka s najväčším príjmom na vstup, či je to už na počet zamestnancov alebo na operačné náklady.

5.2.1 Aditívne modely s váhami AD^w a mAD^w

Pozrime sa bližšie na výsledky pre jednotlivé modely. Pre AD^w model dostávame hodnoty efektivít v rozmedzí od 0.744 pre Barclays až po 1 pre už spomínaných 5 bánk. MONETA Money bank dosiahla v tejto miere efektivitu rovnú 0.994, teda ako jedna z menších bánk sa priblížila k efektívnej hranici v zmysle RAM-aditívneho modelu. Jej optimálny vzor a tým zmeny potrebné, aby sa na túto hranicu dostala si predstavíme nižšie. Podobne ďalších 11 bánk má efektivitu nad 0.9, pričom aj ďalšia menšia banka Oberbank dosahuje hodnotu skoro 0.99. Ide o jeden z často popisovaných prejavov *Range adjusted measure* váh v DEA literatúre, presnejšie o jeho nízku diskriminačnú schopnosť . Jednotlivé slacky sú normalizované veľkosťou rozsahu každého zo vstupov alebo výstupov naprieč všetkými dátami. Keďže náš dataset obsahuje od malých bánk ako Prima banka či spomínané MONETA Money bank a Oberbank s malým počtom zamestnancov (779, 2429 a 2163) až po najväčšie banky ako Santander s 198403 zamestnancami, tento rozsah je príliš veľký a zodpovedajúca váha príliš malá. Následne absolútne slacky menších bánk, hoci to môže byť pre ne veľký posun k efektívnej hranici, sú vo vyhodnotení účelovej funkcie zanedbateľné. Výsledné poradie efektivít nami sledovaných bánk v Tabuľke 4.

Pre mAD^w model najbližších vzorov dostávame výsledky podobné. Samozrejme, 5 efektívnych bánk dostávame v každom modeli rovnakých. Podľa očakávania dostávame pre útvary väčšie hodnoty ako pre štandardný AD^w model, nakoľko pri rovnakej miere projektujeme na bližší vzor. Hodnoty efektivít sa pohybujú od 0.85, totožne ako pre štandardný model pre Barclays až po 1 pre efektívne útvary. Až 19 bánk nadobúda hodnotu nad 0.9. Pri obhajobe pozície Barclay, ako poslednej banke v AD^w aj mAD^w modeli sa môžeme čiastočne oprieť o rovnaký argument, ktorý pri našej voľbe váh robí Oberbank a MONETA Money bank takmer efektívnymi. Tu je jej veľkosť a tým aj relatívne veľký posun pri váženom súčte slackov ale iba časť príčiny, nakoľko objektívne neefektívne premieňa svoje vstupy na výstupy. Napríklad Crédit Agricole S.A. pri rádovo rovnakom počte zamestnancov a mierne nižších prevádzkových nákladoch dokázala v roku 2025 vyprodukovať až 3-krát viac pôžičiek. Neskôr sa pozrieme bližšie na navrhované efektívne vzory pre Barclays, či už štandardné, alebo tie najbližšie. V Tabuľke 4 môžeme vidieť výsledné poradie po aplikácii mAD^w modelu. Môžeme si všimnúť malé zmeny oproti štandardnému modelu, teda pre nejaké útvary je rozdiel medzi najbližším a štandardným vzorom väčší, ako pre iné.

Banka	Efektivita v AD^w	Banka	Efektivita v mAD^w modeli
Crédit Agricole S.A.	1.000000	Crédit Agricole S.A.	1.000000
Helaba	1.000000	Helaba	1.000000

Banka	Efektivita v AD^w	Banka	Efektivita v mAD^w modeli
LBBW	1.000000	LBBW	1.000000
Santander	1.000000	Santander	1.000000
Prima banka	1.000000	Prima banka	1.000000
MONETA Money Bank	0.994013	MONETA Money Bank	0.997234
Oberbank	0.989916	Oberbank	0.996763
ING Group	0.949578	Swedbank	0.980436
Swedbank	0.947758	Mediobanca	0.977883
Mediobanca	0.943213	DZ BANK Group	0.975689
DZ BANK Group	0.939649	HSBC Europe	0.969959
HSBC Europe	0.933034	ING Group	0.966828
Groupe BPCE	0.922003	Banco BPM	0.964153
Banco BPM	0.913238	Groupe BPCE	0.956624
ABN AMRO	0.906118	ABN AMRO	0.954999
KBC Group	0.904871	Commerzbank	0.950467
Commerzbank	0.904631	KBC Group	0.940753
BNP Paribas Fortis	0.891729	BNP Paribas Fortis	0.938633
Erste Group	0.888964	UniCredit	0.933579
BBVA	0.888730	Erste Group	0.929578
Raiffeisen Bank	0.873043	BBVA	0.925962
UniCredit	0.864748	Raiffeisen Bank	0.924760
OTP Group	0.863039	OTP Group	0.919970
Intesa Sanpaolo	0.811429	Intesa Sanpaolo	0.905148
Société Générale	0.776610	Société Générale	0.894740
Deutsche Bank	0.760980	Deutsche Bank	0.867543
Barclays	0.744006	Barclays	0.851901

Tabuľka 4: Poradie bánk podľa efektivít v AD^w a mAD^w modeli

5.2.2 Modely SBM a $mSBM$

Na rozdiel od RAM aditívneho modelu, ktorý normalizuje slacky naprieč celou vzorkou, SBM modely ich normalizujú vlastnými hodnotami pre každý sledovaný útvar. Z tohto dôvodu menšie banky ako Oberbank a MONETA Money Bank nedosahujú také vysoké efektivity ako tomu bolo pre aditívnych modeloch. SMB model vie teda lepšie zachytiť ich neefektivity v rámci ich veľkosti a objemu. Pri štandardnom modeli dosahujú hodnoty efektivít 0.39 pre MONETA Money Bank a 0.37 pre Oberbank. Medzi ne sa v poradí dostala aj Barclays s efektivitou 0.389, ktorá bola pre svoju veľkosť v aditívnych modeloch posledná. Efektivity pre SBM model nadobúdajú hodnoty od 0.148 pre OTP Group až po 1 pre efektívne

banky. Žiadna zo sledovaných bánk pri štandardnom modeli nedosahuje efektivity nad 0.9. Najvyššiu hodnotu z neefektívnych útvarov, 0.84 pozorujeme pri ING banke. Hodnoty efektivít v modeli SBM a výsledné poradie bánk uvádzame v Tabuľke 5.

Pre variant najbližších vzorov, $mSBM$ model vidíme podobný príbeh. Na prvých pozíciach neefektívnych útvarov sa poradie nemení, iba sa zvýšila hodnota ich efektivít z dôvodu nájdenia bližšej efektívnej projekcie. Výraznejšie si nájdením bližšieho vzoru v poradí aj hodnote efektivity polepšila ABN AMRO, presnejšie z 21. miesta na 16. a efektivita sa jej týmto bližším vzorom zvýšila z 0.308 na 0.602. Naopak si až tak výrazne nepolepšila MONETA Money Bank, ktorá vo svojom najbližšom vzore dosiahla efektivitu rovnú 0.510, iba o 0.118 vyššiu ako pre štandardný najvzdialenejší vzor a tým v poradí klesla zo 14. na 22. miesto. Rozdiely v štandardných a najbližších vzoroch si pre tieto útvary ukážeme nižšie. Ostatné efektivity pre $mSBM$ model a poradie hodnotených bánk sú v Tabuľke 5.

Banka	SBM Efektivita	Banka	$mSBM$ Efektivita
Crédit Agricole S.A.	1.000000	Crédit Agricole S.A.	1.000000
Helaba	1.000000	Helaba	1.000000
LBBW	1.000000	LBBW	1.000000
Santander	1.000000	Santander	1.000000
Prima banka	1.000000	Prima banka	1.000000
ING Group	0.844272	ING Group	0.887687
Groupe BPCE	0.776828	Groupe BPCE	0.873123
BBVA	0.662745	DZ BANK Group	0.761342
DZ BANK Group	0.529121	BBVA	0.756773
UniCredit	0.515276	UniCredit	0.716085
Société Générale	0.457556	Société Générale	0.702948
Deutsche Bank	0.437864	Deutsche Bank	0.658333
Commerzbank	0.435826	Intesa Sanpaolo	0.655690
MONETA Money Bank	0.392138	Commerzbank	0.646940
Barclays	0.389188	Swedbank	0.636551
Intesa Sanpaolo	0.374041	ABN AMRO	0.601971
Oberbank	0.373361	Barclays	0.601567
Swedbank	0.373269	KBC Group	0.580175
KBC Group	0.312903	BNP Paribas Fortis	0.546738
Mediobanca	0.308938	Oberbank	0.525705
ABN AMRO	0.308487	Erste Group	0.522512
Erste Group	0.288223	MONETA Money Bank	0.510401
BNP Paribas Fortis	0.279220	Banco BPM	0.463367
HSBC Europe	0.268870	Mediobanca	0.396278

Banka	SBM Efektivita	Banka	$mSBM$ Efektivita
Banco BPM	0.252423	Raiffeisen Bank	0.358730
Raiffeisen Bank	0.194269	HSBC Europe	0.342069
OTP Group	0.148814	OTP Group	0.232135

Tabuľka 5: Poradie bánk podľa efektivít v SBM a $mSBM$ modeli

5.2.3 Modely RM a mRM

Rozmedzie efektivít bolo pre Russell Measure model trochu užšie, nadobúdali sa hodnoty od 0.389 pre OTP Group až po 1 pre efektívne útvary. Podobne ako SBM model, aj RM normalizuje slacky vlastnými hodnotami práve sledovaného útvaru. Zatiaľ čo SBM kombinuje vstupné a výstupné neefektivity multiplikatívne, hodnota efektivity RM modelu predstavuje aritmetický priemer parciálnych neefektivít útvaru v jednotlivých dimenziách - vstupoch a výstupoch. Týmto priemerom silné dimenzie útvaru kompenzujú tie slabé, a teda banka, ktorá nie je výrazne neefektívna v troch dimenziách, ale zaostáva vo štvrtej, dostáva pri RM modeli kredit za tri faktory, v ktorých je silná. To je na rozdiel od SBM modelu, kde jediná výrazná parciálna neefektivita dokáže stiahnuť celkovú efektivitu k nízkym hodnotám. Napriek tomu nepozorujeme výrazné zmeny v poradí medzi SBM a RM modelom. Oproti SBM metrike si najviac v poradí polepšila z 18. miesta na 13. s efektivitou 0.649 Commerzbank. ING Group ako prvá z neefektívnych bánk pri takomto meraní efektivity dosahuje hodnotu nad 0.9, presnejšie 0.922. Rovnako, ako tomu bolo pri SBM a $mSBM$ modeloch, aj pri štandardnom RM modeli je najmenej efektívnou zo sledovaných bánk pri našom výbere vstupov a výstupov OTP Group. Výsledné poradie po aplikácii RM modelu a vypočítané efektivity jednotlivých bánk v Tabuľke 6.

Pre prípad hľadania najbližších vzorom v Russellovom modeli dostávame kvalitatívne rovnaké výsledky ako pre štandardný model. Podľa predpokladov sa zvýšili efektivity všetkých neefektívnych útvarov, takže pre každú banku sme našli optimálny vzor v zmysle *Russell*ovej miery efektivity, na ktorého dosiahnutie potrebujú vynaložiť menšie úsilie. Poradie sa nezmenilo pre prvých 10 útvarov, kde sme pre ING Group pozorovali najmenší posun efektivity oproti štandardnému RM modelu, na 0.943 a napríklad 9. najefektívnejšej banky DZ Bank Group z 0.751 až na 0.873. Výraznejším skokanom pri projektovaní na najbližší bod bola ABN AMRO, ktorá si týmto polepšila z 20. na 17. miesto s efektivitou pre mRM model 0.789, teda o 0.184 väčšou ako pri RM modeli. Posledných 5 najmenej efektívnych bánk z RM modelu ostalo aj pre mRM model rovnakých, pričom medzi nimi si v hodnote efektivity najviac polepšila práve posledná OTP Group a to o 0.181. Celkové poradie po aplikovaní mRM modelu a z neho získané efektivity v Tabuľke 6.

Banka	RM Efektivita	Banka	mRM Efektivita
Crédit Agricole S.A.	1.000000	Crédit Agricole S.A.	1.000000
Santander	1.000000	Helaba	1.000000

Banka	RM Efektivita	Banka	mRM Efektivita
Prima banka	1.000000	LBBW	1.000000
Helaba	1.000000	Santander	1.000000
LBBW	1.000000	Prima banka	1.000000
ING Group	0.921940	ING Group	0.943133
Groupe BPCE	0.886760	Groupe BPCE	0.935573
BBVA	0.847598	BBVA	0.885450
DZ BANK Group	0.751348	DZ BANK Group	0.872635
UniCredit	0.740972	UniCredit	0.865761
Société Générale	0.710663	Commerzbank	0.848549
Deutsche Bank	0.702863	Société Générale	0.844872
Commerzbank	0.689095	Intesa Sanpaolo	0.829692
Barclays	0.674500	Deutsche Bank	0.814900
Intesa Sanpaolo	0.664420	Swedbank	0.798803
Oberbank	0.660358	ABN AMRO	0.789143
Swedbank	0.659842	KBC Group	0.787665
MONETA Money Bank	0.649003	Barclays	0.783958
KBC Group	0.621225	BNP Paribas Fortis	0.775642
ABN AMRO	0.604926	Oberbank	0.762853
Erste Group	0.598590	MONETA Money Bank	0.755200
BNP Paribas Fortis	0.589220	Erste Group	0.742299
Mediobanca	0.567252	Mediobanca	0.709188
HSBC Europe	0.540404	HSBC Europe	0.708755
Banco BPM	0.531941	Banco BPM	0.699616
Raiffeisen Bank	0.460333	Raiffeisen Bank	0.617680
OTP Group	0.389293	OTP Group	0.570095

Tabuľka 6: Poradie bánk podľa efektivít v RM modeli

Pri pohľade na poradia útvarov v Tabuľkách 4, 5 a 6 sa ponúka otázka, či sú metódy najbližších vzorov stabilnejšie naprieč jednotlivými modelmi než ich štandardné varianty. Pri štandardných SBM a RM modeloch sa poradia útvarov podľa efektivity takmer dokonale zhodujú, kým RAM aditívny model poskytuje výrazne odlišné zaradenie tých istých útvarov. AD^w model je teda hlavným zdrojom rozdielov medzi štandardnými modelmi. Pre tie útvary, pri ktorých sa poradie v AD^w modeli najviac vzďaľovalo od poradia v SBM a RM modeloch, varianty najbližších vzorov vedú k výrazne zhodnejšiemu poradiu medzi všetkými troma modelmi. Napríklad ABN AMRO sa v štandardných modeloch umiestnila na 15., 21. a 20. mieste, kým v modeloch najbližších vzorov obsadila 15., 16. a 16. miesto. Podobne BNP Paribas Fortis sa z pozícií štandardných modelov, 18., 23. a 22. dostáva na 18., 19. a 19. miesta pri hľadaní

najbližších vzorov. Na druhej strane, Groupe BPCE, ktorý je pri SBM a RM modeli na rovnakom 7. mieste, pre $mSBM$ a mRM dostávame výrazný rozdiel medzi pozíciami, 7. mieste pre $mSBM$ a až 14. pre mRM model. Nedostávame teda univerzálne pravidlo, podľa ktorého je poradie modelov najbližších vzorov medzi jednotlivými modelmi stabilnejšie.

5.3 Porovnanie štandardných a najbližších vzorov

V tejto podkapitole sa pozrieme na navrhované optimálne a najbližšie vzory jednotlivých modelov pre vzorku 5 neefektívnych útvarov. Pre každý z útvarov si ukážeme modelom navrhnutý vzor a absolútne a relatívne zmeny potrebné na dosiahnutie tohto vzoru. Z nejednoznačnosti projekcie vieme, že naše modely môžu mať viacero optimálnych riešení $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$, a tým aj optimálnych, prípadne najbližších vzorov v modeli a referenčných množín pre ten istý neefektívny útvar. V práci narábame iba s jedným z nich podľa výsledkov solvera *Gurobi*. Napriek tejto nejednoznačnosti má podrobná analýza týchto výsledkov zmysel.

Optimálna hodnota $\mathcal{A}_o^*$ je pre každý útvar jednoznačne určená, takže uvedené efektivity v Tabuľke 3 a poradia jednotlivých útvarov v rámci modelov v Tabuľkách 4-6 sú nezávislé od voľby konkrétneho optimálneho riešenia. Následné efektívne vzory a referenčné množiny, ktoré v najbližších podkapitolách rozoberieme a ktoré sú uvedené v Prílohe B a C je potrebné interpretovať ako jeden príklad z množiny rovnako vzdialených, respektíve blízkych optimálnych riešení, nakoľko všetky optimálne $\lambda^* \in \Lambda^*$ riešenia ležia na $\partial^S T$ a pre zvolenú mieru v modeli vyžadujú totožné úsilie na ich dosiahnutie. Z toho dôvodu je kvalitatívne rovnaké porovnávať jedno z optimálnych riešení štandardného modelu s optimálnym riešením modelu najbližších vzorov, bez ohľadu na výber spomedzi nich. Pri praktickom odporúčaní konkrétnych zmien vedúcich k dosiahnutiu efektivity by bolo potrebné nájsť všetky takéto riešenia a dať z nich jednotlivým bankám na výber, ku ktorému zo vzorov majú v rámci svojej vízie bližšie.

5.3.1 MONETA Money Bank

Začnime **MONETA Money Bank**, ako takmer efektívnou bankou v AD^w a mAD^w modeloch, ktorá dosahovala hodnoty efektivity 0.994, resp. 0.997. Z pôvodných hodnôt, ktoré boli 2429 zamestnancov, 401.8 mil €operačných nákladov, 1006.3 mil €príjmov a 14589.2 mil €poskytnutých pôžičiek musí pri meraní efektivity RAM aditívnom modelom na dosiahnutie efektívnosti znížiť počet zamestnancov na 1264.93[3], teda o 47.9% a zároveň zvýšiť svoje príjmy na viac než dvojnásobok, o 133.6% na 2351 mil€ spolu s poskytnutými pôžičkami až na 22494.26 mil €, čo predstavuje 54.2% zmenu. Presne tu sa nám ukazuje spomínané špecfikum AD^w modelu s RAM váhami, kedy v takto veľkostne odlišnom a rozsiahlom datasete sa útvary s malými hodnotami vstupov a výstupov ľahko "vyvezú"blízko k efektívnym hodnotám, aj keď sú od reálnej efektívnosti pre nich relatívne ďaleko. Pre mAD^w dosahujeme výrazne

[3]Keďže počítame zamestnancov prepočítaných na trvalý úväzok, môžeme uvažovať neceločíselný počet.

lepšie výsledky. Na dosiahnutie najbližšieho vzoru mAD^w modelu by MONETA Money Bank postačovalo znížiť počet zamestnancov o 59.3% na 987.93, znížiť operačné náklady o 38.6% na 147.93. Pri takto znížených vstupoch výstupy zvyšovať na dosiahnutie efektívnosti nie je potrebné. Pri SBM a $mSBM$ modeloch sa už táto výrazná neefektivita viac prejavila. Ako sme spomínali v Kapitolách 5.2.2 a 5.2.3, tieto ďalšie modely lepšie odhaľujú neefektivity v malých bankách. MONETA Money Bank pre SBM a $mSBM$ dosiahla efektivity 0.392 a 0.510. Hoci RAM aditívny model používa inú škálu pre hodnoty účelovej funkcie, vzory určuje podobne. Optimálne vzory pre SBM aj $mSBM$ dostávame rovnaké, ako pre AD^w, respektíve mAD^w a sú uvedené v Tabuľke 7.

Premenná	Pôvodná hodnota	AD^w a SBM vzor	mAD^w a $mSBM$ vzor
Počet zamestnancov	2429	1264.93 (-47.9%)	987.9 (-59.3%)
Operačné náklady	240.90	240.90 (0.0%)	147.93 (-38.6%)
Príjmy	1006.30	2351.00 (133.6%)	1006.30 (0.0%)
Pôžičky	14589.20	22494.26 (54.2%)	14589.20 (0.0%)

Tabuľka 7: Optimálny vzor pre MONETA Money Bank v zmysle AD^w a SBM modelu a najbližší vzor v zmysle mAD^w a $mSBM$ modelu

Pre dvojicu Russell Measure modelov však už dostávame unikátny najvzdialenejší vzor, pričom najbližší ostáva stále rovnaký. Hodnoty vstupov a výstupov, ktoré musí banka dosiahnuť aby sa pri RM miere stala efektívnou a ich relatívne zmeny sú uvedené v Tabuľke 8.

Premenná	Pôvodná hodnota	RM vzor	mRM vzor
Počet zamestnancov	2429	1243.81 (-48.8%)	987.9 (-59.3%)
Operačné náklady	240.90	233.58 (-3.0%)	147.93 (-38.6%)
Príjmy	1006.30	2259.23 (124.5%)	1006.30 (0.0%)
Pôžičky	14589.20	21809.85 (49.5%)	14589.20 (0.0%)

Tabuľka 8: Optimálny vzor pre MONETA Money Bank v zmysle RM modelu a najbližší vzor v zmysle mRM modelu

5.3.2 Oberbank

Druhá banka, na ktorej vzory sa pozrieme bližšie je **Oberbank**. Rovnako ako to bolo pri MONETA Money Bank, aj Oberbank je malou bankou a aj z toho dôvodu dosiahla v aditívnych modeloch vysoké efektivity, pričom za ňou kúsok zaostávala. Následne ale, až na štandardný SBM model bola v poradí pred MONETA Money Bank. Podobne ako v analýze vyššie, aj Oberbank projektuje na rovnaký vzor pri AD^w

a SBM, a jeden najbližší vzor pre mAD^w, $mSBM$ a mRM modely. Tento fenomén budeme pozorovať pri viacerých útvarov. Pre dosiahnutie efektívnej hranice by pri štandardných mierach AD^w a SBM musela Oberbank znížiť počet zamestnancov o 20.1% a zároveň zvýšiť poskytnuté úvery o 70.9% a viac než strojnásobiť svoje príjmy. Pri hľadaní najbližších vzorov týchto modelov by jej na dosiahnutie efektívnosti stačilo znížiť počet zamestnancov o 47% spolu s operačnými nákladmi o 47.9% pri zachovaných výstupoch. Tieto zmeny sú ľahšie dosiahnuteľné. Na dosiahnutie optimálneho vzoru RM modelu potrebuje Oberbank zmeniť každý z faktorov. Vstupy potrebuje znížiť o 30.8%, respektíve 19.7% a pritom viac než zdvojnásobiť príjmy a poskytnúť o 38.1% viac pôžičiek. Hodnoty vstupov a výstupov, ktoré musí Oberbank dosiahnuť a ich relatívne zmeny v Tabuľke 9.

Premenná	Pôvodná hodnota	AD^w a SBM vzor	RM vzor	Najbližšie vzory mAD^w, $mSBM$ a mRM
Počet zamestnancov	2163	1728.84 (-20.1%)	1497.80 (-30.8%)	1146.72 (-47.0%)
Operačné náklady	401.80	401.80 (0%)	322.49 (-19.7%)	209.44 (-47.9%)
Príjmy	1404.10	4366.96 (211.0%)	3325.36 (36.8%)	1404.10 (0%)
Pôžičky	21960.90	37530.91 (70.9%)	30328.23 (38.1%)	21960.9 (0%)

Tabuľka 9: Optimálny vzor pre Oberbank v zmysle AD^w, SBM a RM modelu a najbližší vzor v zmysle mAD^w, $mSBM$ a mRM modelu

5.3.3 Barclays

Ďalšou bankou, na ktorej vzory sa pozrieme bližšie je **Barclays**. Tú postihol práve opačný efekt pri RAM aditívnom modeli, ako vyššie spomínané malé banky a ostala v poradí posledná pre štandardný model aj model najbližších vzorov. Pri SBM, RM a ich variáciách najbližších vzorov bola už v strede poradia. Rovnako ako pri Oberbank, aj pre Barclays dostávame jediný najbližší vzor naprieč všetkými troma modelmi. Na jeho dosiahnutie musí banka znížiť operačné náklady o 38.8% a zvýšiť výstupy o 14.8% pri príjmoch a 53.1% pri poskytnutých úveroch. Väčšie úsilie musí vynaložiť na svoj optimálny vzor AD^w modelu, a to znížiť počtu zamestnancov o 11.9%, znížiť operačných nákladov o 29.8% a k tomu zvýšiť príjmy o 16.7% a objem poskytnutých úverov až o 172.6%. Podobne tomu je aj optimálny vzor SBM a RM modelu, kde na jeho nadobudnutie musí Barclay znížiť počet zamestnancov o takmer tretinu, operačné náklady o skoro polovicu a viac než zdvojnásobiť objem pôžičiek.

Premenná	Pôvodná hodnota	AD^w vzor	SBM a RM vzor	Najbližšie vzory mAD^w, $mSBM$ a mRM
Počet zamestnancov	93000	81948.00 (-11.9%)	63492.49 (-31.7%)	93000 (0%)
Operačné náklady	20335.80	14285.00 (-29.8%)	11357.69 (-44.1%)	12443.72 (-38.8%)
Príjmy	62585.40	73025.00 (16.7%)	62585.40 (0%)	71868.18 (14.8%)
Pôžičky	414305.50	1129354.00 (172.6%)	907023.64 (118.9%)	634384.37 (53.1%)

Tabuľka 10: Optimálne vzory pre Barclays v zmysle AD^w, SBM a RM modelov a najbližší vzor v zmysle mAD^w, $mSBM$ a mRM modelov

5.3.4 OTP Group

Pozrime sa, ako by musela premieňať vstupy na výstupy **OTP Group**, ktorá okrem aditívnych modelov vyskytovala na poslednom mieste v poradí efektivít, s nameranou efektivitou $E_{SBM} = 0.149$. Na dosiahnutie svojho efektívneho vzoru v AD^w modeli musí OTP Group znížiť počet zamestnancov o viac ako polovicu, pritom ale takmer strojnásobiť príjmy a zvýšiť objem poskytnutých úverov až o 355.3%. Pre takto neefektívny útvar pekne vidíme význam najbližších vzorov, nakoľko na dosiahnutie efektívnej hranice vo forme najbližšieho vzoru mAD^w modelu sú potrebné oveľa menšie zmeny, ktoré v konečnom dôsledku znamenajú priblíženie sa k efektívnej nemeckej Helaba, respektíve kombinácii väčšej LBBW a najmenšej Prima Banky. Znamenalo by to zmenšenie banky, teda zníženie počtu zamestnancov o 91.4% a s tým aj zníženie operačných nákladov o 72.7% pri zvýšení pôžičiek takmer tretinu. Aj keď sú oba vzory v rámci technológie dosiahnuteľné, keď sa pozrieme na relatívne zmeny je najbližší vzor dosiahnuteľný výrazne jednoduchšie. Hodnoty vstupov a výstupov na dosiahnutie efektivity v zmysle RAM aditívneho modelu v Tabuľke 11.

Premenná	Pôvodná hodnota	AD^w vzor	mAD^w vzor
Počet zamestnancov	40845.00	15502.05 (-62.0%)	3514.09 (-91.4%)
Operačné náklady	3745.70	3745.70 (0.0%)	1020.98 (-72.7%)
Príjmy	12124.90	35438.99 (192.3%)	12124.90 (0.0%)
Pôžičky	72233.80	328891.16 (355.3%)	95395.83 (32.1%)

Tabuľka 11: Optimálny vzor pre OTP GROUP v zmysle AD^w modelu a najbližší vzor v zmysle mAD^w modelu

Pre Slack based measure a Russell Measure modely môžeme pozorovať podobný efekt. Pre dosiahnutie štandardného optimálneho vzoru pri oboch modeloch sa potrebuje OTP Group zlepšiť vo všetkých pozorovaných dimenziách. Tieto zmeny sa pohybujú od tretinového zníženia v operačných nákladov až po zvýšenie objemu úverov o 228.3% pri SBM modeli a 197.7% pri RM modeli. Najbližší vzor je pre modely $mSBM$ a mRM totožný. Hodnoty vstupov a výstupov, ktoré potrebuje OTP Group dosiahnuť a ich relatívne zmeny v Tabuľke 12.

Keď poznáme optimálne a najbližšie vzory našich modelov, zisťujeme, že OTP Group je neefektívna hlavne v objeme poskytnutých úverov na svoju veľkosť.

Premenná	Pôvodná hodnota	RM vzor	SBM vzor	Najbližšie vzory $mSBM$ a mRM
Počet zamestnancov	40845.00	7888.00 (-80.7%)	7205.05 (-82.4%)	18876.65 (-53.8%)
Operačné náklady	3745.70	2538.00 (-32.2%)	2301.13 (-38.6%)	3745.70 (0%)
Príjmy	12124.90	31132.00 (156.8%)	28164.07 (132.3%)	20118.10 (65.9%)
Pôžičky	72233.80	237166.00 (228.3%)	215029.17 (197.7%)	335126.57 (363.9%)

Tabuľka 12: Optimálne vzory pre OTP Group v zmysle SBM a RM modelov a najbližší vzor v zmysle $mSBM$ a mRM modelov

5.3.5 ING Group

Pre **ING Group** sme pri prechode z RM na mRM pozorovali najmenší posun efektivity spomedzi všetkých bánk. Ako si môžeme všimnúť v Tabuľkách 13 a 14, táto malá zmena bola spôsobená už relatívne vysokou efektivitou tohto útvaru a teda potrebných malých zmien na dosiahnutie optimálneho vzoru v RM modeli. Podobne tomu bolo aj pre AD^w a SBM dvojice, kde ING Group už na dosiahnutie optimálneho vzoru v týchto modeloch potrebovala vykonať iba malé relatívne zmeny. Následný rozdiel v najbližších vzoroch pre mAD^w a $mSBM$ modely nie je až tak výrazný.

Premenná	Pôvodná hodnota	AD^w vzor	mAD^w vzor
Počet zamestnancov	62770	62770 (0%)	62770 (0%)
Operačné náklady	12584.00	11243.09 (-10.7%)	10720.23 (-14.8%)
Príjmy	61099.00	62176.72 (1.8%)	61099.00 (0.0%)
Pôžičky	742909.00	898319.95 (20.9%)	806948.93 (8.6%)

Tabuľka 13: Optimálny vzor pre ING Group v zmysle AD^w modelu a najbližší vzor v zmysle mAD^w modelu

Premenná	Pôvodná hodnota	SBM a RM vzor	$mSBM$ a mRM vzor
Počet zamestnancov	62770	60864.77 (-3.0%)	62770 (0%)
Operačné náklady	12584.00	10940.89 (-13.1%)	10720.23 (-14.8%)
Príjmy	61099.00	61099.00 (0%)	61099.00 (0.0%)
Pôžičky	742909.00	875368.03 (17.8%)	806948.93 (8.6%)

Tabuľka 14: Optimálny vzor pre ING Group v zmysle SBM a RM modelu a najbližší vzor v zmysle $mSBM$ a mRM modelu

5.3.6 ABN AMRO

Naopak jeden z najväčších nárastov efektivity sme pri prechode z RM na mRM model pozorovali pri holandskej ABN AMRO, ktorá sa pri všetkých modeloch pohybovala v druhej polovici poradia. Optimálny vzor v AD^w modeli by ABN AMRO dosiahla znížením operačných nákladov o 5.7% pri zvýšení príjmov o 136% a poskytnutých pôžičiek o 73.5%. Na dosiahnutie najbližšieho vzoru pomocou RAM aditívnej metriky by sa naopak mala zamerať na zníženie vstupov, počtu zamestnancov o 38.4% a operačných nákladov o 43.2%, pri ponechaní rovnakých príjmoch a jemnom zvýšení pôžičiek, o 13.9%. Tieto hodnoty pozorujeme v Tabuľke 15.

Premenná	Pôvodná hodnota	AD^w vzor	mAD^w vzor
Počet zamestnancov	25342	25342 (0%)	15602.97 (-38.4%)
Operačné náklady	5630.00	5306.46 (-5.7%)	3198.66 (-43.2%)
Príjmy	17372.00	41005.08 (136.0%)	17372.00 (0.0%)
Pôžičky	257930.00	447431.32 (73.5%)	293902.67 (13.9%)

Tabuľka 15: Optimálny vzor pre ABN AMRO v zmysle AD^w modelu a najbližší vzor v zmysle mAD^w modelu

Znovu dostávame rovnaké optimálne vzory modelov SBM a RM a najbližšie vzory $mSBM$ a mRM. Pre dosiahnutie najvzdialenejšieho optimálneho vzoru SBM a RM modelov musí banka pri nezmenených poskytnutých pôžičkách zvýšiť príjmy o 84.4%, znížiť operačné náklady na polovicu a počet zamestnancov na približne tretinu. Pre dosiahnutie najbližších vzorov $mSBM$ a mRM modelov sa banka musí zamerať hlavne na optimalizáciu výstupov, pri nezmenenom počte zamestnancov a znížených operatívnych nákladov o 14.3% musí zvýšiť svoje príjmy o 47% a objem pôžičiek o 61.5%. Tieto vzory a relatívne zmeny potrebné na ich dosiahnutie v Tabuľke 16.

Premenná	Pôvodná hodnota	SBM a RM vzor	$mSBM$ a mRM vzor
Počet zamestnancov	25342	9611.61 (-62.1%)	25342 (0%)
Operačné náklady	5630.00	2811.39 (-50.1%)	4826.07 (-14.3%)
Príjmy	17372.00	32106.98 (84.8%)	25541.51 (47.0%)
Pôžičky	257930.00	257930.00 (0%)	416541.64 (61.5%)

Tabuľka 16: Optimálny vzor pre ABN AMRO v zmysle SBM a RM modelu a najbližší vzor v zmysle $mSBM$ a mRM modelu

5.3.7 Záverečné zhrnutie

V tejto podkapitole sme pre 6 vybraných útvarov porovnali navrhované optimálne vzory modelov s najbližšími vzormi ich ekvivalentov. Ukázali sme, o koľko menšie úsilie stačí vynaložiť na dosiahnutie efektívnej hranice pri všetkých 3 metrikách, keď uvažujeme miesto štandardných optimálnych vzorov modelov tie najbližšie. Zároveň sa potvrdila dôležitá zákonnosť, teda pri najbližšom vzore modelu musí existovať aspoň jedna dimenzia, v ktorej je relatívna zmena v hodnotách oproti optimálnemu vzoru štandardného modelu väčšia. Príčina je jednoduchá, keďže oba vzory ležia na $\partial^S T$, žiaden z nich nemôže dominovať tomu druhému. Takže ak najbližší vzor modelu predstavuje pre pozorovaný útvar úsporu v jednej z dimenzií, musí to byť kompenzované v dimenzii inej. Optimálne a najbližšie vzory modelov pre všetky útvary uvádzame v Prílohe A.

5.4 Porovnanie referenčných množín

V DEA modelovaní sa často uvádza aj referenčná množina (2.5), teda kombinácia efektívnych útvarov, ktorá tvorí projekciu. So zmenou optimálnej projekcie pri prechode od štandardného modelu k modelu najbližšieho vzoru sa pre jednotlivé útvary mení aj ich referenčná množina. Táto zmena referenčnej množiny priamo ilustruje, ako odlišný spôsob projekcie produkuje odlišné odporúčania pre neefektívne banky. Pozrime sa na referenčné množiny pre útvary podrobne rozobrané v Kapitole 5.3.

Pre dvojicu malých bánk, ktorých rozdielne vzory sme analyzovali ako prvé vidíme pre všetkých 6 modelov ich ukotvenie pri slovenskej Prima banke, pre MONETA Money bank s λ^* váhami medzi 0.9316 a 0.9557. Pri štandardných modeloch bola ako doplnok Prima banky LBBW, ktorá má najvyšší príjem na vstupy. Referenciou pri štandardných modeloch je teda stále malá banka. Pri modeloch najbližších vzorov sa do referenčnej množiny pridáva ešte malý podiel nemeckej Helaby. Zvýšil sa pritom podiel Prima Banky až na spomínaných 0.9557, takže prínosy Helaby s $\lambda^* = 0.0253$ a LBBW nie sú príliš signifikantné.

Podobne sa ukázala aj referenčná množina Oberbank, kde pre AD^w a SBM model dostávame kombináciu 0.8664 Prima banky s doplnkom LBBW. Pre RM model a všetky modely najbližších vzorov sa podiel Prima banky na projekcii ešte zvýšil na 0.8949 pri RM modeli a 0.9026 pri mAD^w, $mSBM$ a mRM modeloch, kde pre RM ako doplnok k Prima banke dostávame 0.0983 LBBW a menej ako 1% Helaba. Pre modely najbližších vzorov sa dostáva Helaba do referenčnej množiny s viac ako 7% zastúpením. Tento minimálny posun zodpovedá zisteniu z predchádzajúcich častí, že obe banky sú ako malé banky pomerne blízko Prima banke a tým aj jej efektívnej hrane.

Výrazne zaujímavejší obraz dostávame pri Barclays. Pri štandardnom AD^w modeli je jej optimálny vzor čisto Crédit Agricole S.A., s váhou rovnou 1. Veľmi podobne to je s referenčnou množinou SBM a RM modelov, kde je okrem Crédit Agricole S.A. zastúpená aj LBBW so skoro štvrtinovou váhou. Modely najbližších vzorov, kde sa pre všetky 3 nadobúdal rovnaký vzor sa zhodujú na kombinácii LBBW a Santander, s takmer rovnakým zastúpením. Santander ako najväčšia banka vôbec v našich dátach tak vystriedala Crédit Agricole S.A. a LBBW ako jedna z efektívnych bánk na základe pomeru vstupov a výstupov doplnila tento ľahšie získateľný vzor. Ako sme si vyššie ukázali, tento vzor je pre Barclays dosiahnuteľý jednoduchšie.

Pri OTP Group pozorujeme najvýraznejší posun referenčnej množiny, kde pre štandardné modely je jej najdôležitejším rovesníkom LBBW, s 89.7% zastúpením v referenčnej množine pre AD^w model až po priamo vzor SBM modelu. Pri mAD^w však ako referenciu dostávame spojenie Prima banky a LBBW v pomere 2:1, teda výrazne menšia konečná veľkosť. Pri $mSBM$ a mRM, kde sme dostali rovnaký vzor banka LBBW dokonca úplne vypadáva z referenčnej množiny, ktorá je vyskladaná z Helaba s 80% zastúpením a Crédit Agricole S.A.. Ďalšou zaujímavosťou je porovnanie množiny, ktorú dostávame pre AD^w a RM modely. Pri aditívnej miere sa k LBBW ako druhý benchmark pridáva Crédit Agricole S.A., ktorá je efektívna vďaka svojej veľkosti, pričom pri nelineárnej Russellovej miere má skoro 10% zastúpenie najmenšia Prima banka.

Pre posledné dve banky spomínané v Kapitole 5.3 dostávame už menšie zmeny a menej zaujímavé

výsledky. Pre ING Group je hlavným rovesníkom Crédit Agricole S.A., ktorý má váhu 0.74 pri AD^w modeli a 0.715 pri RM a SBM modeloch, pričom pri všetkých troch je doplnená LBBW. Pri najbližšom vzore, ktorý sme dostali pre všetky 3 modely rovnaký je Crédit Agricole S.A. zastúpená s váhou 0.57, doplnená o znovu LBBW a pridal sa k nim aj 6.5% banky Santander.

Podobne sú na tom referenčné množiny ABN AMRO, kde pre štandardné modely dostávame LBBW ako hlavnú referenciu, pri SBM a RM dokonca až s 97.7% zastúpením v množine, doplnenú o Crédit Agricole S.A.. Pri modeloch najbližších vzorov LBBW strieda Helaba, ktorá má rádovo iný profil. Namiesto extrémne vysokých príjmov na vstupy vyniká objemom poskytnutých pôžičiek na počet zamestnancov.

Podobné malé aj väčšie posuny medzi referenčnými množinami štandardných modelov a modelov najbližších vzorov vieme pozorovať naprieč celým datasetom. Tabuľka 17 zhŕňa, koľko krát sa každý z piatich efektívnych útvarov objavil v referenčnej množine niektorej z neefektívnych bánk, samostatne pre každý z modelov. Pri štandardných najvzdialenejších optimálnych vzoroch dominuje LBBW (21 až 22 výskytov z 22 možných), zatiaľ čo Helaba sa v v štandardných SBM a RM modeloch objavuje iba raz a pri AD^w vôbec. V modeloch najbližších vzorov sa však stáva jedným z najpoužívanejších referenčných útvarov (12-14 výskytov), zatiaľ čo výskyt LBBW pri nich klesá takmer na polovicu (9-12) výskytov. Santander tiež získava na význame pri prechode na modely najbližších vzorov, zo zastúpenia iba pre BBVA až na 5 výskytov pri neefektívnych útvaroch. Crédit Agricole S.A. zostáva významným referenčným útvarom naprieč všetkými modelmi.

Efektívny útvar	AD^w	mAD^w	SBM	$mSBM$	RM	mRM
Crédit Agricole S.A.	16	11	14	11	14	11
LBBW	21	12	22	9	22	9
Helaba	0	12	1	14	1	14
Prima banka	5	5	4	2	5	2
Santander	1	5	1	5	1	5

Tabuľka 17: Početnosť zastúpenia jednotlivých efektívnych útvarov v referenčnej množine pre každý z modelov

Tabuľku referenčných množín pre všetky útvary uvádzame v Prílohe B.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali problematikou najbližších vzorov v obálkovej analýze dát. Na úvod sme predstavili základné pojmy a definície, ktoré sme ďalej počas práce používali a rovnako vety a tvrdenia, o ktoré sme sa opierali. Hlavnými základmi do ďalšieho pokračovania boli hlavne definície dominancie v n rozmernom priestore, vďaka ktorej sme dokázali rozdeliť hranicu technologickej množinu T na jej silne a slabo efektívnu časť. Pre potreby formulácie modelov najbližších vzorov v neskorších kapitolách sme definovali opornú nadrovinu k T a Tvrdenie 1.1 o jej existencii pre body z hranice ∂T a Tvrdenie 1.2 o prepojení bodov zo silne efektívnej hranice $\partial^S T$ a oporných nadrovín, ktoré cez ne prechádzajú.

V Kapitole 2 sme spravili základný prehľad štandardných slack-based modelov, ktoré sa v rovnakých tvaroch formulujú od 1985 pre základný aditívny model a Russell Measure model, prípadne od 1999 pre niektoré špecifické váhy v aditívnom modeli s váhami alebo Slack based measure model. Predstavili sme základné vlastnosti (P1)-(P8), ktoré by mala dobrá miera efektivity spĺňať a ukázali sme, ktoré z nich nami vybraný reprezentanti spĺňajú. V tejto kapitole sme vychádzali hlavne z článku [11], ktorý priniesol zoštandardizovanie slack-based modelov pod dva všeobecné tvary a autori v ňom okrem iného dokázali platnosť podmienok vlastností (P1)-(P8) a ich splnenie jednotlivými modelmi. Analyticky a na príkladoch sme ukázali, že tieto modely tvarom svojej úlohy matematického programovania hľadajú najvzdialenejšiu projekciu, ktorú prehlásia za optimálny vzor. Špecifikom týchto modelov, na rozdiel od neskôr formulovaných modelov najbližších vzorov, je konvexnosť množiny optimálnych vzorov v prípade alternatívnych λ^* riešení. Túto skutočnosť sme sformulovali do Tvrdenia 2.4 a dokázali. V tejto kapitole sme zadefinovali ďalšie používané objekty v DEA modelovaní, akou je projekcia (Def. 2.1) a Referenčná množina (Def. 2.5). V ďalšej kapitole sme už rozoberali problematiku modelov najbližších vzorov. Pozreli sme sa na históriu hľadania najbližšej projekcie na efektívnu hranicu. Spomenuli sme prvotné pokusy hľadania najbližšieho vzoru pomocou identifikovania efektívnych stien množiny T a následného merania definovanej vzdialenosti od každej z nich, až po prelomový článok autorov Aparicio et al. [2], ktorý má vyše 200 citácií a na ktorý sme v tejto práci nadviazali aj my. Ukázali sme hlavný prínos tohto článku, ktorým je Veta 3.1. V tejto vete je popísaná efektívna hranica $\partial^S T$ pomocou vzťahu o oporných nadrovinách z Tvrdenia 1.2. Avšak, táto charakterizácia bola limitovaná iba na konštantné výnosy z rozsahu, bola potreba získať množinu extremálne efektívnych útvarov a zároveň kľúčová podmienka komplementarity bola uvedená v numericko-komputačnom tvare z ktorého nebolo jednoznačne jasné, že reprezentuje podmienku danú Tvrdením 1.1.

My sme túto vetu prebrali a rozanalyzovali. Z tejto analýzy sme vytvorili pomocnú Vetu 3.2, ktorá je už zovšeobecnená pre variabilné výnosy z rozsahu a na charakterizáciu hranice $\partial^S T$ už nepotrebujeme vopred poznať extremálne efektívne body, ale charakterizujeme ju pomocou všetkých pozorovaných (x, y) za pomoci Tvrdení 1.1 a 1.2. V práci s touto charakterizáciou hranice sme identifikovanú podmienku komplementarity dostali do pôvodného analytického tvaru. Výsledkom nášho snaženia v Kapitole 3 bola formulácia Tvrdenia 3.3, teda reprezentácia $\partial^S T_{VRS}$ pomocou Tvrdenia 1.2 a podmienky komplementarity pre množinu pozorovaných bodov. Následne sme vďaka Dôsledku 3.4 vedeli hodnoty u, v odraziť od nuly

a tým numericky implementovať. Keďže sme Tvrdenie 3.3 formulovali pre variabilné výnosy z rozsahu, z jeho Dôsledku 3.5 dostávame verziu pre konštantné výnosy z rozsahu.

Na koniec Kapitoly 3 sme tiež bližšie rozobrali podmienku komplemetarity (3.17) a upravili sme ju do tvaru vhodného na numerickú implementáciu v úlohe zmiešaného celočíselného programovania.

V Kapitole 4 sme prebrali formát Všeobecného slack-based modelu a v zmysle Tvrdenia 3.3 sme sformulovali $mGSB_o$ model (4.9), teda Všeobecný slack-based model pre hľadanie najbližších vzorov. Zadefinovali sme pojem *najbližšieho vzoru modelu* ako projekciu útvaru (x_o, y_o) vzhľadom na daný model. Úvahami a neskoršími príkladmi 4.3 a grafickými ilustráciami ďalších príkladov na Obrázku 12 sme ukázali, že množina najbližších vzorov pre prípadné alternatívne λ^* riešenia modelov nemusí byť konvexná. Následne sme sformulovali ekvivalenty modelov z Kapitoly 2 v tvare hľadania najbližších vzorov. Riešenia modelov mAD^w, $mSBM$ a nelineárneho mRM sme ukázali na rovnakých príkladoch, ako štandardné modely v Kapitole 2, pomocou ktorých sme ukázali rozdiel v nájdených vzoroch a ušetrené úsilie potrebné na ich dosiahnutie v podaní mAD^w, $mSBM$ a mRM modelov.

V Kapitole 5 sme tieto modely implementovali v praxi na empirickej ilustrácii. Najskôr sme získali a spracovali dáta pre 27 európskych, ale aj svetových bánk a z ich pôsobenie sme zredukovali v rámci *intermediation* prístupu k modelovaniu bánk na 2 vstupy a 2 výstupy. Za vstupy sme vybrali počet zamestnancov a operačné náklady a za výstupy ich hrubé príjmy a objem poskytnutých pôžičiek. Vyššie spomenutých 6 modelov sme následne naprogramovali v programovacom jazyku *Python* s použitím komerčného solvera *Gurobi* a kód sme vložili ako Prílohu C. Výsledné efektivity jednotlivých modelov sme zhrnuli v Tabuľke 3 a poradia bánk podľa dosiahnutej efektivity v jednotlivých modeloch následne v Tabuľkách 4, 5 a 6. Z našej vzorky sme pri takto vybraných vstupoch a výstupoch dostali 5 efektívnych bánk, ktorými boli Santander, Crédit Agricole S.A., Prima banka, Helaba a LBBW. Pre neefektívne banky sme následne našli ich optimálne vzory v zmysle štandardných AD^w, SBM a RM modelov a ich najbližšie vzory v zmysle modelov mAD^w, $mSBM$ a mRM. Tieto získané vzory sme po modeloch zhrnuli v Prílohe A a podrobne rozobrali v Kapitole 5.3 pre vybrané banky a tým sme ukázali rozdiely v absolútnych a relatívnych zmenách potrebných na ich dosiahnutie na reálnych dátach. Zároveň sme ukázali aj dôležitú zákonnosť vyplývajúca definície silne efektívnej hranice (1.4), na ktorú obe verzie modelov projektujú, teda ak sú dva body na silno efektívnej hranici, nemôžu si navzájom dominovať. Preto úspora v jednej z dimenzií pri dosiahnutí najbližšieho vzoru modelu oproti optimálnemu vzoru štandardného modelu musí byť kompenzovaná vynaložením väčšieho úsilia v inej dimenzii.

Nakoniec sme sa pozreli bližšie na referenčné množiny všetkých modelov. Dané množiny, ich rozdiely naprieč modelmi a hlavne zmeny pri prechode na modely najbližších vzorov sme pre vybrané banky z kapitoly 5.3 rozobrali podrobne. Následne sme v Tabuľke 17 zhrnuli početnosti výskytu našich 5 efektívnych bánk v referenčných množinách pre použité modely. Referenčné množiny pre všetky útvary v zmysle štandardných modelov a ich ekvivalentov najbližších vzorov uvádzame v Prílohe B.

Zoznam použitej literatúry

[1] J. Aparicio, J. M. Cordero a J. T. Pastor. „The determination of the least distance to the strongly efficient frontier in Data Envelopment Analysis oriented models: Modelling and computational aspects“. In: *Omega* 71 (2017), s. 1–10. DOI: 10.1016/j.omega.2016.09.008.

[2] J. Aparicio, J. L. Ruiz a I. Sirvent. „Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA“. In: *Journal of Productivity Analysis* 28 (2007), s. 209–218. DOI: 10.1007/s11123-007-0039-5.

[3] W. Briec. „A graph-type extension of Farrell technical efficiency measure“. In: *Journal of Productivity Analysis* 8.1 (1997), s. 95–110.

[4] W. Briec. „Hölder distance function and measurement of technical efficiency“. In: *Journal of Productivity Analysis* 11.2 (1999), s. 111–131.

[5] W. W. Cooper, K. S. Park a J. T. Pastor. „RAM: a range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA“. In: *Journal of Productivity analysis* 11 (1999), s. 5–42.

[6] W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone et al. *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Springer, 2007.

[7] M. J. Farrell. „The measurement of productive efficiency“. In: *Journal of the Royal Statistical Society Series A: Statistics in Society* 120.3 (1957), s. 253–281.

[8] R. Färe, S Grosskopf a C. A. Lovell. *The measurement of efficiency of production*. Zv. 6. Springer Science & Business Media, 1985.

[9] R. Färe a C. A. Lovell. „Measuring the technical efficiency of production“. In: *Journal of Economic Theory* 19.1 (1978), s. 150–162. ISSN: 0022-0531. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0531(78)90060-1. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053178900601.

[10] M. Halická. *DEA Modely*. učebné texty FMFI UK. dostupné na internete (6.5.2026).

[11] M. Halická a M. Trnovská. „A unified approach to non-radial graph models in data envelopment analysis: common features, geometry, and duality“. In: *European Journal of Operational Research* 289.2 (2021), s. 611–627. ISSN: 0377-2217.

[12] M. Halická a M. Trnovská. „The Russell measure model: Computational aspects, duality, and profit efficiency“. In: *European Journal of Operational Research* 268.1 (2018), s. 386–397. ISSN: 0377-2217. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.012.

[13] M. Halická, M. Trnovská a A Černý. „A unified approach to radial, hyperbolic, and directional efficiency measurement in data envelopment analysis“. In: *European Journal of Operational Research* 312.1 (2024), s. 298–314.

[14] M. Halická, M. Trnovská a A. Černý. „On indication, strict monotonicity, and efficiency of projections in a general class of path-based data envelopment analysis models“. In: *European Journal of Operational Research* 320.1 (2025), s. 175–187.

[15] A. Charnes a W. W. Cooper. „Programming with linear fractional functionals“. In: *Naval Research logistics quarterly* 9.3-4 (1962), s. 181–186.

[16] A. Charnes, W. W. Cooper a E. Rhodes. „Measuring the efficiency of decision making units“. In: *European journal of operational research* 2.6 (1978), s. 429–444.

[17] A. Charnes, W. W. Cooper a R. M. Thrall. „A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in data envelopment analysis“. In: *Journal of productivity analysis* 2.3 (1991), s. 197–237.

[18] A. Charnes et al. „Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions“. In: *Journal of Econometrics* 30.1–2 (1985), s. 91–107. DOI: 10.1016/0304-4076(85)90133-2.

[19] C. A. Lovell a J. T. Pastor. „Units invariant and translation invariant DEA models“. In: *Operations Research Letters* 18.3 (1995), s. 147–151. DOI: 10.1016/0167-6377(95)00044-5.

[20] J. C. Paradi a H. Zhu. „A survey on bank branch efficiency and performance research with data envelopment analysis“. In: *Omega* 41.1 (2013), s. 61–79. ISSN: 0305-0483. DOI: https://doi.org/10.1016/j.omega.2011.08.010.

[21] J. T. Pastor, J. L. Ruiz a I. Sirvent. „An enhanced DEA Russell graph efficiency measure“. In: *European Journal of Operational Research* 115.3 (1999), s. 596–607. ISSN: 0377-2217. DOI: https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00098-8.

[22] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Zv. 28. Princeton university press, 1997.

[23] D. Ševčovič, M. Halická a P. Brunovský. „DEA analysis for a large structured bank branch network.“ In: *Central European Journal of Operations Research* 9.4 (2001).

[24] G. Yu et al. „Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data envelopment analysis model“. In: *European Journal of Operational Research* 95.3 (1996), s. 491–510.

Príloha A

Optimálne vzory v AD^w modeli

Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady	Príjmy	Pôžičky
ABN AMRO	25342.00 (+0.0%)	5306.46 (-5.7%)	41005.08 (+136.0%)	447431.32 (+73.5%)
Barclays	81948.00 (-11.9%)	14285.00 (-29.8%)	73025.00 (+16.7%)	1129354.00 (+172.6%)
BBVA	103702.11 (-18.5%)	14705.00 (+0.0%)	79084.00 (+0.0%)	861830.74 (+73.9%)
BNP Paribas Fortis	29519.04 (-14.3%)	5969.00 (+0.0%)	43367.88 (+110.5%)	497751.43 (+99.9%)
Banco BPM	9785.68 (-48.4%)	2839.00 (+0.0%)	32205.45 (+255.7%)	260027.04 (+91.9%)
Groupe BPCE	81948.00 (-9.0%)	14285.00 (-17.4%)	73025.00 (+6.3%)	1129354.00 (+12.7%)
Commerzbank	35640.80 (-10.6%)	6940.00 (+0.0%)	46830.73 (+92.3%)	571499.16 (+52.8%)
Crédit Agricole S.A.	81948.00 (+0.0%)	14285.00 (+0.0%)	73025.00 (+0.0%)	1129354.00 (+0.0%)
Deutsche Bank	81948.00 (-8.8%)	14285.00 (-30.9%)	73025.00 (+13.8%)	1129354.00 (+138.8%)
DZ BANK Group	22174.20 (-35.6%)	4804.00 (+0.0%)	39213.17 (+73.3%)	409269.35 (+13.5%)
Erste Group	27085.47 (-40.7%)	5583.00 (+0.0%)	41991.30 (+84.8%)	468434.62 (+85.3%)
Helaba	3708.00 (+0.0%)	1211.00 (+0.0%)	7394.00 (+0.0%)	144115.00 (+0.0%)
HSBC Europe	6101.00 (+0.0%)	1918.21 (-31.3%)	23366.47 (+153.8%)	179244.48 (+269.2%)
ING Group	62770.00 (+0.0%)	11243.09 (-10.7%)	62176.72 (+1.8%)	898319.95 (+20.9%)
Intesa Sanpaolo	69458.61 (-21.1%)	12304.00 (+0.0%)	65960.21 (+59.1%)	978896.49 (+111.4%)
KBC Group	25080.61 (-34.0%)	5265.00 (+0.0%)	40857.22 (+68.7%)	444282.43 (+82.5%)
LBBW	7888.00 (+0.0%)	2538.00 (+0.0%)	31132.00 (+0.0%)	237166.00 (+0.0%)
Mediobanca	5533.00 (+0.0%)	1721.21 (-26.2%)	20898.19 (+174.8%)	160834.06 (+187.9%)
MONETA Money Bank	1264.93 (-47.9%)	240.90 (+0.0%)	2351.00 (+133.6%)	22494.26 (+54.2%)
Oberbank	1728.84 (-20.1%)	401.80 (+0.0%)	4366.96 (+211.0%)	37530.91 (+70.9%)
OTP Group	15502.05 (-62.0%)	3745.70 (+0.0%)	35438.99 (+192.3%)	328891.16 (+355.3%)
Raiffeisen Bank	17950.12 (-57.7%)	4134.00 (+0.0%)	36823.77 (+206.6%)	358382.66 (+130.5%)
Santander	198403.00 (+0.0%)	24711.00 (+0.0%)	122316.00 (+0.0%)	1126301.00 (+0.0%)
Prima banka	779.00 (+0.0%)	72.36 (+0.0%)	239.37 (+0.0%)	6744.01 (+0.0%)
Société Générale	81948.00 (-30.0%)	14285.00 (-17.6%)	73025.00 (+11.0%)	1129354.00 (+112.8%)
Swedbank	6783.72 (-62.1%)	2155.00 (+0.0%)	26333.29 (+155.9%)	201373.36 (+13.4%)
UniCredit	67118.00 (+0.0%)	11932.74 (-2.3%)	64636.22 (+63.1%)	950699.56 (+62.2%)

Tabuľka 18: Optimálne vzory v zmysle AD^w modelu

Optimálne vzory v mAD^w modeli

Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady	Príjmy	Pôžičky
ABN AMRO	15602.97 (-38.4%)	3198.66 (-43.2%)	17372.00 (+0.0%)	293902.67 (+13.9%)
Barclays	93000.00 (+0.0%)	12443.72 (-38.8%)	71868.18 (+14.8%)	634384.37 (+53.1%)
BBVA	112429.38 (-11.6%)	14705.00 (+0.0%)	81167.44 (+2.6%)	725061.44 (+46.3%)
BNP Paribas Fortis	19454.71 (-43.5%)	3842.29 (-35.6%)	20603.00 (+0.0%)	342405.78 (+37.5%)
Banco BPM	3769.83 (-80.1%)	1201.80 (-57.7%)	9054.00 (+0.0%)	135526.00 (+0.0%)
Groupe BPCE	90006.00 (+0.0%)	14277.60 (-17.4%)	74933.41 (+9.1%)	1001780.00 (+0.0%)
Commerzbank	23928.73 (-40.0%)	4589.91 (-33.9%)	24356.00 (+0.0%)	398745.04 (+6.6%)
Crédit Agricole S.A.	81948.00 (+0.0%)	14285.00 (+0.0%)	73025.00 (+0.0%)	1129354.00 (+0.0%)
Deutsche Bank	89879.00 (+0.0%)	12080.48 (-41.5%)	70374.41 (+9.7%)	619818.64 (+31.0%)
DZ BANK Group	21865.17 (-36.5%)	4245.09 (-11.6%)	22625.00 (+0.0%)	372759.62 (+3.4%)
Erste Group	21976.04 (-51.9%)	4263.61 (-23.6%)	22718.00 (+0.0%)	374155.72 (+48.0%)
Helaba	3708.00 (+0.0%)	1211.00 (+0.0%)	7394.00 (+0.0%)	144115.00 (+0.0%)
HSBC Europe	2842.86 (-53.4%)	788.18 (-71.8%)	9208.00 (+0.0%)	73639.26 (+51.7%)
ING Group	62770.00 (+0.0%)	10720.23 (-14.8%)	61099.00 (+0.0%)	806948.93 (+8.6%)
Intesa Sanpaolo	88072.00 (+0.0%)	11870.18 (-3.5%)	69509.54 (+67.6%)	611385.36 (+32.0%)
KBC Group	23765.41 (-37.4%)	4562.62 (-13.3%)	24219.00 (+0.0%)	396688.42 (+63.0%)
LBBW	7888.00 (+0.0%)	2538.00 (+0.0%)	31132.00 (+0.0%)	237166.00 (+0.0%)
Mediobanca	2473.84 (-55.3%)	660.19 (-71.7%)	7604.40 (+0.0%)	61678.33 (+10.4%)
MONETA Money Bank	987.93 (-59.3%)	147.93 (-38.6%)	1006.30 (+0.0%)	14589.20 (+0.0%)
Oberbank	1146.72 (-47.0%)	209.44 (-47.9%)	1404.10 (+0.0%)	21960.90 (+0.0%)
OTP Group	3514.09 (-91.4%)	1020.98 (-72.7%)	12124.90 (+0.0%)	95395.83 (+32.1%)
Raiffeisen Bank	9210.82 (-78.3%)	2130.53 (-48.5%)	12010.00 (+0.0%)	213409.44 (+37.2%)
Santander	198403.00 (+0.0%)	24711.00 (+0.0%)	122316.00 (+0.0%)	1126301.00 (+0.0%)
Prima banka	779.00 (+0.0%)	72.36 (+0.0%)	239.37 (+0.0%)	6744.01 (+0.0%)
Société Générale	117000.00 (+0.0%)	15236.95 (-12.1%)	83355.02 (+26.7%)	746392.56 (+40.6%)
Swedbank	7158.83 (-60.0%)	1787.64 (-17.0%)	10288.70 (+0.0%)	187569.64 (+5.7%)
UniCredit	67118.00 (+0.0%)	9846.37 (-19.4%)	60335.79 (+52.2%)	586100.00 (+0.0%)

Tabuľka 19: Najbližšie vzory v zmysle mAD^w modelu

Optimálne vzory v SBM modeli

Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady	Príjmy	Pôžičky
ABN AMRO	9611.61 (-62.1%)	2811.39 (-50.1%)	32106.98 (+84.8%)	257930.00 (+0.0%)
Barclays	63492.49 (-31.7%)	11357.69 (-44.1%)	62585.40 (+0.0%)	907023.64 (+118.9%)
BBVA	103702.11 (-18.5%)	14705.00 (+0.0%)	79084.00 (+0.0%)	861830.74 (+73.9%)
BNP Paribas Fortis	8869.84 (-74.3%)	2693.73 (-54.9%)	31687.39 (+53.8%)	248994.00 (+0.0%)
Banco BPM	7888.00 (-58.4%)	2538.00 (-10.6%)	31132.00 (+243.8%)	237166.00 (+75.0%)
Groupe BPCE	74263.21 (-17.5%)	13066.08 (-24.4%)	68678.00 (+0.0%)	1036776.69 (+3.5%)
Commerzbank	19241.20 (-51.7%)	4338.78 (-37.5%)	37554.08 (+54.2%)	373936.00 (+0.0%)
Crédit Agricole S.A.	81948.00 (+0.0%)	14285.00 (+0.0%)	73025.00 (+0.0%)	1129354.00 (+0.0%)
Deutsche Bank	66276.12 (-26.3%)	11799.21 (-42.9%)	64160.00 (+0.0%)	940557.62 (+98.9%)
DZ BANK Group	18126.88 (-47.4%)	4162.04 (-13.4%)	36923.75 (+63.2%)	360512.00 (+0.0%)
Erste Group	9186.77 (-79.9%)	2744.00 (-50.9%)	31866.66 (+40.3%)	252812.00 (+0.0%)
Helaba	3708.00 (+0.0%)	1211.00 (+0.0%)	7394.00 (+0.0%)	144115.00 (+0.0%)
HSBC Europe	6101.00 (+0.0%)	1970.69 (-29.4%)	20983.72 (+127.9%)	197385.58 (+306.6%)
ING Group	60864.77 (-3.0%)	10940.89 (-13.1%)	61099.00 (+0.0%)	875368.03 (+17.8%)
Intesa Sanpaolo	26641.90 (-69.7%)	5512.64 (-55.2%)	41740.39 (+0.7%)	463091.00 (+0.0%)
KBC Group	8404.32 (-77.9%)	2619.90 (-50.2%)	31424.06 (+29.7%)	243386.00 (+0.0%)
LBBW	7888.00 (+0.0%)	2538.00 (+0.0%)	31132.00 (+0.0%)	237166.00 (+0.0%)
Mediobanca	5533.00 (+0.0%)	1721.21 (-26.2%)	20898.19 (+174.8%)	160834.06 (+187.9%)
MONETA Money Bank	1264.93 (-47.9%)	240.90 (+0.0%)	2351.00 (+133.6%)	22494.26 (+54.2%)
Oberbank	1728.84 (-20.1%)	401.80 (+0.0%)	4366.96 (+211.0%)	37530.91 (+70.9%)
OTP Group	7888.00 (-80.7%)	2538.00 (-32.2%)	31132.00 (+156.8%)	237166.00 (+228.3%)
Raiffeisen Bank	7888.00 (-81.4%)	2538.00 (-38.6%)	31132.00 (+159.2%)	237166.00 (+52.5%)
Santander	198403.00 (+0.0%)	24711.00 (+0.0%)	122316.00 (+0.0%)	1126301.00 (+0.0%)
Prima banka	779.00 (+0.0%)	72.36 (+0.0%)	239.37 (+0.0%)	6744.01 (+0.0%)
Société Générale	69194.82 (-40.9%)	12262.16 (-29.3%)	65811.00 (+0.0%)	975718.69 (+83.8%)
Swedbank	6783.72 (-62.1%)	2155.00 (+0.0%)	26333.29 (+155.9%)	201373.36 (+13.4%)
UniCredit	36852.81 (-45.1%)	7132.24 (-41.6%)	47516.32 (+19.9%)	586100.00 (+0.0%)

Tabuľka 20: Optimálne vzory v zmysle SBM modelu

Optimálne vzory v $mSBM$ modeli

Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady	Príjmy	Pôžičky
ABN AMRO	25342.00 (+0.0%)	4826.07 (-14.3%)	25541.51 (+47.0%)	416541.64 (+61.5%)
Barclays	93000.00 (+0.0%)	12443.72 (-38.8%)	71868.18 (+14.8%)	634384.37 (+53.1%)
BBVA	112429.38 (-11.6%)	14705.00 (+0.0%)	81167.44 (+2.6%)	725061.44 (+46.3%)
BNP Paribas Fortis	32181.76 (-6.6%)	5969.00 (+0.0%)	31278.99 (+51.8%)	502671.46 (+101.9%)
Banco BPM	13450.60 (-29.1%)	2839.00 (+0.0%)	15566.50 (+71.9%)	266798.88 (+96.9%)
Groupe BPCE	90006.00 (+0.0%)	14277.60 (-17.4%)	74933.41 (+9.1%)	1001780.00 (+0.0%)
Commerzbank	39867.00 (+0.0%)	6259.86 (-9.8%)	46437.74 (+90.7%)	386412.24 (+3.3%)
Crédit Agricole S.A.	81948.00 (+0.0%)	14285.00 (+0.0%)	73025.00 (+0.0%)	1129354.00 (+0.0%)
Deutsche Bank	89879.00 (+0.0%)	12080.48 (-41.5%)	70374.41 (+9.7%)	619818.64 (+31.0%)
DZ BANK Group	25209.94 (-26.8%)	4804.00 (+0.0%)	25430.73 (+12.4%)	414878.63 (+15.1%)
Erste Group	29871.78 (-34.6%)	5583.00 (+0.0%)	29341.28 (+29.2%)	473583.02 (+87.3%)
Helaba	3708.00 (+0.0%)	1211.00 (+0.0%)	7394.00 (+0.0%)	144115.00 (+0.0%)
HSBC Europe	6101.00 (+0.0%)	1610.87 (-42.3%)	9401.35 (+2.1%)	174248.91 (+258.9%)
ING Group	62770.00 (+0.0%)	10720.23 (-14.8%)	61099.00 (+0.0%)	806948.93 (+8.6%)
Intesa Sanpaolo	88072.00 (+0.0%)	11870.18 (-3.5%)	69509.54 (+67.6%)	611385.36 (+32.0%)
KBC Group	27968.74 (-26.4%)	5265.00 (+0.0%)	27744.93 (+14.6%)	449618.97 (+84.7%)
LBBW	7888.00 (+0.0%)	2538.00 (+0.0%)	31132.00 (+0.0%)	237166.00 (+0.0%)
Mediobanca	5533.00 (+0.0%)	1515.96 (-35.0%)	8924.89 (+17.4%)	167096.35 (+199.1%)
MONETA Money Bank	987.93 (-59.3%)	147.93 (-38.6%)	1006.30 (+0.0%)	14589.20 (+0.0%)
Oberbank	1146.72 (-47.0%)	209.44 (-47.9%)	1404.10 (+0.0%)	21960.90 (+0.0%)
OTP Group	18876.65 (-53.8%)	3745.70 (+0.0%)	20118.10 (+65.9%)	335126.57 (+363.9%)
Raiffeisen Bank	21200.39 (-50.0%)	4134.00 (+0.0%)	22067.35 (+83.7%)	364388.34 (+134.3%)
Santander	198403.00 (+0.0%)	24711.00 (+0.0%)	122316.00 (+0.0%)	1126301.00 (+0.0%)
Prima banka	779.00 (+0.0%)	72.36 (+0.0%)	239.37 (+0.0%)	6744.01 (+0.0%)
Société Générale	117000.00 (+0.0%)	15236.95 (-12.1%)	83355.02 (+26.7%)	746392.56 (+40.6%)
Swedbank	9357.27 (-47.8%)	2155.00 (+0.0%)	12132.85 (+17.9%)	215253.57 (+21.2%)
UniCredit	67118.00 (+0.0%)	9846.37 (-19.4%)	60335.79 (+52.2%)	586100.00 (+0.0%)

Tabuľka 21: Najbližšie vzory v zmysle $mSBM$ modelu

Optimálne vzory v RM modeli

Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady	Príjmy	Pôžičky
ABN AMRO	9611.63 (-62.1%)	2811.39 (-50.1%)	32106.97 (+84.8%)	257930.05 (+0.0%)
Barclays	63492.69 (-31.7%)	11357.71 (-44.1%)	62585.41 (+0.0%)	907024.26 (+118.9%)
BBVA	103702.20 (-18.5%)	14705.00 (-0.0%)	79084.00 (+0.0%)	861829.04 (+73.9%)
BNP Paribas Fortis	9787.98 (-71.6%)	2839.36 (-52.4%)	32206.72 (+56.3%)	260054.45 (+4.4%)
Banco BPM	6521.52 (-65.6%)	2102.80 (-25.9%)	23434.82 (+158.8%)	206266.87 (+52.2%)
Groupe BPCE	74263.30 (-17.5%)	13066.09 (-24.4%)	68678.03 (+0.0%)	1036777.50 (+3.5%)
Commerzbank	19241.21 (-51.7%)	4338.79 (-37.5%)	37554.08 (+54.2%)	373936.03 (+0.0%)
Crédit Agricole S.A.	81948.00 (+0.0%)	14285.00 (+0.0%)	73025.00 (+0.0%)	1129354.00 (+0.0%)
Deutsche Bank	66276.33 (-26.3%)	11799.24 (-42.9%)	64160.02 (+0.0%)	940558.57 (+98.9%)
DZ BANK Group	18126.92 (-47.4%)	4162.04 (-13.4%)	36923.74 (+63.2%)	360512.14 (+0.0%)
Erste Group	11511.61 (-74.8%)	3112.76 (-44.2%)	33181.72 (+46.1%)	280818.81 (+11.1%)
Helaba	3708.00 (+0.0%)	1211.00 (+0.0%)	7394.00 (+0.0%)	144115.00 (+0.0%)
HSBC Europe	4206.09 (-31.1%)	1260.99 (-54.8%)	15131.99 (+64.3%)	117825.12 (+142.7%)
ING Group	60864.90 (-3.0%)	10940.91 (-13.1%)	61099.02 (+0.0%)	875368.86 (+17.8%)
Intesa Sanpaolo	39659.22 (-55.0%)	7577.38 (-38.4%)	49103.77 (+18.4%)	619908.00 (+33.9%)
KBC Group	9811.71 (-74.2%)	2843.13 (-46.0%)	32220.15 (+33.0%)	260340.39 (+7.0%)
LBBW	7888.00 (+0.0%)	2538.00 (+0.0%)	31132.00 (+0.0%)	237166.00 (+0.0%)
Mediobanca	3897.28 (-29.6%)	1153.89 (-50.5%)	13790.06 (+81.3%)	107815.93 (+93.0%)
MONETA Money Bank	1243.81 (-48.8%)	233.58 (-3.0%)	2259.23 (+124.5%)	21809.85 (+49.5%)
Oberbank	1497.80 (-30.8%)	322.49 (-19.7%)	3325.36 (+136.8%)	30328.23 (+38.1%)
OTP Group	7205.05 (-82.4%)	2301.13 (-38.6%)	28164.07 (+132.3%)	215029.17 (+197.7%)
Raiffeisen Bank	7888.01 (-81.4%)	2538.00 (-38.6%)	31131.97 (+159.2%)	237165.85 (+52.5%)
Santander	198403.00 (-0.0%)	24711.00 (-0.0%)	122316.00 (+0.0%)	1126301.00 (+0.0%)
Prima banka	779.00 (+0.0%)	72.36 (+0.0%)	239.37 (+0.0%)	6744.01 (+0.0%)
Société Générale	69194.96 (-40.9%)	12262.18 (-29.3%)	65811.01 (+0.0%)	975719.41 (+83.8%)
Swedbank	6471.09 (-63.9%)	2088.18 (-3.1%)	23085.52 (+124.4%)	205623.52 (+15.8%)
UniCredit	39432.35 (-41.2%)	7541.39 (-38.3%)	48975.45 (+23.6%)	617175.10 (+5.3%)

Tabuľka 22: Optimálne vzory v zmysle RM modelu

Optimálne vzory v mRM modeli

Banka	Počet zamestnancov	Operačné náklady	Príjmy	Pôžičky
ABN AMRO	25342.00 (+0.0%)	4826.07 (-14.3%)	25541.51 (+47.0%)	416541.64 (+61.5%)
Barclays	93000.00 (+0.0%)	12443.72 (-38.8%)	71868.18 (+14.8%)	634384.37 (+53.1%)
BBVA	112429.38 (-11.6%)	14705.00 (+0.0%)	81167.44 (+2.6%)	725061.44 (+46.3%)
BNP Paribas Fortis	34463.00 (+0.0%)	5630.92 (-5.7%)	43851.29 (+112.8%)	361191.73 (+45.1%)
Banco BPM	13450.60 (-29.1%)	2839.00 (+0.0%)	15566.50 (+71.9%)	266798.88 (+96.9%)
Groupe BPCE	90006.00 (+0.0%)	14277.60 (-17.4%)	74933.41 (+9.1%)	1001780.00 (+0.0%)
Commerzbank	39867.00 (+0.0%)	6259.86 (-9.8%)	46437.74 (+90.7%)	386412.24 (+3.3%)
Crédit Agricole S.A.	81948.00 (+0.0%)	14285.00 (+0.0%)	73025.00 (+0.0%)	1129354.00 (+0.0%)
Deutsche Bank	89879.00 (+0.0%)	12080.48 (-41.5%)	70374.41 (+9.7%)	619818.64 (+31.0%)
DZ BANK Group	25209.94 (-26.8%)	4804.00 (+0.0%)	25430.73 (+12.4%)	414878.63 (+15.1%)
Erste Group	34051.27 (-25.5%)	5583.00 (+0.0%)	43654.22 (+92.2%)	359270.18 (+42.1%)
Helaba	3708.00 (+0.0%)	1211.00 (+0.0%)	7394.00 (+0.0%)	144115.00 (+0.0%)
HSBC Europe	6101.00 (+0.0%)	1610.87 (-42.3%)	9401.35 (+2.1%)	174248.91 (+258.9%)
ING Group	62770.00 (+0.0%)	10720.23 (-14.8%)	61099.00 (+0.0%)	806948.93 (+8.6%)
Intesa Sanpaolo	88072.00 (+0.0%)	11870.18 (-3.5%)	69509.54 (+67.6%)	611385.36 (+32.0%)
KBC Group	27968.74 (-26.4%)	5265.00 (+0.0%)	27744.93 (+14.6%)	449618.97 (+84.7%)
LBBW	7888.00 (+0.0%)	2538.00 (+0.0%)	31132.00 (+0.0%)	237166.00 (+0.0%)
Mediobanca	5533.00 (+0.0%)	1515.96 (-35.0%)	8924.89 (+17.4%)	167096.35 (+199.1%)
MONETA Money Bank	987.93 (-59.3%)	147.93 (-38.6%)	1006.30 (+0.0%)	14589.20 (+0.0%)
Oberbank	1146.72 (-47.0%)	209.44 (-47.9%)	1404.10 (+0.0%)	21960.90 (+0.0%)
OTP Group	18876.65 (-53.8%)	3745.70 (+0.0%)	20118.10 (+65.9%)	335126.57 (+363.9%)
Raiffeisen Bank	21200.39 (-50.0%)	4134.00 (+0.0%)	22067.35 (+83.7%)	364388.34 (+134.3%)
Santander	198403.00 (+0.0%)	24711.00 (+0.0%)	122316.00 (+0.0%)	1126301.00 (+0.0%)
Prima banka	779.00 (+0.0%)	72.36 (+0.0%)	239.37 (+0.0%)	6744.01 (+0.0%)
Société Générale	117000.00 (+0.0%)	15236.95 (-12.1%)	83355.02 (+26.7%)	746392.56 (+40.6%)
Swedbank	9357.27 (-47.8%)	2155.00 (+0.0%)	12132.85 (+17.9%)	215253.57 (+21.2%)
UniCredit	67118.00 (+0.0%)	9846.37 (-19.4%)	60335.79 (+52.2%)	586100.00 (+0.0%)

Tabuľka 23: Najbližšie vzory v zmysle mRM modelu

Príloha B

Referenčné množiny v AD^w modeli

Banka	λ referenčná množina
ABN AMRO	LBBW (0.7643), Crédit Agricole S.A. (0.2357)
Barclays	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
BBVA	Santander (0.3767), Crédit Agricole S.A. (0.3248), LBBW (0.2986)
BNP Paribas Fortis	LBBW (0.7079), Crédit Agricole S.A. (0.2921)
Banco BPM	LBBW (0.9744), Crédit Agricole S.A. (0.0256)
Groupe BPCE	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Commerzbank	LBBW (0.6253), Crédit Agricole S.A. (0.3747)
Crédit Agricole S.A.	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Deutsche Bank	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
DZ BANK Group	LBBW (0.8071), Crédit Agricole S.A. (0.1929)
Erste Group	LBBW (0.7408), Crédit Agricole S.A. (0.2592)
Helaba	Helaba (1.0000)
HSBC Europe	LBBW (0.7486), Prima banka (0.2514)
ING Group	Crédit Agricole S.A. (0.7410), LBBW (0.2590)
Intesa Sanpaolo	Crédit Agricole S.A. (0.8314), LBBW (0.1686)
KBC Group	LBBW (0.7679), Crédit Agricole S.A. (0.2321)
LBBW	LBBW (1.0000)
Mediobanca	LBBW (0.6687), Prima banka (0.3313)
MONETA Money Bank	Prima banka (0.9316), LBBW (0.0684)
Oberbank	Prima banka (0.8664), LBBW (0.1336)
OTP Group	LBBW (0.8972), Crédit Agricole S.A. (0.1028)
Raiffeisen Bank	LBBW (0.8641), Crédit Agricole S.A. (0.1359)
Santander	Santander (1.0000)
Prima banka	Prima banka (1.0000)
Société Générale	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Swedbank	LBBW (0.8447), Prima banka (0.1553)
UniCredit	Crédit Agricole S.A. (0.7998), LBBW (0.2002)

Tabuľka 24: Referenčné množiny útvarov v AD^w modeli

Referenčné množiny v mAD^w modeli

Banka	λ kombinácia
ABN AMRO	Helaba (0.8480), Crédit Agricole S.A. (0.1520)
Barclays	LBBW (0.5533), Santander (0.4467)
BBVA	Santander (0.5487), LBBW (0.4513)
BNP Paribas Fortis	Helaba (0.7987), Crédit Agricole S.A. (0.2013)
Banco BPM	Helaba (0.7504), Prima banka (0.1381), LBBW (0.1115)
Groupe BPCE	Crédit Agricole S.A. (0.6978), Santander (0.1598), LBBW (0.1424)
Commerzbank	Helaba (0.7416), Crédit Agricole S.A. (0.2584)
Crédit Agricole S.A.	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Deutsche Bank	LBBW (0.5696), Santander (0.4304)
DZ BANK Group	Helaba (0.7679), Crédit Agricole S.A. (0.2321)
Erste Group	Helaba (0.7665), Crédit Agricole S.A. (0.2335)
Helaba	Helaba (1.0000)
HSBC Europe	Prima banka (0.7097), LBBW (0.2903)
ING Group	Crédit Agricole S.A. (0.5739), LBBW (0.3611), Santander (0.0650)
Intesa Sanpaolo	LBBW (0.5791), Santander (0.4209)
KBC Group	Helaba (0.7436), Crédit Agricole S.A. (0.2564)
LBBW	LBBW (1.0000)
Mediobanca	Prima banka (0.7616), LBBW (0.2384)
MONETA Money Bank	Prima banka (0.9557), Helaba (0.0253), LBBW (0.0190)
Oberbank	Prima banka (0.9026), Helaba (0.0777), LBBW (0.0197)
OTP Group	Prima banka (0.6153), LBBW (0.3847)
Raiffeisen Bank	Helaba (0.9297), Crédit Agricole S.A. (0.0703)
Santander	Santander (1.0000)
Prima banka	Prima banka (1.0000)
Société Générale	Santander (0.5727), LBBW (0.4273)
Swedbank	Helaba (0.9559), Crédit Agricole S.A. (0.0441)
UniCredit	LBBW (0.6080), Santander (0.2593), Crédit Agricole S.A. (0.1327)

Tabuľka 25: Referenčné množiny útvarov v mAD^w modeli

Referenčné množiny v SBM modeli

Banka	λ kombinácia
ABN AMRO	LBBW (0.9767), Crédit Agricole S.A. (0.0233)
Barclays	Crédit Agricole S.A. (0.7508), LBBW (0.2492)
BBVA	Santander (0.3767), Crédit Agricole S.A. (0.3248), LBBW (0.2986)
BNP Paribas Fortis	LBBW (0.9867), Crédit Agricole S.A. (0.0133)
Banco BPM	LBBW (1.0000)
Groupe BPCE	Crédit Agricole S.A. (0.8962), LBBW (0.1038)
Commerzbank	LBBW (0.8467), Crédit Agricole S.A. (0.1533)
Crédit Agricole S.A.	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Deutsche Bank	Crédit Agricole S.A. (0.7884), LBBW (0.2116)
DZ BANK Group	LBBW (0.8617), Crédit Agricole S.A. (0.1383)
Erste Group	LBBW (0.9825), Crédit Agricole S.A. (0.0175)
Helaba	Helaba (1.0000)
HSBC Europe	LBBW (0.5725), Helaba (0.4275)
ING Group	Crédit Agricole S.A. (0.7153), LBBW (0.2847)
Intesa Sanpaolo	LBBW (0.7468), Crédit Agricole S.A. (0.2532)
KBC Group	LBBW (0.9930), Crédit Agricole S.A. (0.0070)
LBBW	LBBW (1.0000)
Mediobanca	LBBW (0.6687), Prima banka (0.3313)
MONETA Money Bank	Prima banka (0.9316), LBBW (0.0684)
Oberbank	Prima banka (0.8664), LBBW (0.1336)
OTP Group	LBBW (1.0000)
Raiffeisen Bank	LBBW (1.0000)
Santander	Santander (1.0000)
Prima banka	Prima banka (1.0000)
Société Générale	Crédit Agricole S.A. (0.8278), LBBW (0.1722)
Swedbank	LBBW (0.8447), Prima banka (0.1553)
UniCredit	LBBW (0.6089), Crédit Agricole S.A. (0.3911)

Tabuľka 26: Referenčné množiny útvarov v SBM modeli

Referenčné množiny v $mSBM$ modeli

Banka	λ kombinácia
ABN AMRO	Helaba (0.7235), Crédit Agricole S.A. (0.2765)
Barclays	LBBW (0.5533), Santander (0.4467)
BBVA	Santander (0.5487), LBBW (0.4513)
BNP Paribas Fortis	Helaba (0.6361), Crédit Agricole S.A. (0.3639)
Banco BPM	Helaba (0.8755), Crédit Agricole S.A. (0.1245)
Groupe BPCE	Crédit Agricole S.A. (0.6978), Santander (0.1598), LBBW (0.1424)
Commerzbank	LBBW (0.8321), Santander (0.1679)
Crédit Agricole S.A.	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Deutsche Bank	LBBW (0.5696), Santander (0.4304)
DZ BANK Group	Helaba (0.7252), Crédit Agricole S.A. (0.2748)
Erste Group	Helaba (0.6656), Crédit Agricole S.A. (0.3344)
Helaba	Helaba (1.0000)
HSBC Europe	Helaba (0.9694), Crédit Agricole S.A. (0.0306)
ING Group	Crédit Agricole S.A. (0.5739), LBBW (0.3611), Santander (0.0650)
Intesa Sanpaolo	LBBW (0.5791), Santander (0.4209)
KBC Group	Helaba (0.6899), Crédit Agricole S.A. (0.3101)
LBBW	LBBW (1.0000)
Mediobanca	Helaba (0.9767), Crédit Agricole S.A. (0.0233)
MONETA Money Bank	Prima banka (0.9557), Helaba (0.0253), LBBW (0.0190)
Oberbank	Prima banka (0.9026), Helaba (0.0777), LBBW (0.0197)
OTP Group	Helaba (0.8061), Crédit Agricole S.A. (0.1939)
Raiffeisen Bank	Helaba (0.7764), Crédit Agricole S.A. (0.2236)
Santander	Santander (1.0000)
Prima banka	Prima banka (1.0000)
Société Générale	Santander (0.5727), LBBW (0.4273)
Swedbank	Helaba (0.9278), Crédit Agricole S.A. (0.0722)
UniCredit	LBBW (0.6080), Santander (0.2593), Crédit Agricole S.A. (0.1327)

Tabuľka 27: Referenčné množiny útvarov v $mSBM$ modeli

Referenčné množiny v RM modeli

Banka	λ kombinácia
ABN AMRO	LBBW (0.9767), Crédit Agricole S.A. (0.0233)
Barclays	Crédit Agricole S.A. (0.7508), LBBW (0.2492)
BBVA	Santander (0.3767), Crédit Agricole S.A. (0.3248), LBBW (0.2986)
BNP Paribas Fortis	LBBW (0.9743), Crédit Agricole S.A. (0.0257)
Banco BPM	LBBW (0.6777), Helaba (0.3156), Prima banka (0.0066)
Groupe BPCE	Crédit Agricole S.A. (0.8962), LBBW (0.1038)
Commerzbank	LBBW (0.8467), Crédit Agricole S.A. (0.1533)
Crédit Agricole S.A.	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Deutsche Bank	Crédit Agricole S.A. (0.7884), LBBW (0.2116)
DZ BANK Group	LBBW (0.8617), Crédit Agricole S.A. (0.1383)
Erste Group	LBBW (0.9511), Crédit Agricole S.A. (0.0489)
Helaba	Helaba (1.0000)
HSBC Europe	Prima banka (0.5179), LBBW (0.4821)
ING Group	Crédit Agricole S.A. (0.7153), LBBW (0.2847)
Intesa Sanpaolo	LBBW (0.5710), Crédit Agricole S.A. (0.4290)
KBC Group	LBBW (0.9740), Crédit Agricole S.A. (0.0260)
LBBW	LBBW (1.0000)
Mediobanca	Prima banka (0.5614), LBBW (0.4386)
MONETA Money Bank	Prima banka (0.9346), LBBW (0.0654)
Oberbank	Prima banka (0.8949), LBBW (0.0983), Helaba (0.0067)
OTP Group	LBBW (0.9039), Prima banka (0.0961)
Raiffeisen Bank	LBBW (1.0000)
Santander	Santander (1.0000)
Prima banka	Prima banka (1.0000)
Société Générale	Crédit Agricole S.A. (0.8278), LBBW (0.1722)
Swedbank	LBBW (0.6610), Helaba (0.3390)
UniCredit	LBBW (0.5741), Crédit Agricole S.A. (0.4259)

Tabuľka 28: Referenčné množiny útvarov v RM modeli

Referenčné množiny v mRM modeli

Banka	λ kombinácia
ABN AMRO	Helaba (0.7235), Crédit Agricole S.A. (0.2765)
Barclays	LBBW (0.5533), Santander (0.4467)
BBVA	Santander (0.5487), LBBW (0.4513)
BNP Paribas Fortis	LBBW (0.8605), Santander (0.1395)
Banco BPM	Helaba (0.8755), Crédit Agricole S.A. (0.1245)
Groupe BPCE	Crédit Agricole S.A. (0.6978), Santander (0.1598), LBBW (0.1424)
Commerzbank	LBBW (0.8321), Santander (0.1679)
Crédit Agricole S.A.	Crédit Agricole S.A. (1.0000)
Deutsche Bank	LBBW (0.5696), Santander (0.4304)
DZ BANK Group	Helaba (0.7252), Crédit Agricole S.A. (0.2748)
Erste Group	LBBW (0.8627), Santander (0.1373)
Helaba	Helaba (1.0000)
HSBC Europe	Helaba (0.9694), Crédit Agricole S.A. (0.0306)
ING Group	Crédit Agricole S.A. (0.5739), LBBW (0.3611), Santander (0.0650)
Intesa Sanpaolo	LBBW (0.5791), Santander (0.4209)
KBC Group	Helaba (0.6899), Crédit Agricole S.A. (0.3101)
LBBW	LBBW (1.0000)
Mediobanca	Helaba (0.9767), Crédit Agricole S.A. (0.0233)
MONETA Money Bank	Prima banka (0.9557), Helaba (0.0253), LBBW (0.0190)
Oberbank	Prima banka (0.9026), Helaba (0.0777), LBBW (0.0197)
OTP Group	Helaba (0.8061), Crédit Agricole S.A. (0.1939)
Raiffeisen Bank	Helaba (0.7764), Crédit Agricole S.A. (0.2236)
Santander	Santander (1.0000)
Prima banka	Prima banka (1.0000)
Société Générale	Santander (0.5727), LBBW (0.4273)
Swedbank	Helaba (0.9278), Crédit Agricole S.A. (0.0722)
UniCredit	LBBW (0.6080), Santander (0.2593), Crédit Agricole S.A. (0.1327)

Tabuľka 29: Referenčné množiny útvarov v mRM modeli

Kód v *Python*

```
"""
Implementácia metód najbližšieho vzoru pre potreby Diplomovej práce FMFI UK

Matej Kula
kula9@uniba.sk
05/2026
"""

import gurobipy as gp
from gurobipy import GRB
import numpy as np
import pandas as pd

# Príprava váh pre $AD^w$ model podľa Tabuľky 1:
def calculate_weights(X,Y, o,type = "RAM"):
    m, n = X.shape; s, _ = Y.shape
    if type == "ones":
        return np.ones(m), np.ones(s)
    elif type == "NAD":
        return 1/(m+s) * np.ones(m), 1/(m+s) * np.ones(s)
    elif type == "MEP":
        return 1/((m+s)*np.maximum(X[:,o],1e-12)), 1/((m+s)*np.maximum(Y[:,o],1e-12))
    elif type == "RAM":
        Rx = np.maximum(X.max(1)-X.min(1), 1e-12)
        Ry = np.maximum(Y.max(1)-Y.min(1), 1e-12)
        return 1/((m+s)*Rx), 1/((m+s)*Ry)

# Štandardný $AD^w$ model podľa Kapitoly 2.1. Aditívny model bez váh pri
# premennej weights_type = "ones"

def additive_standard(X,Y, weights_type = "RAM"):
    m,n = X.shape
    s,_ = Y.shape
    result = dict(efficiency=np.full(n,np.nan), x_target=np.zeros((m,n)),
            y_target=np.zeros((s,n)), s_x=np.zeros((m,n)),
            s_y=np.zeros((s,n)), lambdas=np.zeros((n,n)))
```

```
    for o in range(n):
        xo,yo = X[:,o],Y[:,o]
        model = gp.Model("AD^w")
        model.Params.LogToConsole = False
        lam = model.addVars(n, lb = 0)
        sx = model.addVars(m, lb = 0)
        sy = model.addVars(s, lb = 0)
        wx, wy = calculate_weights(X,Y,o,weights_type)

        for i in range(m):
            model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*X[i,j] for j in range(n)) + sx[i] == xo[i])
        for r in range(s):
            model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*Y[r,j] for j in range(n)) - sy[r] == yo[r])
        model.addConstr(gp.quicksum(lam[j] for j in range(n)) == 1)

        model.setObjective(1 - (gp.quicksum(wx[i]*sx[i] for i in range(m))
                        +gp.quicksum(wy[r]*sy[r] for r in range(s))), GRB.MINIMIZE)
        model.optimize()
        sx_v = np.array([sx[i].X for i in range(m)])
        sy_v = np.array([sy[r].X for r in range(s)])
        result["efficiency"][o]  = model.ObjVal
        result["s_x"][:, o]  = sx_v
        result["s_y"][:, o]   = sy_v
        result["x_target"][:, o] = xo - sx_v
        result["y_target"][:, o] = yo + sy_v
        result["lambdas"][:, o]  = np.array([lam[j].X for j in range(n)])
    return(result)

# $mAD^w$ model podľa Kapitoly 4.1.

def additive_closest(X,Y,weights_type = "RAM"):
    m,n = X.shape
    s,_ = Y.shape
    result = dict(efficiency=np.full(n,np.nan), x_target=np.zeros((m,n)),
            y_target=np.zeros((s,n)), s_x=np.zeros((m,n)),
            s_y=np.zeros((s,n)), lambdas=np.zeros((n,n)))
```

```
for o in range(n):
    xo,yo = X[:,o],Y[:,o]
    M = 10*(np.max(X)+np.max(Y))
    model = gp.Model("mAD^w")
    model.Params.LogToConsole = False
    lam = model.addVars(n, lb = 0)
    sx = model.addVars(m, lb = 0)
    sy = model.addVars(s, lb = 0)
    wx, wy = calculate_weights(X,Y,o,weights_type)

    u = model.addVars(s, lb = 1)
    v = model.addVars(m, lb = 1)
    d = model.addVars(n, lb = 0)
    b = model.addVars(n, vtype = GRB.BINARY)
    sigma = model.addVar(lb = -GRB.INFINITY)

    for i in range(m):
        model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*X[i,j] for j in range(n)) + sx[i] == xo[i])
    for r in range(s):
        model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*Y[r,j] for j in range(n)) - sy[r] == yo[r])
    model.addConstr(gp.quicksum(lam[j] for j in range(n)) == 1)
    for j in range(n):
        model.addConstr(gp.quicksum(u[r]*Y[r,j] for r in range(s))
                        - gp.quicksum(v[i]*X[i,j] for i in range(m)) + d[j] - sigma == 0)
        model.addConstr(d[j] <= M * b[j])
        # pre VRS máme ohraničenie e^T \lambda = 1, z numerického hľadiska v ohraničeniach
        # \lambda_j <= M (1-b_j) budeme používať M = 2
        model.addConstr(lam[j] <= 2 * (1-b[j]))

    model.setObjective(1 - (gp.quicksum(wx[i]*sx[i] for i in range(m))
                    +gp.quicksum(wy[r]*sy[r] for r in range(s))), GRB.MAXIMIZE)
    model.optimize()
    sx_v = np.array([sx[i].X for i in range(m)])
    sy_v = np.array([sy[r].X for r in range(s)])
    result["efficiency"][o]  = model.ObjVal
    result["s_x"][:, o]  = sx_v
    result["s_y"][:, o]   = sy_v
    result["x_target"][:, o] = xo - sx_v
```

```
        result["y_target"][:, o] = yo + sy_v
        result["lambdas"][:, o]  = np.array([lam[j].X for j in range(n)])
    return(result)

# $SBM$ model podľa Kapitoly 2.2 implementovaný pomocou $\beta$ transformácie

def sbm_standard(X,Y):
    m,n = X.shape
    s,_ = Y.shape
    result = dict(efficiency=np.full(n,np.nan), x_target=np.zeros((m,n)),
            y_target=np.zeros((s,n)), s_x=np.zeros((m,n)),
            s_y=np.zeros((s,n)), lambdas=np.zeros((n,n)))

    for o in range(n):
        xo,yo = np.maximum(X[:,o], 1e-9),np.maximum(Y[:,o], 1e-9)
        ixo, iyo = 1/xo, 1/yo
        model = gp.Model("SBM")
        model.Params.LogToConsole = False

        beta =model.addVar(lb = 0)
        mu = model.addVars(n, lb = 0)
        tx = model.addVars(m, lb = 0)
        ty = model.addVars(s, lb = 0)

        model.addConstr(beta + (1.0/s)*gp.quicksum(ty[r]*iyo[r] for r in range(s)) == 1)
        for i in range(m):
            model.addConstr(gp.quicksum(mu[j]*X[i,j] for j in range(n)) + tx[i] == beta*xo[i])
        for r in range(s):
            model.addConstr(gp.quicksum(mu[j]*Y[r,j] for j in range(n)) - ty[r] == beta*yo[r])
        model.addConstr(gp.quicksum(mu[j] for j in range(n)) == beta)
        model.setObjective(beta - (1.0/m)*gp.quicksum(tx[i]*ixo[i] for i in range(m)), GRB.MINIMIZE)
        model.optimize()

        bv = beta.X
        sx_v = np.array([tx[i].X for i in range(m)])/bv
        sy_v = np.array([ty[r].X for r in range(s)])/bv
        result["efficiency"][o]  = model.ObjVal
        result["s_x"][:, o]  = sx_v
```

```
        result["s_y"][:, o]   = sy_v
        result["x_target"][:, o] = xo - sx_v
        result["y_target"][:, o] = yo + sy_v
        result["lambdas"][:, o]  = np.array([mu[j].X for j in range(n)])/bv
    return(result)

# $mSBM$ model najbližších vzorov podľa Kapitoly 4.2 implementovaný pomocou $\beta$ transformácie

def sbm_closest(X,Y):
    m,n = X.shape
    s,_ = Y.shape
    result = dict(efficiency=np.full(n,np.nan), x_target=np.zeros((m,n)),
            y_target=np.zeros((s,n)), s_x=np.zeros((m,n)),
            s_y=np.zeros((s,n)), lambdas=np.zeros((n,n)))

    for o in range(n):
        xo,yo = np.maximum(X[:,o], 1e-9),np.maximum(Y[:,o], 1e-9)
        ixo, iyo = 1/xo, 1/yo
        M = 10*(np.max(X)+np.max(Y))

        model = gp.Model("mSBM")
        model.Params.LogToConsole = False

        beta =model.addVar(lb = 0)
        mu = model.addVars(n, lb = 0)
        tx = model.addVars(m, lb = 0)
        ty = model.addVars(s, lb = 0)

        u = model.addVars(s, lb = 1)
        v = model.addVars(m, lb = 1)
        d = model.addVars(n, lb = 0)
        b = model.addVars(n, vtype = GRB.BINARY)
        sigma = model.addVar(lb = -GRB.INFINITY)
        ty = model.addVars(s, lb = 0)

        model.addConstr(beta + (1.0/s)*gp.quicksum(ty[r]*iyo[r] for r in range(s)) == 1)
        for i in range(m):
            model.addConstr(gp.quicksum(mu[j]*X[i,j] for j in range(n)) + tx[i] == beta*xo[i])
```

```
        for r in range(s):
            model.addConstr(gp.quicksum(mu[j]*Y[r,j] for j in range(n)) - ty[r] == beta*yo[r])
        model.addConstr(gp.quicksum(mu[j] for j in range(n)) == beta)
        for j in range(n):
            model.addConstr(gp.quicksum(u[r]*Y[r,j] for r in range(s))
                            - gp.quicksum(v[i]*X[i,j] for i in range(m)) + d[j] - sigma == 0)
            model.addConstr(d[j] <= M * b[j])
            model.addConstr(mu[j] <= 2 * (1-b[j]))

        model.setObjective(beta - (1.0/m)*gp.quicksum(tx[i]*ixo[i]
                            for i in range(m)), GRB.MAXIMIZE)
        model.optimize()

        bv = beta.X
        sx_v = np.array([tx[i].X for i in range(m)])/bv
        sy_v = np.array([ty[r].X for r in range(s)])/bv
        result["efficiency"][o]  = model.ObjVal
        result["s_x"][:, o]  = sx_v
        result["s_y"][:, o]   = sy_v
        result["x_target"][:, o] = xo - sx_v
        result["y_target"][:, o] = yo + sy_v
        result["lambdas"][:, o]  = np.array([mu[j].X for j in range(n)])/bv
    return(result)

# $RM$ model implmentovaný v SOCP tvare, podľa Kapitoly 2.3

def russell_standard(X,Y):
    m,n = X.shape
    s,_ = Y.shape
    result = dict(efficiency=np.full(n,np.nan), x_target=np.zeros((m,n)),
            y_target=np.zeros((s,n)), s_x=np.zeros((m,n)),
            s_y=np.zeros((s,n)), lambdas=np.zeros((n,n)))

    for o in range(n):
        xo,yo = X[:,o],Y[:,o]
        model = gp.Model("RM")
        model.Params.LogToConsole = False
        lam = model.addVars(n, lb = 0)
```

```
        theta = model.addVars(m, ub = 1)
        phi = model.addVars(s, lb = 1)
        psi = model.addVars(s, ub = 1)

        for i in range(m):
            model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*X[i,j] for j in range(n)) == theta[i]*xo[i])
        for r in range(s):
            model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*Y[r,j] for j in range(n)) == phi[r]*yo[r])
            model.addQConstr((psi[r]-phi[r])*(psi[r]-phi[r]) + 4 <= (psi[r]+phi[r])*(psi[r]+phi[r
        model.addConstr(gp.quicksum(lam[j] for j in range(n)) == 1)

        model.setObjective(
                (1.0/(m+s)) * (gp.quicksum(theta[i] for i in range(m))
                            + gp.quicksum(psi[r]   for r in range(s))),
                GRB.MINIMIZE)
        model.optimize()
        th = np.array([theta[i].X for i in range(m)])
        ph = np.array([phi[r].X   for r in range(s)])
        result["efficiency"][o]  = model.ObjVal
        result["s_x"][:, o]  = (1 - th) * xo
        result["s_y"][:, o]   = (ph - 1) * yo
        result["x_target"][:, o] = th * xo
        result["y_target"][:, o] = ph * yo
        result["lambdas"][:, o]  = np.array([lam[j].X for j in range(n)])
    return(result)

# $mRM$ model najbližších vzorov s bilinearitou v ohraničeniach, podľa Kapitoly 4.3

def russell_closest(X, Y):
    m,n = X.shape
    s,_ = Y.shape
    result = dict(efficiency=np.full(n,np.nan), x_target=np.zeros((m,n)),
            y_target=np.zeros((s,n)), s_x=np.zeros((m,n)),
            s_y=np.zeros((s,n)), lambdas=np.zeros((n,n)))
    for o in range(n):
        xo, yo = X[:,o], Y[:,o]
        M = 10*(np.max(X)+np.max(Y))
        model = gp.Model("mRM")
```

```
model.Params.LogToConsole = False

lam = model.addVars(n, lb = 0)
theta = model.addVars(m, ub = 1)
phi = model.addVars(s, lb = 1)
psi = model.addVars(s, ub = 1)
u = model.addVars(s, lb = 1)
v = model.addVars(m, lb = 1)
d = model.addVars(n, lb = 0)
b = model.addVars(n, vtype = GRB.BINARY)
sigma = model.addVar(lb = -GRB.INFINITY)



for i in range(m):
    model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*X[i,j] for j in range(n)) == theta[i]*xo[i])
for r in range(s):
    model.addConstr(gp.quicksum(lam[j]*Y[r,j] for j in range(n)) == phi[r]*yo[r])
    model.addQConstr(psi[r]*phi[r] == 1)
for j in range(n):
    model.addConstr(gp.quicksum(u[r]*Y[r,j] for r in range(s))
                    - gp.quicksum(v[i]*X[i,j] for i in range(m)) + d[j] - sigma == 0)
    model.addConstr(d[j] <= M * b[j])
    model.addConstr(lam[j] <= 2 * (1-b[j]))
model.addConstr(gp.quicksum(lam[j] for j in range(n)) == 1)

model.setObjective(
        (1.0/(m+s)) * (gp.quicksum(theta[i] for i in range(m))
                    + gp.quicksum(psi[r]   for r in range(s))),
        GRB.MAXIMIZE)
model.optimize()
th = np.array([theta[i].X for i in range(m)])
ph = np.array([phi[r].X   for r in range(s)])
result["efficiency"][o]  = model.ObjVal
result["s_x"][:, o]  = (1 - th) * xo
result["s_y"][:, o]   = (ph - 1) * yo
result["x_target"][:, o] = th * xo
result["y_target"][:, o] = ph * yo
result["lambdas"][:, o]  = np.array([lam[j].X for j in range(n)])
```

```
    return(result)

# Funkcia na vrátenie

def compare_models(X, Y, dmu_names=None, results = None, weights_type="RAM"):
    n = X.shape[1]
    dmu_names = dmu_names or [f"DMU{j+1}" for j in range(n)]
    if results == None:
        results = {}
        for label, fn, kw in [
            ("AD",   additive_standard, dict(weights_type=weights_type)),
            ("mAD",  additive_closest,  dict(weights_type=weights_type)),
            ("SBM",  sbm_standard,dict()),
            ("mSBM", sbm_closest,dict()),
            ("RM",    russell_standard,dict()),
            ("mRM",   russell_closest,dict()),
        ]:
            results[label] = fn(X, Y, **kw)
    df = pd.DataFrame({"DMU": dmu_names})
    for key in ["AD","mAD","SBM","mSBM","RM","mRM"]:
        df[key] = np.round(results[key]["efficiency"], 6)
    print(f"\n{"="*50}\n  Efektivita útvarov \n{"="*50}")
    print(df.to_string(index=False))
    return results, df

def target_report(X, Y, res_standard, res_closest,
        input_names=None, output_names=None, dmu_names = None):
    m, n = X.shape; s, _ = Y.shape
    inames = input_names or [f"x{i+1}" for i in range(m)]
    onames = output_names or [f"y{r+1}" for r in range(s)]
    dnames = dmu_names or [f"DMU {i+1}" for i in range(n)]
    for o in range(n):
        print(f"\n{"-"*90}\n  {dnames[o]} \n{"-"*90}")
        print(f"  {"Premenná":<10}{"Pôvodná hodnota":>20}"
              f"{"Najvzdialenejší vzor":>22}{"%":>8}{"Najbližší vzor":>20}{"%":>8}")
        for i in range(m):
            og, f, c = X[i,o], res_standard["x_target"][i,o], res_closest["x_target"][i,o]
            df = 100*(f-og)/max(abs(og),1e-12)
```

```
            dc = 100*(c-og)/max(abs(og),1e-12)
            print(f"  {inames[i]:<10}{og:20.2f}{f:22.2f}{df:7.1f}%{c:20.2f}{dc:7.1f}%")
        for r in range(s):
            og, f, c = Y[r,o], res_standard["y_target"][r,o], res_closest["y_target"][r,o]
            df = 100*(f-og)/max(abs(og),1e-12)
            dc = 100*(c-og)/max(abs(og),1e-12)
            print(f"  {onames[r]:<10}{og:20.2f}{f:22.2f}{df:7.1f}%{c:20.2f}{dc:7.1f}%")


def reference_sets(res, dmu_names = None, tol=1e-4):
    lambdas, eff = res["lambdas"], res["efficiency"]
    n = lambdas.shape[1]
    dnames = dmu_names or [f"DMU {i+1}" for i in range(n)]
    for k in range(n):
        peers = sorted(
            ((dnames[j], float(lambdas[j, k])) for j in range(n) if lambdas[j, k] > tol),
            key=lambda p: p[1], reverse=True
        )
        print(f"\n{"-"*40}\n  {dnames[k]}\n{"-"*40}")
        print(f"  {"Vzor":<20}{"Váha":>12}")
        if peers:
            for name, w in peers:
                print(f"  {name:<20}{w:>12.4f}")
        else:
            print("  --")


if __name__ == "__main__":

    dmu_names = [
        "ABN AMRO", "Barclays", "BBVA", "BNP Paribas Fortis", "Banco BPM",
        "Groupe BPCE", "Commerzbank", "Crédit Agricole S.A.", "Deutsche Bank",
        "DZ BANK Group", "Erste Group", "Helaba", "HSBC Europe", "ING Group",
        "Intesa Sanpaolo", "KBC Group", "LBBW", "Mediobanca", "MONETA Money Bank",
        "Oberbank", "OTP Group", "Raiffeisen Bank", "Santander", "Prima banka",
        "Société Générale", "Swedbank", "UniCredit"
    ]
    input_names = ["Staff", "OpEx"]
```

```
output_names = ["Príjmy", "Úvery"]

X = np.array([
[25342, 93000, 127174, 34463, 18975, 90006, 39867, 81948, 89879, 34444,
 45700, 3708, 6101, 62770, 88072, 37979, 7888, 5533, 2429, 2163,
 40845, 42425, 198403, 779, 117000, 17911, 67118],
[5630.000, 20335.800, 14705.000, 5969.000, 2839.000, 17290.000, 6940.000,
 14285.000, 20658.000, 4804.000, 5583.000, 1211.000, 2792.000, 12584.000,
 12304.000, 5265.000, 2538.000, 2330.900, 240.900, 401.800, 3745.700,
 4134.000, 24711.000, 72.364, 17338.000, 2155.000, 12215.000],
])

Y = np.array([
    [17372.000, 62585.400, 79084.000, 20603.000, 9054.000, 68678.000, 24356.000,
    73025.000, 64160.000, 22625.000, 22718.000, 7394.000, 9208.000, 61099.000,
    41468.000, 24219.000, 31132.000, 7604.400, 1006.300, 1404.100, 12124.900,
    12010.000, 122316.000, 239.366, 65811.000, 10288.700, 39638.000],
    [257930.000, 414305.500, 495514.000, 248994.000, 135526.000, 1001780.000,
    373936.000, 1129354.000, 472995.000, 360512.000, 252812.000, 144115.000,
    48550.000, 742909.000, 463091.000, 243386.000, 237166.000, 55865.600,
    14589.200, 21960.900, 72233.800, 155508.000, 1126301.000, 6744.007,
    530791.000, 177536.400, 586100.000],
])

results = {}
targets = {}
ref_sets = {}

for label, fn, kw in [
    ("AD",   additive_standard, dict(weights_type="RAM")),
    ("mAD",  additive_closest,  dict(weights_type="RAM")),
    ("SBM",  sbm_standard,dict()),
    ("mSBM", sbm_closest,dict()),
    ("RM",    russell_standard,dict()),
    ("mRM",   russell_closest,dict()),
]:
    results[label] = fn(X, Y, **kw)
    print(f"\n{"="*40}\n Model {label}")
```

```
    reference_sets(results[label], dmu_names)

for label in ["AD", "SBM", "RM"]:
    print(f"\n{"="*40}\n  Modely {label} a m{label}\n{"="*40}")
    targets["label"] = target_report(X,Y, results[label],
            results[f"m{label}"], input_names, output_names, dmu_names)


compare_models(X, Y, dmu_names, results, weights_type = "RAM")
```