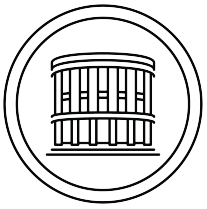
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OPTIMALIZÁCIA NAD EXPONENCIÁLNYM KUŽEĽOM

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2026 Bc. Paulína MIKLÓŠOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMALIZÁCIA NAD EXPONENCIÁLNYM KUŽEĽOM

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomicko-finačná matematika a modelovanie
Študijný odbor:	22. - matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.

Bratislava 2026 **Bc. Paulína MIKLÓŠOVÁ**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Paulína Miklóšová
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Optimalizácia nad exponenciálnym kužeľom
Exponential cone optimisation

Anotácia: Úlohy konvexnej kónickej optimalizácie sú rozšírením úloh konvexného programovania v štandardnom zmysle, pričom sa množina prípustných riešení reprezentuje pomocou konvexného kužeľa a lineárnych ohraničení. Špeciálnou podtriedou sú konvexné úlohy, ktoré sa modelujú pomocou exponenciálneho kužeľa. Tie v sebe zahŕňajú štandardné konvexné úlohy, kde sú ohraničenia vyjadrené pomocou exponenciálnej funkcie alebo logaritmu a teda aj úlohy geometrického programovania. Bariérové metódy vnútorného bodu pre túto triedu úloh využívajú špeciálnu štruktúru a vlastnosti exponenciálneho kužeľa.

Vedúci: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcela poďakovat svojej vedúcej diplomovej práce Doc. RNDr. Márii Trnovskej, Phd. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „Optimalizácia nad exponenciálnym kužeľom“, vrátane všetkých jej príloh a obrázkov, som vypracovala samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použila v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie je v práci vhodným spôsobom označené.

Abstrakt v štátnom jazyku

MIKLÓŠOVÁ, Paulína: Optimalizácia nad exponenciálnym kužeľom [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2026, 93 s.

Exponenciálny kužeľ patrí medzi konvexné kužeľe, ktoré sú využívané v kónickej optimalizácii.V práci sa venujeme najmä analýze teoretických a geometrických vlastností tohto kužeľa a zároveň ukazujeme, ako možno pomocou neho formulovať vybrané triedy konvexných optimalizačných úloh v jednotnej kónickej forme. Osobitnú pozornosť venujeme dualite, odvodeniu duálneho kužeľa a formulácii duálnej úlohy. Ďalej stručne predstavujeme príncíp metód vnútorného bodu, pričom sa zameriavame na bariérovú funkciu exponenciálneho kužeľa a jej vlastnosti. Text má predovšetkým teoretický charakter a kladie dôraz na presné definície, tvrdenia a ich dôkazy. V poslednej časti práce uvádzame ilustratívnu implementáciu úlohy optimalizácie portfólia riešenej pomocou exponenciálneho kužeľa.

Kľúčové slová: Exponenciálny kužeľ, Kónická optimalizácia, Duálny kužeľ, Bariérová funkcia, Metódy vnútorného bodu, Kellyho kritérium

Abstract

MIKLÓŠOVÁ, Paulína: Exponential cone optimisation [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Mária Trnovská, PhD., 93 p.

The exponential cone belongs to the class of convex cones used in conic optimization. This thesis focuses mainly on the analysis of the theoretical and geometric properties of the exponential cone and also shows how selected classes of convex optimization problems can be formulated in a unified conic form using this cone. Special attention is paid to duality, the derivation of the dual cone, and the formulation of the dual problem. Furthermore, we briefly introduce the principle of interior-point methods, focusing on the barrier function of the exponential cone and its properties. The text is primarily theoretical in nature and emphasizes precise definitions, statements, and their proofs. In the final part of the thesis, we present an illustrative implementation of a portfolio optimization problem solved using the exponential cone.

Keywords: Exponential cone, Conic optimization, Dual cone, Barrier function, Interior-point methods, Kelly criterion

Obsah

Zoznam použitých symbolov **8**

Úvod **9**

1 Všeobecné úlohy konvexnej kónickej optimalizácie **11**

1.1 Teoretický rámec kužeľov 11

1.2 Úloha kónického lineárneho programovania 12

2 Exponenciálny kužeľ a jeho vlastnosti **13**

2.1 Definícia exponenciálneho kužeľa 13

2.2 Vlastnosti exponenciálneho kužeľa 18

2.3 Zovšeobecnenie exponenciálneho kužeľa a jeho alternatívna geometrická interpretácia 19

3 Modelovanie pomocou exponenciálneho kužeľa **21**

3.1 Geometrické programovanie 22

3.2 Špeciálne úlohy modelované pomocou K_{exp} 26

3.2.1 Lambertova W-funkcia 26

3.2.2 Logistická regresia 32

3.2.3 Poissonova regresia 35

3.2.4 Kellyho kritérium (log-optimálne portfólio) 37

4 Dualita **39**

4.1 Duálny kužeľ k exponenciálnemu kužeľu 39

4.2 Duálna úloha ku všeobecnej úlohe K_{exp} 41

5 Metódy vnútorného bodu pre exponenciálny kužeľ **43**

5.1 Bariérová funkcia, centrálna trajektória a základný algoritmus metód vnútorného bodu 43

5.2 Prehľad solverov v kónickej optimalizácii 57

6 Optimalizácia portfólia s využitím exponenciálneho kužeľa **59**

6.1 Kellyho kritérium optimalizácie portfólia 59

6.2 Kellyho kritérium regulované pomocou relatívnej entropie 62

Záver **66**

Zoznam použitej literatúry **68**

Príloha A: Odvodenie základných transformácií pomocou exponenciálneho kužeľa **72**

A.1 Exponenciálna funkcia 72

A.2 Logaritmus 72

A.3 Negatívny logaritmus 72

A.4 Entropia 73

A.5 Relatívna entropia (Kullback–Leibler divergencia) 73

A.6 Log-sum-exp 74

A.7 Softplus 74

Príloha B: Odvodenie Hesseho matice pre bariérovú funkciu exponenciálneho kužeľa **76**

Príloha C: Zdrojové kódy **78**

C.1 Vykreslenie exponenciálneho kužeľa 78

C.2 Graf funkcie $f(u) = ue^u$ 80

C.3 Graf Lambertovej W-funkcie 81

C.4 Zdrojový kód ku Kapitole 7 82

Zoznam použitých symbolov

$K_{\exp}$	exponenciálny kužeľ
$K^*_{\exp}$	duálny kužeľ ku $K_{\exp}$
$\operatorname{int}(K_{\exp})$	vnútro kužeľa $K_{\exp}$
$\partial K_{\exp}$	hranica kužeľa $K_{\exp}$
$\operatorname{int}(K^*_{\exp})$	vnútro kužeľa $K^*_{\exp}$
$\operatorname{epi} f$	epigraf funkcie f
$\operatorname{hyp} f$	hypograf funkcie f
K_C	Kužeľ získaný homogenizáciou množiny C
$W(s)$	Lambertova W-funkcia definovaná vzťahom $W(s)e^{W(s)} = s$
$\mathbf{1}_{1\times K}$	riadkový vektor samých jednotiek dĺžky K
$0_{1\times n}$	nulový riadkový vektor dĺžky n
e_k	k-tý jednotkový vektor štandardnej bázy
I_n	matica identity rozmeru $n \times n$
β	vektor parametrov modelu
$L(\beta)$	funkcia vierohodnosti
$\ell(\beta)$	logaritmus vierohodnosti
$\mathcal{L}$	Lagrangeova funkcia optimalizačnej úlohy
F	bariérová funkcia
ϑ	parameter bariéry
μ	parameter centrálnej trajektórie
$x^T s = \vartheta\mu$	perturbovaná podmienka komplementarity
Σ	kovariančná matica výnosov
$H(x)$	entropia váh portfólia x
u	vektor váh rovnomerne rozdeleného portfólia
$D_{\mathrm{KL}}(x\|u)$	Kullback-Leiblerova divergencia medzi portfóliom x a portfóliom u

Úvod

Konvexná optimalizácia patrí medzi dôležité oblasti aplikovanej matematiky, pretože nachádza uplatnenie pri riešení širokého spektra praktických problémov, napríklad v ekonomike, financiách, dátovej analýze či technických aplikáciách. Jednou z hlavných výhod konvexných optimalizačných úloh je, že každé lokálne minimum je zároveň globálnym minimom. Táto vlastnosť ich odlišuje od nekonvexných úloh, v ktorých lokálne minimum nemusí predstavovať optimálne riešenie celej úlohy.

Významnou triedou konvexnej optimalizácie je kónická optimalizácia, v ktorej sa množina prípustných riešení opisuje pomocou konvexného kužeľa a lineárnych ohraničení. Tento prístup poskytuje jednotný rámec, do ktorého možno preformulovať viaceré známe triedy konvexných optimalizačných úloh, napríklad lineárne programovanie, semidefinitné programovanie alebo programovanie nad kužeľmi druhého rádu (SOCP). Tieto úlohy sú formulované nad tzv. symetrickými kužeľmi, ktoré majú priaznivé matematické vlastnosti.

Okrem symetrických kužeľov existujú aj nesymetrické kužele, ktoré rozširujú možnosti modelovania konvexných úloh. Jedným z nich je aj exponenciálny kužeľ, ktorým sa zaoberáme v tejto práci. Ako sa uvádza v [10], tento kužeľ vzniká homogenizáciou epigrafu exponenciálnej funkcie, a preto umožňuje modelovať úlohy, ktoré obsahujú exponenciálne a logaritmické výrazy.

Metódy vnútorného bodu patria medzi najefektívnejšie metódy na riešenie konvexných optimalizačných úloh. Pri úlohách formulovaných nad symetrickými kužeľmi je ich použitie štandardné a dobre preskúmané. Keďže však exponenciálny kužeľ nepatrí medzi symetrické kužele, riešenie takýchto úloh je zložitejšie. Odlišnosť tohto kužeľa sa prejavuje nielen v jeho vlastnostiach a dualite, ale aj v konštrukcii bariérových funkcií, ktoré sú základom týchto metód. Ako sa ukazuje v [8], metódy vnútorného bodu možno prispôsobiť aj pre exponenciálny kužeľ tak, aby bolo možné riešiť príslušné úlohy efektívne.

Cieľom práce je najmä teoretické štúdium exponenciálneho kužeľa v rámci kónickej optimalizácie, so zameraním na jeho vlastnosti, dualitu a vzťah k metódam vnútorného bodu. Ďalším cieľom práce je preskúmať možnosti využitia exponenciálneho kužeľa pri formulácii vybraných konvexných optimalizačných úloh.

Naša práca je rozdelená do niekoľkých kapitol. V prvej kapitole uvádzame základné pojmy konvexnej a kónickej optimalizácie, ktoré tvoria teoretický základ práce. V druhej

kapitole sa venujeme exponenciálnemu kužeľu a jeho vlastnostiam. V tretej kapitole uvádzame všeobecný tvar optimalizačnej úlohy nad exponenciálnym kužeľom a ukazujeme, že viaceré triedy konvexných optimalizačných úloh možno modelovať pomocou exponenciálneho kužeľa. V štvrtej kapitole sa zameriavame na tému duality, konkrétne na odvodenie duálneho kužeľa a duálnej úlohy ku všeobecnej úlohe nad exponenciálnym kužeľom. V piatej kapitole stručne opisujeme princíp metód vnútorného bodu pre exponenciálny kužeľ. Predstavujeme formuláciu bariérovej úlohy a overujeme, či bariérová funkcia exponenciálneho kužeľa spĺňa požadované vlastnosti. Zároveň uvádzame prehľad vybraných solverov pre kónickú optimalizáciu. Záverečná kapitola sa venuje implementácii úlohy optimalizácie portfólia pomocou exponenciálneho kužeľa. Využívame Kellyho kritérium a jeho modifikovanú verziu, ktorá je regulovaná pomocou relatívnej entropie.

1 Všeobecné úlohy konvexnej kónickej optimalizácie

V tejto kapitole definujeme konvexný kužeľ a jeho základné vlastnosti. Zadefinujeme tiež tvar úlohy kónického lineárneho programovania (KLP), ktoré zahŕňa mnohé dôležité triedy konvexných optimalizačných úloh. Tým pripravíme teoretický základ pre formuláciu úloh s exponenciálnym kužeľom, ktorý je ťažiskom tejto práce. Vychádzame z [2, 35].

1.1 Teoretický rámec kužeľov

Začneme definíciou konvexného kužeľa [2].

Definícia 1.1. *Množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je* konvexný kužeľ*, ak $\forall x_1, x_2 \in K$ a $\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$ platí*

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in K.$$

Konvexné kužele sú uzavreté na niekoľko základných operácií. Ak K_1, $K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele, potom aj ich prienik, Karteziánsky súčin a Minkowského súčet vedú ku konvexnému kužeľu. Okrem toho, obraz konvexného kužeľa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ lineárnym zobrazením $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je takisto konvexný kužeľ [35]. Tieto vlastnosti sa prirodzene zovšeobecňujú aj na viac ako dva kužele.

Dôležitou podtriedou konvexných kužeľov sú tzv. *vlastné kužele*, s ktorými sa v optimalizácii stretávame často.

Definícia 1.2. *[2] Konvexný kužeľ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nazývame* vlastný*, ak je konvexný, uzavretý, plný (*$\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$*) a špicatý (ak $x \in K$ a $-x \in K$, potom $x = 0$).*

Medzi vlastné kužele patria napríklad $\mathbb{R}^n_+$, Lorentzov kužeľ Q_n, kužeľ kladne semidefinitných matíc S^n_+ a exponenciálny kužeľ K_{exp}. Ďalším pojmom, ktorý zadefinujeme, je pojem duálneho kužeľa.

Definícia 1.3. *[2] Nech $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužeľ. Jeho* duálny kužeľ *je definovaný ako*

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x^\top y \geq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

Duálny kužeľ K^* je vždy konvexný, a to dokonca aj v prípade, keď pôvodný kužeľ K nie je konvexný.

1.2 Úloha kónického lineárneho programovania

Úloha kónického lineárneho programovania (KLP) v štandardnom tvare je daná ako:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \in K, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je ľubovoľný konvexný kužeľ. Ak v úlohe KLP (1) zvolíme za kužeľ $K = \mathbb{R}^n_+$, potom táto úloha je klasická úloha lineárneho programovania (LP). Voľbou iných typov kužeľov dostaneme ďalšie významné podtriedy KLP. Napríklad, kužeľ kladne semidefinitných matíc vedie na úlohu semidefinitného programovania (SDP) a kvadratický kužeľ (Lorentzov kužeľ) zodpovedá úlohe programovania s kužeľmi druhého rádu (SOCP). O konkrétnych formuláciach týchto úloh sa možno viac dočítať v [2].

Existujú aj iné typy kužeľov, ktoré rozširujú možnosti modelovania v rámci všeobecného KLP, ako kužeľ kopozitívnych a kompletne pozitívnych matíc, monotónny nezáporný kužeľ, mocninový kužeľ a exponenciálny kužeľ [35].

Každý konvexný optimalizačný problém vieme pomocou epigrafovej transformácie prepísať do formy KLP. Základom tohto postupu je skutočnosť, že každú konvexnú množinu $C \subseteq \mathbb{R}^n$ možno podľa [35] reprezentovať ako rez konvexného kužeľa v rozšírenom priestore $\mathbb{R}^{n+1}$. Táto konštrukcia sa nazýva *homogenizácia* a je definovaná ako

$$K_C = \left\{ (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,\middle|\, s > 0,\ \frac{x}{s} \in C \right\} \cup \{0\}.$$

Premenná s slúži ako škálovací faktor a platí, že

$$x \in C \quad \iff \quad (x, 1) \in K_C.$$

Homogenizáciou sa z pôvodnej množiny C vytvorí konvexný kužeľ, ktorý zachováva jej štruktúru v rozšírenom priestore. Tento princíp umožňuje vyjadriť epigrafy konvexných funkcií, a tým prakticky každú konvexnú optimalizačnú úlohu v štandardnej kónickej forme. V Kapitole 2.1 tento postup využijeme pri konštrukcii *exponenciálneho kužeľa* K_{exp}, ktorý vzniká homogenizáciou epigrafu funkcie e^x.

2 Exponenciálny kužeľ a jeho vlastnosti

V tejto kapitole presne zadefinujeme exponenciálny kužeľ K_{exp} a uvedieme jeho základné vlastnosti spolu s dôkazom.

2.1 Definícia exponenciálneho kužeľa

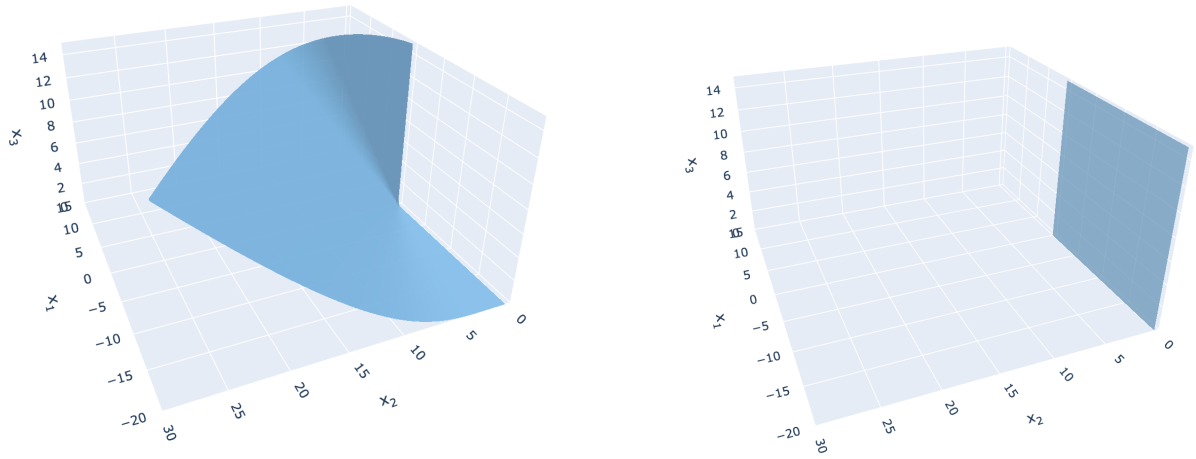
V literatúre sa môžeme stretnúť s viacerými zápismi exponenciálneho kužeľa, ktoré sa líšia permutáciou premenných a spôsobom definície (priamo alebo pomocou uzáveru), ako možno nájsť napríklad v [1, 10, 18]. Označme

$$K_{\mathrm{epi}(e^x)} = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 > 0,\ x_3 \geq x_2 \mathrm{e}^{x_1/x_2}\right\} \cup \{0\}$$

a

$$K_0 = \left\{(x_1, 0, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0\right\}.$$

Vykreslenie oboch množín môžeme vidieť na Obrázku 1.



(a) $K_{\mathrm{epi}(e^x)}$ **(b)** K_0

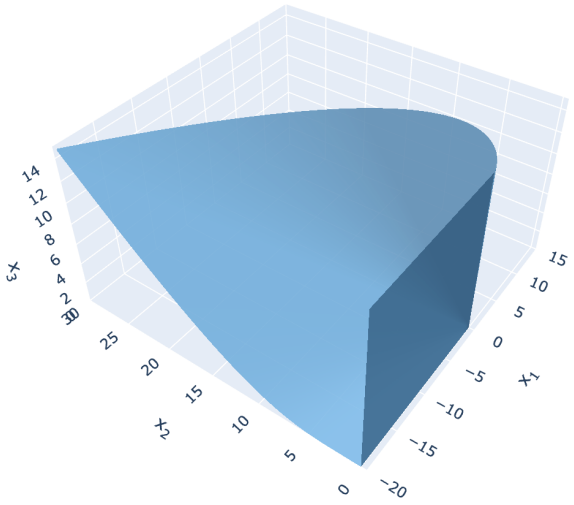
Obr. 1: Množiny $K_{\mathrm{epi}(e^x)}$ a K_0 (zdroj: vlastné spracovanie v Pythone)

Definícia 2.1. *Exponenciálny kužeľ K_{exp} je množina daná predpisom*

$$K_{exp} = K_{\mathrm{epi}(e^x)} \cup K_0$$

Často sa exponenciálny kužeľ uvádza pomocou uzáveru (angl.closure) v tvare

$$K_{exp} = \mathrm{cl}(K_{\mathrm{epi}(e^x)}) \tag{2}$$



Obr. 2: Exponenciálny kužeľ K_{exp} (zdroj: vlastné spracovanie v Pythone)

Ako sa uvádza v [10], exponenciálny kužeľ K_{exp} má geometrický pôvod v epigrafe exponenciálnej funkcie $f(x) = e^x$. Epigraf tejto funkcie je konvexná množina definovaná ako

$$\text{epi}(e^x) = \left\{(x,t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^x \leq t\right\}.$$

V Kapitole 1.2 sme ukázali, že z ľubovoľnej konvexnej množiny C možno pomocou homogenizácie zostrojiť konvexný kužeľ K_C. Ak túto konštrukciu aplikujeme na $C = \text{epi}(e^x)$, dostaneme homogenizovaný epigraf exponenciálnej funkcie. Po zavedení perspektívnych súradníc

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad t = \frac{x_3}{x_2}, \quad \text{kde } x_2 > 0,$$

sa nerovnosť $e^x \leq t$ prepíše do tvaru

$$e^{\frac{x_1}{x_2}} \leq \frac{x_3}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}} \leq x_3.$$

Týmto spôsobom získavame množinu

$$\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 > 0,\ x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}} \leq x_3\right\}.$$

Po pridaní bodu 0 dostávame množinu $K_{\text{epi}(e^x)}$. Exponenciálny kužeľ potom dostaneme ako jej uzáver, teda $K_{exp} = \text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)})$, čo je presne zápis (2).

Tvrdenie 2.2. *Definícia exponenciálneho kužeľa 2.1 je matematicky ekvivalentná so zápisom* (2).

Dôkaz. Ukážeme, že množina $K_{\text{epi}(e^x)}$ sa odlišuje od svojho uzáveru iba o hraničné body s $x_2 = 0$, ktoré tvoria množinu K_0. Inými slovami, chceme ukázať, že $\text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)}) = K_{\text{epi}(e^x)} \cup K_0$. Túto rovnosť overíme dokázaním obojstrannej inklúzie. Využijeme pritom základný poznatok, že uzáver množiny obsahuje limitné body všetkých konvergentných postupností z tejto množiny.

Najprv ukážeme inklúziu $K_{\text{epi}(e^x)} \cup K_0 \subseteq \text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)})$. Každý bod z množiny $K_{\text{epi}(e^x)}$ je súčasťou jej uzáveru, teda platí $K_{\text{epi}(e^x)} \subseteq \text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)})$. Zostáva ukázať, že každý bod z množiny K_0 patrí tiež do $\text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)})$. Nech $x = (x_1, 0, x_3)^T \in K_0$. Zostrojíme postupnosť

$$\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(x_1,\ \frac{1}{n},\ x_3 + \frac{1}{n}\right)^T\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ukážeme, že každý člen postupnosti $x^{(n)}$ patrí do $K_{\text{epi}(e^x)}$. Keďže $x_1 \leq 0$ a $x_3 \geq 0$, pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_2^{(n)} = \frac{1}{n} > 0$ a

$$x_2^{(n)} e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} = \frac{1}{n} e^{n x_1} \leq \frac{1}{n} \leq x_3 + \frac{1}{n} = x_3^{(n)}.$$

Teda $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $x^{(n)} \in K_{\text{epi}(e^x)}$. Okrem toho platí

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = (x_1, 0, x_3)^T.$$

z čoho vyplýva, že bod $(x_1, 0, x_3)^T$ je limitným bodom množiny $K_{\text{epi}(e^x)}$, a teda patrí do jej uzáveru:

$$(x_1, 0, x_3)^T \in \text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)}).$$

Tým sme dokázali, že $K_{\text{epi}(e^x)} \cup K_0 \subseteq \text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)})$.

Teraz ukážeme inklúziu $\text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)}) \subseteq K_{\text{epi}(e^x)} \cup K_0$. Nech $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \text{cl}(K_{\text{epi}(e^x)})$. Z vlastností uzáveru vieme, že existuje postupnosť bodov $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})^T \in K_{\text{epi}(e^x)}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Rozlíšme dva prípady podľa hodnoty x_2.

Ak $x_2 > 0$, je splnená prvá podmienka definície množiny $K_{\text{epi}(e^x)}$. Pretože $x^{(n)} \in K_{\text{epi}(e^x)}$, pre každé n platí

$$x_2^{(n)}\, e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} \leq x_3^{(n)}. \tag{3}$$

Funkcia $f(u, v) = ve^{u/v}$ je spojitá pre $v > 0$ a $x_2 > 0$, a teda

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} = x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Zároveň, keďže $\lim_{n\to\infty} x_3^{(n)} = x_3$, tak platí

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} = x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}} \leq x_3 = \lim_{n\to\infty} x_3^{(n)},$$

a preto $x \in K_{\mathrm{epi}(e^x)}$.

Ak $x_2 = 0$, potom okrem prípadu $x = 0$ bod x nepatrí do $K_{\mathrm{epi}(e^x)}$. Keďže $0 \in K_0$, stačí uvažovať prípad $x \neq 0$ a ukázať, že $x \in K_0$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x^{(n)} \neq 0$ pre všetky n. Potom z definície $K_{\mathrm{epi}(e^x)}$ vyplýva, že $x_2^{(n)} > 0$ a

$$0 < x_2^{(n)} e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} \leq x_3^{(n)} \tag{4}$$

Z toho vyplýva, že $\lim_{n\to\infty} x_3^{(n)} = x_3 \geq 0$. Ak $x_1 \leq 0$, je splnená aj druhá podmienka definície množiny K_0 a máme $x \in K_0$. Predpokladajme preto sporom, že $x_1 > 0$. Z definície limity postupnosti platí, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq N$ máme

$$|x_1^{(n)} - x_1| < \varepsilon.$$

Voľbou $\varepsilon = \frac{x_1}{2} > 0$ dostávame

$$x_1^{(n)} > x_1 - \tfrac{x_1}{2} = \tfrac{x_1}{2} > 0.$$

Odtiaľ dostávame odhad

$$x_2^{(n)} e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} \geq x_2^{(n)} e^{\frac{x_1}{2x_2^{(n)}}} = \frac{x_1}{2} \frac{e^{\frac{x_1}{2x_2^{(n)}}}}{\frac{x_1}{2x_2^{(n)}}} \tag{5}$$

Označme

$$t_n = \frac{x_1}{2x_2^{(n)}}.$$

Keďže $x_1 > 0$ a $\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = 0^+$, platí

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty.$$

Je známe, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty.$$

Z definície limity funkcie potom vyplýva, že pre každú postupnosť $\{\mathrm{t}_n\}_{n=1}^{\infty} s \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{t_n}}{t_n} = +\infty.$$

Dostávame teda zo (5), že aj

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} e^{\frac{x_1^{(n)}}{x_2^{(n)}}} = +\infty.$$

Z nerovnosti (4) potom vyplýva, že aj $\lim_{n\to\infty} x_3^{(n)} = +\infty$, čo je v spore s tým, že $\lim_{n\to\infty} x_3^{(n)} = x_3 \in \mathbb{R}$. Preto musí platiť $x_1 \leq 0$, a teda $x \in K_0$.

Spojením oboch inklúzií sme dokázali rovnosť $\mathrm{cl}(K_{\mathrm{epi}(e^x)}) = K_{\mathrm{epi}(e^x)} \cup K_0$. □

Tvrdenie 2.3. *Pre každý bod $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ platí*

$$x \in \mathrm{int}(K_{exp}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 > 0 \text{ a } x_3 > x_2\, e^{\frac{x_1}{x_2}}. \tag{6}$$

Dôsledok 2.4. *Vnútro exponenciálneho kužeľa K_{exp} je množina*

$$\mathrm{int}(K_{exp}) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 > 0,\ x_3 > x_2\, e^{\frac{x_1}{x_2}} \right\}.$$

Dôkaz. Dokážeme obidva smery ekvivalencie (6). Bod x je vnútorný v K_{exp} práve vtedy, keď existuje $\varepsilon > 0$ také, že otvorená guľa

$$B_\varepsilon(x) = \{\, y \in \mathbb{R}^3 :\ \|y - x\| < \varepsilon \,\}$$

je celá obsiahnutá v K_{exp}. Túto vlastnosť využijeme na charakterizáciu vnútorných bodov.
(⇒) Nech $x \in \mathrm{int}(K_{exp})$. Najskôr ukážeme, že $x_2 > 0$. Ak by $x_2 = 0$, potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ bod

$$y = x - \left(0, \frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$$

spĺňa $\|y - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, teda $y \in B_\varepsilon(x)$, ale zároveň $y_2 = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$, a preto $y \notin K_{exp}$. To je spor s tým, že $B_\varepsilon(x) \subset K_{exp}$, takže musí platiť $x_2 > 0$.

Ďalej dokážeme, že $x_3 > x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}$. Keďže $\mathrm{int}(K_{exp}) \subset K_{exp}$ a už vieme, že $x_2 > 0$, z definície K_{exp} dostávame

$$x_3 \geq x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Zostáva vylúčiť prípad rovnosti. Predpokladajme teda sporom, že $x_3 = x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}$. Zvoľme ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a položme

$$y = x - \left(0, 0, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Potom $y \in B_\varepsilon(x)$, pričom $y_2 = x_2 > 0$ a

$$y_3 = x_3 - \frac{\varepsilon}{2} < x_3 = x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}} = y_2 e^{\frac{y_1}{y_2}},$$

teda $y \notin K_{exp}$. Opäť dostávame spor s predpokladom, že x je vnútorný bod. Preto musí platiť $x_3 > x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}$.

(⇐) Nech $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ spĺňa $x_2 > 0$ a $x_3 > x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}}$. Ukážeme, že $x \in \text{int}(K_{exp})$, t. j. že existuje $\varepsilon > 0$ také, že $B_\varepsilon(x) \subset K_{exp}$. Označme

$$m = x_3 - x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}} > 0$$

a definujme funkciu

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_3 - y_2 e^{\frac{y_1}{y_2}}, \qquad y_2 > 0.$$

Funkcia g je spojitá na svojom definičnom obore $\mathcal{D}(g) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_2 > 0\}$ a platí $g(x) = m$. Zo spojitosti funkcie g v bode x existuje $\varepsilon_1 > 0$ také, že pre každé $y \in \mathcal{D}(g)$ platí

$$\|y - x\| < \varepsilon_1 \;\Rightarrow\; |g(y) - g(x)| < \tfrac{m}{2},$$

a teda

$$g(y) > g(x) - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} > 0, \qquad \text{čiže} \qquad y_3 > y_2 e^{\frac{y_1}{y_2}}.$$

Keďže $x_2 > 0$, existuje $\varepsilon_2 > 0$ (napr. $\varepsilon_2 = \frac{x_2}{2}$) také, že

$$\|y - x\| < \varepsilon_2 \;\Rightarrow\; |y_2 - x_2| \leq \|y - x\| < \varepsilon_2 \;\Rightarrow\; y_2 > x_2 - \varepsilon_2 > 0.$$

Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ a nech $y \in B_\varepsilon(x)$. Potom platí $y_2 > 0$ a zároveň $y_3 > y_2 e^{\frac{y_1}{y_2}}$, teda $y \in K_{exp}$. Tým $B_\varepsilon(x) \subset K_{exp}$ a preto $x \in \text{int}(K_{exp})$. □

Poznámka: Hranicu ∂K_{exp} tvoria body

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\; x_2 > 0,\; x_3 = x_2\, e^{\frac{x_1}{x_2}}\Big\} \;\cup\; \Big\{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\; x_1 \leq 0,\; x_3 \geq 0\Big\}.$$

2.2 Vlastnosti exponenciálneho kužeľa

V literatúre [6, 8] sa exponenciálny kužeľ používa v rámci kónickej optimalizácie, kde sa uvažujú kužele spĺňajúce vlastnosti vlastného kužeľa.[1] V tejto podkapitole preto overíme, že exponenciálny kužeľ K_{exp} spĺňa všetky vlastnosti vlastného kužeľa v zmysle Definície 1.2.

Tvrdenie 2.5. *Exponenciálny kužeľ K_{exp} je konvexný a uzavretý.*

[1] V anglickej literatúre sa používa označenie *proper cone*.

Dôkaz. Keďže epigraf funkcie e^x je konvexná množina a perspektívna transformácia konvexnej funkcie zachováva konvexnosť [2], aj perspektíva epigrafu zostáva konvexná. Homogenizáciou epigrafu funkcie e^x vzniká exponenciálny kužeľ K_{exp} (pozri Kapitolu 2.1), ktorý je preto konvexný. Uzavretosť vyplýva z definície ako uzáveru tejto množiny (2). □

Tvrdenie 2.6. *Exponenciálny kužeľ K_{exp} je špicatý.*

Dôkaz. Nech $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ je ľubovoľný bod z K_{exp} a zároveň $-x \in K_{exp}$. Ukážeme, že potom musí platiť $x = 0$. Rozlíšime dva prípady:

Ak $x_2 > 0$, tak z podmienky $x \in K_{exp}$ vyplýva $x_2 > 0$. Ak by zároveň platilo $-x \in K_{exp}$, muselo by byť $-x_2 > 0$. Keďže nemôže platiť súčasne $x_2 > 0$ aj $-x_2 > 0$, nastáva spor a tento prípad je nemožný.

Ak $x_2 = 0$, z definície kužeľa potom platí $x_1 \leq 0$, $x_3 \geq 0$. Zo skutočnosti, že $-x \in K_{exp}$, dostávame $-x_1 \leq 0$ a $-x_3 \geq 0$, teda $x_1 \geq 0$ a $x_3 \leq 0$. Spolu z toho vyplýva $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, a keďže $x_2 = 0$, dostávame $x = 0$.

Tým sme ukázali, že z podmienky $x, -x \in K_{exp}$ vždy plynie $x = 0$, a preto je kužeľ K_{exp} špicatý. □

Tvrdenie 2.7. *Exponenciálny kužeľ K_{exp} je plný, t.j.* $\text{int}(K_{exp}) \neq \emptyset$

Dôkaz. Dosadením bodu $(1, 1, 3)$ do podmienok z Tvrdenia 2.3 dostávame, že $(1, 1, 3) \in \text{int}(K_{exp})$, a teda $\text{int}(K_{exp}) \neq \emptyset$. □

Z vyššie uvedených tvrdení sme dokázali, že exponenciálny kužeľ K_{exp} je konvexný, uzavretý, špicatý a aj plný. Keďže spĺňa všetky tieto štyri vlastnosti, z Definície 1.2 vyplýva, že K_{exp} je **vlastný kužeľ**.

2.3 Zovšeobecnenie exponenciálneho kužeľa a jeho alternatívna geometrická interpretácia

V tejto podkapitole uvedieme dva doplnkové pohľady z literatúry, ktoré sa týkajú exponenciálneho kužeľa. Tieto pohľady opisujú jeho zovšeobecnenie a alternatívnu geometrickú interpretáciu. Ako uvádzajú Ye a Xie v [37], exponenciálny kužeľ možno definovať aj v parametrickej podobe. Parametrizácia $K_{exp}(\alpha)$ sa v [37] používa na konštrukciu SOCP

aproximácií exponenciálneho kužeľa, pričom parameter α určuje chybu aproximácie. Táto podoba má tvar

$$K_{exp}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2} \right) \in \mathrm{epi}(e^{x-\alpha}) \right\}, \tag{7}$$

pričom je uvažovaná na definičnom obore $x_2 \in [\frac{1}{M}, M]$ pre $M > 1$. Na takto zvolenom definičnom obore sa prirodzene nevyskytujú body s $x_2 = 0$ a vďaka tomu sú $\frac{x_1}{x_2}$ a $\frac{x_3}{x_2}$ vždy jednoznačne definované. Ak však chceme (7) chápať ako opis exponenciálneho kužeľa v celom $\mathbb{R}^3$, je potrebné doplniť uzáver uvedenej množiny, aby sme zahrnuli aj časť s $x_2 = 0$. Potom pre $\alpha = 0$ dostávame $K_{exp}(0) = K_{exp}$, kde K_{exp} je definícia exponenciálneho kužeľa uvedená v (2).

Podľa [37], z (7) vyplýva aj alternatívna geometrická interpretácia exponenciálneho kužeľa. Z nerovnosti

$$e^{\frac{x_1}{x_2} - \alpha} \leq \frac{x_3}{x_2}$$

dostávame ekvivalentný tvar

$$\frac{x_1}{x_2} \leq \log\left(\frac{x_3}{x_2} \right) + \alpha.$$

Teda bod $(\frac{x_3}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})$ patrí do hypografu funkcie $\log(x) + \alpha$, a môžeme napísať

$$K_{exp}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x_3}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) \in \mathrm{hyp}(\log(x) + \alpha) \right\}.$$

Keďže logaritmus je konkávna funkcia a jeho perspektíva $(u, v) \mapsto v \log(u/v)$ je konkávna na oblasti $v > 0$, jej hypograf je konvexná množina. Treba však zdôrazniť, že rovnako ako pri epigrafovej reprezentácii (7), perspektívna transformácia nie je definovaná pre $x_2 = 0$, a preto je na získanie uzavretého exponenciálneho kužeľa v celom $\mathbb{R}^3$ potrebné doplniť uzáver aj v tejto hypografovej formulácii. Tým je zabezpečené, že aj uvedená reprezentácia vedie ku konvexnému a uzavretému kužeľu.

Teda exponenciálny kužeľ možno interpretovať buď ako epigraf perspektívy exponenciálnej funkcie, alebo ekvivalentne ako hypograf perspektívy logaritmu. Zároveň táto interpretácia vysvetľuje, prečo sa hypografy logaritmických funkcií prirodzene využívajú pri transformáciách a modelovaní úloh pomocou exponenciálneho kužeľa, čo podrobnejšie ukážeme v Kapitole 3.

3 Modelovanie pomocou exponenciálneho kužeľa

Exponenciálny kužeľ K_{exp} hrá dôležitú úlohu pri modelovaní konvexných úloh, v ktorých sa objavujú exponenciálne a logaritmické funkcie. Takéto výrazy sa prirodzene vyskytujú v mnohých aplikáciách - od štatistiky a strojového učenia až po inžinierske či ekonomické modely. Vďaka K_{exp} je možné tieto úlohy prepísať do štandardnej kónickej formy a riešiť ich pomocou všeobecných metód konickej optimalizácie. Tento prístup zjednodušuje formuláciu týchto úloh a zároveň umožňuje priamo využiť moderné softvérové nástroje.

V tejto kapitole si ukážeme, ako možno pomocou K_{exp} vyjadriť vybrané funkcie a ohraničenia, ktoré sa v optimalizačných úlohách často vyskytujú. Následne uvedieme aj príklady úloh, ktoré do tejto triedy spadajú.

Exponenciálny kužeľ umožňuje vyjadriť širokú triedu konvexných a konkávnych funkcií prostredníctvom ich epigrafov a hypografov. Prehľad najčastejšie používaných transformácií možno nájsť v dokumentácii solvera MOSEK [18], ako aj v prácach [6, 1]. Nasledujúca tabuľka sumarizuje najdôležitejšie prípady a zobrazuje ich kónické ekvivalenty pomocou K_{exp}.

Tabuľka 1: Základné transformácie vyjadrené pomocou exponenciálneho kužeľa K_{exp}

Funkcia / transformácia $f(x)$	**Epigraf / hypograf**	**Kónický zápis pomocou** K_{exp}
Exponenciálna $f(x) = e^x$	$t \geq e^x$	$(x,\, 1,\, t) \in K_{exp}$
Logaritmus $f(x) = \ln(x)$	$t \leq \ln(x),\ x > 0$	$(t,\, 1,\, x) \in K_{exp}$
Negatívny logaritmus $f(x) = -\ln(x)$	$t \geq -\ln(x),\ x > 0$	$(-t,\, 1,\, x) \in K_{exp}$
Entropia $f(x) = -x\ln(x)$	$t \leq -x\ln(x),\ x > 0$	$(t,\, x,\, 1) \in K_{exp}$
Relatívna entropia $f(x,y) = x\ln(x/y)$	$t \geq x\ln(x/y),\ x,y > 0$	$(-t,\, x,\, y) \in K_{exp}$
Log-sum-exp $f(x) = \ln(\sum_i e^{x_i})$	$t \geq \ln(\sum_i e^{x_i})$	$(x_i - t,\, 1,\, u_i) \in K_{exp},\ i = 1,\ldots,n$ $\sum_i u_i \leq 1$
Softplus $f(x) = \ln(1 + e^x)$	$t \geq \ln(1 + e^x)$	$(x - t,\, 1,\, u_1),\ (-t,\, 1,\, u_2) \in K_{exp},$ $u_1 + u_2 \leq 1$

Podrobné odvodenie jednotlivých transformácii možno nájsť v Prílohe A.

Poznámka: Log-sum-exp predstavuje hladkú aproximáciu maxima, pretože podľa [2] platí

$$\max_i x_i \ \leq\ \ln\Big(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\Big) \ \leq\ \max_i x_i + \ln n.$$

Používa sa ako diferencovateľná náhrada operátora max v optimalizačných úlohách. Softplus je hladká aproximácia operátora $\max\{0, x\}$, pretože platí

$$\max\{0, x\} \;\leq\; \ln(1 + e^x) \;\leq\; \max\{0, x\} + \ln 2.$$

Vychádzajúc z úlohy kónického lineárneho programovania (KLP) z Kapitoly 1.2 navrhneme jej špeciálny tvar pre prípad, keď za kužeľ K zvolíme exponenciálny kužeľ K_{exp}. Výsledná úloha má tvar

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & Cx \leq d, \\ & F_i x + g_i \in K_{exp}, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{8}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$, $d \in \mathbb{R}^q$, $c \in \mathbb{R}^n$ a pre každý blok i platí $F_i \in \mathbb{R}^{3 \times n}$, $g_i \in \mathbb{R}^3$. Tento tvar budeme v nasledujúcich častiach práce využívať ako jednotný spôsob formulácie úloh založených na exponenciálnom kuželi.

3.1 Geometrické programovanie

Geometrické programovanie (GP) sa využíva v úlohách, v ktorých sa vzťahy medzi premennými prirodzene vyjadrujú pomocou monomov a pozinómov. Ako je popísané v [3], jedným z najjednoduchších príkladov úlohy geometrického programovania je optimalizácia rozmerov trojrozmernej štruktúry (napr. krabice) pri obmedzeniach na plochu stien a dna a pri predpísaných pomeroch strán. Cieľom takejto úlohy je maximalizácia objemu. Ďalšie typické príklady geometrického programovania, uvedené v [2], zahŕňajú diagonálne škálovanie matice alebo minimalizáciu spektrálneho polomeru matice. Všetky tieto prípady majú spoločnú vlastnosť – po vhodnej transformácii možno ich matematický tvar vyjadriť pomocou exponenciálneho kužeľa.

Ako sa uvádza v [2], funkciu $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ nazývame **pozinóm**, ak má tvar

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{K} c_\ell \, x_1^{a_{1\ell}} x_2^{a_{2\ell}} \cdots x_n^{a_{n\ell}}, \tag{9}$$

kde $c_\ell > 0$ pre $\ell = 1, \ldots, K$ a $a_{i\ell} \in \mathbb{R}$ pre $i = 1, \ldots, n$. Ak $K = 1$, potom (9) sa nazýva

monóm. Štandardný tvar úlohy GP je

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & h_j(x) = 1, \quad j = 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{10}$$

kde f_i sú pozinómy a h_j sú monomy. Môžeme si všimnúť, že úloha (10) nie je v premenných x konvexná. Konvexnosť však získame zavedením logaritmických premenných a následnou aplikáciou logaritmu na účelovú funkciu a ohraničenia. Nech

$$y_i = \ln(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

teda $x_i = e^{y_i}$. Pozinóm (9) sa po tejto transformácii zapíše v tvare

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{K} e^{a_\ell^\top y + \ln c_\ell}, \qquad \ln f(x) = \ln\left(\sum_{\ell=1}^{K} e^{a_\ell^\top y + \ln c_\ell} \right),$$

čo je funkcia typu *log-sum-exp*, ktorá je konvexná [2]. Monóm má potom tvar

$$f(x) = e^{a^\top y + \ln c}, \qquad \ln f(x) = a^\top y + \ln c,$$

čo je afinná funkcia v premennej y.

Úlohu GP vieme potom zapísať v konvexnom tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & \ln\left(\sum_{k^{(1)}=1}^{K_0} e^{a_{0,k^{(1)}}^\top y + \ln c_{0,k^{(1)}}} \right) \\ & \ln\left(\sum_{k^{(2)}=1}^{K_i} e^{a_{i,k^{(2)}}^\top y + \ln c_{i,k^{(2)}}} \right) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & a_j^\top y + \ln c_j = 0, \quad j = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{11}$$

Keďže výrazy $\ln c$ vystupujú v úlohe ako konštanty, označíme ich ako b. Po zavedení epigrafovej premennej t môžeme úlohu (11) preformulovať do ekvivalentného tvaru

$$\begin{aligned} \min \; & t \\ & \ln\left(\sum_{k^{(1)}=1}^{K_0} e^{a_{0,k^{(1)}}^\top y + b_{0,k^{(1)}}} \right) \leq t, \\ & \ln\left(\sum_{k^{(2)}=1}^{K_i} e^{a_{i,k^{(2)}}^\top y + b_{i,k^{(2)}}} \right) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & a_j^\top y + b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Postup transformácie je analogický ako pri *log-sum-exp* funkcii uvedenej v Tabuľke 1. Prvé ohraničenie

$$\ln\left(\sum_{k^{(1)}=1}^{K_0} e^{a_{0,k^{(1)}}^\top y + b_{0,k^{(1)}}}\right) \leq t$$

je ekvivalentné podmienkam

$$(a_{0,k^{(1)}}^\top y + b_{0,k^{(1)}} - t,\ 1,\ v_{0,k^{(1)}}) \in K_{exp}, \quad k^{(1)} = 1, \ldots, K_0, \qquad \sum_{k^{(1)}=1}^{K_0} v_{0,k^{(1)}} \leq 1.$$

Podobne, pre každé pozinómové ohraničenie s $i = 1, \ldots, m$

$$\ln\left(\sum_{k^{(2)}=1}^{K_i} e^{a_{i,k^{(2)}}^\top y + b_{i,k^{(2)}}}\right) \leq 0$$

platí ekvivalentný kónický zápis

$$(a_{i,k^{(2)}}^\top y + b_{i,k^{(2)}},\ 1,\ u_{i,k^{(2)}}) \in K_{exp}, \quad k^{(2)} = 1, \ldots, K_i, \qquad \sum_{k^{(2)}=1}^{K_i} u_{i,k^{(2)}} \leq 1.$$

Monómové rovnice

$$a_j^\top y + b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, p,$$

sú afinné a netreba ich vyjadrovať pomocou K_{exp}. Konečný kónický tvar úlohy geometrického programovania má potom tvar

$$\begin{aligned}
\min_{t,\, y,\, v_{0,k^{(1)}},\, u_{i,k^{(2)}}} \quad & t \\
& (a_{0,k^{(1)}}^\top y + b_{0,k^{(1)}} - t,\ 1,\ v_{0,k^{(1)}}) \in K_{exp}, \quad k^{(1)} = 1, \ldots, K_0, \\
& \sum_{k^{(1)}=1}^{K_0} v_{0,k^{(1)}} \leq 1, \\
& (a_{i,k^{(2)}}^\top y + b_{i,k^{(2)}},\ 1,\ u_{i,k^{(2)}}) \in K_{exp}, \quad k^{(2)} = 1, \ldots, K_i,\ i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{k^{(2)}=1}^{K_i} u_{i,k^{(2)}} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& a_j^\top y + b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, p.
\end{aligned} \tag{12}$$

Vidíme, že úlohu (12) môžeme zapísať v štandardnom kónickom tvare (8). Najprv zadefinujeme vektor optimalizačných premenných ako

$$z = \left(y^\top,\ t,\ v_0^\top,\ u_1^\top, \ldots, u_m^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^N,$$

kde

$$N = n + 1 + K_0 + \sum_{i=1}^{m} K_i.$$

Účelovú funkciu $\min t$ môžeme zapísať v tvare $\min q^\top z$, kde

$$q = (0,\ 1,\ 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N.$$

Rovnice

$$a_j^\top y + b_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

zodpovedajú časti $Az = r$. Matica A a vektor r majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} a_1^\top & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_p^\top & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times N}, \qquad r = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Lineárne nerovnice

$$\sum_{k^{(1)}=1}^{K_0} v_{0,k^{(1)}} \leq 1, \qquad \sum_{k^{(2)}=1}^{K_i} u_{i,k^{(2)}} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$

tvoria časť $Cz \leq d$. Matica C a vektor d sú

$$C = \begin{pmatrix} 0_{1\times n} & 0 & \mathbf{1}_{1\times K_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0_{1\times n} & 0 & 0 & \mathbf{1}_{1\times K_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{1\times n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1}_{1\times K_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times N}, \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Zostáva opísať exponenciálne ohraničenia. Začneme ohraničeniami

$$(a_{0,k^{(1)}}^\top y + b_{0,k^{(1)}} - t,\ 1,\ v_{0,k^{(1)}}) \in K_{exp}, \qquad k^{(1)} = 1, \ldots, K_0.$$

Uvedené ohraničenia môžeme zapísať v tvare

$$F_{0,k^{(1)}} z + g_{0,k^{(1)}} \in K_{exp},$$

kde

$$F_{0,k^{(1)}} = \begin{pmatrix} a_{0,k^{(1)}}^\top & -1 & 0_{1\times K_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0_{1\times n} & 0 & 0_{1\times K_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0_{1\times n} & 0 & e_{k^{(1)}}^\top & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times N}, \qquad g_{0,k^{(1)}} = \begin{pmatrix} b_{0,k^{(1)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Pre každé pozinómové ohraničenie $i = 1, \ldots, m$ a každý člen $k^{(2)} = 1, \ldots, K_i$ máme podmienku

$$(a_{i,k^{(2)}}^\top y + b_{i,k^{(2)}},\ 1,\ u_{i,k^{(2)}}) \in K_{exp}.$$

Aj túto podmienku môžeme zapísať v tvare

$$F_{i,k^{(2)}} z + g_{i,k^{(2)}} \in K_{exp},$$

kde

$$F_{i,k^{(2)}} = \begin{pmatrix} a_{i,k^{(2)}}^\top & 0 & 0_{1\times K_0} & 0 & \cdots & 0 & 0_{1\times K_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0_{1\times n} & 0 & 0_{1\times K_0} & 0 & \cdots & 0 & 0_{1\times K_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0_{1\times n} & 0 & 0_{1\times K_0} & 0 & \cdots & 0 & e_{k^{(2)}}^\top & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times N},$$

$$g_{i,k^{(2)}} = \begin{pmatrix} b_{i,k^{(2)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

3.2 Špeciálne úlohy modelované pomocou K_{exp}

Exponenciálny kužeľ sa dá využiť aj pri iných typoch úloh než je geometrické programovanie. Spoločným znakom týchto úloh je prítomnosť exponenciálnych alebo logaritmických výrazov, ktoré možno pomocou K_{exp} prepísať do konvexnej formy. Takto sa dajú jednotne modelovať aj rôzne problémy z matematiky, štatistiky či financií. V nasledujúcej podkapitole uvedieme niekoľko príkladov: Lambertovu W-funkciu, Poissonovú či logistickú regresiu a Kellyho optimalizačné portfólio.

3.2.1 Lambertova W-funkcia

Uvažujme rovnicu

$$ue^u = s, \tag{13}$$

kde u je neznáma premenná a s je daná hodnota. Keďže premenná sa nachádza súčasne v lineárnej aj exponenciálnej časti, rovnicu nemožno explicitne vyriešiť bežnými algebraickými úpravami, a preto sa zavádza Lambertova W-funkcia [23].

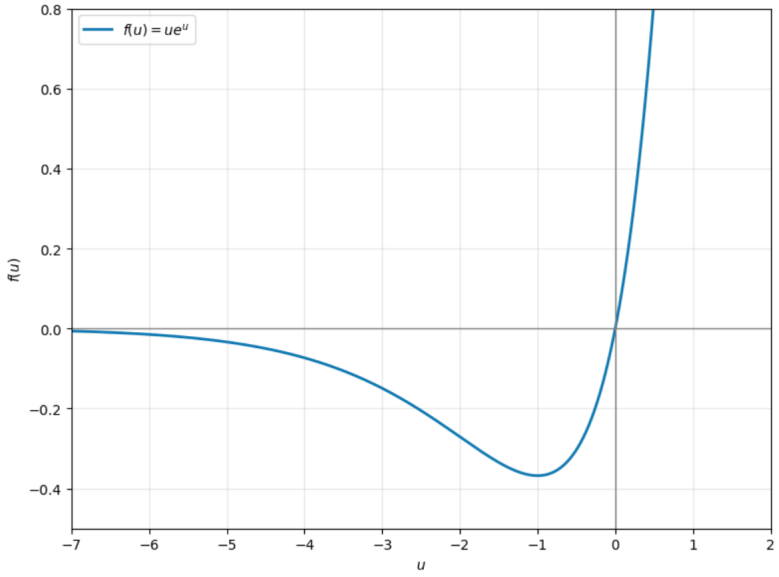
Pre dané s definujeme Lambertovu $W(s)$-funkciu ako riešenie rovnice (13), teda platí $u = W(s)$ a

$$W(s)e^{W(s)} = s, \quad \text{kde} \quad s \in \mathbb{C} \tag{14}$$

V oblasti matematiky sa táto funkcia využíva napríklad v kombinatorike a pri riešení diferenciálnych rovníc [7]. Hoci je možné hodnoty $W(s)$ počítať iteratívnymi metódami (napr. Newtonovou alebo Halleyho metódou [7]), v niektorých aplikáciách to nie je praktické.

Nguyen a kol. [23] preto navrhujú vypočítať $W(s)$ ako konvexnú optimalizačnú úlohu pomocou exponenciálneho kužeľa.

V článku [7] sa Lambertova $W(s)$-funkcia definuje ako *viacznačná*[2] inverzia k funkcii $f(u) = ue^u$. Viacznačná z toho dôvodu, lebo funkcia f nie je prostá (pozri Obr. 3) a teda pre dané s môže existovať viac hodnôt u, ktoré spĺňajú rovnicu (13). V dôsledku toho nie je možné definovať inverznú funkciu f^{-1} na celom definičnom obore jednoznačne. Definičný obor funkcie f sa preto rozdelí na intervaly, na ktorých je funkcia prostá a na každom intervale sa vyjadrí inverzná funkciu zvlášť. Takto získané inverzie na jednotlivých intervaloch sa podľa [36] nazývajú *vetvy*. V [7] sa spomína, že pre Lambertovu $W(s)$-funkciu platí, že ma nekonečne veľa jednoznačných vetiev v rovine komplexných čísel. My sa obmedzíme na réalny prípad, kde sú tieto vetvy 2.



Obr. 3: Funkcia $f(u) = ue^u$ (zdroj: vlastné spracovanie v Pythone)

Definičný obor funkcie $f(u)$ rozdelíme na 2 intervaly podľa bodu minima. Derivácia funkcie $f(u)$ je

$$f'(u) = e^u(1 + u),$$

z čoho vyplýva, že $f'(u) = 0$ pre $u = -1$. V tomto bode má funkcia hodnotu

$$f(-1) = -\frac{1}{e}.$$

[2]Detailnejšie vysvetlenie pojmu viacznačnej funkcie je v [36].

Keďže $f'(u) < 0$ pre $u < -1$ a $f'(u) > 0$ pre $u > -1$, bod $u = -1$ je globálnym minimom funkcie f. $H(f) = [-1/e, \infty)$.

Na základe nájdeného bodu minima rozdelíme funkciu $f(u)$ na intervaly $(-\infty, -1]$ a $[-1, \infty)$ a označíme

$$f_1 = f|_{(-\infty,-1]}, \qquad f_2 = f|_{[-1,\infty)}.$$

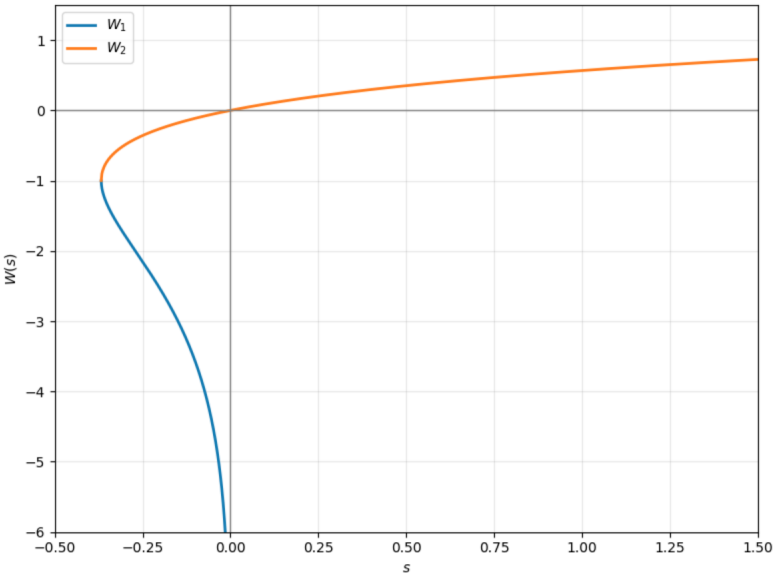
Potom pre ich inverzné funkcie platí

$$D(f_1^{-1}) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right), \quad H(f_1^{-1}) = (-\infty, -1],$$

$$D(f_2^{-1}) = \left[-\frac{1}{e}, \infty\right), \quad H(f_2^{-1}) = [-1, \infty).$$

Tieto inverzné funkcie predstavujú dve vetvy Lambertovej W(s)-funkcie, ktoré označíme ako

$$W_1(s) = f_1^{-1}(s), \qquad W_2(s) = f_2^{-1}(s).$$



Obr. 4: Funkcie $W_1(s)$ a $W_2(s)$ (zdroj:vlastné spracovanie)

Aby sme vetvy $W_1(s)$ a $W_2(s)$ mohli zapísať pomocou exponenciálneho kužeľa, musíme najprv overiť, či sú konvexné/konkávne, čo určíme na základe ich druhej derivácie. Keďže vo všeobecnosti funkcia $W(s)$ je definovaná implicitne rovnicou (14), označíme $F(s, W) = We^W - s = 0$ a využijeme *vetu o implicitnej funkcii*. Podľa tejto vety, ak funkcia $F(s, W)$

má spojité prvé parciálne derivácie, a platí

$$\frac{\partial F}{\partial W}(s, W) \neq 0,$$

potom existuje v okolí daného bodu funkcia $W(s)$, ktorú možno derivovať podľa s.

V našom prípade má $F(s, W) = We^W - s$ spojité prvé parciálne derivácie, pretože $\frac{\partial F}{\partial s}(s, W) = -1$ a $\frac{\partial F}{\partial W}(s, W) = e^W(1+W)$. Zároveň aj platí $\frac{\partial F}{\partial W}(s, W) \neq 0$ pre $W(s) \neq -1$ (teda pre $s \neq -\frac{1}{e}$). Pri odvodení derivácie budeme uvažovať hodnoty $s > -\frac{1}{e}$. Pre vetvu $W_2(s)$ je to definičný obor $(-1/e, \infty)$, a pre vetvu $W_1(s)$ je to definičný obor $(-1/e, 0)$. V oboch prípadoch sú splnené podmienky vety o implicitnej funkcii, a preto možno rovnicu (14) derivovať implicitne podľa s. Derivovaním dostaneme

$$W'(s)e^{W(s)} + W(s)e^{W(s)}W'(s) = 1,$$

teda

$$W'(s)e^{W(s)}\Big(1 + W(s)\Big) = 1.$$

Odtiaľ vyplýva

$$W'(s) = \frac{1}{e^{W(s)}(1 + W(s))}. \tag{15}$$

Teraz vypočítame druhú deriváciu

$$W''(s) = -\frac{e^{W(s)}W'(s)(1 + W(s)) + e^{W(s)}W'(s)}{\Big(e^{W(s)}(1 + W(s))\Big)^2}. = -\frac{W'(s)(2 + W(s))}{e^{W(s)}(1 + W(s))^2}$$

Namiesto $W'(s)$ dosadíme (15) a dostaneme

$$W''(s) = -\frac{2 + W(s)}{e^{2W(s)}(1 + W(s))^3}.$$

Najprv uvažujme vetvu $W_2(s)$. Pre $s \in (-1/e, \infty)$ platí $W_2(s) \in (-1, \infty)$. Preto

$$2 + W_2(s) > 0 \qquad \text{a} \qquad (1 + W_2(s))^3 > 0.$$

Keďže zároveň $e^{2W_2(s)} > 0$, tak

$$W_2''(s) < 0 \qquad \text{pre } s \in (-1/e, \infty).$$

Teda vetva W_2 je na intervale $(-1/e, \infty)$ rýdzo konkávna.

Teraz uvažujme vetvu W_1, ktorá je definovaná pre $s \in (-1/e, 0)$ a teda platí $W_1(s) \in (-\infty, -1)$. V tomto prípade je $(1 + W_1(s))^3 < 0$, takže znamienko druhej derivácie závisí od člena $2 + W_1(s)$. Ak $W_1(s) \in (-2, -1)$ potom $2 + W_1(s) > 0$ a teda

$$W_1''(s) > 0.$$

Ak ale $W_1(s) < -2$ potom $2 + W_1(s) < 0$ a teda

$$W_1''(s) < 0.$$

Z toho vyplýva, že W_1 nie je na intervale $(-1/e, 0)$ ani konvexná ani konkávna. Preto ju nemožno priamo reprezentovať pomocou exponenciálneho kužeľa a ďalej sa budeme zaoberať iba vetvou W_2.

Keďže vetva W_2 je konkávna, tak jej hypograf je konvexnou množinou. Ten je definovaný ako

$$\mathrm{hyp}\,(W_2) = \{(s, t) \mid t \leq W_2(s)\}.$$

Podmienku

$$t \leq W_2(s)$$

možno ekvivalentne prepísať pomocou vlastnosti monotónnosti exponenciálnej funkcie v tvare

$$e^t \leq e^{W_2(s)}.$$

Zaveďme pomocnú premennú

$$v = e^{W_2(s)}.$$

Potom platí

$$W_2(s) = \ln v.$$

Zo vzťahu (14) dostávame

$$s = v \ln v.$$

Podmienka hypografu je teda ekvivalentná systému

$$v \geq e^t, \tag{16}$$

$$s = v \ln v. \tag{17}$$

Kedže funkcia $\phi(v) = v \ln v$ je konvexná, rovnicu (17) nahradíme konvexnou relaxáciou $s \geq v \ln v$, ktorá je po úprave ekvivalentná tvaru

$$ve^{-s/v} \leq 1. \tag{18}$$

Táto relaxácia nemení optimálne riešenie úlohy. Keďže v optimalizačnej úlohe nižšie (19) maximalizujeme premennú t a z podmienky $v \geq e^t$ vyplýva $t \leq \ln v$, pre dané v je najväčšia prípustná hodnota premennej t rovná $\ln v$. Ak by v optimálnom bode platilo $s > v \ln v$, nerovnosť by mala rezervu a bolo by možné mierne zväčšiť premennú v tak, aby podmienka $s \geq v \ln v$ zostala splnená. Keďže funkcia $\ln v$ je rastúca, väčšia hodnota v by umožnila väčšiu prípustnú hodnotu t, čo by viedlo k väčšej hodnote účelovej funkcie $\max t$. To je v rozpore s optimalitou riešenia. Preto v optimálnom bode musí platiť rovnosť $s = v \ln v$. Po relaxácii dostaneme podmienku, ktorú možno zapísať pomocou exponenciálneho kužeľa.

Ohraničenia (16) a (18) zapíšeme pomocou exponenciálneho kužeľa ako (pozri Tabuľku 1):

$$(t,\, 1,\, v) \in K_{exp}, \qquad (-s,\, v,\, 1) \in K_{exp}.$$

Keďže $hyp(W_2)$ obsahuje všetky hodnoty t také, že $t \leq W_2(s)$, najväčšia prípustná hodnota t je práve $W_2(s)$. Preto možno výpočet Lambertovej funkcie formulovať ako optimalizačný problém

$$\begin{aligned} &\max_{t,v} t \\ &\qquad (t,\, 1,\, v) \in K_{exp}, \\ &\qquad (-s,\, v,\, 1) \in K_{exp}. \end{aligned} \tag{19}$$

Optimálna hodnota tejto úlohy je $t = W_2(s)$.

Vidíme, že úlohu (19) možno zapísať v štandardnom kónickom tvare (8). Ide síce o maximalizačný problém, avšak po zmene znamienka účelovej funkcie ho možno ekvivalentne prepísať ako minimalizačný. Zaveďme vektor premenných

$$x = (t,\, v)^\top \in \mathbb{R}^2,$$

kde t reprezentuje hodnotu $W_2(s)$ a $v = e^{W(s)}$. Po zmene znamienka účelovej funkcie môžeme úlohu (19) zapísať v tvare

$$\min(-t) = c^\top x, \qquad c = (-1,\, 0)^\top.$$

Exponenciálne ohraničenia

$$(t,\, 1,\, v) \in K_{exp}, \qquad (-s,\, v,\, 1) \in K_{exp},$$

majú tvar $F_i x + g_i \in K_{exp}$, kde

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Logistická regresia

Logistická regresia patrí medzi základné konvexné modely binárnej klasifikácie a predstavuje dôležitý nástroj v strojovom učení a štatistickom modelovaní. Využíva sa v rôznych oblastiach, napríklad v počítačovom videní, bioinformatike, pri klasifikácii génov a spracovaní neurálnych signálov [32], ako aj v medicínskych modeloch pravdepodobnosti výskytu ochorení [2].

Majme nezávislé pozorovania

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}, \qquad x_i \in \mathbb{R}^p,\ y_i \in \{0, 1\},$$

kde x_i je vektor nezávislých premenných a y_i označuje binárnu triedu. Logistická regresia modeluje podmienenú pravdepodobnosť výskytu triedy 1 pomocou logistickej funkcie

$$P(y_i = 1 \mid x_i, \beta) = \sigma(\beta^\top x_i) = \frac{1}{1 + e^{-\beta^\top x_i}},$$

kde $\beta \in \mathbb{R}^p$ je vektor parametrov [12]. Pre triedu 0 platí vzťah

$$P(y_i = 0 \mid x_i, \beta) = 1 - \sigma(\beta^\top x_i).$$

Za predpokladu nezávislosti pozorovaní je spoločná pravdepodobnosť pozorovaných výstupov daná funkciou vierohodnosti

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{N} \Big(\sigma(\beta^\top x_i)\Big)^{y_i} \Big(1 - \sigma(\beta^\top x_i)\Big)^{1-y_i} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta^\top x_i}}\right)^{y_i} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\beta^\top x_i}}\right)^{1-y_i}.$$

V praxi sa namiesto $L(\beta)$ pracuje s jej logaritmom,

$$\ell(\beta) = ln(L(\beta)) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i \ln\Big(\frac{1}{1+e^{-\beta^\top x_i}}\Big) + (1-y_i)\ln\Big(1-\frac{1}{1+e^{-\beta^\top x_i}}\Big)\right].$$

Cieľom je nájsť β, ktoré maximalizuje $\ell(\beta)$.Ekvivalentne to možno formulovať ako minimalizáciu funkcie

$$-\ell(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \left[-y_i \ln\Big(\frac{1}{1+e^{-\beta^\top x_i}}\Big) - (1-y_i)\ln\Big(1-\frac{1}{1+e^{-\beta^\top x_i}}\Big)\right].$$

Pomocou elementárnych úprav možno tento výraz prepísať do kompaktnejšieho tvaru

$$-\ell(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i \ln\Big(1+e^{-\beta^\top x_i}\Big) + (1-y_i)\ln\Big(1+e^{\beta^\top x_i}\Big)\Big].$$

Aby sme tento zápis vedeli previesť do kónickej formy, zavedieme epigrafové premenné t_i. Optimalizačnú úlohu môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} \min_{\beta,t} \ & \sum_{i=1}^{N} t_i \\ & t_i \ \geq \ y_i \ln\Big(1+e^{-\beta^\top x_i}\Big) + (1-y_i)\ln\Big(1+e^{\beta^\top x_i}\Big), \quad i=1,\dots,N. \end{aligned} \tag{20}$$

Ďalej označíme

$$z_i = (1-2y_i)\,\beta^\top x_i, \qquad i=1,\dots,N.$$

Pre $y_i = 1$ dostávame $z_i = -\beta^\top x_i$ a pre $y_i = 0$ platí $z_i = \beta^\top x_i$, takže pravá strana v (20) sa pre každé i zjednoduší na

$$t_i \ \geq \ \ln(1+e^{z_i}), \qquad i=1,\dots,N.$$

Epigraf softplus funkcie $t_i \geq \ln(1+e^{z_i})$ zodpovedá transformácii z Tabuľky 1. Jej kónickú reprezentáciu získame zavedením premenných $u_{i1} = e^{z_i - t_i}$ a $u_{i2} = e^{-t_i}$, čo vedie na

$$(z_i - t_i, 1, u_{i1}) \in K_{exp}, \qquad (-t_i, 1, u_{i2}) \in K_{exp},$$

$$u_{i1} + u_{i2} \leq 1.$$

Celá úloha logistickej regresie v kónickej forme pre $y_i \in \{0,1\}$ znie

$$\begin{aligned} \min_{\beta,t,u} \ & \sum_{i=1}^{N} t_i \\ & (z_i - t_i,\ 1,\ u_{i1}) \in K_{exp}, \quad i=1,\dots,N, \\ & (-t_i,\ 1,\ u_{i2}) \in K_{exp}, \quad i=1,\dots,N, \\ & u_{i1} + u_{i2} \leq 1, \quad i=1,\dots,N, \\ & z_i = (1-2y_i)\,\beta^\top x_i, \quad i=1,\dots,N, \end{aligned} \tag{21}$$

Vidíme, že úlohu (21) môžeme zapísať v štandardnom kónickom tvare (8). Zavedieme vektor premenných

$$w = \left(\beta^\top,\ t^\top,\ z^\top,\ u_1^\top,\ u_2^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{p+4N}.$$

Keďže minimalizujeme súčet premenných t_i, účelová funkcia má tvar

$$\min\ c^\top w, \qquad c = \left(0_{1\times p},\ \mathbf{1}_{1\times N},\ 0_{1\times N},\ 0_{1\times N},\ 0_{1\times N}\right)^\top.$$

Rovnice

$$z_i - (1-2y_i)\,\beta^\top x_i = 0, \qquad i = 1,\dots,N,$$

tvoria časť $Aw = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -(1-2y_1)x_1^\top & 0_{1\times N} & e_1^\top & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(1-2y_N)x_N^\top & 0_{1\times N} & e_N^\top & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times(p+4N)}, \qquad b = 0_{N\times 1}.$$

Nerovnice $u_{i1} + u_{i2} \le 1$ tvoria časť $Cw \le d$, kde

$$C = \begin{pmatrix} 0_{1\times p} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & e_1^\top & e_1^\top \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & e_N^\top & e_N^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times(p+4N)}, \qquad d = \mathbf{1}_{N\times 1}.$$

Zostávajú exponenciálne ohraničenia $(z_i - t_i,\ 1,\ u_{i1}) \in K_{exp}$ a $(-t_i,\ 1,\ u_{i2}) \in K_{exp}$ Pre každé $i = 1,\dots,N$ ich zapíšeme v tvare

$$F_i^{(1)} w + g_i^{(1)} \in K_{exp}, \qquad F_i^{(2)} w + g_i^{(2)} \in K_{exp},$$

kde

$$F_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0_{1\times p} & -e_i^\top & e_i^\top & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & e_i^\top & 0_{1\times N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times(p+4N)}, \quad g_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a

$$F_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0_{1\times p} & -e_i^\top & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} & e_i^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times(p+4N)}, \quad g_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Poissonova regresia

Poissonova regresia je štandardný model pre diskrétne nezáporné dáta, ktoré reprezentujú počty výskytov udalostí. V praxi sa využíva v širokej škále aplikácií, napríklad pri modelovaní počtu poistných udalostí alebo predikcii návštevnosti webových stránok [15].

Majme nezávislé pozorovania

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N},$$

kde $x_i \in \mathbb{R}^p$ je vektor vstupných premenných a $y_i \in \mathbb{N}$ je realizácia náhodnej premennej Y_i predstavujúcej počet výskytov udalostí. Pravdepodobnosť, že Y_i nadobudne konkrétnu hodnotu y_i, je daná Poissonovým rozdelením

$$P(Y_i = y_i \mid x_i, \beta) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!},$$

kde $\lambda_i > 0$ predstavuje očakávaný počet výskytov udalostí. Keďže parameter λ_i musí byť kladný, v Poissonovej regresii sa nemodeluje priamo, ale ako

$$\log \lambda_i = x_i^\top \beta,$$

čo vedie k modelu

$$\lambda_i = \exp(x_i^\top \beta).$$

V článkoch [29, 15] sa uvádza, že Poissonovu regresiu možno zapísať ako úlohu nad exponenciálnym kužeľom. My to odvodíme podrobnejšie, postupom ako pri logistickej regresii v Kapitole 3.2.2. Funkcia vierohodnosti pri parametroch β je

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!}.$$

Odtiaľ dostávame logaritmus vierohodnostnej funkcie

$$\ell(\beta) = \ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i \ln \lambda_i - \lambda_i - \ln(y_i!) \Big].$$

Parameter β budeme určovať maximalizáciou funkcie $\ell(\beta)$. Keďže členy $\ln(y_i!)$ nezávisia od parametra β, pri optimalizácii ich môžeme vynechať. Dostávame teda úlohu

$$\max_{\beta} \quad \tilde{\ell}(\beta) = \max_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left[y_i \ln \lambda_i - \lambda_i \right].$$

Maximalizačný problém môžeme ekvivalentne formulovať ako

$$\min_{\beta} \; -\tilde{\ell}(\beta) = \min_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left[\lambda_i - y_i \ln \lambda_i \right].$$

Po dosadení $\lambda_i = \exp(x_i^\top \beta)$ dostávame

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \Big[\exp(x_i^\top \beta) - y_i \, x_i^\top \beta \Big].$$

Jediný nelineárny člen je exponenciála. Zaveďme epigrafové premenné t_i

$$t_i \;\geq\; \exp(x_i^\top \beta), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Potom optimalizačná úloha Poissonovej regresie je

$$\begin{aligned} \min_{\beta,t} \; & \sum_{i=1}^{N} \Big(t_i - y_i \, x_i^\top \beta \Big) \\ & t_i \geq \exp(x_i^\top \beta), \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Ohraničenie $t_i \geq \exp(x_i^\top \beta)$ je ekvivalentné podmienke (viď. Tabuľka 1)

$$(x_i^\top \beta,\, 1,\, t_i) \in K_{exp}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Celá úloha Poissonovej regresie teda nadobúda kónickú formu

$$\begin{aligned} \min_{\beta,t} \; & \sum_{i=1}^{N} \Big(t_i - y_i \, x_i^\top \beta \Big) \\ & (x_i^\top \beta,\, 1,\, t_i) \in K_{exp}, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{22}$$

Úloha (22) má rovnakú štruktúru ako všeobecná kónická úloha v tvare (8). Najprv zadefinujeme vektor optimalizačných premenných

$$w = \Big(\beta^\top,\; t^\top \Big)^\top \in \mathbb{R}^{p+N},$$

Účelovú funkciu môžeme zapísať v tvare

$$\min \; c^\top w,$$

kde

$$c = \Big(-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i^\top,\; \mathbf{1}_{1\times N} \Big)^\top \in \mathbb{R}^{p+N}.$$

Zostávajú exponenciálne ohraničenia

$$(x_i^\top \beta,\, 1,\, t_i) \in K_{exp}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Každé exponenciálne ohraničenie môžeme zapísať v tvare

$$F_i w + g_i \in K_{exp},$$

kde

$$F_i = \begin{pmatrix} x_i^\top & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times p} & e_i^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times(p+N)}, \qquad g_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

3.2.4 Kellyho kritérium (log-optimálne portfólio)

Kellyho kritérium bolo pôvodne zavedené pre hazardné hry (Kelly, 1956) a neskôr ho na problematiku portfólií aplikoval Thorp [33]. Ide o pravidlo, ktoré určuje váhy aktív tak, aby sa maximalizoval dlhodobý geometrický rast kapitálu, teda očakávaná hodnota logaritmu zhodnotenia portfólia. Takéto portfólio sa označuje ako *log-optimálne* a v dlhodobom horizonte dosahuje najvyššiu mieru rastu zo všetkých možných stratégií. Optimalizačný zápis aj možnosť modelovania pomocou exponenciálneho kužeľa sú uvedené napríklad v [25, 5].

Optimalizačná úloha má základný tvar

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mathbb{E}\left[\ln(1 + r^\top x)\right] \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

kde $r \in \mathbb{R}^p$ je vektor výnosov aktív a $x \in \mathbb{R}^p$ sú hľadané váhy. Ako sa uvádza v [25], v praxi sa očakávaná hodnota nahrádza aritmetickým priemerom z historických realizácií $r_1, \ldots, r_N$, čo vedie k formulácii

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^p} \quad & \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \ln(1 + r_j^\top x) \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Pre každý člen $\ln(1 + r_j^\top x)$ zavedieme hypografovú premennú t_j, ktorá spĺňa

$$t_j \leq \ln(1 + r_j^\top x).$$

Tým dostávame ekvivalentnú úlohu

$$\begin{aligned} \max_{x,t} \quad & \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j \\ & t_j \leq \ln(1 + r_j^\top x), \quad j = 1, \ldots, N, \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Každú podmienku $t_j \leq \ln(1+r_j^\top x)$ vieme vyjadriť pomocou exponenciálneho kužeľa (pozri Tabuľku 1):

$$t_j \leq \ln(1 + r_j^\top x) \quad \Longleftrightarrow \quad (t_j,\, 1,\, 1 + r_j^\top x) \in K_{exp}.$$

Výsledná kónická formulácia Kellyho problému je teda

$$\begin{aligned} \max_{x,t} \quad & \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} t_j \\ & (t_j,\, 1,\, 1 + r_j^\top x) \in K_{exp}, \quad j = 1, \ldots, N, \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \quad x \geq 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Vidíme, že úlohu (23) môžeme zapísať v štandardnom kónickom tvare (8). Odlišuje sa iba tým, že ide o maximalizačný problém, ktorý môžeme ekvivalentne prepísať na minimalizačný po zmene znamienka v účelovej funkcii. Zavedieme vektor premenných

$$w = \left(x^\top,\, t^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{p+N},$$

Po zmene znamienka účelovej funkcie má optimalizačná úloha tvar

$$\min\ c^\top w, \qquad c = \left(0_{1\times p},\, -\tfrac{1}{N}\, \mathbf{1}_{1\times N}\right)^\top \in \mathbb{R}^{p+N}.$$

Rovnica

$$\mathbf{1}_{1\times p}\, x = 1$$

tvorí časť $Aw = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{1\times p} & 0_{1\times N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(p+N)}, \qquad b = 1.$$

Lineárne nerovnice

$$x \geq 0$$

tvoria časť $Cw \leq d$, kde

$$C = \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p\times N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times(p+N)}, \qquad d = 0_{p\times 1}.$$

Zostávajú exponenciálne ohraničenia $(t_j,\, 1,\, 1 + r_j^\top x) \in K_{exp}$, ktoré zapíšeme v tvare

$$F_j w + g_j \in K_{exp},$$

kde

$$F_j = \begin{pmatrix} 0_{1\times p} & e_j^\top \\ 0_{1\times p} & 0_{1\times N} \\ r_j^\top & 0_{1\times N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times(p+N)}, \qquad g_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

4 Dualita

V tejto kapitole odvodíme duálny kužeľ k exponenciálnemu kužeľu a rovnako aj duálnu úlohu ku všeobecnej úlohe nad exponenciálnym kužeľom.

4.1 Duálny kužeľ k exponenciálnemu kužeľu

Chceme určiť duálny kužeľ ku kužeľu K_{exp}= $K_{epi(e^x)} \cup K_0$ z Definície 2.1. Podľa Definície duálneho kužeľa 1.3 platí

$$K^*_{exp} = (K_{epi(e^x)} \cup K_0)^* = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid x^T y \geq 0 \;\; \forall x \in K_{epi(e^x)} \cup K_0 \,\}.$$

Keďže $x \in K_{epi(e^x)} \cup K_0$ znamená, že $x \in K_{epi(e^x)}$ alebo $x \in K_0$, podmienka $x^T y \geq 0$ pre všetky $x \in K_{epi(e^x)} \cup K_0$ je ekvivalentná tomu, že $x^T y \geq 0$ platí pre všetky $x \in K_{epi(e^x)}$ a zároveň pre všetky $x \in K_0$. Teda

$$\forall x \in K_{epi(e^x)} \cup K_0 :\; x^T y \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\forall x \in K_{epi(e^x)} :\; x^T y \geq 0\Big) \wedge \Big(\forall x \in K_0 :\; x^T y \geq 0\Big).$$

Z definície duálneho kužeľa preto dostávame

$$(K_{epi(e^x)} \cup K_0)^* = \{\, y \mid x^T y \geq 0 \; \forall x \in K_{epi(e^x)} \,\} \cap \{\, y \mid x^T y \geq 0 \; \forall x \in K_0 \,\} = K^*_{epi(e^x)} \cap K^*_0. \tag{24}$$

Začneme množinou $K_{\mathrm{epi}(e^x)} = \Big\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x_2 > 0,\; x_3 \geq x_2 \mathrm{e}^{x_1/x_2}\Big\} \cup \{0\}$. Z Definície duálneho kužeľa 1.3 musí platiť, že pre $y \in \mathbb{R}^3$

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \geq 0 \quad \forall x \in K_{epi(e^x)}. \tag{25}$$

Keďže v množine $K_{epi(e^x)}$ je premenná x_3 zdola ohraničená výrazom $x_2 e^{x_1/x_2}$, postačuje overiť nerovnosť (25) pre $x_3 = x_2 e^{x_1/x_2}$. Dosadením dostávame

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_2 e^{\frac{x_1}{x_2}} \geq 0.$$

Po substitúcii $t = \frac{x_1}{x_2}$, teda dosadením $x_1 = t x_2$ dostaneme

$$y_1 x_2 t + y_2 x_2 + y_3 x_2 e^t \geq 0.$$

Keďže $x_2 > 0$, môžeme nerovnosť predeliť x_2 a budeme mať

$$y_1 t + y_2 + y_3 e^t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Označíme

$$f(t) = y_1 t + y_2 + y_3 e^t, \tag{26}$$

V nasledujúcich krokoch chceme nájsť všetky y_1, y_2, y_3, pre ktoré je funkcia $f(t)$ nezáporná. Rozlíšime prípady podľa hodnoty y_3.

Ak $y_3 < 0$, potom $lim_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$ čo je spor s $f(t) \geq 0$. Teda nutne $y_3 \geq 0$.

Ak $y_3 = 0$, potom $f(t) = y_1 t + y_2$. Aby platilo $f(t) \geq 0$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$, musí byť $y_1 = 0$ a $y_2 \geq 0$.

Ak $y_3 > 0$, funkcia $f(t)$ je rýdzo konvexná, pretože $f''(t) = y_3 e^t > 0$. Budeme analyzovať prípady podľa hodnoty y_1.

Ak $y_1 = 0$, funkcia má tvar $f(t) = y_2 + y_3 e^t$. Keďže $y_3 > 0$, platí $\inf_{t\in\mathbb{R}} y_3 e^t = 0$, a teda $\inf_{t\in\mathbb{R}} f(t) = y_2$. Podmienka $f(t) \geq 0$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$ je preto ekvivalentná s $y_2 \geq 0$.

Ak $y_1 > 0$, potom $\inf_{t\in\mathbb{R}} f(t) = -\infty$, takže funkcia $f(t)$ nie je zdola ohraničená a preto podmienka $f(t) \geq 0$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$ nemôže byť splnená.

Ak $y_1 < 0$, rovnica $f'(t) = 0$ má riešenie

$$y_1 + y_3 e^t = 0 \iff e^t = -\frac{y_1}{y_3}.$$

Teda stacionárny bod funkcie f je daný vzťahom

$$t^\star = \ln\left(-\frac{y_1}{y_3}\right).$$

Keďže funkcia $f(t)$ je rýdzo konvexná, bod t^* je jej globálnym minimom. Dosadíme do (26):

$$f(t^\star) = y_1 \ln\left(-\frac{y_1}{y_3}\right) + y_2 + y_3\left(-\frac{y_1}{y_3}\right) = y_1 \ln\left(-\frac{y_1}{y_3}\right) + y_2 - y_1.$$

Podmienka $f(t) \geq 0\ \forall t$ je ekvivalentná $f(t^\star) \geq 0$, teda

$$y_2 \geq y_1 - y_1 \ln\left(-\frac{y_1}{y_3}\right)$$

Po úprave máme

$$y_3 \geq (-y_1)\, \mathrm{e}^{\frac{y_2}{y_1}-1} \tag{27}$$

Navyše, z analýzy prípadov $\mathbf{y_3 = 0}$ a $\mathbf{y_3 > 0}$ pri $y_1 = 0$ vyplýva, že pre $y_1 = 0$ musí platiť

$$y_2 \geq 0 \quad \text{a} \quad y_3 \geq 0. \tag{28}$$

Po zjednotení podmienok (27) a (28) dostávame

$$K^*_{epi(e^x)} = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y_1 < 0,\ y_3 \geq (-y_1)e^{\frac{y_2}{y_1}-1}\right\} \cup \left\{(0, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\right\}.$$

Teraz budeme analyzovať množinu $K_0 = \left\{(x_1, 0, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0\right\}$. Keďže množina K_0 obsahuje body $x_2 = 0$, dostávame podmienku

$$y_1 x_1 + y_3 x_3 \geq 0 \qquad \forall\, x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Táto podmienka je splnená práve vtedy, keď $y_1 \leq 0$ a $y_3 \geq 0$. Preto

$$K_0^* = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 \leq 0,\ y_3 \geq 0\}.$$

Podľa (24), $K^*_{exp} = K^*_{epi(e^x)} \cap K_0^*$ a teda

$$K^*_{exp} = \left\{(y_1, y_2, y_3)^T \;\middle|\; y_1 < 0,\ y_3 \geq (-y_1)\,\mathrm{e}^{\frac{y_2}{y_1}-1}\right\} \cup \left\{(0, y_2, y_3)^T \;\middle|\; y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\right\}.$$

4.2 Duálna úloha ku všeobecnej úlohe K_{exp}

Ku primárnej úlohe (8) odvodíme duálnu úlohu pomocou Lagrangeovej metódy.Vychádzame zo všeobecného postupu v [2]. Lagrangeovu funkciu definujeme ako zobrazenie

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q_+ \times (K^*_{exp})^m \;\longrightarrow\; \mathbb{R},$$

pričom ku každému typu ohraničení priradíme príslušné Lagrangeove multiplikátory:

- $u \in \mathbb{R}^p$ ku rovniciam $Ax = b$,
- $v \in \mathbb{R}^q_+$ ku nerovniciam $Cx \leq d$,
- $w_i \in K^*_{exp}$ ku kónickým ohraničeniam $F_i x + g_i \in K_{exp}, \quad i = 1, \ldots, m.$

Lagrangeova funkcia má tvar

$$\mathcal{L}(x, u, v, w_1, \ldots, w_m) = c^\top x + u^\top (Ax - b) + v^\top (Cx - d) - \sum_{i=1}^{m} w_i^\top (F_i x + g_i).$$

Poznámka: Keďže Lagrangeova funkcia obsahuje člen $-w_i^\top (F_i x + g_i)$ a má platiť $\mathcal{L}(x, u, v, w) \leq f(x) = c^T x$, musí byť splnené

$$w_i^\top (F_i x + g_i) \geq 0 \quad \text{pre všetky } F_i x + g_i \in K_{exp},$$

čo je Definícia duálneho kužeľa 1.3.

Zoskupením členov pri x dostaneme

$$\mathcal{L}(x,u,v,w_1,\ldots,w_m) = \Big(c + A^\top u + C^\top v - \sum_{i=1}^{m} F_i^\top w_i\Big)^\top x - b^\top u - d^\top v - \sum_{i=1}^{m} g_i^\top w_i.$$

Duálna funkcia je definovaná ako infimum Lagrangeovej funkcie vzhľadom na x, teda

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(u,v,w_1,\ldots,w_m) &= \inf_x \mathcal{L}(x,u,v,w_1,\ldots,w_m)\\ &= \begin{cases} -b^\top u - d^\top v - \sum_{i=1}^{m} g_i^\top w_i, & \text{ak} \quad c + A^\top u + C^\top v \\ & \qquad - \sum_{i=1}^{m} F_i^\top w_i = 0, \\ -\infty, & \text{inak.} \end{cases}\end{aligned}$$

Duálna úloha sa formuluje ako maximalizácia duálnej funkcie $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_{\text{exp}}) \qquad \max_{u,\,v,\,w_1,\ldots,w_m} \quad & -b^\top u - d^\top v - \sum_{i=1}^{m} g_i^\top w_i \\ & A^\top u + C^\top v - \sum_{i=1}^{m} F_i^\top w_i = -c, \\ & v \geq 0, \quad w_i \in K^*_{exp}, \quad i = 1,\ldots,m.\end{aligned}$$

5 Metódy vnútorného bodu pre exponenciálny kužeľ

Metódy vnútorného bodu patria medzi najvýznamnejšie algoritmy na riešenie konvexných optimalizačných úloh. Na rozdiel od Simplexovej metódy generujú postupnosti bodov vo vnútri prípustnej množiny, ktoré konvergujú k optimálnemu riešeniu po tzv. centrálnej trajektórii [2].

5.1 Bariérová funkcia, centrálna trajektória a základný algoritmus metód vnútorného bodu

V tejto podkapitole budeme vychádzať zo všeobecnej teórie metód vnútorného bodu z [2] a z článku [8], ktorý sa zaoberá konkrétne exponenciálnym kužeľom v rámci metód vnútorného bodu.

Uvažujme všeobecnú úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \in K_{exp}. \end{aligned} \tag{29}$$

kde $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ a $K_{exp} \subset \mathbb{R}^3$, pričom exponenciálny kužeľ sme definovali v Kapitole 2.1 ako

$$K_{exp} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0,\ x_3 \geq x_2 e^{x_1/x_2}\} \cup \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

Duálny tvar tejto úlohy je

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & c - A^T y = s, \\ & s \in K^*_{exp}, \end{aligned} \tag{30}$$

kde tvar duálneho kužeľa

$$K^*_{exp} = \{(y_1, y_2, y_3)^T \mid y_1 < 0,\ y_3 \geq (-y_1)\mathrm{e}^{\frac{y_2}{y_1}-1}\} \cup \{(0, y_2, y_3)^T \mid y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\} \tag{31}$$

sme odvodili v Kapitole 4.1. Vychádzajúc zo všeobecnej teórie v [2], v metódach vnútorného bodu sa ohraničenie $x \in K_{exp}$ nahradí bariérovou funkciou F, ktorá je definovaná na vnútorných bodoch kužeľa, teda na $\mathrm{int}(K_{exp})$. Potom pre úlohu (29) a pre parameter

$\mu > 0$ máme bariérovú úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \mu F(x) \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{32}$$

kde $x \in \text{int}(K_{exp})$. Parameter $\mu > 0$ určuje vplyv bariérovej funkcie F v optimalizačnej úlohe. Postupným zmenšovaním parametra μ sa riešenie bariérovej úlohy približuje k riešeniu pôvodnej úlohy [2]. V [8] sa uvádza pre exponenciálny kužeľ bariérová funkcia v tvare

$$F(x_1, x_2, x_3) = -\log(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1) - \log x_3 - \log x_2,$$

Podľa [2], bariérové funkcie používané v metódach vnútorného bodu musia spĺňať niekoľko základných vlastností, ako je divergovanie pri približovaní sa k hranici prípustnej oblasti, hladkosť a konvexnosť. Tieto vlastnosti zabezpečujú správne fungovanie metód vnútorného bodu a existenciu centrálnej trajektórie. V [2] sú tieto vlastnosti uvedené ako súčasť všeobecnej teórie a nie sú formulované ako samostatné tvrdenia. Preto ich v ďalšom texte sformulujeme ako tvrdenia pre úlohy nad exponenciálnym kužeľom a uvedieme ich vlastný dôkaz.

Tvrdenie 5.1. *Bariérová funkcia F diverguje do $+\infty$ pri priblížení sa k hranici prípustnej oblasti.*

Dôkaz. Chceme ukázať, že pre ľubovoľný bod $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \partial K_{exp}$ a pre každú postupnosť $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{int}(K_{exp})$, pre ktorú $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \bar{x}$, platí

$$\lim_{k\to\infty} F\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right) = +\infty.$$

Hranica množiny K_{exp} bola odvodená v Kap. 2.1 a má tvar

$$\partial K_{exp} = B_1 \cup B_2,$$

kde

$$B_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0,\ x_3 = x_2 e^{x_1/x_2}\}, \quad B_2 = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

Predpokladajme najprv, že $\bar{x}$ je ľubovoľný bod z množiny B_1. Budeme analyzovať limitu

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \left[-\log\left(x_2^{(k)} \log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}} \right) - x_1^{(k)} \right) - \log x_3^{(k)} - \log x_2^{(k)} \right]$$

Pre body z množiny B_1 platí $\bar{x}_3 = \bar{x}_2 e^{\bar{x}_1/\bar{x}_2}$, čo je ekvivalentné tvaru

$$\bar{x}_2 \log\left(\frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2}\right) = \bar{x}_1. \tag{33}$$

Označme výraz vo vnútri limity

$$u_k = x_2^{(k)} \log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}}\right) - x_1^{(k)} > 0$$

Potom zo spojitosti funkcie a využitím rovnosti (33) dostaneme

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} \log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}}\right) - x_1^{(k)} = \bar{x}_2 \log\left(\frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2}\right) - \bar{x}_1 = 0$$

a preto

$$\lim_{k\to\infty} (-\log u_k) = +\infty$$

Keďže $\bar{x}_2 > 0$ a $\bar{x}_3 = \bar{x}_2 e^{\bar{x}_1/\bar{x}_2} > 0$, zo spojitosti logaritmu dostaneme

$$\lim_{k\to\infty} (-\log x_2^{(k)}) = -\log \bar{x}_2, \quad \lim_{k\to\infty} (-\log x_3^{(k)}) = -\log \bar{x}_3$$

Preto

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = +\infty.$$

Predpokladajme teraz, že $\bar{x}$ je ľubovoľný bod z množiny B_2. Budeme opäť skúmať limitu

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \left[-\log\left(x_2^{(k)} \log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}}\right) - x_1^{(k)} \right) - \log x_3^{(k)} - \log x_2^{(k)} \right]$$

Podobne ako pri analyzovaní limity pre body z množiny B_1 označme

$$u_k = x_2^{(k)} \log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}}\right) - x_1^{(k)} > 0.$$

Použitím známej nerovnosti pre $t > 0$

$$\log t \le t - 1$$

a dosadením

$$t = \frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}} > 0$$

dostaneme

$$\log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}}\right) \le \frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}} - 1.$$

Keďže $x_2^{(k)} > 0$, po vynásobení tejto nerovnosti $x_2^{(k)}$ dostaneme

$$x_2^{(k)} \log\left(\frac{x_3^{(k)}}{x_2^{(k)}}\right) \leq x_3^{(k)} - x_2^{(k)}.$$

Preto

$$0 < u_k \leq x_3^{(k)} - x_2^{(k)} - x_1^{(k)}.$$

Keďže $x_2^{(k)} > 0$, a teda $-x_2^{(k)} \leq 0$, tak môžeme napísať

$$0 < u_k \leq x_3^{(k)} - x_2^{(k)} - x_1^{(k)} \leq x_3^{(k)} - x_1^{(k)}.$$

Platí

$$\lim_{k\to\infty} \left(x_3^{(k)} - x_1^{(k)}\right) = \bar{x}_3 - \bar{x}_1.$$

Postupnosť $\{x_3^{(k)} - x_1^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je teda konvergentná, a preto ohraničená. Potom existuje konštanta $M > 0$ taká, že pre všetky k platí

$$|x_3^{(k)} - x_1^{(k)}| \leq M.$$

Keďže zároveň

$$0 < u_k \leq x_3^{(k)} - x_1^{(k)},$$

dostávame

$$0 < u_k \leq M.$$

Z monotónnosti logaritmu potom vyplýva

$$\log u_k \leq \log M,$$

a teda

$$-\log u_k \geq -\log M.$$

Prvý člen bariérovej funkcie je teda zdola ohraničený. Stačí už len overiť správanie výrazov $-\log x_2^{(k)}$ a $-\log x_3^{(k)}$. Keďže $\lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = \bar{x}_2 = 0$, tak

$$\lim_{k\to\infty} (-\log x_2^{(k)}) = +\infty.$$

Ak $\bar{x}_3 > 0$, tak platí

$$\lim_{k\to\infty} (-\log x_3^{(k)}) = -\log \bar{x}_3$$

a ak $\bar{x}_3 = 0$, potom

$$\lim_{k\to\infty}(-\log x_3^{(k)}) = +\infty.$$

Aj v tomto prípade dostávame, že

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = +\infty.$$

□

Táto vlastnosť zabezpečuje, že pri riešení úlohy iterácie metód vnútorného bodu zostávajú vo vnútri prípustnej oblasti.

Tvrdenie 5.2. *Bariérová funkcia F je dvakrát spojite diferencovateľná na množine* $\mathrm{int}(K_{exp})$,

Dôkaz. Množinu $\mathrm{int}(K_{exp})$ tvoria všetky body $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ také, že $x_2 > 0$ a $x_3 > x_2 e^{x_1/x_2}$ (pozri Tvrdenie 2.3). Pre lepší prehľad nižšie uvedeného dôkazu možno $x_3 > x_2 e^{x_1/x_2}$ prepísať do ekvivalentého tvaru pomocou logaritmu ako $x_2 \log(x_3/x_2) > x_1$, pričom $x_3 > 0$.

Najprv vypočítame prvé parciálne derivácie. Deriváciou podľa x_1 máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= -\frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2\log(x_3/x_2) - x_1)\\ &= -\frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}\cdot(-1)\\ &= \frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}.\end{aligned}$$

Deriváciou podľa x_2 dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= -\frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\log(x_3/x_2) - x_1) - \frac{1}{x_2}\\ &= -\frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}\left(\log(x_3/x_2) - 1\right) - \frac{1}{x_2}.\end{aligned}$$

Nakoniec derivujeme podľa x_3

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_3} &= -\frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_3}(x_2\log(x_3/x_2) - x_1) - \frac{1}{x_3}\\ &= -\frac{1}{x_2\log(x_3/x_2) - x_1}\cdot\frac{x_2}{x_3} - \frac{1}{x_3}\\ &= -\frac{x_2}{x_3\left(x_2\log(x_3/x_2) - x_1\right)} - \frac{1}{x_3}.\end{aligned}$$

Pre lepší prehľad, gradient funkcie F má tvar

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1} \\ -\dfrac{\log(x_3/x_2) - 1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1} - \dfrac{1}{x_2} \\ -\dfrac{x_2}{x_3\,(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)} - \dfrac{1}{x_3} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že prvé parciálne derivácie funkcie F sú zložené z elementárnych funkcií (logaritmus, súčet, súčin a podiel). Preto na množine $\mathrm{int}(K_{exp})$ sú všetky tieto výrazy dobre definované a spojité. Druhé parciálne derivácie sme odvodili v Prílohe B. Výsledná Hesseho matica má tvar

$$\nabla^2 F(x) = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 1 & -(\log(x_3/x_2) - 1) & -\dfrac{x_2}{x_3} \\ -(\log(x_3/x_2) - 1) & (\log(x_3/x_2) - 1)^2 + \dfrac{z}{x_2} + \dfrac{z^2}{x_2^2} & \dfrac{x_2(\log(x_3/x_2) - 1)}{x_3} - \dfrac{z}{x_3} \\ -\dfrac{x_2}{x_3} & \dfrac{x_2(\log(x_3/x_2) - 1)}{x_3} - \dfrac{z}{x_3} & \dfrac{x_2^2}{x_3^2} + \dfrac{z x_2}{x_3^2} + \dfrac{z^2}{x_3^2} \end{pmatrix},$$

kde

$$z = x_2 \log\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - x_1 > 0$$

Z uvedenej matice vidíme, že druhé parciálne derivácie funkcie F sú opäť zložením elementárnych funkcií. Na množine $\mathrm{int}(K_{exp})$ sú všetky výrazy v Hesseho matici dobre definované a spojité. Teda funkcia F je dvakrát spojite diferencovateľná na množine $\mathrm{int}(K_{exp})$. □

Táto vlastnosť je dôležitá pre metódy vnútorného bodu, pretože umožňuje použiť Newtonovu metódu pri riešení bariérovej úlohy. Existencia spojitých derivácií prvého a druhého rádu umožňuje vypočítať gradient a Hesseho maticu bariérovej funkcie, ktoré vstupujú do algoritmu Newtonovej metódy.

Tvrdenie 5.3. *Bariérová funkcia F je rýdzokonvexná na množine* $\mathrm{int}(K_{exp})$.

Dôkaz. Nech $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ je ľubovoľný vektor. Ukážeme, že kvadratická forma

$$v^T \nabla^2 F(x) v = \sum_{i,j=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_j$$

je kladne semidefinitná, a teda funkcia F konvexná. Po dosadení prvkov Hesseho matice

funkcie F z dôkazu Tvrdenia 5.2 dostávame

$$\begin{aligned} v^T \nabla^2 F(x) v = \frac{1}{z^2} \Bigg[& v_1^2 - 2(\log(x_3/x_2) - 1)\, v_1 v_2 - 2\frac{x_2}{x_3}\, v_1 v_3 \\ & + \left((\log(x_3/x_2) - 1)^2 + \frac{z}{x_2} + \frac{z^2}{x_2^2} \right) v_2^2 \\ & + 2 \left(\frac{x_2(\log(x_3/x_2) - 1)}{x_3} - \frac{z}{x_3} \right) v_2 v_3 \\ & + \left(\frac{x_2^2}{x_3^2} + \frac{z x_2}{x_3^2} + \frac{z^2}{x_3^2} \right) v_3^2 \Bigg]. \end{aligned}$$

Výraz v hranatej zátvorke rozdelíme na tri časti podľa závislosti od parametra z a pokúsime sa ho upraviť na štvorec. Najprv zoskupíme členy bez z a z^2

$$v_1^2 - 2(\log(x_3/x_2) - 1) v_1 v_2 - 2\frac{x_2}{x_3} v_1 v_3 + (\log(x_3/x_2) - 1)^2 v_2^2 + 2\frac{x_2}{x_3}(\log(x_3/x_2) - 1) v_2 v_3 + \frac{x_2^2}{x_3^2} v_3^2.$$

Tieto členy môžeme zapísať ako

$$\left(v_1 - (\log(x_3/x_2) - 1) v_2 - \frac{x_2}{x_3} v_3 \right)^2.$$

Ďalej zoskupíme členy so z a úpravou dostaneme

$$\frac{z}{x_2} v_2^2 - 2\frac{z}{x_3} v_2 v_3 + \frac{z x_2}{x_3^2} v_3^2 = \frac{z}{x_2} \left(v_2^2 - 2\frac{x_2}{x_3} v_2 v_3 + \frac{x_2^2}{x_3^2} v_3^2 \right) = \frac{z}{x_2} \left(v_2 - \frac{x_2}{x_3} v_3 \right)^2.$$

Zostali nám členy so z^2

$$\frac{z^2}{x_2^2} v_2^2 + \frac{z^2}{x_3^2} v_3^2,$$

ktoré sú nezáporné. Po dosadení dostávame

$$v^T \nabla^2 F(x) v = \frac{1}{z^2} \left[\left(v_1 - (\log(x_3/x_2) - 1) v_2 - \frac{x_2}{x_3} v_3 \right)^2 + \frac{z}{x_2} \left(v_2 - \frac{x_2}{x_3} v_3 \right)^2 + \frac{z^2}{x_2^2} v_2^2 + \frac{z^2}{x_3^2} v_3^2 \right].$$

Keďže pre body množiny $\mathrm{int}(K_{exp})$ (pozri Tvrdenie 2.3) platí

$$x_2 > 0, \quad x_3 > x_2 e^{x_1/x_2},$$

a aj $z > 0$ tak

$$v^T \nabla^2 F(x) v > 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Z toho vyplýva, že funkcia F je rýdzo-konvexná na $\mathrm{int}(K_{exp})$. □

Rýdzokonvexnosť bariérovej funkcie zabezpečuje, že optimalizačná úloha s bariérovou funkciou zostáva rýdzokonvexná. Potom platí, že ak existuje riešenie bariérovej úlohy, tak je jediné. Ďalej sa preto budeme zaoberať otázkou existencie riešenia. Podľa [4] riešenie existuje, ak existuje neprázdna kompaktná podúrovňová množina.

Označme podúrovňovú množinu pre úlohu (32) ako

$$C_\alpha = \{x \in \operatorname{int} K_{exp} \mid c^T x + \mu F(x) \leq \alpha,\ Ax = b\}.$$

Predpokladajme, že množina je neprázdna. V nasledujúcom texte overíme, či je táto množina kompaktná. Všeobecne, množina je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.

Lema 5.4. *Množina* $C_\alpha = \{x \in \operatorname{int} K_{exp} \mid c^T x + \mu F(x) \leq \alpha,\ Ax = b\}$ *je uzavretá.*

Dôkaz. Podľa kritéria uzavretosti množiny stačí ukázať, že pre každú postupnosť $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset C_\alpha$, pre ktorú $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \bar{x}$, platí $\bar{x} \in C_\alpha$.

Nech teda $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset C_\alpha$ je postupnosť taká, že $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \bar{x}$. Keďže zobrazenie $x \mapsto Ax$ je lineárne, a teda spojité, platí

$$A\bar{x} = A\left(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} Ax^{(n)} = b.$$

Označme $a_n = c^T x^{(n)} + \mu F(x^{(n)})$. Potom $a_n \leq \alpha, \forall n$. Chceme skúmať limitu a_n. Funkcia $c^T x$ je spojitá a aj bariérová funkcia $F(x)$ je spojitá (viď Tvrdenie 5.2). Súčet spojitých funkcii je spojitý, tak platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c^T \bar{x} + \mu F(\bar{x}) \leq \alpha.$$

Zostáva ukázať, že $\bar{x} \in \operatorname{int}(K_{exp})$. Ak by $\bar{x} \in \partial K_{exp}$, potom z vlastnosti bariérovej funkcie z Tvrdenia 5.1 platí $\lim_{n\to\infty} F(x^{(n)}) = +\infty$, čo by znamenalo

$$\lim_{n\to\infty} c^T x^{(n)} + \mu F(x^{(n)}) = +\infty.$$

To je v spore s podmienkou $c^T x^{(n)} + \mu F(x^{(n)}) \leq \alpha$ a preto $\bar{x} \in \operatorname{int}(K_{exp})$ a teda $\bar{x} \in C_\alpha$. Množina C_α je uzavretá. □

Nasledujúca lema je založená na myšlienke z [1, Lema 3.2.2], kde sa ukazuje, že za predpokladu striktnej duálnej prípustnosti neexistuje smer recesie primárnej prípustnej množiny, pre ktorý by platilo $c^T d \leq 0$. V našom prípade túto úvahu využijeme pri dôkaze ohraničenosti podúrovňovej množiny bariérovej úlohy.

Lema 5.5. *Predpokladajme, že duálna úloha* (30) *je striktne prípustná, t. j. existujú* $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ *a* $\bar{s} \in \operatorname{int}(K_{exp}^*)$ *také, že*

$$c - A^T\bar{y} = \bar{s}.$$

Potom množina

$$C_\alpha = \{x \in \operatorname{int} K_{exp} \mid c^T x + \mu F(x) \leq \alpha,\ Ax = b\}$$

je konvexná a ohraničená.

Dôkaz. Najprv si všimnime, že množina C_α je konvexná. Exponenciálny kužeľ K_{exp} je konvexný, a teda aj jeho vnútro $\operatorname{int} K_{exp}$ je konvexné. Množina $\{x \mid Ax = b\}$ je afinná, a preto konvexná. Funkcia $c^T x + \mu F(x)$ je konvexná, keďže $c^T x$ je lineárna funkcia a F je konvexná bariérová funkcia. Množina $\{x \mid c^T x + \mu F(x) \leq \alpha\}$ je podúrovňová množina konvexnej funkcie a preto je konvexná. Keďže C_α je prienikom konvexných množín, je konvexná. Zároveň je C_α uzavretá (pozri dôkaz Lemy 5.4).Tieto vlastnosti budú kľúčové v ďalšom kroku.

Ohraničenosť množiny C_α dokážeme sporom. Predpokladajme, že C_α nie je ohraničená. Keďže ide o uzavretú konvexnú množinu, z jej neohraničenosti podľa [26] vyplýva, že existuje bod $x_0 \in C_\alpha$ a smer $d \neq 0$ taký, že

$$x_t = x_0 + td \in C_\alpha \quad \forall t \geq 0,$$

teda množina C_α obsahuje polpriamku. Potom máme

$$A(x_0 + td) = Ax_0 + tAd = b.$$

Keďže $x_0 \in C_\alpha$, platí $Ax_0 = b$, a teda

$$Ad = 0 \tag{34}$$

Keďže $x_0 + td \in C_\alpha \subset K_{exp}$, z Definície konvexného kužeľa 1.1 platí pre $t > 0$

$$\frac{1}{t}(x_0 + td) = d + \frac{x_0}{t} \in K_{exp}.$$

Keďže

$$\lim_{t\to\infty}\left(d + \frac{x_0}{t}\right) = d$$

a K_{exp} je uzavretý, dostávame $d \in K_{exp}$. Prepojením s (34) máme, že

$$d \in K_{exp} \cap \ker A.$$

Z definície množiny C_α ďalej platí

$$c^T(x_0 + td) + \mu F(x_0 + td) \leq \alpha. \tag{35}$$

Využijeme vlastnosť bariérovej funkcie z nižšie uvedenej Definície 5.6 a následného Tvrdenia 5.7, podľa ktorých pre funkciu F platí vzťah

$$F(\tau x) = F(x) - 3\log\tau, \quad \tau > 0.$$

Najprv upravíme $x_0 + td$ do vhodného tvaru:

$$x_0 + td = t\left(d + \frac{1}{t}x_0\right).$$

Potom

$$F(x_0 + td) = F\left(t\left(d + \frac{1}{t}x_0\right)\right) = F\left(d + \frac{1}{t}x_0\right) - 3\log t.$$

Teda podmienku (35) upravíme do tvaru

$$c^T x_0 + tc^T d + \mu F\left(d + \frac{1}{t}x_0\right) - \mu 3\log t \leq \alpha \tag{36}$$

Najprv budeme analyzovať správanie výrazu $tc^T d$. Z predpokladu duálnej prípustnosti existuje bod $\bar{s} \in int(K^*_{exp})$ a $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že $c - A^T\bar{y} = \bar{s}$, teda $c = \bar{s} + A^T\bar{y}$. Dosadením do $tc^T d$ a využitím (34) dostaneme

$$tc^T d = t(\bar{s} + A^T\bar{y})^T d = t(\bar{s}^T d + \bar{y}^T Ad) = t\bar{s}^T d$$

Keďže $d \in K_{exp}$ a $\bar{s} \in int(K^*_{exp})$, z Definície duálneho kužeľa 1.3 platí, že skalárny súčin $\bar{s}^T d > 0$. Potom platí, že

$$\lim_{t\to\infty} tc^T d = \lim_{t\to\infty} t\bar{s}^T d = +\infty.$$

Ďalej overíme správanie sa funkcie $F(d + \frac{1}{t}x_0)$. Keďže $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}x_0 = 0$, tak môžu nastať 2 prípady. Ak $d \in int(K_{exp})$, tak $\lim_{t\to\infty} F(d + \frac{1}{t}x_0) = F(d)$. Ak $d \in \partial K_{exp}$, tak $\lim_{t\to\infty} F(d + \frac{1}{t}x_0) = +\infty$ (viď Tvrdenie 5.1).

Avšak $\lim_{t\to\infty} -3\log t = -\infty$, takže či platí podmienka (36) nie je jednoznačné. Preto porovnáme rast lineárneho člena $tc^T d$ a logaritmického člena $3\mu\log t$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3\mu\log t}{tc^T d} = \frac{3\mu}{c^T d}\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0.$$

Logaritmický člen teda rastie asymptoticky pomalšie ako lineárny člen. Preto

$$\lim_{t\to\infty}\Big(tc^Td - 3\mu\log t\Big) = +\infty.$$

Kedže sme zároveň ukázali vyššie, že $F(d+\frac{1}{t}x_0)$ je zdola ohraničená, tak

$$\lim_{t\to\infty} c^Tx_0 + tc^Td + \mu F\Big(d+\frac{1}{t}x_0\Big) - \mu 3\log t = +\infty$$

a teda dochádza spor s podmienkou (36). Preto je množina C_α ohraničená. □

Pomocou Lem 5.4 a 5.5 sme ukázali, že za predpokladu striktnej duálnej prípustnosti je neprázdna podúrovňová množina C_α kompaktná. Keďže účelová funkcia $c^Tx + \mu F(x)$ je spojitá, nadobúda na C_α minimum. Preto má bariérová optimalizačná úloha riešenie. Ešte si uvedieme jednu dôležitú vlastnosť bariérovej funkcie.

Definícia 5.6. *[8] Nech $K \subset \mathbb{R}^n$ je konvexný kužeľ. Bariérovú funkciu $F : \mathrm{int}(K) \to \mathbb{R}$, $F \in C^3$, nazývame ϑ-logaritmicky homogénnou samokonkordantnou bariérou, ak pre všetky $x \in \mathrm{int}(K)$ a $u \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$|F'''(x)[u,u,u]| \le 2\Big(F''(x)[u,u]\Big)^{3/2}$$

a

$$F(\tau x) = F(x) - \vartheta\log\tau, \quad \langle\nabla F(x), x\rangle = -\vartheta.$$

Tvrdenie 5.7. *Bariérová funkcia F pre exponenciálny kužeľ K_{exp} je logaritmicky homogénna samokonkordantná bariéra s parametrom $\vartheta = 3$ na množine* $\mathrm{int}(K_{exp})$.

Dôkaz. Dôkaz tejto vlastnosti je technicky náročný a vyžaduje výpočet derivácií tretieho rádu.Pre exponenciálny kužeľ je však známe, že príslušná bariérová funkcia je logaritmicky homogénna samokonkordantná bariéra s parametrom $\vartheta = 3$ [8]. Táto vlastnosť zabezpečuje stabilitu Newtonových krokov a umožňuje analyzovať konvergenciu metód vnútorného bodu (viac v [21, 20, 8]). □

Uvedené vlastnosti bariérovej funkcie F zabezpečujú, že bariérová úloha (32) je hladká konvexná optimalizačná úloha. Jej optimálne riešenie preto môžeme charakterizovať pomocou KKT podmienok. Lagrangeovu funkciu bariérovej úlohy zapíšeme v tvare

$$\mathcal{L}(x,y) = c^Tx + \mu F(x) + y^T(b - Ax).$$

Z podmienok optimality

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, y) = c + \mu \nabla F(x) - A^T y = 0,$$

$$\nabla_y \mathcal{L}(x, y) = b - Ax = 0.$$

dostávame sústavu podmienok

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ c + \mu \nabla F(x) - A^T y &= 0, \end{aligned}$$

kde $x \in \text{int}(K_{exp})$. Označme

$$s = -\mu \nabla F(x). \tag{37}$$

Ako sa uvádza v [8], pre samokonkordantné bariéry platí, že

$$-\nabla F(x) \in \text{int}(K^*_{exp}),$$

a teda aj $s \in \text{int}(K^*_{exp})$. Po dosadení tejto definície do podmienok dostávame sústavu

$$Ax = b$$

$$c - A^T y = s,$$

ktorá má rovnaký tvar ako primárno-duálna formulácia kónickej optimalizačnej úlohy. Z (37) a podmienky logaritmickej homogenity $\langle \nabla F(x), x \rangle = -\vartheta$ z Definície 5.6 potom dostaneme

$$x^T s = x^T \Big(-\mu \nabla F(x) \Big) = -\mu x^T \nabla F(x) = \mu \vartheta.$$

Táto rovnosť sa nazýva *perturbovaná podmienka komplementarity*, pričom ϑ je parameter bariéry z Definície 5.6. Pre každú hodnotu parametra $\mu > 0$ má táto sústava jediné riešenie $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$, pričom $x(\mu) \in \text{int}(K_{exp})$ a $s(\mu) \in \text{int}(K^*_{exp})$. Množina všetkých takýchto riešení

$$\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) : \mu > 0\}$$

sa nazýva centrálna trajektória. Pri limite $\mu \to 0$ sa tieto rovnice postupne menia na klasické KKT podmienky pôvodnej kónickej úlohy, a preto body na centrálnej trajektórii

konvergujú k optimálnemu riešeniu tejto úlohy [2, 8]. Na riešenie sústavy podmienok centrálnej trajektórie použijeme Newtonovu metódu. Označme

$$\Phi(x,y,s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ c - A^T y - s \\ s + \mu \nabla F(x) \end{pmatrix}.$$

Newtonov krok $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ je daný riešením lineárnej sústavy

$$D\Phi(x,y,s) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -\Phi(x,y,s),$$

kde $D\Phi(x,y,s)$ označuje Jacobiho maticu

$$D\Phi(x,y,s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -A^T & -I \\ \mu\nabla^2 F(x) & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Newtonova sústava má teda tvar

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -A^T & -I \\ \mu\nabla^2 F(x) & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ c - A^T y - s \\ s + \mu \nabla F(x) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Riešením tejto sústavy získame Newtonov smer, ktorý tvorí základ zjednodušeného algoritmu primárno-duálnej metódy vnútorného bodu.

Na základe všeobecnej teórie [2] uvedieme zjednodušený algoritmus primárno-duálnej metódy vnútorného bodu na sledovanie centrálnej trajektórie:

Vstup: matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektory $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, tolerancie $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$.

Výstup: aproximácia optimálneho riešenia (x, y, s).

Algoritmus:

1. Zvoľ počiatočný bod

$$x^{(0)} \in \mathrm{int}(K_{exp}), \quad s^{(0)} \in \mathrm{int}(K_{exp}^*), \quad y^{(0)} \in \mathbb{R}^m.$$

2. Pre $k = 0, 1, 2, \ldots$ opakuj:

2.1. Vypočítaj

$$r_p^{(k)} = Ax^{(k)} - b, \qquad r_d^{(k)} = c - A^T y^{(k)} - s^{(k)}.$$

2.2. Vypočítaj aktuálnu hodnotu parametra

$$\bar{\mu}^{(k)} = \frac{(x^{(k)})^T s^{(k)}}{\vartheta}.$$

ϑ je parameter bariérovej funkcie z Definície 5.6. Z tvrdenia 5.7 platí, že $\vartheta = 3$ pre exponenciálny kužeľ.

2.3. Ak platí

$$\|r_p^{(k)}\| \leq \epsilon_1, \quad \|r_d^{(k)}\| \leq \epsilon_1, \quad \bar{\mu}^{(k)} \leq \epsilon_2,$$

zastav a vráť $(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)})$.

2.4. Zvoľ centrovací parameter $\sigma \in (0, 1)$ a cieľovú hodnotu

$$\mu_{\text{ciel}}^{(k)} = \sigma \bar{\mu}^{(k)}.$$

Parameter $\mu_{\text{ciel}}^{(k)}$ určuje, ku ktorej hodnote centrálnej trajektórie sa má nasledujúci Newtonov krok približovať.

2.5. Vypočítaj

$$r_c^{(k)} = s^{(k)} + \mu_{\text{ciel}}^{(k)} \nabla F(x^{(k)}).$$

2.6. Vypočítaj Newtonov smer $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ ako riešenie sústavy (38)

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -A^T & -I \\ \mu_{\text{ciel}}^{(k)} \nabla^2 F(x^{(k)}) & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_p^{(k)} \\ r_d^{(k)} \\ r_c^{(k)} \end{pmatrix}.$$

2.7. Zvoľ dĺžku kroku $\alpha^{(k)} > 0$ [3] tak, aby

$$x^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta x \in \text{int}(K_{exp}), \quad s^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta s \in \text{int}(K_{exp}^*).$$

[3] V praxi sa $\alpha^{(k)}$ určuje pomocou backtrackingu. Najprv sa nájde maximálny krok $\alpha_{\max} \in (0, 1]$, pre ktorý zostávajú splnené podmienky vyššie, a potom sa zvolí

$$\alpha^{(k)} = \tau \alpha_{\max},$$

kde $\tau \in (0, 1)$.

2.8. Aktualizuj

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)}\Delta x,$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \alpha^{(k)}\Delta y,$$

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} + \alpha^{(k)}\Delta s.$$

Ako sme ukázali v Kapitole 4, exponenciálny kužeľ nie je samoduálny. Keďže symetrické kužele sú samoduálne, exponenciálny kužeľ nepatrí medzi symetrické kužele. Z toho dôvodu bariérová funkcia exponenciálneho kužeľa pre primárnu úlohu má iný tvar ako pre duálnu úlohu. Preto moderné primárno-duálne metódy vnútorného bodu pre tento typ úloh využívajú špecifické škálovacie techniky určené pre nesymetrické kužele (pozri [8]). V dôsledku toho má výsledný algoritmus zložitejšiu štruktúru, ako tá čo sme popísali vyššie.

5.2 Prehľad solverov v kónickej optimalizácii

Solvery pre kónickú optimalizáciu využívajú rôzne algoritmy na riešenie úloh. Podľa dostupných dokumentov [9, 28, 24, 19, 11, 13, 34, 31] sa jednotlivé solvery líšia najmä rozsahom podporovaných kužeľov, použitým spôsobom riešenia a dostupnosťou v rôznych programovacích jazykoch. Prehľad najčastejšie používaných solverov uvádza Tabuľka 2.

Solver	**Podporované úlohy / kužele**	**Algoritmus**
ECOS	SOCP, EXP	Primal–dual interior-point
SCS	LP, QP, SOCP, SDP, EXP	ADMM (operator-splitting)
OSQP	QP (lineárne ohraničenia)	ADMM (operator-splitting)
MOSEK	LP, QP, SOCP, SDP, EXP	Primal–dual interior-point / Simplex
GUROBI	LP, QP	Simplex / Primal–dual interior-point
CPLEX	LP, QP	Simplex / Primal–dual interior-point
SDPT3	SOCP, SDP	Primal–dual interior-point
SeDuMi	LP, QP, SOCP, SDP	Primal–dual interior-point

Tabuľka 2: Najčastejšie používané solvery pre kónickú optimalizáciu.

Väčšinu uvedených solverov možno používať v jazykoch C, Python alebo MATLAB. Solvery MOSEK a GUROBI podporujú aj prácu v jazykoch R a Java. Naopak, SDPT3 a SeDuMi sú dostupné iba v prostredí MATLAB. Z hľadiska licencie sú ECOS, SCS,

OSQP,SDPT3 a SeDuMi voľne dostupné (opensource), zatiaľ čo MOSEK, GUROBI a CPLEX sú komerčné, ale pre akademické účely poskytujú bezplatné licencie.

Môžeme si všimnúť že solvery ECOS, SCS a MOSEK podporujú exponenciálny kužeľ.

6 Optimalizácia portfólia s využitím exponenciálneho kužeľa

V tejto kapitole ilustrujeme praktické využitie exponenciálneho kužeľa pri riešení úloh optimalizácie portfólia. Budeme pracovať s portfóliom vybraných akcií a modelom založeným na Kellyho kritériu z Kapitoly 3.2.4, ktorý maximalizuje očakávaný logaritmický rast kapitálu na základe historických výnosov jednotlivých aktív.

Pri formulácii modelu sa inšpirujeme prístupom uvedeným v práci [17], kde autori využívajú relatívnu entropiu (Kullback–Leiblerovu divergenciu) ako nástroj na podporu diverzifikácie portfólia. Na rozdiel od tejto práce však nemáme portfólio binárnych stávok ani diskrétne výnosy, ale pracujeme s historickými dennými výnosmi akcií získanými z Yahoo Finance.

Okrem klasického Kellyho modelu preto zavedieme aj jeho modifikáciu doplnenú o ohraničenie Kullback–Leiblerovej divergencie od rovnomerne rozdeleného portfólia, ktoré umožňuje kontrolovať mieru diverzifikácie výsledného portfólia.

6.1 Kellyho kritérium optimalizácie portfólia

Najprv začneme s klasickým modelom, ktorý je založený na Kellyho kritériu. Na ilustráciu použijeme historické ceny akcií získané zo služby Yahoo Finance. Budeme pracovať s akciami desiatich spoločností: AAPL, MSFT, NVDA, AMZN, TSLA, GOOGL, META, JPM, JNJ a XOM. Analyzované časové obdobie je od 1. januára 2018 do 31. decembra 2025.

Na základe formulácie úlohy z Kap. 3.2.4 a použitých dát máme počet aktív $p = 10$ a počet scenárov $N = 2009$. Každý scenár predstavuje jeden obchodný deň v sledovanom období.

Označme $P_{i,j}$ cenu i-teho aktíva v scenári j (t. j. v j-tom obchodnom dni). Z historických cien vypočítame jednoduché denné výnosy

$$r_{i,j} = \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{P_{i,j-1}},$$

kde $i = 1, \ldots, 10$ označuje aktívum a $j = 1, \ldots, 2009$ index scenára. Pre každý scenár tak dostávame vektor výnosov

$$r_j = (r_{1,j}, \ldots, r_{p,j})^\top \in \mathbb{R}^{10}.$$

Optimalizačná úloha vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \frac{1}{2009} \sum_{j=1}^{2009} \ln(1 + r_j^\top x) \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Postupom uvedeným v Kapitole 3.2.4 môžeme túto úlohu zapísať v ekvivalentnom kónickom tvare

$$\begin{aligned} \max_{x,t} \quad & \frac{1}{2009} \sum_{j=1}^{2009} t_j \\ & (t_j, 1, 1 + r_j^\top x) \in K_{exp}, \quad j = 1, \ldots, 2009, \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Takto zapísanú optimalizačnú úlohu sme riešili pomocou knižnice `CVXPY` a solvera `MOSEK`. Výsledky optimálnych váh možno vidieť v nasledujúcej tabuľke

Aktívum	Váha
AAPL	0.000000
MSFT	0.000000
NVDA	0.000000
AMZN	0.000000
TSLA	0.000000
GOOGL	0.000000
META	0.000000
JPM	0.695498
JNJ	0.304502
XOM	0.000000

Tabuľka 3: Optimálne váhy Kellyho portfólia.

Z Tabuľky 3 vidíme, že Kellyho model vedie ku koncentrovanému portfóliu, v ktorom je kapitál investovaný iba do dvoch aktív (JPM a JNJ), zatiaľ čo ostatné aktíva majú nulovú

váhu. Takýto výsledok je typický pre Kellyho kritérium, ktoré sa zameriava na maximalizáciu logaritmického rastu kapitálu bez toho, aby priamo zohľadňovalo diverzifikáciu portfólia. Základné charakteristiky takto získaného portfólia sú uvedené v Tabuľke 4.

Priemerný logaritmický rast	0.00188
Denný výnos	0.002331
Denná volatilita	0.029973
Ročný výnos	0.587358
Ročná volatilita	0.475799
Entropia váh	0.614631
KL divergencia od rovnomerne rozdeleného portfólia	1.687954

Tabuľka 4: Charakteristiky Kellyho portfólia.

Priemerný logaritmický rast portfólia je daný hodnotou účelovej funkcie Kellyho modelu (39)

$$\frac{1}{2009}\sum_{j=1}^{2009}\ln(1+r_j^\top x).$$

V kónickej formulácii (40) používame pomocné premenné t_j s podmienkou $t_j \leq \ln(1+r_j^\top x)$. Keďže úlohu maximalizujeme, v optimálnom riešení platí $t_j = \ln(1+r_j^\top x)$, a teda $\frac{1}{2009}\sum_{j=1}^{2009} t_j$ predstavuje priemerný logaritmický rast portfólia.

Denný výnos portfólia počítame ako

$$\mu^\top x,$$

kde μ je vektor priemerných denných výnosov jednotlivých aktív. Denná volatilita je smerodajná odchýlka výnosu portfólia

$$\sqrt{x^\top \Sigma x},$$

kde Σ je kovariančná matica výnosov.

Ročný výnos a ročná volatilita získame prepočítaním denných hodnôt za predpokladu 252 obchodných dní v roku, teda

$$\mu_{\text{ročný}} = 252\,\mu^\top x, \qquad \sigma_{\text{ročná}} = \sqrt{252 x^\top \Sigma x}.$$

Entropia váh portfólia

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{10} x_i \ln x_i$$

je mierou diverzifikácie portfólia. Vyššia hodnota entropie znamená rovnomernejšie rozdelenie kapitálu medzi aktíva.

Kullback–Leiblerova divergencia od rovnomerného portfólia

$$D_{\mathrm{KL}}(x\|u) = \sum_{i=1}^{10} x_i \ln \frac{x_i}{u_i},$$

kde $u_i = \frac{1}{10}$ sú váhy jednotlivých aktív v rovnomernom portfóliu, vyjadruje veľkosť odchýlky medzi portfóliom x a rovnomerne rozdeleným portfóliom. Čím je táto hodnota väčšia, tým je portfólio koncentrovanejšie a vzdialenejšie od rovnomerného rozdelenia kapitálu medzi jednotlivé aktíva. Medzi entropiou váh portfólia a Kullbackovou–Leiblerovou divergenciou od rovnomerného portfólia platí jednoduchý vzťah

$$D_{\mathrm{KL}}(x\|u) = \ln p - H(x),$$

kde p je počet aktív. Pri pevnom počte aktív teda rast entropie zodpovedá menšej KL divergencii, a teda väčšej diverzifikácii portfólia.

V Tabuľke 4 si môžeme všimnúť, že naše portfólio dosahuje relatívne vysoký očakávaný rast kapitálu. Priemerný logaritmický rast portfólia je približne 0.00188, pričom očakávaný ročný výnos dosahuje približne 58.7%. Zároveň však portfólio vykazuje pomerne vysokú volatilitu (ročná volatilita 47.6%) a nízku entropiu váh ($H(x) = 0.614631$), čo potvrdzuje vysokú koncentráciu kapitálu do malého počtu aktív. Tomu zodpovedá aj pomerne vysoká hodnota Kullback-Leiblerovej divergencie od rovnomerného portfólia.

Hoci Kellyho model maximalizuje očakávaný dlhodobý rast kapitálu, výsledné portfólio môže byť veľmi koncentrované do malého počtu aktív. Takáto koncentrácia zvyšuje riziko portfólia, keďže jeho výkonnosť je výrazne závislá od vývoja niekoľkých málo aktív. Preto ďalej uvažujeme nad modifikovaným modelom, ktorý podporuje diverzifikáciu portfólia pomocou ohraničenia na Kullback–Leiblerovej divergencie od rovnomerného portfólia (relatívnej entropie).

6.2 Kellyho kritérium regulované pomocou relatívnej entropie

Aby sme zabránili nadmernej koncentrácii kapitálu do malého počtu aktív, upravíme pôvodný model založený na Kellyho kritériu pridaním ohraničenia s Kullback–Leiblerovou

divergenciou od rovnomerného rozdeleného portfólia. Označme

$$u = \left(\frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10}\right)^\top \in \mathbb{R}^{10}$$

vektor váh rovnomerne rozdeleného portfólia. Potom pôvodný optimalizačný problém (39) má tvar

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \frac{1}{2009} \sum_{j=1}^{2009} \ln(1 + r_j^\top x) \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^{10} x_i \ln \frac{x_i}{u_i} \leq \rho. \end{aligned}$$

kde parameter ρ určuje ako veľmi sa môže optimálne portfólio líšiť od rovnomerného portfólia. Podmienku

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \ln \frac{x_i}{u_i} \leq \rho$$

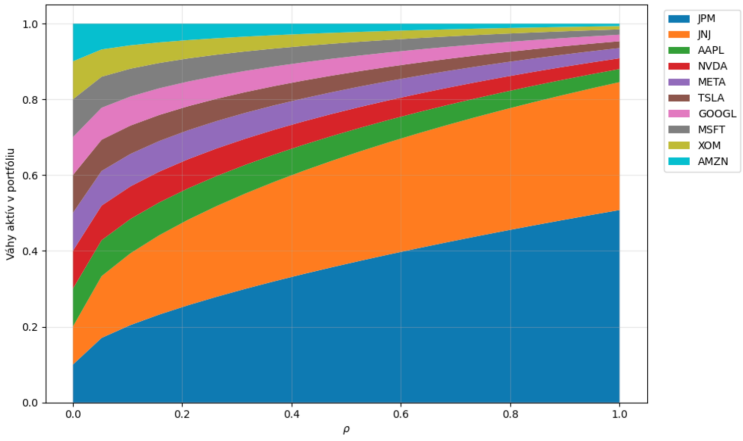
môžeme pomocou transformácie uvedenej v Tabuľke 1 z Kapitoly 3 zapísať ako

$$(-s_i, x_i, u_i) \in K_{exp}, \quad i = 1, \ldots, p, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{10} s_i \leq \rho.$$

Výsledná optimalizačná úloha modifikovaného Kellyho problému má kónický tvar

$$\begin{aligned} \max_{x,t,s} \quad & \frac{1}{2009} \sum_{j=1}^{2009} t_j \\ & (t_j, 1, 1 + r_j^\top x) \in K_{exp}, \quad j = 1, \ldots, 2009, \\ & (-s_i, x_i, u_i) \in K_{exp}, \quad i = 1, \ldots, 10 \\ & \sum_{i=1}^{10} s_i \leq \rho \\ & \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Na Obrázku 5 je znázornená optimalná alokácia portfólia pre hodnoty parametra $\rho \in [0, 1]$. Pre $\rho = 0$ máme rovnomerne rozdelené portfólio. Vidíme, že s rastúcou hodnotou ρ je portfólio viac koncentrované a približuje sa klasickému Kellyho riešeniu z Tab.3.



Obr. 5: Optimalná alokácia portfólia pre hodnoty parametra $\rho \in [0, 1]$

Na záver porovnáme tri portfóliá: klasické Kellyho portfólio, Kellyho portfólio regulované relatívnou entropiou a rovnomerne rozdelené portfólio. Pre zjednodušenie uvedieme len 5 hodnôt pre parameter ρ. Výsledky sú zaznamenané v Tabuľke 5.

Portfólio	log-rast	ročný výnos	ročná volatilita	entropia	KL div.
Rovnomerne rozdelené	0.001034	0.292	0.250	2.3026	0.000
Kelly	0.001880	0.587	0.476	0.6146	1.688
$\rho = 0.01$	0.001110	0.315	0.264	2.2926	0.01
$\rho = 0.05$	0.001205	0.344	0.284	2.2526	0.05
$\rho = 0.10$	0.001276	0.367	0.300	2.2026	0.10
$\rho = 0.20$	0.001376	0.399	0.324	2.1026	0.20
$\rho = 0.50$	0.001564	0.465	0.374	1.8026	0.50
$\rho = 1.00$	0.001749	0.534	0.432	1.3026	1.00

Tabuľka 5: Porovnanie Kellyho portfólia, rovnomerne rozdeleného portfólia a regulovaného modelu.

Vidíme, že klasické Kellyho portfólio dosahuje najvyšší logaritmický rast kapitálu, avšak za cenu vyššej volatility a koncentrácie kapitálu len do 2 aktív. Naopak, rovnomerne rozdelené portfólio je viac diverzifikované, ale dosahuje nižší očakávaný výnos. Regulovaný

model pomocou relatívnej entropie pomocou parametra ρ predstavuje kompromis medzi výnosom a diverzifikáciou portfólia.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali exponenciálnym kužeľom ako jedným z konvexných kužeľov využívaných v kónickej optimalizácii. Cieľom práce bolo systematicky spracovať jeho teoretické vlastnosti, dualitu, súvis s metódami vnútorného bodu a zároveň ukázať jeho využitie pri formulácii konvexných optimalizačných úloh.

V práci sme najskôr vytvorili teoretický základ potrebný na štúdium exponenciálneho kužeľa. Exponenciálny kužeľ sme odvodili z homogenizácie epigrafu exponenciálnej funkcie, opísali sme jeho vnútro a hranicu a ukázali sme, že ide o vlastný kužeľ. Zároveň sme uviedli jeho geometrickú interpretáciu pomocou perspektívy logaritmu (hypograf), čo vysvetľuje jeho využitie pri úlohách s logaritmickými výrazmi.

Významnú časť práce sme venovali formulácii optimalizačných úloh pomocou exponenciálneho kužeľa. Naformulovali sme všeobecný tvar optimalizačnej úlohy nad exponenciálnym kužeľom. Na jeho základe sme ukázali, že viaceré triedy konvexných optimalizačných úloh s exponenciálnymi a logaritmickými výrazmi možno zapísať v jednotnej kónickej forme. Týmto spôsobom sme ukázali, že exponenciálny kužeľ umožňuje systematický prístup k modelovaniu zdanlivo odlišných optimalizačných problémov.

Ďalším dôležitým výsledkom bolo odvodenie duálneho kužeľa a duálnej úlohy k úlohe nad exponenciálnym kužeľom. Z týchto výsledkov vyplynulo, že exponenciálny kužeľ nie je samoduálny, a teda nepatrí medzi symetrické kužele, ktoré sa v optimalizácii využívajú častejšie. Táto vlastnosť sa prejavuje najmä v metódach vnútorného bodu, kde je potrebné pracovať so špecifickou bariérovou funkciou. V práci sme sformulovali bariérovú úlohu pre exponenciálny kužeľ, overili základné vlastnosti konkrétnej bariérovej funkcie a odvodili rovnice centrálnej trajektórie spolu s príslušnou Newtonovou sústavou. Tým sme načrtli, ako možno metódy vnútorného bodu použiť pri úlohách nad exponenciálnym kužeľom.

Teoretické poznatky sme doplnili praktickou aplikáciou úlohy optimalizácie portfólia. Pomocou exponenciálneho kužeľa sme formulovali model založený na Kellyho kritériu a jeho regulovanú verziu s relatívnou entropiou. Výsledky ukázali, že klasické Kellyho kritérium dosahovalo najvyšší logaritmický rast, ale zároveň aj najvyššiu volatilitu. Regulovaný model viedol k vyváženejšiemu portfóliu, čím sa ukázalo, že relatívna entropia môže slúžiť ako vhodný nástroj na regulovanie výsledného riešenia.

Hoci existuje viacero zdrojov venujúcich sa konvexnej a kónickej optimalizácii, expo-

nenciálny kužeľ je v nich často spomenutý iba okrajovo alebo v súvislosti s konkrétnymi algoritmami. Prínosom tejto práce je preto jeho podrobné systematické spracovanie z matematického hľadiska. Viaceré použité výsledky sú v literatúre známe, avšak v práci sme ich spracovali v jednom celku a doplnili o vlastné odvodenia a vysvetlenia.

Zároveň si uvedomujeme, že exponenciálny kužeľ a metódy riešenia úloh nad týmto kužeľom predstavujú rozsiahlu tému, ktorú nebolo možné v plnom rozsahu pokryť v rámci jednej práce. Metódy vnútorného bodu sme preto predstavili najmä z hľadiska ich základného princípu a formulácie bariérovej úlohy pre exponenciálny kužeľ. Priestor na ďalšie štúdium vidíme v podrobnejšej analýze týchto metód, najmä v skúmaní škálovacích techník pre nesymetrické kužele a pokročilejších primárno-duálnych algoritmov. Takéto rozšírenie by mohlo nadviazať napríklad na prístup opísaný v [8].

Ďalším možným pokračovaním práce je rozšírenie aplikačnej časti. V tejto práci sme sa zamerali na optimalizáciu portfólia pomocou Kellyho kritéria a jeho regulovanej verzie s využitím relatívnej entropie. Keďže v Kapitole 3 sme ukázali, že exponenciálny kužeľ možno použiť aj pri formulácii ďalších tried konvexných optimalizačných úloh, možným pokračovaním by bola implementácia úlohy geometrického programovania, logistickej regresie alebo Poissonovej regresie.

Zoznam použitej literatúry

[1] Akle Serrano, S.: *Algorithms for Unsymmetric Cone Optimization and an Implementation for Problems with the Exponential Cone*, Dizertačná práca, Stanford University, 2015. Dostupné online: https://purl.stanford.edu/sn367tt9726

[2] Boyd, S., Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Dostupné online: https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/

[3] Boyd, S., Kim, S.-J., Vandenberghe, L., Hassibi, B.: *A Tutorial on Geometric Programming*, Optimization and Engineering, 8, s. 67-127, 2007. doi: 10.1007/s11081-007-9001-7

[4] Burke, J. V.: *Nonlinear Optimization Lecture Notes*, University of Washington. Dostupné online: https://sites.math.washington.edu/~burke/crs/408/notes/nlp/unoc.pdf.

[5] Cajas, D.: *Kelly Portfolio Optimization: a Disciplined Convex Programming Framework*, SSRN Electronic Journal, 2021. doi: 10.2139/ssrn.3833617

[6] Chares, H.: *Cones and Interior-Point Algorithms for Structured Convex Optimization involving Powers and Exponentials*, Dizertačná práca, Université catholique de Louvain, 2007. Dostupné online: https://perso.uclouvain.be/francois.glineur/files/theses/Chares-PhD-thesis-2007.pdf

[7] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., Knuth, D. E.: *On the Lambert W Function*, Advances in Computational Mathematics, 5, s. 329-359, 1996. doi: 10.1007/BF02124750

[8] Dahl, J., Andersen, M. S.: *A Primal–Dual Interior-Point Algorithm for Nonsymmetric Exponential-Cone Optimization*, Mathematical Programming, 194, s. 341-370, 2022. doi: 10.1007/s10107-021-01631-4

[9] Domahidi, A., Chu, E., Boyd, S.: *ECOS: An SOCP Solver for Embedded Systems*, Proceedings of the European Control Conference (ECC), 2013. Dostupné online: https://github.com/embotech/ecos.

[10] Friberg, H. A.: *Projection onto the Exponential Cone: A Univariate Root-Finding Problem*, MOSEK ApS, 2021. Dostupné online: https://docs.mosek.com/whitepapers/expcone-proj.pdf

[11] Gurobi Optimization LLC.: *Gurobi Reference Manual*, 2024. Dostupné online: https://www.gurobi.com/documentation/.

[12] Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J.: *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, 2. vydanie, Springer, New York, 2009.

[13] IBM Corp.: *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio Documentation*, 2024. Dostupné online: https://www.ibm.com/docs/en/icos.

[14] Kollár, M., Kossaczka, Ľ., Ševčovič, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, 3. vydanie, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2012.

[15] Kurihara, K., Izunaga, T.: *A scalable mixed-integer conic optimization approach to cardinality-constrained Poisson regression with safe screening*, arXiv preprint, 2025. arXiv:2504.12819

[16] Lindström, F., Forsgren, A., Jansson, M.: *Error bounds, facial residual functions and applications to the exponential cone*, Mathematical Programming, 200, s. 229-278, 2023. doi: 10.1007/s10107-022-01883-8

[17] Mercurio, P. J., Wu, Y., Xie, H.: *Portfolio Optimization for Binary Options Based on Relative Entropy*, Entropy, 22, 752, 2020. doi: 10.3390/e22070752

[18] MOSEK ApS: *MOSEK Modeling Cookbook*, 2021. Dostupné online: https://docs.mosek.com/modeling-cookbook/expo.html

[19] MOSEK ApS.: *MOSEK Documentation*, 2026. Dostupné online: https://www.mosek.com/documentation/

[20] Nesterov, Y., Nemirovski, A.: *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1994. doi: 10.1137/1.9781611970791

[21] Nesterov, Y.: *Constructing Self-Concordant Barriers for Convex Cones*, CORE Discussion Paper 2006/30, Université catholique de Louvain, 2006. doi: 10.2139/ssrn.921790

[22] Nesterov, Y., Todd, M. J.: *Primal-Dual Interior-Point Methods for Self-Scaled Cones*, SIAM Journal on Optimization, 8, s. 324-364, 1998. doi: 10.1137/S1052623495290209

[23] Nguyen, H., Nguyen, D., Ngo, A. P., Thomas, C.: *Solar PV Modeling with Lambert W Function: An Exponential Cone Programming Approach*, 2022 IEEE Kansas Power and Energy Conference (KPEC), s.293- 297, 2022. doi: 10.1109/KPEC54747.2022.9814756

[24] Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A., Boyd, S.: *OSQP: An Operator Splitting Solver for Quadratic Programs*, Mathematical Programming Computation, 2020. Dostupné online: https://osqp.org/docs/

[25] Palomar, D. P.: *Portfolio Optimization*, 2023. Dostupné online: https://bookdown.org/palomar/portfoliooptimizationbook/

[26] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[27] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1976.

[28] O'Donoghue, B., Chu, E., Parikh, N., Boyd, S.: *SCS: Splitting Conic Solver*, Optimization Methods and Software, 2016. Dostupné online: https://www.cvxgrp.org/scs/.

[29] Schwendinger, F., Lubin, M., Molzahn, D. K., Pacaud, F.: *Holistic Generalized Linear Models*, Journal of Statistical Software, 108, s. 1-49, 2024. doi: 10.18637/jss.v108.i07

[30] Toh, K.C., Todd, M.J., Tütüncü, R.H.: *SDPT3 – a MATLAB Software Package for Semidefinite Programming*, Optimization Methods and Software, 1999. Dostupné online: https://blog.nus.edu.sg/mattohkc/softwares/sdpt3/.

[31] Sturm, J. F.: *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, Optimization Methods and Software, 1999. Dostupné online: https://sedumi.ie.lehigh.edu/.

[32] Shi, J., Yin, W., Osher, S., Sajda, P.: *A Fast Hybrid Algorithm for Large-Scale ℓ_1-Regularized Logistic Regression*, Journal of Machine Learning Research, 11, 713-741, 2010. Dostupné online: https://jmlr.org/papers/volume11/shi10a/shi10a.pdf.

[33] Thorp, E. O.: *The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market*, Handbook of Asset and Liability Management, Elsevier, s. 385-428, 2008. doi: 10.1016/S1872-0978(06)01009-X

[34] Toh, K.C., Todd, M.J., Tütüncü, R.H.: *SDPT3 – a MATLAB Software Package for Semidefinite Programming*, Optimization Methods and Software, 1999. Dostupné online: https://blog.nus.edu.sg/mattohkc/softwares/sdpt3/.

[35] Trnovská, M.: *Konvexná kónická optimalizácia – Prednášky*, FMFI UK, 2024. Interný výučbový materiál.

[36] Ústav matematiky PF UPJŠ: *Funkcia komplexnej premennej – študijné materiály.* Dostupné online: https://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FKP/kapitola2.pdf

[37] Ye, Q., Xie, W.: *Second-Order Conic and Polyhedral Approximations of the Exponential Cone: Application to Mixed-Integer Exponential Conic Programs*, arXiv preprint, 2022. arXiv:2106.09123

Príloha A: Odvodenie základných transformácií pomocou exponenciálneho kužeľa

V tejto prílohe uvádzame kroky odvodenia základných transformácií z Tabuľky 1.

A.1 Exponenciálna funkcia

Epigraf funkcie $f(x) = e^x$ je

$$\operatorname{epi} f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq e^x\}.$$

Platí teda

$$(x, 1, t) \in K_{\exp}.$$

A.2 Logaritmus

Hypograf funkcie $f(x) = \ln(x)$ je

$$\operatorname{hyp} f = \{(x,t) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \mid t \leq \ln(x)\}.$$

Nerovnosť

$$t \leq \ln(x), \quad x > 0.$$

je ekvivalentná s

$$x \geq e^t.$$

Platí teda

$$(t, 1, x) \in K_{\exp}.$$

A.3 Negatívny logaritmus

Epigraf funkcie $f(x) = -\ln(x)$ je množina

$$\operatorname{epi} f = \{(x,t) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \mid t \geq -\ln(x)\}.$$

Nerovnosť

$$t \geq -\ln(x), \quad x > 0.$$

je ekvivalentná s

$$e^{-t} \leq x.$$

Teda

$$(-t, 1, x) \in K_{\exp}.$$

A.4 Entropia

Hypograf funkcie $f(x) = -x \ln(x)$ je množina

$$\operatorname{hyp} f = \{(x, t) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \mid t \leq -x \ln(x)\}.$$

Z pôvodnej nerovnosti

$$t \leq -x \ln(x), \quad x > 0.$$

dostaneme po vydelení výrazom $x > 0$:

$$\frac{t}{x} \leq -\ln(x).$$

Teda

$$x \leq e^{-\frac{t}{x}}.$$

Po prenásobení oboch strán výrazom $e^{\frac{t}{x}}$ dostávame

$$xe^{\frac{t}{x}} \leq 1.$$

Táto podmienka je presne ekvivalentná s tvrdením

$$(t, x, 1) \in K_{\exp}.$$

A.5 Relatívna entropia (Kullback–Leibler divergencia)

Epigraf funkcie $f(x, y) = x \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ je množina

$$\operatorname{epi} f = \left\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R} \;\middle|\; t \geq x \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right\}.$$

Z pôvodnej nerovnosti

$$t \geq x \ln\left(\frac{x}{y}\right), \quad x, y > 0.$$

dostaneme po vydelení výrazom $x > 0$:

$$\frac{t}{x} \geq \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Úpravou získame

$$\frac{x}{y} \leq e^{\frac{t}{x}}.$$

Ekvivalentne

$$y \geq xe^{-\frac{t}{x}}.$$

Táto podmienka je presne ekvivalentná s tvrdením

$$(-t, x, y) \in K_{\exp}.$$

A.6 Log-sum-exp

Epigraf funkcie $f(x) = \ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})$ je množina

$$\operatorname{epi} f = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; t \geq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)\right\}.$$

Nerovnosť

$$t \geq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right).$$

je ekvivalentná s

$$e^t \geq \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

Po vydelení oboch strán výrazom $e^t > 0$ dostávame

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} e^{x_i - t}.$$

Zavedením pomocných premenných $u_i = e^{x_i - t}$ pre $i = 1, \ldots, n$ možno túto podmienku zapísať v tvare

$$(x_i - t, 1, u_i) \in K_{\exp}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i \leq 1.$$

A.7 Softplus

Epigraf funkcie $f(x) = \ln(1 + e^x)$ je množina

$$\operatorname{epi} f = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \geq \ln(1 + e^x)\}.$$

Nerovnosť

$$t \geq \ln(1 + e^x).$$

je ekvivalentná s

$$e^t \geq 1 + e^x.$$

Po vydelení oboch strán výrazom $e^t > 0$ dostávame

$$1 \geq e^{x-t} + e^{-t}.$$

Teda

$$e^{x-t} + e^{-t} \leq 1.$$

Zavedením pomocných premenných $u_1 = e^{x-t}$, $u_2 = e^{-t}$ je možné túto podmienku zapísať v tvare

$$(x - t, 1, u_1) \in K_{\exp}, \qquad (-t, 1, u_2) \in K_{\exp}, \qquad u_1 + u_2 \leq 1.$$

Príloha B: Odvodenie Hesseho matice pre bariérovú funkciu exponenciálneho kužeľa

Pripomeňme si najprv gradient bariérovej funkcie F z Kapitoly 5

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1} \\ -\dfrac{\log(x_3/x_2) - 1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1} - \dfrac{1}{x_2} \\ -\dfrac{x_2}{x_3\,(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)} - \dfrac{1}{x_3} \end{pmatrix}.$$

Teraz vypočítame druhé parciálne derivácie. Najprv derivujeme $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ podľa jednotlivých premenných. Podľa x_1 máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1}\right) = -\frac{1}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1) \\ &= -\frac{1}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \end{aligned}$$

Podľa x_2 máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1}\right) \\ &= -\frac{1}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1) \\ &= -\frac{\log(x_3/x_2) - 1}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \end{aligned}$$

Podľa x_3 máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1}\right) \\ &= -\frac{1}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1) \\ &= -\frac{x_2}{x_3(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} \end{aligned}$$

Teraz derivujeme $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ podľa x_2 a x_3. Podľa x_2 máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\log(x_3/x_2) - 1}{x_2 \log(x_3/x_2) - x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= -\frac{\left(-\frac{1}{x_2}\right)(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1) - (\log(x_3/x_2) - 1)^2}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} + \frac{1}{x_2^2} \\ &= \frac{(\log(x_3/x_2) - 1)^2}{(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)^2} + \frac{1}{x_2(x_2 \log(x_3/x_2) - x_1)} + \frac{1}{x_2^2} \end{aligned}$$

Podľa x_3 máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\log(x_3/x_2)-1}{x_2\log(x_3/x_2)-x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= -\frac{\frac{1}{x_3}(x_2\log(x_3/x_2)-x_1) - (\log(x_3/x_2)-1)\frac{x_2}{x_3}}{(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)^2} \\ &= \frac{x_2(\log(x_3/x_2)-1)}{x_3(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)^2} - \frac{1}{x_3(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)}\end{aligned}$$

Nakoniec vypočítame ešte deriváciu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{x_2}{x_3(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)} - \frac{1}{x_3}\right) \\ &= -\frac{\left(-\frac{x_2}{x_3^2}\right)(x_2\log(x_3/x_2)-x_1) - \frac{x_2^2}{x_3^2}}{(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)^2} + \frac{1}{x_3^2} \\ &= \frac{x_2^2}{x_3^2(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)^2} + \frac{x_2}{x_3^2(x_2\log(x_3/x_2)-x_1)} + \frac{1}{x_3^2}\end{aligned}$$

Označme

$$z = x_2\log\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - x_1.$$

Potom Hesseho matica funkcie F má tvar

$$\nabla^2 F(x) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} 1 & -(\log(x_3/x_2)-1) & -\frac{x_2}{x_3} \\ -(\log(x_3/x_2)-1) & (\log(x_3/x_2)-1)^2 + \frac{z}{x_2} + \frac{z^2}{x_2^2} & \frac{x_2(\log(x_3/x_2)-1)}{x_3} - \frac{z}{x_3} \\ -\frac{x_2}{x_3} & \frac{x_2(\log(x_3/x_2)-1)}{x_3} - \frac{z}{x_3} & \frac{x_2^2}{x_3^2} + \frac{zx_2}{x_3^2} + \frac{z^2}{x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Príloha C: Zdrojové kódy

Pri príprave niektorých častí zdrojových kódov bola využitá aj pomoc nástrojov umelej inteligencie. Výsledné kódy boli následne skontrolované, upravené a využité pri spracovaní výpočtov a grafických výstupov v tejto práci.

C.1 Vykreslenie exponenciálneho kužeľa

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go
import plotly.io as pio

# vykreslenie v prehliadaci
pio.renderers.default = "browser"

# zvolene rozsahy
x1_min, x1_max = -20, 15
x2_min, x2_max = 0.001, 30
x3_max = 15

# K_epi
n1, n2 = 220, 220
x2 = np.linspace(x2_min, x2_max, n2)
u = np.linspace(0, 1, n1)

# maximalne pripustne x1 pre dane x2, kedze exponencialna funkcia
    rastie prilis rychlo
x1_max_allowed = np.minimum(x2 * np.log(x3_max / x2), x1_max)

# ponechame len tie hodnoty x2, pre ktore existuje x1 z intervalu
    [x1_min, x1_max_allowed]
valid = x1_max_allowed > x1_min
x2 = x2[valid]
x1_max_allowed = x1_max_allowed[valid]
```

```
25
26 # parametrizacia
27 X1 = x1_min + np.outer(x1_max_allowed - x1_min, u)
28 X2 = np.outer(x2, np.ones_like(u))
29 X3 = X2 * np.exp(X1 / X2)
30
31 # K_0
32 x1_0 = np.linspace(x1_min, 0, 220)
33 x3_0 = np.linspace(0, x3_max, 220)
34
35 X1_0, X3_0 = np.meshgrid(x1_0, x3_0)
36 X2_0 = np.zeros_like(X1_0)
37
38 # vykreslenie
39 fig = go.Figure()
40
41 fig.add_trace(go.Surface(
42     x=X1,
43     y=X2,
44     z=X3,
45     showscale=False,
46     opacity=0.85,
47     colorscale=[[0, "#6FA8DC"], [1, "#6FA8DC"]],
48     name="K_epi"
49 ))
50
51 fig.add_trace(go.Surface(
52     x=X1_0,
53     y=X2_0,
54     z=X3_0,
55     showscale=False,
56     opacity=0.6,
57     colorscale=[[0, "#6FA8DC"], [1, "#6FA8DC"]],
```

```
    name="K_0"
))

fig.update_layout(
    width=950,
    height=750,
    scene=dict(
        xaxis_title="x<sub>1</sub>",
        yaxis_title="x<sub>2</sub>",
        zaxis_title="x<sub>3</sub>",
        xaxis=dict(range=[x1_min, x1_max]),
        yaxis=dict(range=[-0.5, x2_max]),
        zaxis=dict(range=[0, x3_max]),
        aspectmode="manual",
        aspectratio=dict(x=1, y=1, z=1),
        camera=dict(eye=dict(x=1.8, y=1.5, z=1.0))
    )
)

fig.show()
```

C.2 Graf funkcie $f(u) = ue^u$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u = np.linspace(-7, 2, 1000)
f = u * np.exp(u)

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(u, f, linewidth=2, label=r"$f(u)=u e^u$")

# osi
```

```
plt.axhline(0, linewidth=1, color="0.5")
plt.axvline(0, linewidth=1, color="0.5")

# lepsia mierka, aby bolo minimum dobre vidno
plt.xlim(-7, 2)
plt.ylim(-0.5, 0.8)

plt.xlabel(r"$u$")
plt.ylabel(r"$f(u)$")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

C.3 Graf Lambertovej W-funkcie

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import lambertw

eps = 1e-6

# inverzia k f1
x1 = np.linspace(-1/np.e + eps, -eps, 1000)
W1 = lambertw(x1, k=-1).real

# inverzia k f2
x2 = np.linspace(-1/np.e + eps, 1.5, 1000)
W2 = lambertw(x2, k=0).real

# vykreslenie
plt.figure(figsize=(8, 6))

```

```
plt.plot(x1, W1, linewidth=2, label=r"$W_1$")
plt.plot(x2, W2, linewidth=2, label=r"$W_2$")

# osi
plt.axhline(0, linewidth=1, color="0.5")
plt.axvline(0, linewidth=1, color="0.5")

# mierka
plt.xlim(-0.5, 1.5)
plt.ylim(-6, 1.5)

plt.xlabel(r"$s$")
plt.ylabel(r"$W(s)$")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

C.4 Zdrojový kód ku Kapitole 7

```
import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np
import cvxpy as cp
import matplotlib.pyplot as plt

# 1) Data
tickers = ["AAPL", "MSFT", "NVDA", "AMZN", "TSLA",
           "GOOGL", "META", "JPM", "JNJ", "XOM"]

start_date = "2018-01-01"
end_date = "2025-12-31"

```

```
14 # Hodnoty parametra rho
15 rho_values = [0.01, 0.05, 0.10, 0.20, 0.50, 1.00]
16
17 # Stiahnutie dat z Yahoo Finance
18 data = yf.download(
19     tickers,
20     start=start_date,
21     end=end_date,
22     auto_adjust=True,
23     progress=False
24 )
25
26 if isinstance(data.columns, pd.MultiIndex):
27     prices = data["Close"].copy()
28 else:
29     prices = data.copy()
30
31 prices = prices.dropna()
32
33 # Zakladne charakteristiky
34 returns = prices.pct_change().dropna()
35 R = returns.to_numpy()
36 N, p = R.shape
37 mu = returns.mean().to_numpy()
38 Sigma = returns.cov().to_numpy()
39
40 # Rovnomerne portfolio
41 u = np.ones(p) / p
42
43 print("\nZakladne informacie")
44 print(f"Pocet aktiv p = {p}")
45 print(f"Pocet scenarov N = {N}")
46 print(f"Obdobie: {start_date} do {end_date}")
```

```
47
48 # 2) Pomocne funkcie
49
50 # Velmi male hodnoty vah nastavi na nulu
51 def clean_weights(w, tol=1e-8):
52     w = np.array(w, dtype=float).copy()
53     w[np.abs(w) < tol] = 0.0
54     return w
55
56 # Vypocet zakladnych charakteristik portfolia
57 def portfolio_stats(w, mu, Sigma):
58     daily_return = mu @ w
59     daily_vol = np.sqrt(w @ Sigma @ w)
60     annual_return = 252 * daily_return
61     annual_vol = np.sqrt(252) * daily_vol
62     return daily_return, daily_vol, annual_return, annual_vol
63
64 # Vypocet priemerneho logaritmickeho rastu portfolia
65 def mean_log_growth(R, w):
66     return np.mean(np.log(1 + R @ w))
67
68 # Vypocet KLD od rovnomerneho portfolia
69 def kl_to_uniform(w):
70     q = np.ones_like(w) / len(w)
71     mask = w > 0
72     return np.sum(w[mask] * np.log(w[mask] / q[mask]))
73
74 # Vypocet entropie vah portfolia
75 def weight_entropy(w):
76     mask = w > 0
77     return -np.sum(w[mask] * np.log(w[mask]))
78
79 # 3) Kellyho kriterium
```

```
80
81  x_kelly = cp.Variable(p)
82  t_kelly = cp.Variable(N)
83
84  constraints_kelly = [
85      cp.ExpCone(t_kelly[j], 1.0, 1.0 + R[j, :] @ x_kelly)
86      for j in range(N)
87  ]
88  constraints_kelly += [
89      cp.sum(x_kelly) == 1,
90      x_kelly >= 0
91  ]
92
93  objective_kelly = cp.Maximize((1 / N) * cp.sum(t_kelly))
94  problem_kelly = cp.Problem(objective_kelly, constraints_kelly)
95  problem_kelly.solve(solver=cp.MOSEK, verbose=False)
96
97  w_kelly = clean_weights(x_kelly.value)
98  kelly_stats = portfolio_stats(w_kelly, mu, Sigma)
99
100 kelly_weights_table = pd.DataFrame({
101     "Aktivum": tickers,
102     "Vaha": np.round(w_kelly, 6)
103 })
104
105 kelly_char_table = pd.DataFrame([{
106     "Priemerny log-rast": mean_log_growth(R, w_kelly),
107     "Denny vynos": kelly_stats[0],
108     "Denna volatilita": kelly_stats[1],
109     "Rocny vynos": kelly_stats[2],
110     "Rocna volatilita": kelly_stats[3],
111     "Entropia vah": weight_entropy(w_kelly),
112     "KL divergencia": kl_to_uniform(w_kelly)
```

```
}])

print("\nKellyho portfolio - vahy")
print(kelly_weights_table)

print("\nKellyho portfolio - charakteristiky")
print(kelly_char_table.round(6))

# 4) Rovnomerne rozdelene portfolio
w_equal = np.ones(p) / p
equal_stats = portfolio_stats(w_equal, mu, Sigma)

# 5) Kellyho model regulovany pomocou relativnej entropie
results = []
weights_by_rho = {}

for rho in rho_values:
    x = cp.Variable(p)
    t = cp.Variable(N)
    s = cp.Variable(p)

    constraints = []

    # Prve ohranicenie K_exp
    for j in range(N):
        constraints.append(
            cp.ExpCone(t[j], 1.0, 1.0 + R[j, :] @ x)
        )

    # Druhe ohranicenie K_exp
    for i in range(p):
        constraints.append(
            cp.ExpCone(-s[i], x[i], u[i])
```

```
146             )
147
148         constraints += [
149             cp.sum(x) == 1,
150             x >= 0,
151             cp.sum(s) <= rho
152         ]
153
154         objective = cp.Maximize((1 / N) * cp.sum(t))
155         problem = cp.Problem(objective, constraints)
156         problem.solve(solver=cp.MOSEK, verbose=False)
157
158         w = clean_weights(x.value)
159         weights_by_rho[rho] = w
160
161         daily_return, daily_vol, annual_return, annual_vol =
                portfolio_stats(w, mu, Sigma)
162
163         results.append({
164             "Rho": rho,
165             "Priemerny log-rast": mean_log_growth(R, w),
166             "Rocny vynos": annual_return,
167             "Rocna volatilita": annual_vol,
168             "Entropia vah": weight_entropy(w),
169             "KL divergencia": kl_to_uniform(w)
170         })
171
172 results_df = pd.DataFrame(results)
173
174 print("\nRegulovany Kellyho model")
175 print(results_df.round(6))
176
177 # 6) Tabulka vsetkych portfolii
```

```
summary_rows = [
    {
        "Portfolio": "Rovnomerne rozdelene",
        "log-rast": mean_log_growth(R, w_equal),
        "rocny vynos": equal_stats[2],
        "rocna volatilita": equal_stats[3],
        "entropia": weight_entropy(w_equal),
        "KL div.": kl_to_uniform(w_equal)
    },
    {
        "Portfolio": "Kelly",
        "log-rast": mean_log_growth(R, w_kelly),
        "rocny vynos": kelly_stats[2],
        "rocna volatilita": kelly_stats[3],
        "entropia": weight_entropy(w_kelly),
        "KL div.": kl_to_uniform(w_kelly)
    }
]

for _, row in results_df.iterrows():
    summary_rows.append({
        "Portfolio": f"rho={row['Rho']:.2f}",
        "log-rast": row["Priemerny log-rast"],
        "rocny vynos": row["Rocny vynos"],
        "rocna volatilita": row["Rocna volatilita"],
        "entropia": row["Entropia vah"],
        "KL div.": row["KL divergencia"]
    })

summary_df = pd.DataFrame(summary_rows)

print("\nTabulka vsetkych portfolii")
print(summary_df.round(6))
```

```
211
212 # 7) Graf alokacie portfolia pre rho v intervale [0,1]
213 rho_values_plot = np.linspace(0.0, 1.0, 20)
214
215 weights_list = []
216 rho_used = []
217
218 for rho in rho_values_plot:
219     x = cp.Variable(p)
220     t = cp.Variable(N)
221     s = cp.Variable(p)
222
223     constraints = []
224
225     for j in range(N):
226         constraints.append(
227             cp.ExpCone(t[j], 1.0, 1.0 + R[j, :] @ x)
228         )
229
230     for i in range(p):
231         constraints.append(
232             cp.ExpCone(-s[i], x[i], u[i])
233         )
234
235     constraints += [
236         cp.sum(x) == 1,
237         x >= 0,
238         cp.sum(s) <= rho
239     ]
240
241     objective = cp.Maximize((1 / N) * cp.sum(t))
242     problem = cp.Problem(objective, constraints)
243     problem.solve(solver=cp.MOSEK, verbose=False)
```

```
244
245     if x.value is None or problem.status not in ["optimal", "
            optimal_inaccurate"]:
246         continue
247
248     w = clean_weights(x.value)
249     weights_list.append(w)
250     rho_used.append(rho)
251
252 weights_matrix = np.array(weights_list)
253 rho_used = np.array(rho_used)
254
255 order = np.argsort(weights_matrix[-1])[::-1]
256 weights_matrix = weights_matrix[:, order]
257 tickers_sorted = [tickers[i] for i in order]
258
259 plt.figure(figsize=(10, 6))
260 plt.stackplot(
261     rho_used,
262     weights_matrix.T,
263     labels=tickers_sorted
264 )
265
266 plt.xlabel(r"$\rho$")
267 plt.ylabel("Vahy aktiv v portfoliu")
268 plt.title("Optimalna alokacia portfolia pre hodnoty parametra $\\
        rho \\in [0,1]$")
269 plt.grid(True, alpha=0.3)
270 plt.legend(bbox_to_anchor=(1.02, 1), loc="upper left")
271 plt.tight_layout()
272 plt.show()
```