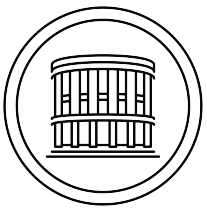
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VYUŽITIE DVOJÚROVŇOVEJ OPTIMALIZÁCIE PRI INVESTIČNÝCH ROZHODNUTIACH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava, 2026 **Bc. Nikola Suchá**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYUŽITIE DVOJÚROVŇOVEJ OPTIMALIZÁCIE PRI INVESTIČNÝCH ROZHODNUTIACH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	Matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Bratislava, 2026 **Bc. Nikola Suchá**





Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Nikola Suchá
Študijný program: ekonomicko-finančná matematika a modelovanie (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Využitie dvojúrovňovej optimalizácie pri investičných rozhodnutiach
Bilevel optimization in investment problems

Anotácia: Dvojúrovňové optimalizačné modely (bilevel optimization) sú špeciálnou triedou optimalizačných úloh, kde jeden optimalizačný problém závisí od riešenia iného optimalizačného problému. Ich podstatou je hierarchická štruktúra, kde rozhodnutia na vrchnej úrovni ovplyvňujú a súčasne sú ovplyvnené rozhodnutiami na spodnej úrovni. Tento prístup umožňuje modelovať situácie, kde rôzne subjekty, ciele alebo procesy spolu interagujú, ale majú odlišné priority alebo obmedzenia. V kontexte optimalizácie portfólia môžu byť použité napríklad na modelovanie situácií, kde vrchný problém zohľadňuje strategické ciele investora a spodný problém reflektuje taktické rozhodnutia alebo reakciu na vonkajšie obmedzenia, ako sú regulačné požiadavky či likvidita trhu.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 09.01.2025

Dátum schválenia: 15.01.2025 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie Čestne vyhlasujem, že celú diplomovú prácu na tému „Využitie dvojúrovňovej optimalizácie pri investičných rozhodnutiach“, vrátane všetkých jej príloh a obrázkov, som vypracovala samostatne, a to s použitím literatúry uvedenej v priloženom zozname a nástrojov umelej inteligencie. Vyhlasujem, že nástroje umelej inteligencie som použila v súlade s príslušnými právnymi predpismi, akademickými právami a slobodami, etickými a morálnymi zásadami za súčasného dodržania akademickej integrity a že ich použitie je v práci vhodným spôsobom označené.

Miesto a dátum: ..... Titul, meno a priezvisko: .....

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcela poďakovať svojej školiteľke Mgr. Jane Szolgayovej, PhD. za pomoc, cenné rady, pripomienky a odborné vedenie pri písaní tejto diplomovej práce. V neposlednom rade patrí veľká vďaka mojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

SUCHÁ, Nikola : Využitie dvojúrovňovej optimalizácie pri investičných rozhodnutiach [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2026, 79 s.

Diplomová práca sa zaoberá problematikou dvojúrovňovej optimalizácie, ktorá predstavuje špecifickú triedu optimalizačných úloh s hierarchickou štruktúrou typu líder–nasledovník. Hlavným cieľom práce je implementácia a numerická analýza konkrétnej aplikácie dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti trhov s elektrickou energiou.

Teoretická časť práce zahŕňa predstavenie základov dvojúrovňovej optimalizácie a vybraných prístupov k riešeniu tohto typu úloh relevantných v kontexte zvolenej aplikácie. Praktická časť je zameraná na aplikáciu dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti plánovania rozšírenia prenosovej sústavy v trhovom prostredí. Model je implementovaný v programovacom prostredí Python, pričom praktická časť vychádza z replikácie modelu uvedeného v odbornej literatúre. Následne sa práca sústreďuje na vlastný prínos vo forme analýzy správania modelu pri zmene vybraných predpokladov, najmä pri citlivostnej analýze parametrov a pri zavedení rizikovo averzných modifikácií.

Dosiahnuté výsledky ukazujú, že uvažované rizikovo averzné modifikácie možno do modelu zapracovať bez zmeny jeho základnej MILP štruktúry a že tieto modifikácie umožňujú sledovať, ako sa investičné rozhodnutia menia pri odlišnom postoji k riziku.

Kľúčové slová: dvojúrovňová optimalizácia, trh s elektrickou energiou, plánovanie rozšírenia prenosovej sústavy, teória duality, MILP reformulácia

Abstract

SUCHÁ, Nikola: Bilevel optimization in investment problems [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2026, 79 p.

This master's thesis deals with bilevel optimization, a specific class of optimization problems characterized by a hierarchical leader–follower structure. The main aim of the thesis is the implementation and numerical analysis of a particular application of bilevel optimization in electricity markets.

The theoretical part introduces the fundamentals of bilevel optimization and selected solution approaches relevant to the chosen application. The practical part focuses on the application of bilevel optimization to transmission expansion planning in a market environment. The model is implemented in Python, and the practical analysis is based on the replication of a model presented in the scientific literature. The thesis then focuses on its own contribution, namely the analysis of the model's behavior under changes in selected assumptions, especially through parameter sensitivity analysis and the introduction of risk-averse modifications.

The obtained results show that the considered risk-averse modifications can be incorporated into the model without changing its basic MILP structure, and that these modifications make it possible to observe how investment decisions change under different attitudes toward risk.

Keywords: bilevel optimization, electricity markets, transmission expansion planning, duality theory, MILP reformulation

Obsah

Úvod **8**

1 Teoretické východiská a súčasný stav poznania **10**

1.1 Základy dvojúrovňovej optimalizácie 10

1.1.1 Motivácia a prehľad aplikácií 10

1.1.2 Všeobecná formulácia dvojúrovňového problému 12

1.1.3 Reformulácia na jednoúrovňový problém pomocou KKT podmienok 15

1.1.4 Reformulácia na jednoúrovňový problém pomocou silnej duality . . 16

1.2 Algoritmické prístupy riešenia dvojúrovňových úloh 19

1.2.1 Prístupy pre lineárne a konvexné dvojúrovňové úlohy 20

1.2.2 Prístupy pre všeobecnejšie nelineárne dvojúrovňové úlohy 21

1.3 Dvojúrovňová optimalizácia v oblasti energetiky 21

1.3.1 Vybrané aplikačné smery v oblasti energetiky 22

2 Aplikácia dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti plánovania rozšírenia prenosovej sústavy v trhovom prostredí **24**

2.1 Predstavenie základného modelu 25

2.2 Matematická formulácia modelu 28

2.2.1 Prechod k jednoúrovňovej formulácii modelu typu MILP 33

2.3 Implementácia modelu 37

2.3.1 Použité nástroje 37

2.3.2 Implementácia na *Garver's six-bus test system* 38

2.3.3 Implementácia na *IEEE 24-bus Reliability Test System (RTS)* . . . 43

3 Rozšírenia modelu a citlivostná analýza **47**

3.1 Citlivostná analýza na vybrané parametre 47

3.1.1 Analýza vplyvu investičného rozpočtu na optimálny investičný plán 48

3.1.2 Analýza vplyvu scenárových váh 48

3.2 Zavedenie rizikovej averzie do modelu 50

3.2.1 Prístup založený na miere podmienenej hodnoty v riziku (*Conditional Value-at-Risk*, CVaR) 50

3.2.2 Prístup založený na garancii minima 52
3.3 Pilotné overenie rozšírení na Garver's six-bus system 53
3.4 Rozšírenia modelu na *IEEE 24-bus Reliability Test System* 54
3.4.1 Citlivostná analýza 55
3.4.2 Zavedenie rizikovej averzie 63
3.5 Implementačné zhrnutie rozšírení modelu 69

Záver **70**

Zoznam použitej literatúry **72**

Úvod

Dvojúrovňová optimalizácia predstavuje špecifickú triedu optimalizačných úloh, v ktorých má rozhodovací proces hierarchickú štruktúru a prebieha na dvoch úrovniach, hornej a dolnej. Medzi zakladajúce práce v oblasti dvojúrovňovej optimalizácie patria práce Brackena a McGilla zo 70. rokov minulého storočia [1, 2, 3], ktoré boli motivované najmä aplikáciami vo vojenskej oblasti a rozhodovacími procesmi vo výrobe a marketingu.

Dvojúrovňová optimalizácia nachádza uplatnenie v širokom spektre praktických oblastí, medzi ktoré patrí regulácia trhov, dopravné siete, cenotvorba či priemyselné plánovanie. Významnú úlohu zohráva napríklad v plánovaní dopravy pri optimalizácii mýta na cestnej sieti, v leteckom priemysle pri stanovovaní cien leteniek alebo overbookingu či v energetike, kde prirodzene vzniká hierarchia medzi investičnými rozhodnutiami a reakciou trhu.

V súčasnosti existuje viacero odborných publikácií [4, 5, 6], ktoré sa venujú problematike dvojúrovňovej optimalizácie. Napriek tomu ide o oblasť, ktorá je stále intenzívne skúmaná a ďalej rozvíjaná [7, 8]. Doterajší výskum sa vo veľkej miere sústreďoval najmä na lineárne dvojúrovňové optimalizačné problémy, keďže všeobecnejšie triedy týchto úloh sú z hľadiska teórie aj numerického riešenia podstatne náročnejšie [4, 7]. Z tohto dôvodu zostáva štúdium nelineárnych a všeobecných dvojúrovňových problémov naďalej aktuálnou výskumnou témou.

Cieľom tejto práce je implementovať a numericky analyzovať konkrétnu aplikáciu dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti plánovania rozšírenia prenosovej sústavy v trhovom prostredí. Táto úloha si vyžaduje pochopenie základných princípov dvojúrovňovej optimalizácie, jej reformulačných prístupov a možností numerického riešenia, preto v prvej kapitole zhrnieme tie teoretické východiská, ktoré sú potrebné pre ďalšiu analýzu.

V aplikačnej časti práce vychádzame z modelu uvedeného v odbornom článku [9], v ktorom investičné rozhodnutia lídra ovplyvňujú výsledky trhového vyrovnania a ceny elektriny. Model následne implementujeme v prostredí Python a získané výsledky porovnávame s referenčnými výsledkami uvedenými v článku. Okrem replikácie referenčného modelu práca prináša vlastné experimenty a modifikácie, ktoré analyzujú citlivosť investičných rozhodnutí a trhových výsledkov na vybrané predpoklady.

V súvislosti s touto problematikou v práci využívame poznatky z viacerých teoretic-

kých oblastí. Predovšetkým ide o teóriu matematického programovania a konvexnú optimalizáciu, v rámci ktorých zohráva kľúčovú úlohu teória duality a Kuhnove–Tuckerove podmienky, ktoré umožňujú reformuláciu dolnoúrovňového optimalizačného problému, a tým aj prechod k jednoúrovňovej formulácii. Ďalej nadväzujeme na poznatky z nelineárneho programovania a z teórie hier, konkrétne zo Stackelbergových hier typu líder–nasledovník, ktoré predstavujú prirodzenú interpretáciu dvojúrovňových úloh.

Práca je štruktúrovaná do troch kapitol. V kapitole 1 sú predstavené základy dvojúrovňovej optimalizácie, vrátane motivácie, prehľadu vybraných aplikácií a všeobecnej formulácie dvojúrovňového optimalizačného problému. Kapitola 2 je venovaná aplikácii dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti plánovania rozšírenia prenosovej sústavy (TEP). V tejto kapitole uvažovaný model vychádza z odborného článku [9]. Zameriavame sa na interpretáciu modelu, jeho implementáciu a porovnanie dosiahnutých výsledkov s referenčnými výsledkami uvedenými v článku. Kapitola 3 sa zameriava na vlastné modifikácie modelu a na analýzu jeho správania pri zmene vybraných predpokladov. Pozornosť je venovaná najmä citlivostnej analýze investičného rozpočtu a scenárových váh, ako aj zavedeniu rizikovo averzných modifikácií do referenčného modelu.

1 Teoretické východiská a súčasný stav poznania

Prvá kapitola je zameraná na teoretické východiská dvojúrovňovej optimalizácie. Jej cieľom je poskytnúť ucelený prehľad problematiky, ktorý slúži ako podklad pre následnú analýzu a replikáciu modelu v nadväzujúcich častiach práce. V jej úvode sa venujeme krátkej motivácii, ako aj prehľadu základných oblastí aplikácií. Pokračujeme všeobecnou formuláciou dvojúrovňového optimalizačného problému, kde sa zameriame na lineárne dvojúrovňové úlohy, základné pojmy a vybrané vlastnosti. Ďalšia časť kapitoly obsahuje prehľad vybraných metód riešenia problémov dvojúrovňovej optimalizácie. Na záver kapitoly uvádzame oblasť energetiky ako hlavné aplikačné zameranie tejto diplomovej práce. Pre orientáciu v základnej literatúre z oblasti dvojúrovňovej optimalizácie uvádzame najmä monografie [5, 6] a prehľadové štúdie [4, 7]. Pri spracovaní tejto kapitoly však vychádzame predovšetkým z literatúry [4], ktorá poskytuje prehľadné a ucelené zhrnutie základných pojmov, vlastností a vybraných prístupov k riešeniu dvojúrovňových optimalizačných úloh.

1.1 Základy dvojúrovňovej optimalizácie

V tejto podkapitole uvádzame základné teoretické východiská dvojúrovňovej optimalizácie, ktoré budú slúžiť ako podklad pre ďalšie časti práce. Najskôr sa zameriame na motiváciu a prehľad vybraných oblastí aplikácie, aby sme ukázali, v akých typoch rozhodovacích problémov sa dvojúrovňové modely prirodzene vyskytujú. Následne uvedieme všeobecnú formuláciu dvojúrovňového optimalizačného problému a napokon stručne predstavíme vybrané reformulačné prístupy, ktoré umožňujú previesť pôvodný dvojúrovňový model na jednoúrovňový problém.

1.1.1 Motivácia a prehľad aplikácií

Dvojúrovňová optimalizácia je vhodná na modelovanie situácií, v ktorých rozhodovací proces prebieha hierarchicky a rozhodnutie jedného aktéra ovplyvňuje reakciu druhého aktéra. Typicky ide o úlohy typu líder–nasledovník, kde líder prijíma rozhodnutie ako prvý a následovník naň následne reaguje vlastným optimálnym rozhodnutím.

Ako ilustračný príklad možno uviesť problém stanovenia mýta na cestnej sieti (*toll-*

setting problem), ktorý sa v literatúre často používa na objasnenie základnej myšlienky dvojúrovňovej optimalizácie [4, 10, 11]. Uvažujme správcu cestnej siete, ktorého budeme označovať ako *lídra* (*leader*). Úlohou lídra je nastaviť výšku mýta na vybraných úsekoch siete tak, aby maximalizoval svoj zisk. Po zverejnení výšky mýta reagujú účastníci cestnej siete, ktorých budeme označovať ako *nasledovníkov* (*followers*). Každý z nich si následne volí trasu s minimálnym cestovným nákladom, pričom zohľadňuje čas jazdy, dĺžku trasy a prípadné mýto.

Prirodzene sa vynára otázka, prečo je takýto problém považovaný za dvojúrovňový. Podstata spočíva v tom, že rozhodovací proces prebieha postupne, hierarchicky. Najskôr prijíma rozhodnutie líder stanovením výšky mýta, následne reagujú nasledovníci výberom trás. Z toho vyplýva, že zvolená výška mýta ovplyvňuje správanie nasledovníkov, v tomto prípade účastníkov cestnej siete, a tým aj rozdelenie prietokov v sieti. Líder by mal túto reakciu zohľadniť a voliť také mýta, ktoré pri danom správaní nasledovníkov vedú k maximálnemu príjmu.

Intuícia výsledku spočíva v tom, že ak je mýto príliš vysoké, vodiči sa regulovanému úseku vyhýbajú, a preto celkový príjem klesá. Naopak, pri veľmi nízkom mýte síce dochádza k vysokým prietokom v sieti, avšak dosahované zisky zostávajú nízke. Optimálna výška mýta preto predstavuje kompromis medzi priechodnosťou siete a nastavenou cenou mýta.

Kľúčovým princípom dvojúrovňovej optimalizácie je, že rozhodnutie na hornej úrovni (líder) explicitne zohľadňuje optimálnu reakciu dolnej úrovne (nasledovníkov). Vzniká tak hierarchická štruktúra, v ktorej optimálne riešenie na hornej úrovni priamo závisí od racionálneho správania nasledovníkov na dolnej úrovni. Podrobnejšie vysvetlenie ilustračného príkladu, ako aj postup odvodenia príslušnej matematickej formulácie, sú uvedené v literatúre [4].

Dvojúrovňové optimalizačné úlohy nachádzajú uplatnenie v rôznych oblastiach, v ktorých má rozhodovací proces hierarchickú štruktúru. Patria sem napríklad úlohy z oblasti *riadenia výnosov* (*Revenue Management*), kde horná úroveň určuje ceny alebo kapacity a dolná úroveň zachytáva reakciu zákazníkov [12], ďalej *riadenie prepravy nebezpečných materiálov*, v ktorom plánovač zohľadňuje správanie dopravcov pri voľbe trasy [13], ako aj *principal–agent problém*, kde líder stanovuje podmienky a nasledovník reaguje vlastným

rozhodnutím [14]. S dvojúrovňovou optimalizáciou úzko súvisia aj Stackelberg–Nashove hry, napríklad oligopolné modely s vodcom a nasledovníkmi [15]. Medzi ďalšie oblasti aplikácie patria *riadenie preťaženia dopravných systémov* (*Congestion Management*) [16, 17], *odhad matice pôvod–cieľ* (*Origin–Destination Matrix Estimation*) [18] a energetický sektor, ktorému sa v závere tejto kapitoly venujeme podrobnejšie.

1.1.2 Všeobecná formulácia dvojúrovňového problému

V nasledujúcej podkapitole primárne vychádzame z literatúry [4, 7, 19]. Dvojúrovňová optimalizácia predstavuje triedu hierarchických optimalizačných úloh, v ktorých prebieha rozhodovanie na dvoch úrovniach. Rozhodovací proces má prirodzenú postupnosť: líder (horná úroveň) najprv zvolí svoje rozhodnutie x a pritom predvída optimálnu reakciu nasledovníka (dolná úroveň) y. Takáto štruktúra zodpovedá Stackelbergovej hre, kde líder optimalizuje svoj cieľ s ohľadom na najlepšiu odozvu nasledovníka. Dvojúrovňové modely tak umožňujú formálne zachytiť situácie, v ktorých rozhodnutie lídra mení parametre problému nasledovníka, čo vyvoláva následnú reakciu iného aktéra či trhu, ktorú je potrebné zohľadniť.

Všeobecný dvojúrovňový optimalizačný problém s cieľovou funkciou hornej úrovne $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, ktorá je vo všeobecnosti zapísaná v tvare $F(x, y)$, keďže cieľ lídra môže závisieť nielen od jeho vlastného rozhodnutia x, ale aj od optimálnej reakcie nasledovníka y, a s cieľovou funkciou dolnej úrovne $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ môžeme zapísať v tvare [19]:

$$\min_{x \in X, y} \quad F(x, y) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad y \in \arg\min_{\tilde{y} \in Y} \left\{ f(x, \tilde{y}) \colon \begin{array}{ll} g_i(x, \tilde{y}) \leq 0, & i = 1, \ldots, I \\ h_j(x, \tilde{y}) = 0, & j = 1, \ldots, J \end{array} \right\} \tag{2}$$

$$G_k(x, y) \leq 0, \quad k = 1, \ldots, K \tag{3}$$

$$H_l(x, y) = 0, \quad l = 1, \ldots, L \tag{4}$$

Vektorové funkcie $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $h_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ predstavujú množinu obmedzení v tvare nerovností, resp. v tvare rovností dolnej úrovne. Vektorové funkcie $G_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $H_l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ predstavujú množinu obmedzení v tvare nerovností, resp. v tvare rovností hornej úrovne.

Množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ určujú prípustný typ premenných hornej a dolnej úrovne. Napríklad voľba $Y = \mathbb{Z}^m$ znamená, že premenné dolnej úrovne sú celočíselné. Vo všeobecnosti teda rozhodovacie premenné x a y môžu byť spojité, celočíselné alebo zmiešaného celočíselného typu. Úlohu (1)–(4) budeme ďalej označovať ako (Ú1). V ďalšom texte budeme pre jednoduchosť uvažovať spojitý prípad, teda $Y = \mathbb{R}^m$.

Prípustné množiny a reakčná množina

Vo formulácii dvojúrovňového modelu zohrávajú dôležitú úlohu aj množiny opisujúce prípustnosť a racionálnu (optimálnu) reakciu nasledovníka. Uvažujme úlohu (Ú1) a zaveďme niekoľko ďalších základných pojmov dvojúrovňového programovania [4].

S úlohou (Ú1) sa prirodzene spája relaxovaná úloha, ktorá vznikne vypustením podmienky optimality dolnej úrovne. V spojitom prípade $Y = \mathbb{R}^m$ má relaxovaná úloha tvar:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X,\, y} \quad & F(x,y) \\ \text{za podmienok} \quad & G(x,y) \leq 0, \\ & H(x,y) = 0, \\ & g(x,y) \leq 0, \\ & h(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Jej optimálna hodnota predstavuje dolný odhad optimálnej hodnoty pôvodnej dvojúrovňovej úlohy, pretože v relaxovanej úlohe pripúšťame aj také dvojice (x, y), pri ktorých y ešte nemusí byť optimálnou reakciou nasledovníka.

Tomuto problému zodpovedá relaxovaná prípustná oblasť (nazývaná aj oblasť obmedzení):

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \; x \in X,\; G(x,y) \leq 0,\; H(x,y) = 0,\; g(x,y) \leq 0,\; h(x,y) = 0\}\,.$$

Táto množina obsahuje všetky dvojice spĺňajúce explicitné obmedzenia hornej aj dolnej úrovne, avšak zatiaľ nezohľadňuje podmienku optimality dolnej úrovne.

Pre pevne zvolené $\bar{x} \in X$ definujeme prípustnú množinu dolnej úrovne ako

$$\Omega(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^m : g(\bar{x},y) \leq 0,\; h(\bar{x},y) = 0\}\,.$$

Na tejto množine nasledovník rieši svoju optimalizačnú úlohu. Reakčná množina dolnej úrovne (alebo množina racionálnych reakcií) je preto daná vzťahom:

$$R(\bar{x}) = \arg\min_{y \in \Omega(\bar{x})} f(\bar{x},y).$$

Každý prvok $y \in R(\bar{x})$ nazývame racionálnou odpoveďou nasledovníka. Zobrazenie $x \mapsto R(x)$ je vo všeobecnosti viachodnotové, teda pre jedno rozhodnutie hornej úrovne môže existovať viacero optimálnych reakcií dolnej úrovne. V niektorých prípadoch môže byť reakčná množina dokonca prázdna.

Množinu optimálnych riešení dolnej úrovne pre dané x označíme:

$$\Psi(x) = \arg\min_y \{f(x,y) : g(x,y) \leq 0,\ h(x,y) = 0\}.$$

V uvažovanom prípade teda reakčná množina nasledovníka zodpovedá množine $\Psi(x)$, pričom práve z tejto množiny sa vyberá riešenie vstupujúce do formulácie hornej úrovne.

Skutočnú dvojúrovňovú prípustnú množinu potom tvorí indukovaná oblasť

$$IR = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in X,\ G(x,y) \leq 0,\ H(x,y) = 0,\ y \in R(x)\}\,.$$

Ide teda o množinu všetkých dvojíc (x,y), ktoré spĺňajú obmedzenia hornej úrovne a zároveň y predstavuje optimálnu reakciu nasledovníka na dané x. Platí $IR \subseteq \Omega$. Množina IR býva typicky nekonvexná, môže byť nesúvislá a pri prítomnosti väzbových obmedzení medzi x a y môže byť v niektorých prípadoch dokonca prázdna.

Optimistická a pesimistická formulácia

Ak množina $\Psi(x)$ nie je jednoprvková, je potrebné špecifikovať, ktoré z optimálnych riešení dolnej úrovne vstupuje do formulácie hornej úrovne. V literatúre sa najčastejšie rozlišujú dva prístupy, optimistický a pesimistický [19].

V optimistickej formulácii líder predpokladá, že nasledovník si z množiny optimálnych riešení dolnej úrovne zvolí také riešenie, ktoré je pre lídra najvýhodnejšie. Výberová funkcia nasledovníka je potom daná vzťahom:

$$\psi_o(x) = \arg\min_y \{F(x,y) : y \in \Psi(x)\}.$$

Naopak, v pesimistickej formulácii líder uvažuje, že nasledovník si zvolí také optimálne riešenie dolnej úrovne, ktoré je z pohľadu lídra najmenej priaznivé. Príslušná výberová funkcia má tvar:

$$\psi_p(x) = \arg\max_y \{F(x,y) : y \in \Psi(x)\}.$$

Keďže optimistická formulácia býva z hľadiska teórie aj numerického riešenia spravidla lepšie uchopiteľná, v literatúre je optimistická formulácia frekventovanejšia. Z tohto

dôvodu budeme ďalej v našej práci uvažovať optimistickú formuláciu. Tomu zodpovedá nasledujúca dvojúrovňová úloha:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X,\, y \in Y} \quad & F(x,y) \\ \text{za podmienok} \quad & y = \psi_o(x), \\ & G(x,y) \leq 0, \\ & H(x,y) \leq 0. \end{aligned}$$

V praxi sa dvojúrovňové optimalizačné úlohy často transformujú na jednoúrovňové problémy, keďže pôvodná formulácia obsahuje dolnoúrovňovú optimalizačnú úlohu, ktorej optimálne riešenie vstupuje do formulácie hornej úrovne. To výrazne komplikuje teoretickú analýzu aj numerické riešenie modelu. Po vhodnej reformulácii je však možné takto vzniknutý problém riešiť pomocou štandardných optimalizačných nástrojov. V ďalšej časti preto stručne predstavíme dva vybrané reformulačné prístupy, ktoré budeme ďalej využívať aj v aplikačnej časti práce. Použité značenie a príslušné odvodenia uvádzame v súlade s literatúrou [19], z ktorej v tejto časti vychádzame.

1.1.3 Reformulácia na jednoúrovňový problém pomocou KKT podmienok

Ak je optimalizačný problém dolnej úrovne konvexný a zároveň sú splnené podmienky regularity, možno ho nahradiť prislúchajúcimi Karush - Kuhn- Tuckerovými podmienkami (KKT) [20, 5]. Za takýchto podmienok sú KKT podmienky nutné aj postačujúce pre optimálnosť riešenia dolnej úrovne, a preto možno požiadavku „y je optimálnou reakciou dolnej úrovne“ nahradiť systémom KKT podmienok. Týmto spôsobom možno úlohu dvojúrovňovej optimalizácie (1)–(4) zredukovať na nasledujúci jednoúrovňový optimalizačný problém [19, str. 6]:

$$\min_{x,y,\lambda,\mu} \quad F(x,y) \tag{5}$$

$$\text{za podmienok} \quad \nabla_y L(x,y,\lambda,\mu) = 0, \tag{6}$$

$$g_i(x,y) \leq 0, \quad i = 1,\ldots,I, \tag{7}$$

$$h_j(x,y) = 0, \quad j = 1,\ldots,J, \tag{8}$$

$$G_k(x,y) \leq 0, \quad k = 1,\ldots,K, \tag{9}$$

$$H_l(x,y) = 0, \quad l = 1,\ldots,L, \tag{10}$$

$$\lambda_i \, g_i(x, y) = 0, \quad i = 1, \ldots, I, \tag{11}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, I, \tag{12}$$

kde

$$L(x, y, \lambda, \mu) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \, g_i(x, y) + \sum_{j=1}^{J} \mu_j \, h_j(x, y). \tag{13}$$

KKT podmienky v reformulácii vystupujú vo forme Lagrangeovej funkcie a podmienky komplementarity (11). V dôsledku toho nemusí byť získaná formulácia numericky jednoduchá na riešenie, keďže v podmienke komplementarity vystupuje súčin dvoch premenných, čo predstavuje nelineárnu podmienku. Tieto podmienky často vedú k nekonvexnosti, pričom výsledná úloha môže nadobudnúť podobu nelineárneho zmiešaného celočíselného programu (MINLP) [5, 21].

V praxi sa preto komplementarita často linearizuje pomocou metódy big-M a binárnych premenných $u_i \in \{0, 1\}$ nasledovne [22]:

$$\lambda_i \leq M u_i, \qquad i = 1, \ldots, I, \tag{14}$$

$$g_i(x, y) \geq -M(1 - u_i), \qquad i = 1, \ldots, I. \tag{15}$$

Tieto dve skupiny obmedzení nahrádzajú podmienku (11) a spolu s rovnicami (7) a (12) zabezpečujú, že aspoň jeden z dvoch členov v súčine (λ_i alebo $g_i(x, y)$) je nulový. Voľba M je v tomto prípade kľúčová, príliš malé M môže vylučiť prípustné riešenia, zatiaľ čo voľba príliš veľkého M zhoršuje numerickú stabilitu. Podmienky komplementarity možno v moderných solveroch riešiť aj pomocou špeciálne usporiadaných množín (Special Ordered Sets – SOS) [23].

Aplikovaním uvedeného prístupu reformulácie vo väčšine prípadov dostávame výsledný model typu MPCC (*mathematical program with complementarity constraints*) [21].

1.1.4 Reformulácia na jednoúrovňový problém pomocou silnej duality

Alternatívnym prístupom pri reformulácii dvojúrovňového problému je využitie teórie duality [20]. Tento prístup je možné aplikovať za predpokladu, že problém dolnej úrovne je konvexný, má neprázdnu množinu prípustných riešení a že preň platí silná dualita. Za uvedených predpokladov možno podmienku, že y je optimálnym riešením dolnej úrovne, nahradiť podmienkami primárnej a duálnej prípustnosti spolu s podmienkou silnej duality.

Týmto spôsobom možno pôvodný dvojúrovňový problém prepísať do jednoúrovňového tvaru.

Uvedené myšlienky ilustrujeme na všeobecnom lineárnom dvojúrovňovom probléme so spojitými premennými [19, str. 7], pričom analogický postup možno rozšíriť aj na iné triedy dvojúrovňových úloh, ktoré spĺňajú konvexnosť a podmienky silnej duality. Uvažujme teda nasledujúci problém:

$$\min_{x,y} \quad c_x^\top x + c_y^\top y \tag{16}$$

$$\text{za podmienok} \quad A_x x + A_y y \geq a \tag{17}$$

$$y \in \arg\min_y \left\{ d^\top y : \; B_x x + B_y y \geq b \right\}. \tag{18}$$

kde $c_x \in \mathbb{R}^n$, $c_y, d \in \mathbb{R}^m$, $A_x \in \mathbb{R}^{K \times n}$, $A_y \in \mathbb{R}^{K \times m}$, $a \in \mathbb{R}^K$, $B_x \in \mathbb{R}^{I \times n}$, $B_y \in \mathbb{R}^{I \times m}$ a $b \in \mathbb{R}^I$. Lineárny člen zodpovedajúci premennej hornej úrovne x v cieľovej funkcii dolnej úrovne (18) sme vynechali bez straty všeobecnosti. Ako prvé uvedieme reformuláciu pomocou KKT podmienok, ktorú sme si odvodili v predošlom prístupe:

$$\min_{x,y,\lambda} \quad c_x^\top x + c_y^\top y \tag{19}$$

$$\text{za podmienok} \quad A_x x + A_y y \geq a \tag{20}$$

$$B_x x + B_y y \geq b \tag{21}$$

$$B_y^\top \lambda = d \tag{22}$$

$$\lambda_i \left(B_x x + B_y y - b \right)_i = 0, \quad i = 1, \ldots, I \tag{23}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{24}$$

Nelinearitu vystupujúcu v podmienke komplementarity (23) vieme riešiť podobne ako v predošlom prístupe, pomocou metódy big-M alebo SOS usporiadaných množín.

Následne zapíšeme jednoúrovňovú reformuláciu lineárneho dvojúrovňového problému (16)–(18) pomocou prístupu založeného na teórii duality. Duálna úloha optimalizačného lineárneho problému dolnej úrovne je daná nasledovne:

$$\max_{\lambda} \quad (b - B_x x)^\top \lambda \tag{25}$$

$$\text{za podmienok} \quad B_y^\top \lambda = d, \quad \lambda \geq 0. \tag{26}$$

Použitím princípu slabej duality platí pre každý prípustný primárno-duálny pár (y, λ):

$$d^\top y \geq (b - B_x x)^\top \lambda. \tag{27}$$

Použitím silnej duality je každý prípustný primárno-duálny pár, ktorý spĺňa nasledujúcu podmienku, optimálnym riešením lineárneho problému:

$$d^\top y \leq (b - B_x x)^\top \lambda. \tag{28}$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že lineárny dvojúrovňový problém (16)–(18) možno preformulovať na jednoúrovňový problém nasledovne:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y,\lambda} \quad & c_x^\top x + c_y^\top y && (29)\\
\text{s.t.} \quad & A_x x + A_y y \geq a, \quad B_x x + B_y y \geq b && (27)\\
& B_y^\top \lambda = d, \quad \lambda \geq 0 && (30)\\
& d^\top y \leq (b - B_x x)^\top \lambda. && (31)
\end{aligned}$$

Rozdiel medzi podmienkami (19)–(24) a (29)–(31) spočíva v tom, že množina podmienok komplementarity v (23) bola nahradená obmedzením silnej duality (31).

Množina obmedzení (31) v dualitne založenej jednoúrovňovej reformulácii je súčinom premenných x a λ, a preto má bilineárny charakter. Takéto bilineárne obmedzenia sa často linearizujú ťažšie, ak sú x aj λ spojité. V takom prípade sa na ich ošetrenie často používajú McCormickove obálky [24]. Ak však má premenná hornej úrovne x diskrétny charakter, napríklad je binárna alebo celočíselná, linearizácia bilineárneho obmedzenia býva podstatne jednoduchšia. Prístup založený na teórii duality je preto výhodný najmä v takých triedach dvojúrovňových problémov, v ktorých možno túto bilineárnu väzbu efektívne ošetriť, napríklad pri minmaxových optimalizačných úlohách [25].

V aplikačnej časti práce sme vychádzali z reformulácie založenej na primárnej a duálnej prípustnosti spolu s podmienkou silnej duality. KKT podmienky pritom slúžili ako teoretické východisko a prirodzené premostenie k jednoúrovňovej reformulácii dolnej úrovne. Nelineárne členy vznikajúce vo výslednom modeli sme následne linearizovali pomocou metódy big-M, čím sme získali výslednú formuláciu typu MILP použitú v numerickej implementácii.

Okrem uvedených prístupov sa v literatúre využívajú aj ďalšie reformulačné techniky, napríklad prístup založený na množinovom zobrazení *(set-valued mapping)* a prístup založený na funkcii optimálnej hodnoty dolnej úrovne [26, 27]. V prvom prípade sa využíva zobrazenie $\Psi(x)$, ktoré priraďuje množinu optimálnych riešení dolnej úrovne pre dané

rozhodnutie x, pričom dvojúrovňová optimalizačná úloha sa následne zapisuje ako úloha viazanej optimalizácie. V druhom prípade sa reformulácia opiera o funkciu optimálnej hodnoty dolnej úrovne, ktorá umožňuje alternatívny zápis pôvodnej úlohy. Podrobnejší prehľad týchto metód je uvedený v literatúre [19].

1.2 Algoritmické prístupy riešenia dvojúrovňových úloh

V predchádzajúcej podkapitole sme ukázali, že za vhodných predpokladov možno dvojúrovňový optimalizačný problém reformulovať na jednoúrovňový problém. Takto získané reformulácie však často vedú na úlohy so špecifickou štruktúrou, napríklad na úlohy typu MPCC, nelineárne zmiešané celočíselné modely alebo po ďalšej linearizácii na MILP formulácie [28]. Preto má zmysel stručne sa venovať aj tomu, akými algoritmickými prístupmi sa takéto úlohy riešia.

V literatúre sa prístupy k riešeniu dvojúrovňových úloh zvyčajne rozdeľujú na prístupy založené na matematickom programovaní a na evolučné, resp. metaheuristické prístupy [4, 7, 29]. Do prvej skupiny patria najmä reformulačné prístupy využívajúce KKT podmienky alebo dualitu, ďalej vetviace metódy typu `branch-and-bound` a `branch-and-cut`, ako aj niektoré zostupné, penalizačné a trust-region metódy. Tieto metódy sa uplatňujú predovšetkým pri úlohách s priaznivou štruktúrou, napríklad pri lineárnych, kvadratických alebo konvexných úlohách. Pri všeobecnejších alebo silne nelineárnych dvojúrovňových problémoch sa naopak častejšie používajú evolučné a metaheuristické prístupy inšpirované prírodou, napríklad genetické algoritmy alebo optimalizácia rojom častíc, ich podrobnejší prehľad je uvedený v [29].

V tejto podkapitole stručne zhrnieme hlavné algoritmické prístupy využívané pri riešení dvojúrovňových úloh. Osobitnú pozornosť pritom budeme venovať metódam relevantným pre model uvažovaný v tejto práci, teda najmä prístupom používaným pri lineárnych dvojúrovňových problémoch a pri ich reformuláciách na model typu MILP. Následne stručne spomenieme aj algoritmy aplikovateľné v prípade konvexnej a regulárnej dolnej úrovne a v závere uvedieme prehľad prístupov pre všeobecnejšie nelineárne dvojúrovňové úlohy.

1.2.1 Prístupy pre lineárne a konvexné dvojúrovňové úlohy

Pri lineárnych dvojúrovňových úlohách sa často využívajú metódy založené na enumerácii vrcholov a metódy komplementárneho pivotovania [4, 7].

Metódy založené na enumerácii vrcholov vychádzajú z vlastnosti lineárnych dvojúrovňových úloh, v ktorých sú všetky uvažované funkcie lineárne a množina prípustných hodnôt X pre premennú hornej úrovne x je polyedrálna. V tomto prípade sa riešenie hľadá medzi vrcholmi príslušnej prípustnej oblasti [30].

Ďalšou možnosťou pre lineárny prípad sú metódy založené na komplementárnom pivotovaní [30]. Prvým známym algoritmom tohto typu bol tzv. `Parametric Complementary Pivot` algoritmus (PCP), ktorý vychádza z reformulácie lineárneho dvojúrovňového problému pomocou KKT podmienok dolnej úrovne. Neskôr sa však ukázalo, že tento algoritmus nemusí vždy konvergovať k optimálnemu riešeniu [31].

Popri metódach určených pre čisto lineárny prípad sa pri konvexných a regulárnych dolnoúrovňových úlohách využívajú aj prístupy založené na KKT reformulácii a následnom vetvení. Pri úlohách, v ktorých je dolnoúrovňový problém konvexný a regulárny, možno dolnú úroveň nahradiť KKT podmienkami, čím sa získa jednoúrovňová reformulácia problému, ako sme si odvodili v predošlej podkapitole 1.1.3. Aj pri vhodných predpokladoch konvexnosti funkcií F, G a množiny X je však takto získaná úloha ťažko riešiteľná, a to najmä kvôli nekonvexnostiam vznikajúcim v podmienkach komplementarity a v podmienke stacionarity. Zatiaľ čo Lagrangeovo obmedzenie je v niektorých dôležitých prípadoch lineárne, napríklad pri lineárnych alebo konvexných kvadratických funkciách, podmienky komplementarity majú kombinatorický charakter, čo prirodzene vedie k použitiu vetviacich algoritmov typu `branch-and-bound`.

V schéme `branch-and-bound` koreňový uzol stromu zodpovedá problému, v ktorom sa neuvažujú podmienky komplementarity. V uzle stromu, ktorý nespĺňa podmienky komplementarity, sa vetvenie vykoná tak, že sa skonštruujú dva uzly potomkov, jeden s dodatočným obmedzením $\lambda_i = 0$ a druhý s obmedzením $g_i(x, y) = 0$. Optimálne hodnoty týchto problémov poskytujú dolné odhady pre príslušný podstrom. Uvedený princíp ilustruje všeobecnú myšlienku algoritmov typu `branch-and-bound` pri riešení reformulovaných dvojúrovňových úloh [32]. V aplikačnej časti práce však tento postup neimplementujeme explicitne, ale vychádzame z reformulácie uvažovaného modelu na jednoúrovňový

MILP problém, ktorý je následne riešený pomocou solvera Gurobi. Ten pri riešení zmiešaných celočíselných modelov využíva prístup typu `branch-and-cut`, ktorý vychádza z rámca `branch-and-bound` [33].

1.2.2 Prístupy pre všeobecnejšie nelineárne dvojúrovňové úlohy

Pri všeobecnejších nelineárnych dvojúrovňových úlohách sa používajú aj ďalšie klasické prístupy, najmä zostupné metódy, penalizačné metódy a metódy oblasti dôveryhodnosti [4, 7]. Zostupné metódy sa snažia pri danom prípustnom bode určiť smer, v ktorom dochádza k poklesu cieľovej funkcie hornej úrovne pri zachovaní prípustnosti vzhľadom na štruktúru dvojúrovňového problému. Špecifikom tohto nastavenia je, že hodnota cieľovej funkcie hornej úrovne závisí nielen od premenných lídra x, ale aj od optimálnej reakcie nasledovníka y, ktorá sa pri zmene rozhodnutia hornej úrovne môže meniť, takže dôležitým problémom je určenie gradientu, resp. subgradientu cieľovej funkcie hornej úrovne.

Penalizačné metódy sú založené na nahradení dolnoúrovňového problému penalizovaným problémom, v ktorom sa do cieľovej funkcie pridáva penalizačný člen za porušenie obmedzení dolnej úrovne. Týmto spôsobom sa vnorená optimalizácia eliminuje tak, že sa vyžaduje optimálnosť, resp. v niektorých variantoch len stacionarita, riešenia penalizovanej dolnej úrovne pri zachovaní jej obmedzení [7].

Metódy oblasti dôveryhodnosti sú iteratívne postupy, ktoré v okolí aktuálnej iterácie nahrádzajú pôvodnú úlohu lokálnym modelom a tento model minimalizujú v rámci oblasti dôveryhodnosti so stredom v aktuálnom bode. Kvalita vypočítaného kroku sa následne vyhodnocuje porovnaním skutočného a modelom predikovaného zníženia cieľovej funkcie, pričom na základe tohto porovnania sa krok prijme alebo zamietne a príslušne sa upraví aj veľkosť oblasti dôveryhodnosti [7].

1.3 Dvojúrovňová optimalizácia v oblasti energetiky

Z dôvodu, že sa v ďalších častiach práce venujeme aplikácii dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti energetiky, v tejto podkapitole stručne predstavíme vybrané smery jej využitia v tejto oblasti. Dvojúrovňové modely sa v energetike prirodzene uplatňujú v situáciách, v ktorých rozhodnutie jedného subjektu ovplyvňuje následnú reakciu trhu, prevádzky alebo iných účastníkov systému. Takéto hierarchické vzťahy sa vyskytujú najmä pri investič-

ných, prevádzkových a trhových rozhodnutiach. Podrobnejší prehľad aktuálnych aplikácií uvádza napríklad literatúra [8], v tejto práci sa však sústredíme predovšetkým na oblasť plánovania rozšírenia prenosovej sústavy, ktorá predstavuje hlavné aplikačné zameranie tejto diplomovej práce.

1.3.1 Vybrané aplikačné smery v oblasti energetiky

Jednou z typických aplikačných oblastí je plánovanie rozšírenia prenosovej sústavy (Transmission Expansion Planning, TEP) v liberalizovaných trhoch s elektrinou. Na takýchto trhoch vzniká hierarchická štruktúra rozhodovania prirodzene, keďže investície do siete a investície do výrobných kapacít sa navzájom ovplyvňujú. V závislosti od poradia rozhodnutí rozlišujeme medzi proaktívnym a reaktívnym TEP. V prípade proaktívneho TEP je lídrom prenosová spoločnosť, ktorá sa najprv rozhoduje o rozšírení siete a následne na to reagujú výrobcovia (investíciami alebo prevádzkou). Naopak, pri reaktívnom TEP sa predpokladá, že výrobné kapacity sú už určené, a rozšírenie prenosovej sústavy sa optimalizuje až následne ako reakcia na túto situáciu, typicky s ohľadom na prevádzku trhu a bezpečnú realizovateľnosť tokov [34].

V literatúre sa pritom stretávame s oboma prístupmi, pričom proaktívne plánovanie je výrazne zastúpené najmä v akademických modeloch. Práve tento typ hierarchického vzťahu medzi investičným rozhodovaním a následnou reakciou trhu bude tvoriť základ aj pre model uvažovaný v aplikačnej časti práce.

Okrem TEP sa dvojúrovňová optimalizácia v energetike využíva aj pri plánovaní rozšírenia výrobných kapacít, kde zväčša ide o tepelné zdroje, obnoviteľné zdroje alebo akumulačné zdroje (*Generation Expansion Planning*, GEP). Horná úroveň spravidla reprezentuje investičné rozhodovanie výrobcu alebo investora a dolná úroveň následné trhové vyrovnanie alebo dispečing [35]. Ďalšou aplikačnou oblasťou sú systémy uskladňovania energie (*Energy Storage Systems*, ESS), v ktorých sa dvojúrovňové modely používajú napríklad pri optimálnom ponúkaní na trhu, plánovaní nabíjania a vybíjania alebo pri investičných rozhodnutiach do úložných zariadení [36]. Významné postavenie majú tieto modely aj pri strategickej prevádzke a ponukovom správaní účastníkov trhu, kde horná úroveň reprezentuje strategického hráča maximalizujúceho svoj zisk a dolná úroveň modeluje vysporiadanie trhu [37]. Dvojúrovňové prístupy sa uplatnili aj v oblasti trhu so zemným

plynom, napríklad pri modelovaní strategickej produkcie, cash-out mechanizmov alebo prevádzkových rozhodnutí v plynárenských sieťach [38].

Zo spomenutých oblastí je zrejmé, že dvojúrovňová optimalizácia predstavuje v energetike prirodzený nástroj na modelovanie situácií, v ktorých investičné alebo strategické rozhodnutia jedného subjektu ovplyvňujú následný trhový alebo prevádzkový výsledok. V ďalšej časti práce sa preto sústredíme na oblasť plánovania rozšírenia prenosovej sústavy, ktorá predstavuje hlavné aplikačné jadro tejto diplomovej práce.

2 Aplikácia dvojúrovňovej optimalizácie v oblasti plánovania rozšírenia prenosovej sústavy v trhovom prostredí

V tejto kapitole sa venujeme aplikácii dvojúrovňovej optimalizácie na problém plánovania rozšírenia prenosovej sústavy v trhovom prostredí na základe článku *A Bilevel Approach to Transmission Expansion Planning Within a Market Environment* [9]. Ide o prirodzenú aplikáciu dvojúrovňového programovania, keďže investičné rozhodnutia prevádzkovateľa prenosovej sústavy ovplyvňujú následnú reakciu trhu, zatiaľ čo výsledky trhového vyrovnania spätne určujú ekonomickú výhodnosť jednotlivých investícií. Tento hierarchický vzťah medzi investičným rozhodovaním a trhovou reakciou tvorí základ modelu, ktorý budeme v práci analyzovať, implementovať a neskôr v ďalšej kapitole rozširovať o prvky rizikovej averzie.

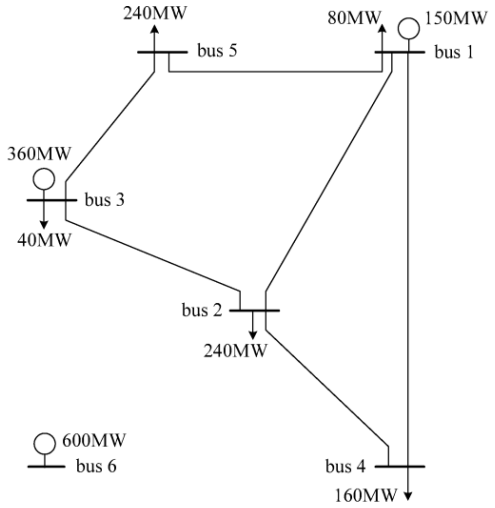
Referenčný článok sa zaoberá problémom plánovania rozšírenia prenosovej sústavy (*Transmission Expansion Planning* – TEP) v trhovom prostredí, kde výrobcovia a spotrebitelia voľne obchodujú s elektrickou energiou prostredníctvom centralizovaného trhu typu *pool*. Pool predstavuje trh s elektrickou energiou, na ktorom výrobcovia a spotrebitelia predkladajú svoje ponuky a dopyty, pričom trhová cena sa určuje na základe ich agregácie.

Pre porozumenie príslušného modelu je dôležité vnímať ho ako hierarchický vzťah dvoch aktérov v prostredí liberalizovaného trhu s elektrickou energiou. Lídrom je v tomto vzťahu prevádzkovateľ prenosovej sústavy (TSO), ktorý rozhoduje o realizácii investícií do nových prenosových vedení s ohľadom na rozpočtové obmedzenia a zároveň s cieľom podporiť efektívne fungovanie trhu. Tieto rozhodnutia prijíma s vedomím, že na každú zmenu infraštruktúry zareaguje nasledovník, teda trh. Trh na investičné rozhodnutia reaguje prostredníctvom zmien tokov v sieti, výroby, spotreby a uzlových cien elektriny. Jeho cieľom je nájsť novú rovnováhu medzi ponukou výrobcov a dopytom spotrebiteľov pri aktuálnych fyzikálnych obmedzeniach siete. Táto hierarchia, v ktorej rozhodnutie o investícii (*horná úroveň*) priamo ovplyvňuje výsledné toky a ceny na trhu (*dolná úroveň*), zatiaľ čo trhové výsledky spätne odzrkadľujú ekonomickú výhodnosť investícií, poukazuje na problém dvojúrovňovej optimalizácie.

Replikáciu modelu realizujeme v dvoch krokoch. Najprv model implementujeme a overujeme na jednoduchej testovacej sieti *Garver's six-bus system*, ktorá umožňuje prehľadné vysvetlenie štruktúry modelu, významu rozhodovacích premenných a jednotlivých obmedzení. Následne pristupujeme k rozsiahlejšej case study uvedenej v článku, založenej na *IEEE 24-bus Reliability Test System*.

V podkapitole 2.1 predstavíme základný model, jeho hierarchickú štruktúru, význam jednotlivých úrovní, aktérov a optimalizačných problémov, ktoré tieto úrovne riešia. Následne v podkapitole 2.2 uvedieme matematickú formuláciu dvojúrovňového modelu a princíp jeho transformácie na jednoúrovňový model. V podkapitole 2.3 potom opíšeme implementáciu modelu v programovacom prostredí Python a porovnáme získané výstupy s výsledkami prezentovanými v referenčnom článku.

2.1 Predstavenie základného modelu



Obr. 1: Garvers's six-bus test system (Zdroj: [9])

Na Obr. 1 je zobrazená skúmaná prenosová sieť *Garver's six-bus test system*, ktorá pozostáva zo šiestich uzlov. Označenia *bus* predstavujú jednotlivé uzly siete, pričom v každom uzle sa môže nachádzať výroba, dopyt alebo ich kombinácia. Generátory sú na obrázku označené krúžkom a pri jednotlivých uzloch sú uvedené maximálne hodnoty výroby alebo dopytu v MW.

Prenosové vedenia prepájajú jednotlivé uzly a každému vedeniu je priradená orientácia

určená smerom $o(k) \to r(k)$, kde $o(k)$ označuje začiatočný uzol vedenia a $r(k)$ koncový uzol vedenia. Táto orientácia slúži len na matematický zápis tokov v modeli a nepredstavuje fyzicky pevný smer toku elektriny. Tok na vedení k v scenári w označujeme $f_k(w)$. Ak je hodnota toku kladná, energia prúdi v smere orientácie, pri zápornej hodnote opačným smerom.

Množina existujúcich vedení je označená ako Ω_L a predstavuje vedenia, ktoré sú v sústave vybudované už na začiatku plánovacieho horizontu. Množina kandidátnych vedení Ω_L^+ obsahuje potenciálne nové vedenia, o ktorých výstavbe rozhoduje prevádzkovateľ prenosovej sústavy v hornej úrovni modelu.

Na takto opísanej fyzickej sieti následne implementujeme dvojúrovňový model, v ktorom hornú úroveň tvorí investičné rozhodovanie prevádzkovateľa prenosovej sústavy a dolnú úroveň reakcia trhu.

Horná úroveň: investičné rozhodnutie prevádzkovateľa prenosovej sústavy (TSO)

Horná úroveň modelu reprezentuje rozhodovanie prevádzkovateľa prenosovej sústavy (TSO), ktorého úlohou je plánovať rozšírenie siete prostredníctvom výstavby nových prenosových vedení. TSO sa pre každé kandidátne vedenie $k \in \Omega^{L+}$ rozhoduje, či sa vedenie postaví alebo nie. Toto rozhodnutie modelujeme binárnou premennou:

$$x_k \in \{0, 1\}, \ \forall\, k \in \Omega^{L+},$$

kde $x_k = 1$ znamená, že TSO sa do daného vedenia k rozhodne investovať a $x_k = 0$ znamená, že sa rozhodne neinvestovať. Výstavba vedenia je spojená s investičnými nákladmi c_k, potom celkové investičné náklady TSO sú dané súčtom $\sum_{k \in \Omega^{L+}} c_k x_k$. Z dôvodu, že investície sú v praxi obmedzené rozpočtom, v modeli uvažujeme aj rozpočtové obmedzenie. Obmedzenie predstavuje celkové investičné náklady, ktoré nesmú prekročiť dostupný rozpočet označený ako $c^{\max}$.

Investičné rozhodnutia sú prijímané v podmienkach neistoty, budúci vývoj dopytu, ponúk alebo dostupnosti zdrojov je preto aproximovaný pomocou množiny scenárov Ω^W. Každému scenáru $w \in \Omega^W$ je priradená váha $\delta(w)$, ktorá vyjadruje jeho relatívnu dôležitosť. TSO teda nehodnotí investície len pre jeden „typický“ stav systému, ale maximalizuje očakávaný prínos naprieč scenármi.

Cieľom TSO je teda zvoliť investičný plán, ktorý pri rešpektovaní rozpočtového obmedzenia maximalizuje očakávaný prínos siete naprieč uvažovanými scenármi. Hodnota tohto prínosu však závisí od výsledku trhového vyrovnania na dolnej úrovni, preto v ďalšej časti najprv predstavíme reakciu trhu.

Dolná úroveň: reakcia trhu, trhové vyrovnanie (*market clearing*)

Dolná úroveň modelu predstavuje reakciu trhu v scenári $w \in \Omega^W$. Pre danú prenosovú sieť, teda pre kapacity vedení vyplývajúce z investičného rozhodnutia TSO, trh vykoná trhové vyrovnanie (*market clearing*). Určí, koľko sa bude vyrábať a spotrebúvať, aké budú toky v sieti a (implicitne) aj uzlové ceny, pričom rešpektuje fyzikálne obmedzenia siete.

Aktérmi dolnej úrovne sú *výrobcovia*, ktorí sú reprezentovaní blokmi *ponúk*. Premenné $g_{ib}(w)$ vyjadrujú, koľko vyrobí b-tý blok výrobnej jednotky i v scenári w. Každý blok má svoju ponúkanú cenu λ_{Gib}. Druhým aktérom sú *spotrebitelia*, ktorí sú reprezentovaní blokmi *dopytu*. Premenné $d_{jh}(w)$ vyjadrujú, koľko spotrebuje h-tý blok dopytu j v scenári w. Každý blok má svoju ochotu platiť λ_{Djh}. Ak v niektorom uzle nie je možné uspokojiť dopyt (napr. kvôli kapacitám vedení), model umožňuje *nedodanie* $r_j(w)$, ktoré reprezentuje tzv. *load shedding* pre dopyt j a je penalizované koeficientom c_j^U. Model uvažuje technické obmedzenia ako minimálnu hodnotu spotreby či maximálnu hodnotu dodávok.

Úlohou trhu je maximalizovať spoločenský blahobyt v scenári w. Trh volí výrobu $g_{ib}(w)$ a spotrebu $d_{jh}(w)$ tak, aby maximalizoval celkovú hodnotu spotreby podľa cien dopytu λ_{Djh}, zníženú o náklady výroby podľa cien ponúk λ_{Gib} a o penalizáciu prípadného nedodania $r_j(w)$ koeficientom c_j^U.

Aby však trhové vyrovnanie rešpektovalo fyzikálne vlastnosti prenosovej sústavy, riešenie musí spĺňať sieťové obmedzenia. Základom sú bilančné rovnice v uzloch, ktoré zabezpečujú rovnováhu medzi výrobou, spotrebou a tokmi elektriny. Toky na vedeniach $f_k(w)$ sú viazané na fázové uhly uzlov $\theta_s(w)$ prostredníctvom DC aproximácie tokov, pričom orientácia vedenia k je určená uzlami $o(k)$ a $r(k)$. Zároveň musia byť splnené kapacitné obmedzenia vedení, t. j. $|f_k(w)| \leq f_k^{\max}$. Pre kandidátne vedenia sa realizovateľnosť toku odvíja od investičného rozhodnutia x_k, takže tok je povolený iba v prípade, že vedenie bolo vybudované. Okrem sieťových obmedzení sú uvažované aj technické hranice ponúk a dopytov (horné a dolné medze pre $g_{ib}(w)$ a $d_{jh}(w)$) a nezápornosť nedodanej energie

$r_j(w)$.

Po vyriešení dolnej úrovne sú pre každý scenár w určené optimálne hodnoty $g_{ib}(w)$, $d_{jh}(w)$, $f_k(w)$ a prípadne $r_j(w)$. Uzlové ceny vznikajú ako duálne (tieňové) ceny uzlovej bilancie a používajú sa na vyhodnotenie ekonomického efektu investičných rozhodnutí.

Kľúčovým prvkom modelu je hierarchická štruktúra. Najskôr TSO zvolí investičné rozhodnutia x_k pre kandidátne vedenia. Pre daný investičný plán následne trh na dolnej úrovni vykoná trhové vyrovnanie v každom scenári $w \in \Omega^W$ a určí výrobu $g_{ib}(w)$, spotrebu $d_{jh}(w)$, prípadné nedodanie $r_j(w)$ a toky v sieti $f_k(w)$. Tieto trhové výsledky následne určujú hodnotu spoločenského blahobytu v danom scenári.

Spoločenský blahobyt v scenári w môžeme chápať ako rozdiel medzi hodnotou obslúženého dopytu a nákladmi výroby, pričom prípadné nedodanie energie je penalizované koeficientom c_j^U. Pre ďalšie potreby práce si označme scenárový spoločenský blahobyt ako

$$W_w := \sigma \left(\sum_{j \in \Omega^D} \sum_{h \in \Omega_j} \lambda_{Djh} d_{jh}(w) - \sum_{i \in \Omega^G} \sum_{b \in \Omega_i} \lambda_{Gib} g_{ib}(w) - \sum_{j \in \Omega^D} c_j^U r_j(w) \right), \qquad (32)$$

kde Ω^D označuje množinu dopytov, Ω^G množinu výrobných jednotiek a množiny Ω_j, resp. Ω_i, označujú príslušné bloky dopytu a výroby.

Je dôležité poznamenať, že pojem spoločenského blahobytu vystupuje v hornej aj dolnej úrovni v rovnakom ekonomickom význame. Na dolnej úrovni predstavuje veličinu, ktorú trh maximalizuje v jednotlivom scenári, zatiaľ čo na hornej úrovni TSO pracuje s jej scenárovo váženou hodnotou, zníženou o investičné náklady. Keďže trhové výsledky a investičné náklady sú vyjadrené v odlišných časových mierkach, v účelovej funkcii sa používa škálovací faktor σ, prevzatý z článku [9], ktorý zabezpečuje ich porovnateľnosť.

2.2 Matematická formulácia modelu

V nadväznosti na interpretáciu uvedenú v časti 2.1 sa v tejto podkapitole zameriavame na matematickú formuláciu dvojúrovňového modelu. Zachovávame pritom označenie prevzaté z referenčného článku [9]. Z dôvodu, že formulácia využíva rozsiahlejšie označenie množín, parametrov a premenných, po uvedení modelu najprv zhrnieme použitú notáciu. Následne stručne objasníme význam jednotlivých rovníc a ohraničení. Záver podkapitoly je venovaný reformulácii dvojúrovňového modelu na jednoúrovňový model typu MILP(zmiešaný celočíselný lineárny problém).

Všeobecná štruktúra

Horná úroveň:

$$\max_{x_k} \quad \sigma\Bigg[\sum_{w\in\Omega^W}\delta(w)\Bigg[\sum_{j\in\Omega^D}\sum_{h\in\Omega_j}\lambda_{Djh}d_{jh}(w)-\sum_{i\in\Omega^G}\sum_{b\in\Omega_i}\lambda_{Gib}g_{ib}(w) - \sum_{j\in\Omega^D}c_j^U r_j(w)\Bigg]\Bigg]-\sum_{k\in\Omega^{L+}}c_k x_k \tag{33}$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{k\in\Omega^{L+}}c_k x_k \le c^{\max} \tag{34}$$

$$x_k = 1, \quad \forall k \in \Omega^L \setminus \Omega^{L^+} \tag{35}$$

$$x_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in \Omega^{L^+} \tag{36}$$

Pre dané investičné rozhodnutie hornej úrovne a pre každý scenár $w \in \Omega^W$ sú premenné $g_{ib}(w)$, $d_{jh}(w)$, $r_j(w)$, $f_k(w)$ a $\theta_s(w)$ riešením nasledujúcej optimalizačnej úlohy:

Dolná úroveň:[1]

$$\arg\max_{g,d,r,f,\theta}\Bigg\{\sum_{j\in\Omega^D}\sum_{h\in\Omega_j}\lambda_{Djh}d_{jh}(w)-\sum_{i\in\Omega^G}\sum_{b\in\Omega_i}\lambda_{Gib}g_{ib}(w) - \sum_{j\in\Omega^D}c_j^U r_j(w)\Bigg\} \tag{37}$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{i\in\Psi_s^G}\sum_{b\in\Omega_i}g_{ib}(w)-\sum_{k\,:\,o(k)=s}f_k(w)+\sum_{k\,:\,r(k)=s}f_k(w) + \sum_{j\in\Psi_s^D}r_j(w)=\sum_{j\in\Psi_s^D}\sum_{h\in\Omega_j}d_{jh}(w)\ :\ \lambda_s(w), \quad \forall s\in\Omega^N \tag{38}$$

$$f_k(w) = b_k x_k\big(\theta_{o(k)}(w)-\theta_{r(k)}(w)\big)\ :\ \phi_k(w), \quad \forall k\in\Omega^L \tag{39}$$

$$f_k(w) \le f_k^{\max}\ :\ \phi_k^{\max}(w), \quad \forall k\in\Omega^L \tag{40}$$

$$f_k(w) \ge -f_k^{\max}\ :\ \phi_k^{\min}(w), \quad \forall k\in\Omega^L \tag{41}$$

$$g_{ib}(w) \le g_{ib}^{\max}(w)\ :\ \varphi_{ib}^{\max}(w), \quad \forall i\in\Omega^G, b\in\Omega_i \tag{42}$$

$$d_{jh}(w) \le d_{jh}^{\max}(w)\ :\ \beta_{jh}^{\max}(w), \quad \forall j\in\Omega^D, h\in\Omega_j \tag{43}$$

$$r_j(w) \le d_j^{\max}(w)\ :\ \alpha_j^{\max}(w), \quad \forall j\in\Omega^D \tag{44}$$

[1]Premenné uvedené za dvojbodkou pri jednotlivých obmedzeniach predstavujú príslušné duálne premenné. Ich význam a interpretáciu podrobnejšie vysvetlíme v ďalšej časti tejto podkapitoly.

$$\sum_{h \in \Omega_j} d_{jh}(w) \geq d_j^{\min}(w) \ : \ \rho_j(w), \quad \forall j \in \Omega^D \tag{45}$$

$$\theta_s(w) \leq \pi \ : \ \xi_s^{\max}(w), \quad \forall s \in \Omega^N \setminus \{s^{\text{slack}}\} \tag{46}$$

$$\theta_s(w) \geq -\pi \ : \ \xi_s^{\min}(w), \quad \forall s \in \Omega^N \setminus \{s^{\text{slack}}\} \tag{47}$$

$$\theta_{s^{\text{slack}}}(w) = 0 \ : \ \chi_s(w) \tag{48}$$

$$g_{ib}(w) \geq 0, \ d_{jh}(w) \geq 0, \ r_j(w) \geq 0, \ \forall i \in \Omega^G, b \in \Omega_i, j \in \Omega^D, h \in \Omega_j \tag{49}$$

Nižšie uvádzame kompletný zoznam použitej notácie v modeli z dôvodu, že v časti 2.1 zavádzame len časť notácie potrebnej na interpretáciu modelu.

Notácia[2]

Konštanty

b_k	susceptancia vedenia k
c_j^U	náklady na neobslúženie odberu spotrebiteľa j (€/MWh), penalizácia za *load shedding*
c_k	investičné náklady na vybudovanie vedenia k (€)
$c^{\max}$	rozpočet na investície do rozšírenia prenosovej sústavy (€)
$d_j^{\max}(w)$	maximálny výkon odoberaný j-tým dopytom v scenári w (MW)
$d_j^{\min}(w)$	minimálny výkon odoberaný j-tým dopytom v scenári w (MW)
$d_{jh}^{\max}(w)$	veľkosť h-tého bloku j-tého dopytu v scenári w (MW)
$f_k^{\max}$	kapacita vedenia k (MW)
$g_{ib}^{\max}(w)$	veľkosť b-tého obloku i-tej výrobnej jednotky v scenári w (MW)
$o(k)$	počiatočný uzol vedenia k
$r(k)$	koncový uzol vedenia k
$\Gamma^{\max}$	horná hranica spojitej premennej $\bar{\phi}_k(w)$
$\delta(w)$	váha scenára w
λ_{Djh}	*bid* (ochota platiť) cena h-tého bloku dopytu j (€/MWh)
λ_{Gib}	*offer* (ponúkaná) cena b-tého bloku výrobnej jednotky i (€/MWh)
σ	váhový faktor, ktorý zabezpečuje porovnateľnosť ročných investičných nákladov a spoločenského blahobytu

Indexy a množiny

$s(i)$	index uzla, v ktorom je umiestnená i-ta výrobná jednotka
$s(j)$	index uzla, v ktorom je umiestnený j-tý dopyt
Ψ_s^D	množina indexov dopytov pripojených v uzle s
Ψ_s^G	množina indexov výrobných jednotiek umiestnených v uzle s
Ω_i	množina indexov blokov i-tej výrobnej jednotky
Ω_j	množina indexov blokov j-tého dopytu
Ω^D	množina indexov dopytov
Ω^G	množina indexov výrobných jednotiek
Ω^L	množina všetkých prenosových vedení, existujúcich aj uvažovaných
Ω^{L+}	množina všetkých uvažovaných nových prenosových vedení
Ω^N	množina všetkých uzlov siete
Ω^W	množina všetkých scenárov

Premenné

x_k	binárna premenná; $x_k = 1$, ak je vedenie k vybudované, inak $x_k = 0$
$g_{ib}(w)$	výkon vyrobený b-tým blokom i-tej výrobnej jednotky v scenári w (MW)
$d_{jh}(w)$	výkon spotrebovaný h-tým blokom j-tého dopytu v scenári w (MW)
$r_j(w)$	neobslúžený odber j-tého dopytu v scenári w (MW)
$f_k(w)$	tok výkonu cez vedenie k v scenári w (MW)
$\theta_s(w)$	fázový uhol napätia v uzle s v scenári w (radiány)
$\bar{\phi}_k(w)$	pomocná spojitá premenná prislúchajúca vedeniu k a scenáru w, použitá pri linearizácii

Duálne premenné

$\lambda_s(w)$	duálna premenná prislúchajúca bilančnej rovnici v uzle s v scenári w; ekonomicky ju možno interpretovať ako uzlovú cenu elektriny
$\phi_k(w)$	duálna premenná prislúchajúca rovnici DC toku na vedení k v scenári w
$\phi_k^{\max}(w)$	duálna premenná horného kapacitného obmedzenia toku na vedení k v scenári w
$\phi_k^{\min}(w)$	duálna premenná dolného kapacitného obmedzenia toku na vedení k v scenári w
$\varphi_{ib}^{\max}(w)$	duálna premenná horného obmedzenia výkonu b-tého bloku i-tej výrobnej jednotky v scenári w
$\beta_{jh}^{\max}(w)$	duálna premenná horného obmedzenia h-tého bloku dopytu j v scenári w
$\alpha_j^{\max}(w)$	duálna premenná horného obmedzenia neobslúženého odberu dopytu j v scenári w
$\rho_j(w)$	duálna premenná obmedzenia minimálnej úrovne spotreby dopytu j v scenári w
$\xi_s^{\max}(w)$	duálna premenná horného obmedzenia fázového uhla v uzle s v scenári w
$\xi_s^{\min}(w)$	duálna premenná dolného obmedzenia fázového uhla v uzle s v scenári w
$\chi_s(w)$	duálna premenná prislúchajúca fixácii fázového uhla v referenčnom uzle v scenári w

[2]Zoznam použitých premenných, parametrov a množín je prevzatý a doplnený o duálne premenné modelu podľa literatúry [9, str. 1].

Zo všeobecnej formulácie vyplýva, že rovnice (33)–(36) predstavujú hornú úroveň modelu, zatiaľ čo súbor rovníc (37)–(49) predstavuje dolnú úroveň modelu, ktorá je formulovaná pre každý scenár $w \in \Omega^W$.

Účelová funkcia hornej úrovne (33) maximalizuje očakávaný spoločenský blahobyt naprieč všetkými uvažovanými scenármi, ktorý je násobený váhovým faktorom σ, znížený o investičné náklady spojené s výstavbou nových prenosových vedení. Obmedzenie (34) stanovuje hornú hranicu celkových investičných nákladov. Rovnica (35) vyjadruje skutočnosť, že existujúce prenosové vedenia sú považované za už vybudované. Posledné obmedzenie (36) definuje binárny charakter rozhodovacích premenných hornej úrovne, ktoré určujú, či bude príslušné kandidátne prenosové vedenie realizované ($x_k = 1$) alebo nie ($x_k = 0$).

Účelová funkcia dolnej úrovne (37) maximalizuje spoločenský blahobyt, ktorý je definovaný ako rozdiel medzi súčtom akceptovaných dopytových blokov násobených ich príslušnými cenovými ponukami a súčtom akceptovaných výrobných blokov násobených ich ponukovými cenami, znížený o náklady na obmedzenie dodávok (*load shedding*). Premenné dolnej úrovne zahŕňajú $d_{jh}(w)$, $g_{ib}(w)$, $r_j(w)$, $f_k(w)$ a $\theta_s(w)$, ktoré sú definované pre všetky príslušné indexy $j \in \Omega^D, h \in \Omega_j, i \in \Omega^G, b \in \Omega_i, k \in \Omega^L, s \in \Omega^N$ a pre každý scenár $w \in \Omega^W$. Rovnica (38) predstavuje bilančnú rovnováhu v každom uzle prenosovej sústavy. Obmedzenie (39) popisuje tok výkonu cez jednotlivé prenosové vedenia. Je dôležité poznamenať, že tento vzťah je násobený binárnou premennou x_k, čo znamená, že v prípade, ak príslušné vedenie nie je vybudované, tok výkonu cez dané vedenie je nulový. Rovnice (40) až (41) reprezentujú horné a dolné limity tokov na prenosových vedeniach. Ohraničenia (42) a (43) určujú maximálne veľkosti výrobných a dopytových blokov. Obmedzenie (44) určuje hornú hranicu neobslúženého dopytu, zatiaľ čo rovnica (45) zabezpečuje dodržanie minimálnej úrovne spotreby. Rovnice (46) a (47) definujú hranice uhlov napätia v jednotlivých uzloch pre každý uvažovaný scenár, pričom rovnica (48) fixuje uhol napätia referenčného uzla. Riadok (49) napokon predstavuje deklaráciu nezápornosti rozhodovacích premenných modelu dolnej úrovne.

2.2.1 Prechod k jednoúrovňovej formulácii modelu typu MILP

V tejto časti stručne vysvetlíme princíp prechodu z pôvodného dvojúrovňového modelu (2.2) na jednoúrovňový v tvare zmiešaného celočíselného lineárneho programu (MILP). Dolná úroveň je pre každý scenár $w \in \Omega^W$ lineárnym (a teda konvexným) optimalizačným problémom, preto je možné jej optimálne riešenie nahradiť podmienkami duality, v súlade s postupom uvedeným v 1.1.4. Konkrétne, dolnoúrovňový problém možno ekvivalentne opísať sústavou podmienok: prípustnosť primárnej úlohy, prípustnosť duálnej úlohy a podmienka silnej duality, ktorá zabezpečuje rovnosť optimálnych hodnôt primárnej a duálnej úlohy. Týmto spôsobom odstránime vnorenú optimalizáciu a získame jednoúrovňový model, to znamená, že dolná úroveň sa prestáva v modeli vyskytovať ako vnorená optimalizačná úloha a je nahradená sústavou podmienok optimality. Výsledkom je jednoúrovňová formulácia, ktorú môže líder riešiť priamo.

Duálne premenné prislúchajúce obmedzeniam dolnej úrovne uvádzame v časti 2.2, kde sú zapísané za dvojbodkou pri jednotlivých rovniciach. Súhrný prehľad duálnych premenný je uvedený v časti o notácii 2.2. Po pridaní uvedených podmienok k hornej úrovni modelu vzniká jednoúrovňový zmiešaný celočíselný nelineárny problém (MINLP), pričom nelinearita je spôsobená najmä súčinmi binárnych a spojitých premenných. V tomto prípade vznikajú pri investičných rozhodnutiach, keďže x_k vystupuje aj v obmedzeniach dolnej úrovne (napr. pri zapínaní/vypínaní vedení).Tieto nelineárne členy sa následne zlinearizujú pomocou metódy big M, opísanej v časti 1.1.3, čím sa model redukuje na zmiešaný celočíselný lineárny program MILP (*Mixed-Integer Linear Programming*).

Výsledná MILP formulácia je už riešiteľná pomocou bežne dostupných optimalizačných solverov, napríklad prostredníctvom algoritmov typu branch-and-cut, ktoré boli spomenuté v podkapitole 1.2 a sú implementované napríklad v solveroch Gurobi či CPLEX. Podrobný postup odvodenia tejto reformulácie spolu s príslušnými rovnicami je uvedený vo vybranom článku [9]. Pre účely tejto diplomovej práce sa ďalej zameriame už iba na konečný MILP tvar, ktorý sme implementovali v programovacom prostredí Python.

MILP formulácia:

$$\max_{x_k} \quad \sigma\Bigg[\sum_{w\in\Omega^W}\delta(w)\Bigg[\sum_{j\in\Omega^D}\sum_{h\in\Omega_j}\lambda_{Djh}d_{jh}(w)-\sum_{i\in\Omega^G}\sum_{b\in\Omega_i}\lambda_{Gib}g_{ib}(w) - \sum_{j\in\Omega^D}c_j^U r_j(w)\Bigg]\Bigg]-\sum_{k\in\Omega^{L^+}}c_k x_k \tag{50}$$

za podmienok $$\sum_{k\in\Omega^{L^+}}c_k x_k \le c^{\max} \tag{51}$$

$$x_k = 1, \quad \forall k \in \Omega^L \setminus \Omega^{L^+} \tag{52}$$

$$x_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in \Omega^{L^+} \tag{53}$$

$$\sum_{i\,\in\,\Psi_s^G}\sum_{b\,\in\,\Omega_i} g_{ib}(w) - \sum_{k\,|\,o(k)=s} f_k(w) + \sum_{k\,|\,r(k)=s} f_k(w) + \sum_{j\,\in\,\Psi_s^D} r_j(w) = \sum_{j\,\in\,\Psi_s^D}\sum_{h\,\in\,\Omega_j} d_{jh}(w)\,\forall\, s \in \Omega^N \tag{54}$$

$$-x_k f_k^{\max} \le f_k(w) \le x_k f_k^{\max} \tag{55}$$

$$-(1-x_k)M \le \frac{f_k(w)}{b_k} - \big(\theta_{o(k)}(w) - \theta_{r(k)}(w)\big) \le (1-x_k)M \tag{56}$$

$$g_{ib}(w) \le g_{ib}^{\max}(w) \;:\; \varphi_{ib}^{\max}(w)\,\forall i \in \Omega^G, b \in \Omega_i \tag{57}$$

$$d_{jh}(w) \le d_{jh}^{\max}(w) \;:\; \beta_{jh}^{\max}(w)\,\forall j \in \Omega^D, h \in \Omega_j \tag{58}$$

$$r_j(w) \le d_j^{\max}(w) \;:\; \alpha_j^{\max}(w)\,\forall j \in \Omega^D \tag{59}$$

$$\sum_{h\in\Omega_j} d_{jh}(w) \ge d_j^{\min}(w) \;:\; \rho_j(w)\,\forall j \in \Omega^D \tag{60}$$

$$\theta_s(w) \le \pi : \xi_s^{\max}(w), \quad \forall s \in \Omega^N \setminus \{s : \text{slack}\} \tag{61}$$

$$\theta_s(w) \ge -\pi : \xi_s^{\min}(w), \quad \forall s \in \Omega^N \setminus \{s : \text{slack}\} \tag{62}$$

$$\theta_{s^{\text{slack}}}(w) = 0 \;:\; \chi_s(w) \tag{63}$$

$$g_{ib}(w) \ge 0,\; r_j(w) \ge 0,\; d_{jh}(w) \ge 0,\; \forall i \in \Omega^G, b \in \Omega_i, j \in \Omega^D, h \in \Omega_j \tag{64}$$

$$\lambda_{s_{(i)}}(w) + \varphi_{ib}^{\max}(w) \ge -\lambda_{Gib}, \quad \forall b \in \Omega_i, i \in \Omega^G \tag{65}$$

$$-\lambda_{s_{(j)}}(w) + \beta_{jh}^{\max}(w) + \rho_j(w) \ge \lambda_{Djh}, \quad \forall h \in \Omega_j, j \in \Omega^D \tag{66}$$

$$\lambda_{s_{(j)}}(w) + \alpha_j^{\max}(w) \ge -c_j^U, \quad \forall j \in \Omega^D \tag{67}$$

$$-\lambda_{o(k)}(w) + \lambda_{r(k)}(w) + \phi_k(w) + \phi_k^{\max}(w) + \phi_k^{\min}(w) = 0,\; \forall k \in \Omega^L \tag{68}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{k \,|\, o(k)=s} b_k\big(\phi_k(w) - \bar{\phi}_k(w)\big) + \sum_{k \,|\, r(k)=s} b_k\big(\phi_k(w) - \bar{\phi}_k(w)\big) \\
&+ \quad \xi_s^{\max}(w) + \xi_s^{\min}(w) = 0 \qquad (69) \\
&- \sum_{k \,|\, o(k)=s} b_k\big(\phi_k(w) - \bar{\phi}_k(w)\big) + \sum_{k \,|\, r(k)=s} b_k\big(\phi_k(w) - \bar{\phi}_k(w)\big) \\
&+ \chi_s(w) = 0 \qquad (70) \\
&- x_k \Gamma^{\max} \le \phi_k(w) - \bar{\phi}_k(w) \le x_k \Gamma^{\max} \qquad (71) \\
&- (1 - x_k)\Gamma^{\max} \le \bar{\phi}_k(w) \le (1 - x_k)\Gamma^{\max} \qquad (72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_s(w) \;\text{ voľná}, \quad \forall s \in \Omega^N \qquad (73) \\
&\phi_k(w) \;\text{ voľná}, \quad \phi_k^{\max}(w) \ge 0, \quad \phi_k^{\min}(w) \le 0, \quad \forall k \in \Omega^L \qquad (74) \\
&\varphi_{ib}^{\max}(w) \ge 0, \quad \forall b \in \Omega_i, i \in \Omega^G \qquad (75) \\
&\beta_{jh}^{\max}(w) \ge 0, \quad \forall h \in \Omega_j, j \in \Omega^D \qquad (76) \\
&\alpha_j^{\max}(w) \ge 0, \quad \rho_j(w) \le 0, \quad \forall j \in \Omega^D \qquad (77) \\
&\xi_s^{\max}(w) \ge 0, \quad \xi_s^{\min}(w) \le 0, \quad \forall s \in \Omega^N \qquad (78) \\
&\chi_s(w) \;\text{ voľná}, \quad s : \text{slack} \qquad (79)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j \in \Omega^D} \sum_{h \in \Omega_j} \lambda_{Djh} d_{jh}(w) - \sum_{i \in \Omega^G} \sum_{b \in \Omega_i} \lambda_{Gib} g_{ib}(w) \\
&- \sum_{j \in \Omega^D} c_j^U r_j(w) = \sum_{k \in \Omega^L} \big(\phi_k^{\max}(w) - \phi_k^{\min}(w)\big) f_k^{\max} \\
&+ \sum_{i \in \Omega^G} \sum_{b \in \Omega_i} \varphi_{ib}^{\max}(w) g_{ib}^{\max}(w) + \sum_{j \in \Omega^D} \sum_{h \in \Omega_j} \beta_{jh}^{\max}(w) d_{jh}^{\max}(w) \\
&+ \sum_{j \in \Omega^D} \big(\alpha_j^{\max}(w) d_j^{\max}(w) + \rho_j(w) d_j^{\min}(w)\big) \\
&+ \sum_{s \in \Omega^{N \setminus \{\text{s:slack}\}}} \pi\big(\xi_s^{\max}(w) - \xi_s^{\min}(w)\big). \qquad (80)
\end{aligned}
$$

Výsledná MILP formulácia pozostáva z účelovej funkcie, investičných obmedzení hornej úrovne, podmienok primárnej a duálnej prípustnosti dolnej úrovne, linearizačných obmedzení a napokon z podmienky silnej duality. V uvedenej formulácii zostáva účelová funkcia (50) identická s účelovou funkciou hornej úrovne uvedenej v podkapitole 2.2, pričom obmedzenia (51)–(53) reprezentujú investičné podmienky hornej úrovne. Rovnice (54) – (64) vyjadrujú primárnu prípustnosť pôvodnej dolnej úrovne, rovnice (65)–(79) reprezentujú podmienky duálnej prípustnosti a príslušné linearizačné obmedzenia. Rovnica (80) napokon vyjadruje podmienku silnej duality, ktorá zabezpečuje ekvivalenciu pôvodného dvojúrovňového modelu a jeho jednoúrovňovej MILP reformulácie.

Vo výslednej MILP reformulácii teda vystupujú dva základné typy premenných, a to primárne a duálne premenné. Primárne premenné zodpovedajú pôvodným rozhodovacím premenným v modeli. Na hornej úrovni ide predovšetkým o binárne investičné premenné x_k, ktoré určujú, či bude príslušné kandidátne vedenie vybudované. Na dolnej úrovni medzi primárne premenné patria výroba $g_{ib}(w)$, spotreba $d_{jh}(w)$, neobslúžený dopyt $r_j(w)$, toky na vedeniach $f_k(w)$ a fázové uhly $\theta_s(w)$. Tieto premenné priamo opisujú fyzikálny aj ekonomický stav prenosovej sústavy po prijatí investičného rozhodnutia.

Duálne premenné vznikajú priradením multiplikátorov k obmedzeniam dolnej úrovne. Z ekonomického hľadiska majú osobitný význam premenné $\lambda_s(w)$, ktoré sú viazané na uzlové bilančné rovnice. Tieto premenné možno interpretovať ako uzlové ceny elektriny v jednotlivých uzloch siete, teda ako ceny zodpovedajúce rovnováhe medzi výrobou, spotrebou a tokmi v sieti v danom scenári.

Premenné $\phi_k^{\max}(w)$ a $\phi_k^{\min}(w)$ sú priradené ku kapacitným obmedzeniam tokov na vedeniach a vyjadrujú ekonomický význam obmedzenej prenosovej kapacity. Ak nadobúdajú nenulové hodnoty, znamená to, že príslušné vedenie obmedzuje prenos elektriny v sieti. Premenné $\varphi_{ib}^{\max}(w)$ a $\beta_{jh}^{\max}(w)$ sú viazané na horné hranice výrobných a dopytových blokov, a teda zachytávajú význam týchto obmedzení v optimálnom riešení. Premenné $\alpha_j^{\max}(w)$ a $\rho_j(w)$ prislúchajú obmedzeniam neobslúženého dopytu a minimálnej úrovne spotreby. Napokon premenné $\xi_s^{\max}(w)$, $\xi_s^{\min}(w)$ a $\chi_s(w)$ sú spojené s technickými obmedzeniami uhlov napätia a s voľbou referenčného uzla; ich úloha je najmä zabezpečiť matematickú konzistentnosť DC aproximácie tokov výkonu.

Z uvedeného vyplýva, že primárne premenné opisujú samotné rozhodnutia a prevádzku sústavy, zatiaľ čo duálne premenné poskytujú doplňujúcu ekonomickú interpretáciu jednotlivých obmedzení a ukazujú, ktoré z nich zohrávajú v optimálnom riešení rozhodujúcu úlohu.

2.3 Implementácia modelu

V tejto podkapitole sa zameriavame na replikáciu ilustračného príkladu z článku [9]. Implementácia je realizovaná v programovacom jazyku Python a vychádza z jednoúrovňovej MILP formulácie uvedenej v podkapitole 2.2.1. Najprv sa zameriavame na replikáciu modelu na testovacom systéme *Garver's six-bus test system* a následne model testujeme aj na zložitejšom systéme *IEEE 24-bus Reliability Test System*.

2.3.1 Použité nástroje

Model je implementovaný v jazyku Python s využitím modelovacieho prostredia Pyomo v operačnom systéme Windows.

V implementovaných skriptoch využívame knižnicu `pathlib` (konkrétne triedu `Path`) na prácu s cestami k súborom a typové anotácie z modulu `typing`. Knižnica `pandas` slúži na načítanie vstupných údajov z CSV súborov a na ich predspracovanie pre model, vrátane kontrol konzistencie, pretypovania premenných a výpočtu odvodených veličín. Samotný optimalizačný model je formulovaný pomocou knižnice `pyomo.environ`, ktorá poskytuje nástroje na definovanie množín, parametrov, rozhodovacích premenných, obmedzení a účelovej funkcie.

Riešenie výslednej MILP úlohy zabezpečuje externý optimalizačný solver. V implementácii je podporovaných viacero solverov (napr. Gurobi, CPLEX, HiGHS, CBC alebo GLPK) v závislosti od ich dostupnosti v danom prostredí. V našom prípade bol použitý solver Gurobi.

Vstupné dáta sú prevzaté z replikačného článku [9] a v implementácii sú spracované v tabuľkovej podobe vo formáte CSV. Údaje sú uložené v samostatných súboroch pre prenosové vedenia, generátory, dopytové bloky a scenáre, čo umožňuje reprodukovateľné spúšťanie modelu. Dáta zahŕňajú najmä parametre výrobných blokov (kapacity a ponúkané ceny), dopytových blokov (maximálne a minimálne hodnoty, ako aj ochotu platiť),

parametre prenosových vedení (kapacity, susceptancie a rozlíšenie existujúcich a kandidátnych vedení) a scenáre s príslušnými váhami. Vstupné údaje sú uložené napríklad v súboroch `lines.csv`, `generators.csv`, `demands.csv` a `scenarios.csv`.

Pri zostavení modelu najprv definujeme množiny indexov, najmä uzly, vedenia, výrobcov, dopyty, bloky a scenáre, a následne k nim priradíme príslušné parametre načítané zo vstupných dát. Premenné z MILP formulácie, ako sú investičné rozhodnutia, výroba, spotreba, toky, fázové uhly a prípadné nedodanie energie, sú implementované priamo ako rozhodovacie premenné optimalizačného modelu. Obmedzenia sú do solvera prenesené v štruktúre zodpovedajúcej rovniciam uvedeným v podkapitole o MILP reformulácii, pričom osobitná pozornosť je venovaná konzistencii indexácie a jednotiek.

V implementácii uvažujeme, že investičné náklady sú vyjadrené v M€, ceny v EUR/MWh a spoločenský blahobyt sa pomocou faktora $\sigma = 8760$, predstavujúceho počet hodín v roku, prepočítava na M€/rok. Implementácia je navrhnutá tak, aby bolo možné model reprodukovateľne spúšťať pri rovnakých vstupných dátach a solverových nastaveniach, čo uľahčuje porovnanie získaných výsledkov s referenčnými výstupmi. Pre úplnosť uvádzame, že implementačné skripty použité v tejto kapitole sú priložené ako dodatočný materiál k práci v systéme AiS. Konkrétne ide o skripty `MILP_model.py`, `MILP_model_contingency.py`, `Single_line_contingency.py` a `MILP_model_IEEE.py`. Spolu so vstupnými CSV súbormi tvoria podklad na reprodukciu výsledkov uvedených v nasledujúcich tabuľkách.

2.3.2 Implementácia na *Garver's six-bus test system*

Implementácia na *Garver's six-bus test system* prebiehala v dvoch variantoch. Najprv sme uvažovali základný modelový prípad, ktorý slúžil na overenie korektnosti implementácie a reprodukciu referenčných výsledkov. Následne sme model rozšírili o prípad *single-line contingency*, teda o scenár výpadku jedného z existujúcich vedení. V ďalšej časti stručne opíšeme jednotlivé implementácie, resp. príslušné skripty, a uvedieme výsledky získané pre oba uvažované varianty.

MILP model: `MILP_model.py`

V tomto skripte `MILP_model.py` implementujeme jednoúrovňový MILP model pre úlohu *Transmission Expansion Planning* (TEP) na testovacom systéme *Garver's six-bus test*

system (Obr. 1) v prostredí Python, pričom vychádzame z MILP formulácie odvodenej v predchádzajúcej podkapitole 2.2. V úvodnej fáze načítame vstupné dáta z CSV súborov, ktoré boli pripravené na základe tabuliek uvedených v článku [9]. Vstupné dáta sú uložené v súboroch `lines.csv`, `generators.csv`, `demands.csv` a `scenarios.csv`.

V základnom modeli uvažujeme tri scenáre budúceho dopytu. Scenár 1 predstavuje referenčný stav systému so základnou úrovňou dopytu, zatiaľ čo scenáre 2 a 3 reprezentujú alternatívne situácie so zvýšeným dopytom vo vybraných uzloch siete. Každému scenáru je priradená scenárová váha, pričom súčet všetkých váh je rovný jednej. Tieto scenáre vstupujú do účelovej funkcie prostredníctvom očakávaného spoločenského blahobytu, ktorý je na hornej úrovni maximalizovaný po zohľadnení investičných nákladov.

Následne vykonáme dôslednú kontrolu vstupov, aby sme overili ich správne načítanie a konzistenciu. Kontroly zahŕňajú najmä overenie, že sa v dátach nevyskytujú duplicity v kľúčových indexoch, záporné kapacity a že scenáre majú konzistentne definované váhy a sprievodné parametre.

V ďalšom kroku pristupujeme k príprave dát pre optimalizačný model. Okrem pretypovania a úpravy formátu vstupov prepočítavame investičné náklady z tisícov € na milióny €. Zároveň každý koridor reprezentujeme ako koridor s maximálne tromi paralelnými okruhmi, čo umožňuje modelovať možnú výstavbu viacerých vedení v tom istom koridore. Na základe takto pripravených dát následne zostavíme množiny a parametre pre prostredie `Pyomo`. Konkrétne zostavíme množiny uzlov, vedení, scenárov a blokov, ako aj pomocné mapovania a väzby medzi uzlami a vedeniami potrebné pre formuláciu tokových obmedzení. Keďže vstupné reaktancie vedení boli uvedené v *per unit* vyjadrení, bolo potrebné ich v predspracovaní transformovať na jednotky kompatibilné s MW formuláciou DC tokov. V súlade so zdrojovými dátami sme uvažovali $S_{\text{base}} = 100$, keďže per unit veličiny siete sú definované na 100 MVA báze. Reaktancie sa preto prevádzali podľa vzťahu $x^{MW} = x^{pu}/S_{\text{base}}$, na základe čoho sa následne určovala susceptancia jednotlivých vedení.

V poslednej časti skriptu formulujeme samotný MILP model v prostredí `Pyomo`. Definujeme binárne premenné x, ktoré reprezentujú rozhodnutie o výstavbe vedenia, a prevádzkové premenné pre toky f, fázové uhly θ, výrobu g, spotrebu d a premennú r, reprezentujúcu nedodanie energie (*load shedding*), ktorá je v implementácii označená názvom `shed`. Model zahŕňa rozpočtové obmedzenie, kapacitné obmedzenia vedení, DC-flow väzby line-

arizované pomocou metódy big-M, obmedzenia kapacít blokov, podmienku minimálneho dopytu a bilančnú rovnicu. Účelová funkcia maximalizuje očakávaný ročný spoločenský blahobyt, od ktorého sú odpočítané anualizované investičné náklady vyjadrené pomocou faktora obnovy kapitálu (CRF).

V závere skriptu zvolíme dostupný MILP solver, v našom prípade Gurobi, a zaznamenáme výsledky riešenia. Medzi vyhodnocované výstupy patria celkové investičné náklady, očakávaný spoločenský blahobyt, zoznam postavených kandidátnych vedení a výpočtový čas. Výstupy príslušného skriptu uvádzame v Tab. 1; čísla uvedené v zátvorkách pri jednotlivých vedeniach pritom predstavujú počet postavených okruhov.

Tabuľka 1: Základný dvojúrovňový model – sumarizácia výsledkov

Prístup	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Očakávaný spoločenský blahobyt (M€)	CPU čas (s)
Dvojúrovňový model	2-3 3-5 4-6 (3)	25.10	292.71	0.53

Modelovanie výpadku: `Single_line_contingency.py`

Skript `Single_line_contingency.py` sa zaoberá analýzou typu *single-line contingency*, t.j. analýzou $(N-1)$, kde sa uvažuje výpadok jedného z existujúcich vedení siete. Jeho cieľom je posúdiť, aký vplyv má dodatočný poruchový scenár na optimálne investičné rozhodnutia a očakávaný spoločenský blahobyt. Za týmto účelom do modelu zavádzame štvrtý scenár, v ktorom dôjde k výpadku jedného z existujúcich vedení.Poruchovému scenáru je priradená váha 0.10, pričom váha prvého scenára je upravená na hodnotu 0.40 tak, aby súčet scenárových váh zostal zachovaný, teda rovný 1. Analýza $(N-1)$ sa realizuje iteráciou cez existujúce vedenia, pričom v každom behu sa pre jedno z nich v poruchovom scenári 4 nastaví parameter dostupnosti na hodnotu 0, čím sa modeluje jeho vyradenie z prevádzky. V implementačnej časti označujeme vedenia indexom l, hoci v teoretickej formulácii bol pre vedenia použitý index k. Ide však o tú istú množinu vedení; rozdiel je len v označení.

Samotná verzia modelu pri výpadku existujúceho vedenia je implementovaná v pomocnom skripte `MILP_model_contingency.py`, ktorý predstavuje rozšírenie pôvodného skriptu `MILP_model.py`. V tomto pomocnom skripte sú upravené najmä funkcie `build_sets_and_params()` a `build_pyomo_model()`, do ktorých je zavedený scenárovo závislý parameter dostupnosti vedenia

$$\text{avail}_{k,w} \in \{0, 1\},$$

kde $\text{avail}_{k,w} = 1$ znamená, že vedenie k je v scenári w dostupné, zatiaľ čo $\text{avail}_{k,w} = 0$ znamená, že vedenie k je v danom scenári mimo prevádzky. Aktivácia vedenia v scenári je potom určená súčinom

$$\text{avail}_{k,w}\, x_k,$$

teda vedenie je použiteľné len vtedy, ak je zároveň postavené ($x_k = 1$) a dostupné ($\text{avail}_{k,w} = 1$).

Skript `Single_line_contingency.py` následne túto contingency verziu modelu volá pre jednotlivé uvažované výpadky existujúcich vedení. Okrem vytvorenia poruchového scenára a príslušného parametra dostupnosti zabezpečuje aj samotné spustenie modelu, zber výsledkov a ich export do výstupnej tabuľky. Parameter dostupnosti pritom vstupuje do kapacitných obmedzení toku, DC-flow väzieb aj do duálnych linearizačných podmienok, takže výpadok vedenia je konzistentne zohľadnený v primárnej aj duálnej časti reformulácie.

Pri vyhodnotení sa zameriavame na porovnanie celkových investičných nákladov, očakávaného spoločenského blahobytu a výsledného investičného plánu kandidátnych vedení. Výstupy príslušného skriptu sú uvedené v Tab.2.

Porovnanie výstupov s referenčným článkom

V tejto časti systematicky porovnávame výstupy replikácie s výsledkami prezentovanými v článku [9]. Porovnanie vykonávame najmä z hľadiska investičných rozhodnutí, nákladov a očakávaného spoločenského blahobytu. Toto porovnanie slúži primárne ako validačný krok implementácie a zároveň ako východisko pre ďalšie experimenty v Kapitole 3.

Pri analýze výsledkov sme zistili, že v žiadnom uvažovanom scenári nedochádza k penalizácii nedodania energie. Ide však o prirodzený dôsledok zvolenej kalibrácie modelu. Keďže nedodanie energie (*load shedding*) je silne penalizované a model zároveň vyžaduje

Tabuľka 2: Testovanie výpadku linky existujúceho vedenia – sumarizácia výsledkov

Výpadok linky vedenia	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Priemerný spoločenský blahobyt	CPU čas (s)
1-2	2-3 3-5 4-6 (3)	25.10	292.71	0.66
1-4	2-6 (2) 3-5 4-6 (2)	25.10	292.71	0.67
1-5	1-5 2-3 3-5 4-6 (3)	28.96	292.72	3.40
2-3	2-3 (2) 3-5 4-6 (3)	25.10	292.53	2.46
2-4	2-6 (2) 3-5 4-6 (2)	25.10	292.71	0.92
3-5	2-3 3-5 (2) 4-6 (3)	28.96	292.70	0.69

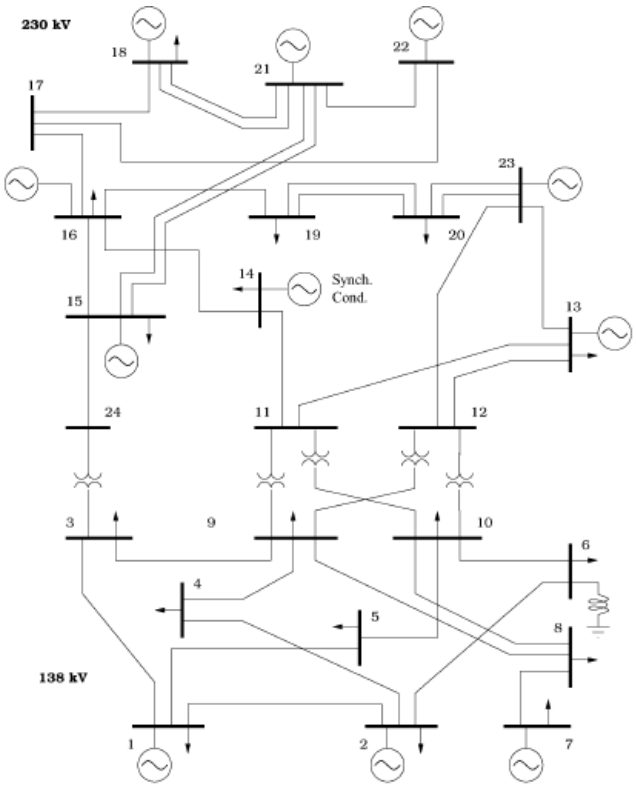
obslúžiť aspoň 90 % dopytu, optimálne riešenie uprednostňuje investície do vedení a presmerovanie tokov tak, aby k nedodaniu vôbec nedochádzalo. Výsledný investičný plán je teda natoľko efektívny, že aj v uvažovaných scenároch umožňuje obslúžiť dopyt bez nutnosti pristúpiť k nedodaniu energie.

Získané výsledky teda potvrdzujú správnosť implementácie na testovacom systéme *Garver's six-bus test system*. Investičný plán, hodnota investičných nákladov aj hodnota očakávaného spoločenského blahobytu zodpovedajú výsledkom uvedeným v referenčnom článku. Po tomto overení preto v nasledujúcej časti pristupujeme k aplikácii modelu na

rozsiahlejšom systéme *IEEE 24-bus Reliability Test System.*

2.3.3 Implementácia na *IEEE 24-bus Reliability Test System (RTS)*

V tejto podkapitole sa zameriavame na case study replikačného článku, ktorá je založená na *IEEE 24-bus Reliability Test System (RTS).* Na tomto rozsiahlejšom testovacom systéme implementujeme model predstavený v predchádzajúcej časti práce 2.2.1, pripravujeme vstupné dáta pre numerické riešenie a následne získané výsledky porovnávame s referenčným článkom. Schéma príslušnej siete je uvedená na Obr. 2. Uvažovaná prenosová sústava pozostáva z 24 uzlov, 34 existujúcich koridorov [39] a 7 nových koridorov [40], teda spolu zo 41 koridorov. Predpokladá sa, že všetky vedenia patriace do toho istého koridoru sú identické a že maximálny počet vedení v jednom koridore je tri.



Obr. 2: IEEE 24-bus Reliability Test System (RTS) (Zdroj: [9])

Je potrebné poznamenať, že túto case study nebolo možné replikovať úplne presne, keďže replikačný článok neuvádza všetky vstupné údaje potrebné na jednoznačné zostavenie modelu. Chýbajúce údaje sme preto doplňali kombináciou hodnôt z pôvodných zdrojov a technicky primeraných hodnôt z literatúry. V prípadoch, kde takýto priamy

údaj nebol dostupný, sme využili heuristický postup opísaný nižšie, najmä pri určovaní investičných nákladov pre vedenia s nulovou dĺžkou.

Dĺžky vedení, reaktancie, kapacity vedení, ako aj údaje o generátoroch, dopytoch a scenároch boli zostavené kombináciou údajov z replikačného článku [9] a z dvoch pôvodných zdrojov, na ktoré tento článok nadväzuje [40, 39]. Investičné náklady sa podľa článku určujú na základe dĺžky vedenia v kilometroch, pričom pre vedenia na napäťovej hladine 230 kV sa uvažuje hodnota 120 000 €/km a pre vedenia na nižšej napäťovej hladine 132 kV hodnota 70 000 €/km. IEEE RTS v tejto case study obsahuje desať výrobných jednotiek a 16 odberov. Ponuky výrobcov aj ponuky dopytu sa, v súlade s článkom, považujú za nezávislé od scenárov dopytu.

Pri spracovaní vstupných dát do formátu vhodného pre implementovaný model sme v dátach o vedeniach identifikovali niekoľko vedení s nulovou dĺžkou. Tieto vedenia zodpovedajú transformátorovým prepojeniam v sieti, a preto pri nich nebolo možné určiť investičné náklady rovnakým spôsobom ako pri štandardných vedeniach. Z tohto dôvodu sme pristúpili k heuristickému odhadu nákladov. Opierali sme sa pritom o výsledky článku, podľa ktorých sa ako súčasť optimálneho investičného plánu objavuje aj vedenie 10–11, ktoré patrí medzi vedenia s nulovou dĺžkou. Na základe tejto informácie sme preň kalibrovali odhadnutý investičný náklad tak, aby bol model schopný reprodukovať čo najbližšie výsledky uvedené v článku. Tento odhad sme získali nepriamo, a to porovnaním celkových investičných nákladov publikovaného riešenia s nákladmi ostatných postavených vedení, ktorých hodnoty bolo možné určiť štandardným spôsobom. Keďže ostatné vedenia s nulovou dĺžkou majú veľmi podobný charakter a rovnakú triedu technických parametrov, v pracovnej verzii replikačného modelu sme im priradili rovnaký investičný náklad ako koridoru 10–11.

Následne sme pristúpili k samotnej implementácii v prostredí Python. Vychádzali sme zo skriptu `MILP_model.py`, ktorý bol pôvodne pripravený pre menšiu testovaciu sieť. Pri jeho úprave bolo potrebné zmeniť najmä spôsob načítania a spracovania údajov o vedeniach. V novej verzii skriptu `MILP_model_IEEE.py` sa už informácie o existujúcich vedeniach, počte existujúcich okruhov a maximálnom počte prípustných okruhov nenačítajú ako pevne zakódované hodnoty v skripte, ale priamo zo vstupných CSV súborov. Vstupné dáta sú uložené v súboroch `lines_nadstavba.csv`, `generators_nadstavba.csv`, `demands_na-`

`-dstavba.csv` a `scenarios_nadstavba.csv`. Tým sa model stal plne závislým od vstupných dát a vhodným aj pre rozsiahlejšiu IEEE RTS sieť. Rovnako sa zo vstupov načítavajú aj investičné náklady jednotlivých vedení, ktoré boli vopred pripravené na základe prevodu dĺžok z míľ na kilometre a následného zohľadnenia príslušnej napäťovej hladiny.

V porovnaní so skriptom `MILP_model.py`, ktorý bol použitý pre *Garver's six-bus test system*, sa skript `MILP_model_IEEE.py` líši najmä v spôsobe spracovania vstupných údajov o vedeniach. Kým v prípade menšej testovacej siete boli existujúce vedenia a ich rozšírenie na paralelné okruhy čiastočne určené priamo v skripte, pri IEEE RTS sa počet existujúcich okruhov, maximálny počet prípustných okruhov a investičné náklady načítavajú priamo zo vstupných dát. Samotná MILP formulácia modelu však zostáva v oboch prípadoch založená na rovnakom matematickom princípe; zmeny sa týkajú predovšetkým vstupných dát, ich predspracovania a kalibrácie parametrov pre rozsiahlejší systém.

Po vyriešení modelu vyhodnocujeme najmä výsledný investičný plán, celkové investičné náklady, očakávaný spoločenský blahobyt a výpočtový čas. Získané výsledky porovnávame s hodnotami uvedenými v replikačnom článku, súhrn výsledkov implementácie na systéme *IEEE 24-bus Reliability Test System* uvádzame v Tab. 3.

Tabuľka 3: Dvojúrovňový model na IEEE 24-bus Reliability Test System (RTS)– sumarizácia výsledkov

Prístup	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Očakávaný spoločenský blahobyt (M€)	CPU čas (s)
Dvojúrovňový model	5-10 6-10 7-8 10-12 11-13	22.2234	724.7814	63.13

Na základe získaných výsledkov pozorujeme odchýlky od referenčných výsledkov uvedených v replikačnom článku. Rozdiely sa prejavujú najmä v optimálnom investičnom pláne, keďže zhodné je iba vedenie 6–10, zatiaľ čo ostatné vybrané investície sa líšia. V našom riešení zároveň vyšli nižšie celkové investičné náklady aj nižšia hodnota očakáva-

ného spoločenského blahobytu. Tieto odchýlky môžu súvisieť predovšetkým s heuristickým určením investičných nákladov pre vetvy s nulovou dĺžkou, prípadne s ďalšími rozdielmi v rekonštrukcii vstupných dát. V našej implementácii je investičný plán uvedený v referenčnom článku síce prípustným riešením, avšak nedosahuje najlepšiu hodnotu účelovej funkcie. Všetky uvedené implementačné skripty boli vytvorené s podporou nástroja umelej inteligencie ChatGPT, verzia 5, od spoločnosti OpenAI [41]. Tento nástroj bol použitý najmä ako pomoc pri štruktúrovaní kódu, úprave syntaxe, ladení implementácie a kontrole konzistencie jednotlivých častí modelu. Výsledné skripty však boli následne manuálne skontrolované a ich správnosť bola overená porovnaním s referenčnými výsledkami uvedenými v článku [9]. V prípade testovacieho systému *Garver's six-bus test system* sa podarilo reprodukovať investičný plán, investičné náklady aj hodnotu očakávaného spoločenského blahobytu, čím bola overená korektnosť implementácie modelu.

3 Rozšírenia modelu a citlivostná analýza

Táto kapitola nadväzuje na model predstavený a implementovaný v predchádzajúcej časti práce. Zatiaľ čo kapitola 2 bola zameraná na replikáciu referenčného modelu, cieľom tejto kapitoly je predstaviť vlastný prínos práce prostredníctvom rozšírenia modelu o prvky rizikovej averzie investora a analýzy jeho citlivosti na vybrané parametre, konkrétne na investičný rozpočet a scenárové váhy.

Ako prvé sme rozšírenia modelu testovali na systéme *Garver's six-bus system*, ktorý slúžil ako pilotné prostredie na overenie implementácie jednotlivých prístupov. Keďže však viaceré z týchto experimentov neviedli k výraznejším kvalitatívnym zmenám riešenia, v hlavnom texte ich uvádzame len stručne. Ťažisko kapitoly preto tvorí analýza rozšíreného modelu na *IEEE 24-bus Reliability Test System* (Obr. 2), na ktorom ďalej analyzujeme vplyv sledovaných rozšírení modelu.

V podkapitole 3.1 sa venujeme citlivostnej analýze základného modelu, konkrétne vplyvu investičného rozpočtu a scenárových váh na výsledné investičné rozhodnutia, investičné náklady a očakávaný spoločenský blahobyt. V podkapitole 3.2 následne rozširujeme model o prvky rizikovej averzie investora. Uvažujeme dva prístupy, a to prístup založený na miere CVaR a prístup založený na garancii minimálneho čistého scenárového výsledku. Pri týchto rozšíreniach najskôr predstavíme spôsob ich zapracovania do modelu a následne vyhodnotíme ich vplyv na získané výsledky. Rozšírenia a citlivostnú analýzu najprv stručne overujeme na systéme *Garver's six-bus system*, pričom hlavnú pozornosť venujeme systému *IEEE 24-bus Reliability Test System*.

3.1 Citlivostná analýza na vybrané parametre

V tejto časti predstavujeme postup citlivostnej analýzy modelu vzhľadom na zmeny vybraných vstupných parametrov. Vychádzame z referenčného nastavenia modelu a postupne meníme vždy len jeden parameter, pričom ostatné parametre ponechávame nezmenené. Cieľom je posúdiť, do akej miery sú získané investičné rozhodnutia stabilné, a zároveň identifikovať tie predpoklady, ktoré majú na výsledné riešenie najvýraznejší vplyv. Pozornosť venujeme predovšetkým investičnému rozpočtu a scenárovým váham, keďže práve tieto parametre môžu výrazne ovplyvniť výslednú podobu optimálneho in-

vestičného plánu.

3.1.1 Analýza vplyvu investičného rozpočtu na optimálny investičný plán

V tejto časti analyzujeme citlivosť optimálneho investičného plánu vzhľadom na výšku dostupného investičného rozpočtu. Pri analýze uvažujeme rozpočty vyjadrené ako násobok referenčnej hodnoty investičného rozpočtu B_0, použitej vo východiskovom modeli. Jednotlivé úrovne rozpočtu preto zapisujeme v tvare:

$$B = \alpha B_0,$$

kde $\alpha > 0$ predstavuje koeficient zmeny rozpočtu. V numerických experimentoch uvažujeme hodnoty:

$$\alpha \in \{0.50,\ 0.75,\ 1.25,\ 1.50\}.$$

Takto zvolená interpretácia je prirodzená a zároveň prehľadná, keďže jednotlivé hodnoty parametra α priamo vyjadrujú, o koľko sa investičný rozpočet znižuje alebo zvyšuje vzhľadom na referenčný prípad. Uvažované hodnoty preto zodpovedajú rozpočtom od polovice referenčnej hodnoty až po jej navýšenie o 50 %.

3.1.2 Analýza vplyvu scenárových váh

Pri analýze scenárových váh sme postupovali odlišne pre oba testovacie systémy. V prípade *Garver's six-bus system* sme sa zamerali na vplyv váhy poruchového scenára, keďže v tomto modeli sme okrem troch dopytových scenárov uvažovali aj štvrtý scenár reprezentujúci výpadok existujúceho vedenia. Naopak, v prípade *IEEE 24-bus Reliability Test System* sme pracovali so základným modelom bez poruchového scenára a analyzovali sme zmeny váh troch scenárov budúceho dopytu.

Pre *Garver's six-bus system* teda scenáre 1–3 reprezentujú alternatívne situácie budúceho dopytu. Scenár 1 zodpovedá referenčnému prípadu so základnou úrovňou dopytu na všetkých uvažovaných uzloch. Scenár 2 reprezentuje zvýšený dopyt na uzloch 2 a 5, kde je použitý koeficient 1.2, zatiaľ čo na uzloch 1, 3 a 4 ostáva dopyt na referenčnej úrovni. Scenár 3 zodpovedá zvýšenému dopytu na uzloch 1 a 4 s koeficientom 1.4, pričom na uzloch 2, 3 a 5 ostáva dopyt nezmenený. Scenár 4 predstavuje poruchový scenár zodpovedajúci výpadku konkrétneho existujúceho vedenia. Pri citlivostnej analýze váhy

poruchového scenára sme menili hodnotu $\delta(w_4)$, pričom váhy scenárov 1–3 boli vždy proporcionálne preškálované tak, aby sa zachoval ich pôvodný vzájomný pomer a zároveň aby celkový súčet scenárových váh zostal rovný 1. Uvažovali sme pritom hodnoty:

$$\delta(w_4) \in \{0.01,\ 0.05,\ 0.10,\ 0.15,\ 0.20,\ 0.30,\ 0.40,\ 0.50,\ 0.60\}.$$

Toto nastavenie bolo špecifické pre analýzu výpadku na *Garver's six-bus system* a odlišuje sa od experimentov realizovaných na *IEEE 24-bus Reliability Test System*.

V prípade *IEEE 24-bus Reliability Test System* scenáre 1–3 reprezentujú alternatívne profily budúceho dopytu. Scenár 1 zodpovedá referenčnému prípadu so základnou úrovňou dopytu na všetkých uzloch, zatiaľ čo scenáre 2 a 3 reprezentujú zvýšený dopyt. V scenári 2 sa dopyt zvyšuje v uzloch 1–10, a to s koeficientom 1.1, pričom na uzloch 11–24 ostáva dopyt nezmenený. Naopak, v scenári 3 sa dopyt zvyšuje v uzloch 11–24 s koeficientom 1.2 a ostatné uzly 1–10 majú nezmenený dopyt.

Pri analýze vplyvu scenárových váh sme nevychádzali z úplného prehľadu všetkých možných kombinácií, ale zvolili sme niekoľko reprezentatívnych scenárových kombinácií so súčtom rovným 1. Okrem referenčného nastavenia sme uvažovali aj kombinácie, v ktorých sa zvýšila váha vybraného scenára, s cieľom preskúmať, ako sa optimálne riešenie mení pri odlišnom dôraze na jednotlivé scenáre. Takto zvolený prístup umožňuje zachovať interpretovateľnosť získaných výsledkov a zároveň prehľadne porovnať správanie modelu pri rôznych nastaveniach scenárových váh. Vychádzali sme pritom z referenčného nastavenia (0.50, 0.25, 0.25) a uvažovali sme také zmeny váh, ktoré umožňujú prehľadne posúdiť, ako sa výsledné riešenie mení pri zvýšenom dôraze na jednotlivé scenáre. Kombinácia (0.60, 0.20, 0.20) predstavuje zvýraznenie scenára 1, zatiaľ čo kombinácia (0.40, 0.35, 0.25) a (0.40, 0.25, 0.35) zodpovedajú zvýšenému dôrazu na scenár 2, resp. scenár 3. Uvažovali sme teda nasledovné kombinácie hodnôt scenárových váh:

$$\big(\delta(w_1), \delta(w_2), \delta(w_3)\big) \in \{(0.60,\ 0.20,\ 0.20),\ (0.40,\ 0.35,\ 0.25),\ (0.40,\ 0.25,\ 0.35)\}.$$

Pre podrobnejšie grafické znázornenie vplyvu scenárových váh sme pri každom zo scenárov uvažovali osem reprezentatívnych hodnôt v okolí referenčného nastavenia. Pri zmene váhy scenára 1 sme zachovávali rovnosť váh scenárov 2 a 3. Pri zmene váhy scenára 2, resp. scenára 3 sme ponechali váhu zvyšného scenára na referenčnej úrovni 0.25 a menili

sme len rozdelenie váhy medzi scenár 1 a príslušný analyzovaný scenár. Vo všetkých prípadoch bol zároveň zachovaný súčet scenárových váh rovný jednej.

Citlivostná analýza tak umožňuje posúdiť stabilitu riešenia pri zmene vybraných vstupných parametrov modelu. Prirodzeným ďalším krokom je preto skúmať, ako sa optimálne riešenie zmení vtedy, keď sa nemenia len vstupné parametre modelu, ale aj samotný rozhodovací postoj investora voči riziku. Z tohto dôvodu v nasledujúcej časti pristupujeme k zavedeniu rizikovej averzie do modelu.

3.2 Zavedenie rizikovej averzie do modelu

Motiváciou pre zavedenie rizikovej averzie je skutočnosť, že v pôvodnej formulácii model preferuje riešenia s vysokou hodnotou očakávaného spoločenského blahobytu, aj napriek tomu, že môžu viesť k nepriaznivým výsledkom v niektorých scenároch. Inými slovami, model je ochotný akceptovať slabší výsledok v určitých scenároch, pokiaľ je očakávaný výsledok dostatočne priaznivý. V reálnych podmienkach sa však prevádzkovateľ prenosovej sústavy spravidla usiluje o to, aby sa obmedzili výrazne nepriaznivé výsledky, najmä v stresových situáciách, prípadne aby bola zabezpečená minimálna prijateľná úroveň výsledku v každom scenári.

Rizikovú averziu budeme do modelu zavádzať dvoma prístupmi. Prvý prístup je založený na aplikácii podmienenej hodnoty v riziku (*Conditional Value-at-Risk*, CVaR), prostredníctvom ktorej model zohľadňuje nepriaznivé scenáre reprezentované nízkou hodnotou spoločenského blahobytu v scenári. Druhý prístup vychádza z požiadavky garancie minima, teda zo zavedenia doplňujúceho obmedzenia, podľa ktorého hodnota spoločenského blahobytu v scenári nesmie v žiadnom zo scenárov klesnúť pod vopred stanovenú hranicu $C_{\min}$.

3.2.1 Prístup založený na miere podmienenej hodnoty v riziku (*Conditional Value-at-Risk*, CVaR)

V tomto prístupe predpokladáme, že prevádzkovateľ prenosovej sústavy chce okrem očakávaného spoločenského blahobytu zohľadniť aj prípadné nepriaznivé výsledky v jednotlivých scenároch pomocou miery CVaR, teda prostredníctvom priemernej straty v najhoršej časti rozdelenia. Teoretické východiská definície miery CVaR a jej scenárovej lineárnej

reformulácie vychádzajú z prác Rockafellara a Uryaseva [42, 43]. Keďže riziková miera CVaR je štandardne definovaná pre rozdelenie straty, pri implementácii modelu najskôr prevedieme scenárový spoločenský blahobyt definovaný v rovnici (32) na scenárovú stratu.

Uvažujme scenárový spoločenský blahobyt v scenári w z rovnice (32). Investičné náklady $\sum_{k \in \Omega^{L^+}} c_k x_k$ do definície W_w nezahŕňame, keďže nezávisia od scenára a v hornej úrovni vystupujú ako samostatná zložka účelovej funkcie.

Keďže v našom modeli vystupuje ako scenárový výsledok spoločenský blahobyt, riziko nízkych hodnôt tohto výsledku modelujeme zavedením straty vo forme záporného scenárového spoločenského blahobytu:

$$L_w := -W_w.$$

Týmto spôsobom sa scenáre s nižšou hodnotou spoločenského blahobytu prevedú na scenáre s vyššou hodnotou straty. Čím je teda scenárový spoločenský blahobyt nižší, tým je príslušná hodnota L_w vyššia, a z pohľadu rizika nepriaznivejšia.

Keďže v našom modeli uvažujeme konečnú diskrétnu množinu scenárov Ω^W so scenárovými váhami $\delta(w)$, mieru CVaR budeme ďalej zapisovať priamo v scenárovej formulácii prispôsobenej tomuto modelu. Parameter $\beta \in (0, 1)$ predstavuje hladinu rizika a určuje, aká časť najnepriaznivejších scenárov vstupuje do výpočtu miery CVaR. Všeobecne platí, že parameter β určuje veľkosť dolného chvosta rozdelenia strát, ktorý vstupuje do výpočtu miery CVaR.

Potom mieru $\mathrm{CVaR}_\beta(L)$ definujeme podľa [43] vzťahom:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(L) = \eta + \frac{1}{1-\beta} \sum_{w \in \Omega^W} \delta(w)\, u_w, \qquad \beta \in (0, 1),$$

pri podmienkach

$$u_w \geq L_w - \eta, \quad u_w \geq 0, \quad \forall w \in \Omega^W.$$

Po dosadení vzťahu $L_w = -W_w$ dostávame

$$u_w \geq -W_w - \eta, \qquad \forall w \in \Omega^W, \tag{81}$$

$$u_w \geq 0, \qquad \forall w \in \Omega^W. \tag{82}$$

Rizikovú averziu investora pomocou miery CVaR implementujeme zahrnutím tejto miery do účelovej funkcie hornej úrovne nasledujúcim spôsobom:

$$\max_{x_k} \left\{ (1-\lambda^{\text{risk}}) \sum_{w\in\Omega^W} \delta(w)\, W_w - \sum_{k\in\Omega^{L+}} c_k x_k - \lambda^{\text{risk}}\, \text{CVaR}_\beta(L) \right\}. \tag{83}$$

Model vzniknutý nahradením pôvodnej účelovej funkcie hornej úrovne modifikovanou účelovou funkciou (83), pri zachovaní pôvodných obmedzení MILP modelu (51)–(80) a po doplnení obmedzení (81) a (82), budeme ďalej označovať ako **RA1** model. Keďže toto rozšírenie mení len účelovú funkciu hornej úrovne a dopĺňa lineárne pomocné obmedzenia, aj model **RA1** možno po reformulácii riešiť rovnakým postupom ako pôvodný MILP model.

Parameter $\lambda^{\text{risk}} \in [0, 1]$ vyjadruje mieru rizikovej averzie investora. Pri $\lambda^{\text{risk}} = 0$ dostávame pôvodný rizikovo neutrálny model, zatiaľ čo pri vyšších hodnotách tohto parametra sa model viac vyhýba scenárom s veľmi nízkou hodnotou spoločenského blahobytu. V numerických experimentoch budeme uvažovať hodnoty $\beta \in \{0.80, 0.90, 0.95\}$ a $\lambda^{\text{risk}} \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1\}$

Je potrebné poznamenať, že pri definícii $L_w = -W_w$ môže nadobúdať hodnota $\text{CVaR}_\beta(L)$ aj záporné hodnoty. Nejde však o nekonzistentnosť modelu, ale o dôsledok zvolenej definície straty. Člen

$$-\lambda^{\text{risk}}\, \text{CVaR}_\beta(L)$$

v účelovej funkcii potom zvýhodňuje také riešenia, pri ktorých sú hodnoty scenárového spoločenského blahobytu vyššie aj v nepriaznivých scenároch. Inými slovami, model nepreferuje len vysoký očakávaný spoločenský blahobyt, ale súčasne uprednostňuje riešenia s priaznivejším dolným chvostom rozdelenia scenárových výsledkov, teda riešenia menej citlivé na veľmi slabé scenárové realizácie.

3.2.2 Prístup založený na garancii minima

V tomto prístupe ponechávame účelovú funkciu v pôvodnom tvare a do modelu dopĺňame ohraničenie, ktoré zabezpečuje, aby výsledok v každom scenári neklesol pod vopred stanovenú hranicu $C_{\min}$.

Konkrétne požadujeme, aby minimálnu hranicu spĺňal scenárový spoločenský blahobyt po zohľadnení investičných nákladov. Obmedzenie garancie minima potom nadobúda tvar:

$$W_w - \sum_{k\in\Omega^{L+}} c_k x_k \geq C_{\min}, \qquad \forall w \in \Omega^W. \tag{84}$$

Takto formulované obmedzenie nezavádza penalizáciu do účelovej funkcie, ale priamo vylučuje riešenia, ktoré sú z hľadiska najhorších scenárov nevyhovujúce. Výsledkom je konzervatívnejší, ale zároveň robustnejší investičný plán.

Model vzniknutý pri zachovaní pôvodnej účelovej funkcie (50), pôvodných obmedzení MILP modelu (51)–(80) a po doplnení obmedzenia garancie minima (84) do hornej úrovne, budeme ďalej označovať ako model **RA2**. Keďže toto rozšírenie dopĺňa len lineárne obmedzenie, možno aj model **RA2** riešiť rovnakým postupom ako pôvodný MILP model.

3.3 Pilotné overenie rozšírení na Garver's six-bus system

Rozšírenia modelu sme najprv numericky overovali na systéme *Garver's six-bus system*, predovšetkým na prípade s výpadkom existujúceho vedenia (*single line contingency*). Cieľom tejto časti nebolo prezentovať hlavné výsledky práce, ale overiť korektnosť implementácie zavedených rozšírení a predbežne preskúmať ich správanie na menšom a interpretačne prehľadnejšom testovacom systéme. V tejto fáze sme skúmali citlivosť modelu na výšku investičného rozpočtu, na zmenu váhy poruchového scenára, ako aj na rozšírenia zohľadňujúce rizikovú averziu investora. V pilotnom overení sme sa pritom zamerali predovšetkým na prípad výpadku existujúceho vedenia na *Garver's six-bus system*, pri ktorom sme uvažovali štyri scenáre. Analýzu sme vykonali na základe postupu uvedeného v časti 3.1 tejto kapitoly.

Pri analýze uvažujeme rozpočty vyjadrené ako násobok referenčnej hodnoty investičného rozpočtu $B_0 = 30$, použitej vo východiskovom modeli. Pri analýze vplyvu investičného rozpočtu sa ukázalo, že nízke hodnoty parametra α, ktorý predstavuje koeficient zmeny rozpočtu, konkrétne pre $\alpha = 0.50$ a $\alpha = 0.75$, viedli k neprípustnosti modelu. Pre prípustné hodnoty rozpočtu sa však optimálny investičný plán vo väčšine prípadov už nemenil a od hodnoty $\alpha = 1.2$ ostával prakticky stabilný. To naznačuje, že po prekročení určitej rozpočtovej hranice prestáva byť rozpočtové obmedzenie rozhodujúcim faktorom výsledného riešenia.

Pri zmene váhy poruchového scenára sa citlivosť modelu prejavila len obmedzene. Vo väčšine uvažovaných výpadkov vedení sa optimálny investičný plán nemenil ani pri výraznejšej zmene váhy scenára 4. Výnimkou bol výpadok vedenia 2–3, v ktorom sa pri niektorých hodnotách w_4 zmenil optimálny plán z výstavby vedení 2–3, 3–5 a 4–6 (3) na

plán, v ktorom sa vedenie 2–3 posilnilo o ďalší okruh, teda 2–3 (2), spolu s vedeniami 3–5 a 4–6 (3). Zmena scenárových váh teda viedla skôr k lokálnej úprave už identifikovaného citlivého miesta siete než k zásadne odlišnej investičnej stratégii.

Rovnaký záver sa potvrdil aj pri zavedení rizikovej averzie. V prípade prístupu založeného na miere CVaR sa pri $\beta = 0.8$ zmena optimálneho riešenia prejavila pri $\lambda^{\text{risk}} \in \{0.5, 1\}$, zatiaľ čo pri $\beta = 0.9$ a $\beta = 0.95$ už pri $\lambda^{\text{risk}} \in \{0.2, 0.5, 1\}$. Ani v tomto prípade však nešlo o plošnú zmenu riešenia, ale opäť predovšetkým o citlivú reakciu pri výpadku vedenia 2–3. Pri prístupe založenom na garancii minima sa zmena investičného plánu pri garancii minima na čistý scenárový výsledok po zohľadnení investičných nákladov prejavila približne pri hodnote $C_{\min} = 274.8$. V tomto prípade sa pri výpadku vedenia 2–3 optimálny plán zmenil z výstavby vedení 2–3, 3–5 a 4–6 (3) na plán s dvoma novými okruhmi pri vedení 2–3, teda 2–3 (2), spolu s vedeniami 3–5 a 4–6 (3). Táto zmena bola sprevádzaná aj miernym nárastom očakávaného spoločenského blahobytu z 292.53 M€/rok na 292.72 M€/rok.

Celkovo teda pilotné experimenty na systéme *Garver's six-bus system* ukázali, že model je najcitlivejší práve pri výpadku vedenia 2–3. Zmeny rozpočtu, scenárových váh aj rizikovo averzných parametrov viedli prevažne len k potvrdeniu tejto už identifikovanej citlivosti, nie k objaveniu nového kvalitatívne odlišného typu správania modelu.

Obdobná citlivostná analýza bola v priebehu práce vykonaná aj pre základný model *Garver's six-bus system* bez uvažovania prípadu výpadku vedenia. Keďže však zmeny vybraných parametrov v tomto prípade neviedli k výrazným odchýlkam vo výsledných riešeniach ani k osobitne zaujímavým interpretačným záverom, tieto výsledky do hlavného textu samostatne nezahŕňame.

Keďže *Garver's six-bus system* slúžil predovšetkým ako pilotný test implementácie a viaceré získané výsledky mali prevažne potvrdzujúci charakter, v ďalšej časti sa sústreďujeme na *IEEE 24-bus Reliability Test System*, na ktorom sa prejavy sledovaných rozšírení ukázali výraznejšie a interpretačne zaujímavejšie.

3.4 Rozšírenia modelu na *IEEE 24-bus Reliability Test System*

V tejto časti sa sústreďujeme na testovací systém *IEEE 24-bus Reliability Test System*. Najskôr analyzujeme citlivosť výsledkov na zmenu vybraných vstupných parametrov, kon-

krétne na zmenu rozpočtového obmedzenia a na zmenu váh scenárov 1–3. Následne pristupujeme k modifikácii hornej úrovne modelu, v ktorej pôvodný rizikovo neutrálny prístup nahrádzame variantmi zohľadňujúcimi rizikovo averzné správanie investora.

3.4.1 Citlivostná analýza

V tejto časti sa venujeme citlivostnej analýze modelu na systéme *IEEE 24-bus Reliability Test System*. Postupujeme pritom v súlade s metodikou uvedenou v časti 3.1.

Analýza vplyvu investičného rozpočtu na optimálny investičný plán

V tejto časti sa zameriavame na to, do akej miery je optimálny investičný plán citlivý na zmenu disponibilného investičného rozpočtu. Výsledky zároveň umožňujú posúdiť, pri ktorých hodnotách rozpočtu dochádza k zmene optimálneho riešenia v uvažovanom intervale testovaných hodnôt. Pri analýze uvažujeme rozpočty vyjadrené ako násobok referenčnej hodnoty investičného rozpočtu $B_0 = 23\,\text{M€}$.

Pri nižších hodnotách parametra α sa ukázalo, že rozpočtové obmedzenie významne ovplyvňuje realizovateľnosť aj štruktúru optimálneho riešenia. Pre hodnoty $\alpha = 0.50$ a $\alpha = 0.75$ model nenašiel prípustné riešenie, čo naznačuje, že disponibilný investičný rozpočet nepostačoval na realizáciu investičného plánu spĺňajúceho všetky uvažované obmedzenia.

Pre vyššie hodnoty parametra α sa už prípustné riešenia našli. Výsledky pre vybrané uvažované hodnoty parametra α sú zhrnuté v Tab. 4. Prvé prípustné riešenie modelu sme identifikovali pri hodnote parametra $\alpha = 0.85$. Z tabuľky vidno, že tomuto prípadu zodpovedá investičný plán s relatívne nízkymi celkovými investičnými nákladmi, ale zároveň aj s nižšou hodnotou očakávaného spoločenského blahobytu. Pri hodnote $\alpha = 1.25$ došlo k zmene investičného plánu, pričom sa zároveň zvýšila aj hodnota očakávaného spoločenského blahobytu.

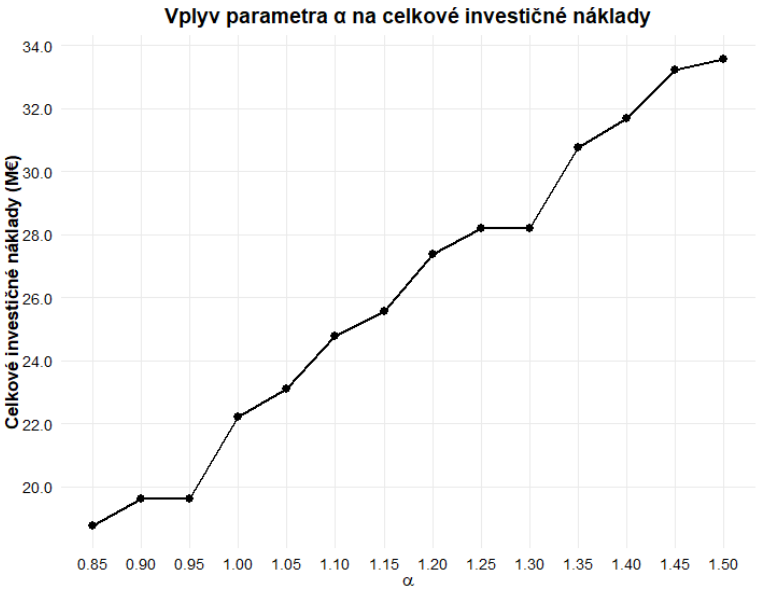
Najvýraznejšia zmena sa prejavila pri hodnote $\alpha = 1.50$, kde sa okrem rastu očakávaného spoločenského blahobytu zmenila aj samotná štruktúra optimálneho investičného plánu. V porovnaní s predchádzajúcimi prípustnými hodnotami rozpočtu tak išlo o kvalitatívne odlišné riešenie, čo naznačuje, že pri vyšších hodnotách investičného rozpočtu model prechádza k inému typu rozšírenia siete.

Z Obr.3 je zrejmé, že rast hodnoty parametra α vedie k rastu celkových investičných nákladov optimálneho riešenia. Tento vývoj odráža postupné uvoľňovanie rozpočtového obmedzenia, ktoré umožňuje realizáciu rozsiahlejších investícií do siete. Podobne z Obr. 4 vyplýva, že s rastúcou hodnotou parametra α sa vo všeobecnosti zvyšuje aj očakávaný spoločenský blahobyt. Vyšší disponibilný rozpočet teda umožňuje zvoliť investičné riešenia vedúce k priaznivejšiemu výsledku z hľadiska spoločenského blahobytu.

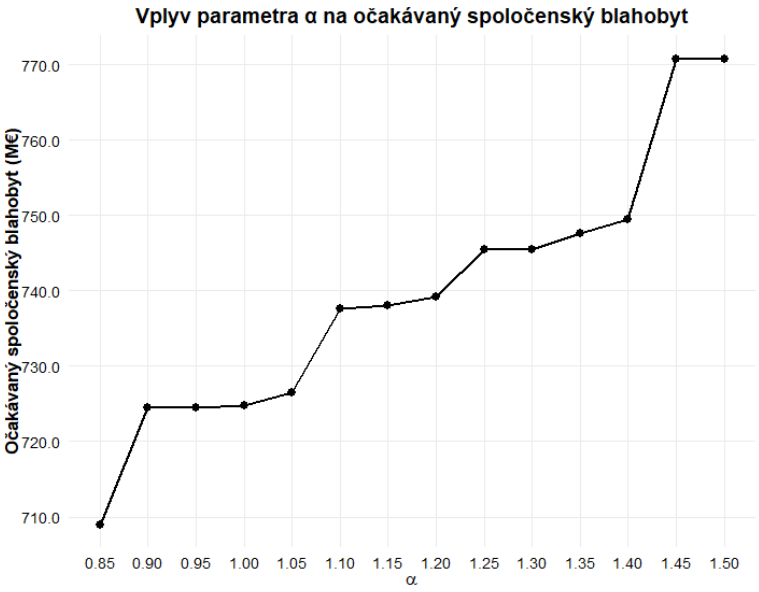
Možno teda konštatovať, že investičný rozpočet v IEEE modeli neovplyvňuje len rozsah realizovaných investícií, ale aj charakter optimálneho rozšírenia prenosovej sústavy. Kým pri nižších prípustných hodnotách rozpočtu model volí skôr úspornejšie riešenia, pri vyššom rozpočte sa otvára priestor aj pre odlišnú topológiu investičného plánu.

Tabuľka 4: Výsledky citlivostnej analýzy vzhľadom na investičný rozpočet v *IEEE 24-bus Reliability Test System*

α	$B = \alpha B_0$ (M€)	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Očakávaný spoločenský blahobyt (M€/rok)
0.50	11.50	neprípustné	–	–
0.75	17.25	neprípustné	–	–
0.85	19.55	6–10 7–8(2) 7–8(3) 10–12 13–14	18.78	709.0035
1.25	28.75	6–10 10–11 11–13 14–16 14–23	28.20	745.47
1.50	34.50	1–2 3–24 6–10 10–12 14–23 15–24	33.56	770.73



Obr. 3: Vplyv parametra α na celkové investičné náklady (M€) (Zdroj: vlastná práca)



Obr. 4: Vplyv parametra α na očakávaný spoločenský blahobyt (M€/rok) (Zdroj: vlastná práca)

Analýza vplyvu váhy scenárov 1–3

V ďalšej časti citlivostnej analýzy sa zameriavame na vplyv scenárových váh 1–3. Význam príslušných scenárov je uvedený v časti 3.1.2. Výsledky pre základné reprezentatívne kombinácie scenárových váh sú uvedené v Tab. 5. Z tabuľky vidno, že pri váhach (0.60, 0.20, 0.20) a (0.40, 0.35, 0.25) model určil rovnaký optimálny investičný plán na úrovni vybudovaných vedení. Rozdiel sa v tomto prípade prejavil len minimálne v hod-

note očakávaného spoločenského blahobytu, pričom samotná štruktúra riešenia zostala zachovaná.

Odlišný výsledok nastal pri voľbe váh (0.40, 0.25, 0.35), pri ktorej došlo k zmene optimálneho investičného plánu. V porovnaní s predchádzajúcimi dvoma prípadmi z riešenia vypadlo jedno z uvažovaných vedení, pričom zároveň došlo k poklesu celkových investičných nákladov a k nárastu očakávaného spoločenského blahobytu. Už táto základná analýza teda naznačila, že zvýraznenie scenára 3 má na výsledné riešenie výraznejší vplyv než zvýraznenie scenárov 1 a 2.

Na spresnenie tohto pozorovania sme následne vykonali aj doplnkovú analýzu, v ktorej sme postupne menili váhu každého zo scenárov a sledovali vývoj očakávaného spoločenského blahobytu a celkových investičných nákladov. Pri zmene váhy scenára 1 sme uvažovali hodnoty

$$\delta(w_1) \in \{0.3,\ 0.4,\ 0.45,\ 0.5,\ 0.55,\ 0.60,\ 0.65,\ 0.70\}.$$

Zvyšné scenárové váhy boli dopočítané podľa postupu opísaného v časti 3.1.2 tak, aby bol súčet všetkých scenárových váh rovný jednej. So zvyšovaním váhy $\delta(w_1)$ dochádzalo k monotónnemu poklesu očakávaného spoločenského blahobytu z 726.8825 M€/rok na 722.6804 M€/rok. Celkové investičné náklady pritom vo všetkých prípadoch ostali rovnaké, konkrétne 22.2234 M€, a nezmenila sa ani štruktúra optimálneho investičného plánu.

Pri zmene váhy scenára 2 sme uvažovali hodnoty

$$\delta(w_2) \in \{0.10,\ 0.15,\ 0.20,\ 0.25,\ 0.30,\ 0.35,\ 0.40,\ 0.45\}.$$

Zvyšné scenárové váhy boli opäť dopočítané podľa postupu opísaného v časti 3.1.2 tak, aby bol súčet všetkých scenárových váh rovný jednej. Pri raste váhy $\delta(w_2)$ sa očakávaný spoločenský blahobyt pri nezmenenom investičnom pláne znižoval, a to z 725.8180 M€/rok na 722.7082 M€/rok. Rovnako ako pri scenári 1 sa vo väčšine prípadov nemenili celkové investičné náklady ani optimálny investičný plán.

Výnimku predstavovala kombinácia váh (0.65, 0.10, 0.25), pri ktorej došlo k zmene investičného rozhodnutia. V tomto prípade celkové investičné náklady klesli na hodnotu 21.4348 M€ a očakávaný spoločenský blahobyt dosiahol 725.2766 M€/rok.

V prípadoch, v ktorých nedochádza k zmene investičného rozhodnutia, má vývoj očakávaného spoločenského blahobytu presne lineárny charakter. Dôvodom je, že pri nezmenenom investičnom pláne zostávajú scenárové hodnoty spoločenského blahobytu W_1, W_2, W_3 konštantné a menia sa iba scenárové váhy.

Napríklad pri zmene váhy scenára 2 ponechávame váhu scenára 3 na referenčnej hodnote $\delta(w_3) = 0.25$ a váhu scenára 1 určujeme zo vzťahu

$$\delta(w_1) = 1 - \delta(w_2) - 0.25.$$

Očakávaný spoločenský blahobyt potom nadobúda tvar

$$E[W] = \delta(w_1)W_1 + \delta(w_2)W_2 + 0.25W_3,$$

s teda po dosadení

$$E[W] = (1 - \delta(w_2) - 0.25)W_1 + \delta(w_2)W_2 + 0.25W_3,$$

čo je lineárna funkcia premennej $\delta(w_2)$. Analogicky vzniká lineárna závislosť aj pri zmene váhy scenára 1 alebo scenára 3, pokiaľ sa nemení optimálny investičný plán. V prípade scenára 1 uvažujeme rovnosť váh scenárov 2 a 3, teda $\delta(w_2) = \delta(w_3) = \frac{1-\delta(w_1)}{2}$. Aj v tomto prípade je preto očakávaný spoločenský blahobyt lineárnou funkciou meniacej sa váhy $\delta(w_1)$.

Pri zmene váhy scenára 3 sme uvažovali hodnoty

$$\delta(w_3) \in \{0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45\}.$$

Váhu scenára 2 sme ponechali na referenčnej hodnote $\delta(w_2) = 0.25$ a váhu scenára 1 sme dopočítali tak, aby bol súčet scenárových váh rovný jednej.

V tomto prípade sa očakávaný spoločenský blahobyt so zvyšovaním váhy $\delta(w_3)$ zvyšoval, a to z 720.6749 M€/rok až na 730.8926 M€/rok. Zároveň sa už pri kombinácii (0.40, 0.25, 0.35) prejavila zmena optimálneho investičného plánu, keď z riešenia vypadlo vedenie 5–10. Táto zmena sa priamo premietla do celkových investičných nákladov, ktoré klesli z 22.2234 M€ na 19.6324 M€, čo možno pozorovať na Obr. 5. Rozdiel investičných nákladov teda zodpovedá práve nákladom na koridor 5–10, ktorý už pri zvýšenom dôraze na scenár 3 nebol súčasťou optimálneho investičného plánu.

Keďže pri zmene váh scenárov 2 a 3 došlo v niektorých prípadoch k zmene investičného plánu, vykonali sme aj doplnkovú analýzu pre vyššie hodnoty váh týchto scenárov. Konkrétne sme uvažovali hodnoty

$$\delta(w_2),\, \delta(w_3) \in \{0.50,\, 0.55,\, 0.60,\, 0.65\}.$$

Výsledky tejto analýzy sú znázornené na Obr. 5. Z grafického znázornenia vyplýva, že výraznejší vplyv na výsledné investičné rozhodnutia má scenár 3, pri ktorom sme pozorovali tri odlišné režimy investičných plánov. Pri scenári 2 sa prejavili iba dva režimy. Tento výsledok potvrdzuje, že scenár 3 má na výsledné riešenie modelu silnejší vplyv než scenár 2.

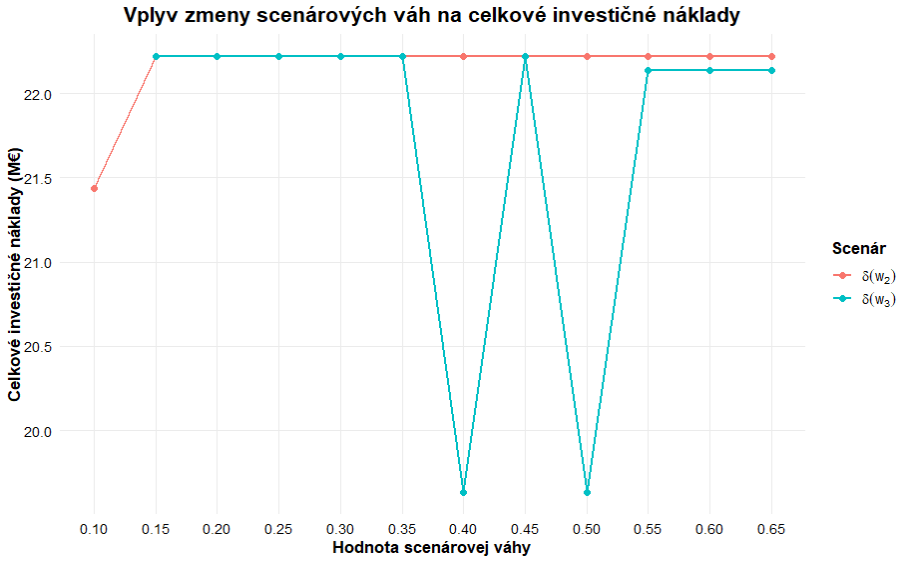
Z uvedených výsledkov vyplýva, že pri scenári 1 nedochádza k zmene investičného rozhodnutia, a preto má pozorovaný pokles očakávaného spoločenského blahobytu najmä interpretačný charakter. Ide o presne lineárnu klesajúcu závislosť, ktorá je dôsledkom zmeny scenárových váh pri nezmenenom investičnom pláne. Pri scenári 2 sa vo väčšine prípadov prejavilo podobné správanie, s výnimkou kombinácie váh (0.65, 0.10, 0.25), pri ktorej došlo k zmene investičného rozhodnutia.

Naopak, pri scenári 3 sa zmena váhy prejavila výraznejšie. Obr. 6 ukazuje odlišný smer vývoja očakávaného spoločenského blahobytu, zatiaľ čo Obr. 5 priamo zachytáva zmenu investičných nákladov, a teda aj zmenu optimálneho investičného plánu. Výsledky tejto doplnkovej analýzy podporujú záver, že model reaguje na zmenu scenárových váh asymetricky a že rozhodujúci vplyv má najmä zmena váhy scenára 3.

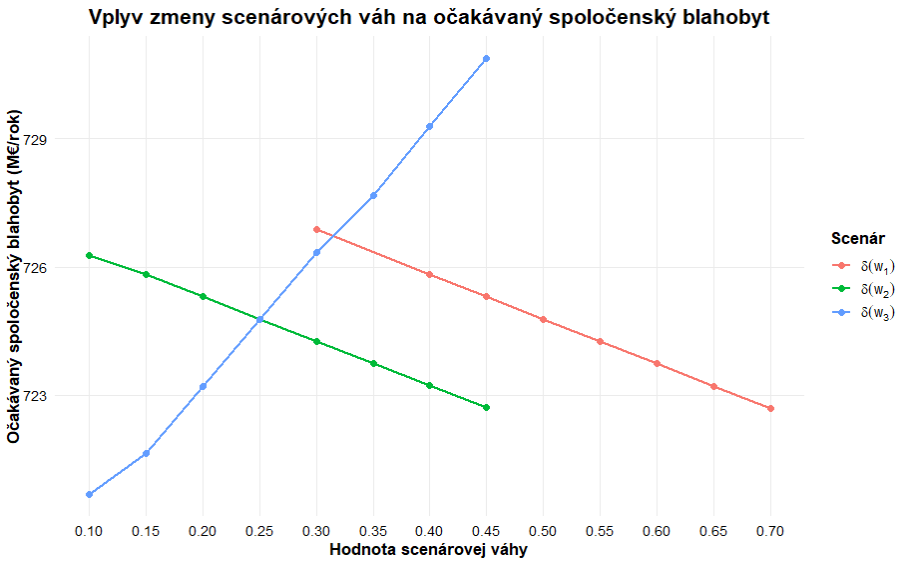
Citlivostná analýza teda ukázala, že výsledné riešenie modelu je citlivé najmä na zmenu investičného rozpočtu a v menšej miere aj na zmenu scenárových váh, predovšetkým pri zmene váhy scenára 3. V ďalšej časti preto skúmame, ako sa optimálny investičný plán zmení po zavedení rizikovej averzie do modelu.

Tabuľka 5: Výsledky analýzy vplyvu scenárových váh na optimálny investičný plán v IEEE 24-bus system

Váhy scenárov $(\delta(w_1), \delta(w_2), \delta(w_3))$	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Očakávaný spoločenský blahobyt (M€/rok)
(0.60, 0.20, 0.20)	5–10 6–10 7–8 10–12 11–13	22.2234	723.73
(0.40, 0.35, 0.25)	5–10 6–10 7–8 10–12 11–13	22.2234	723.74
(0.40, 0.25, 0.35)	6–10 7–8 10–12 11–13	19.6324	727.67



Obr. 5: Závislosť celkových investičných nákladov od váhy scenára $\delta(w_3)$ a $\delta(w_2)$ (Zdroj: vlastná práca)



Obr. 6: Závislosť očakávaného spoločenského blahobytu od váhy scenára $\delta(w_i)$ (Zdroj: vlastná práca)

3.4.2 Zavedenie rizikovej averzie

V tejto časti aplikujeme prístupy rizikovej averzie predstavené v časti 3.2.1 na testovací systém *IEEE 24-bus system*. Konkrétne prístup založený na miere CVaR a prístup založený na garancii minima. Cieľom je preskúmať, ako sa po zohľadnení rizikovo averzného správania investora mení optimálny investičný plán, výška investičných nákladov a hodnota očakávaného spoločenského blahobytu.

Prístup založený na miere CVaR

Pri numerickom testovaní modelu **RA1** vychádzame zo skutočnosti, že v našich experimentoch pracujeme len s tromi scenármi. Pre hodnoty $\beta \in (2/3, 1)$ preto dolný chvost rozdelenia v diskrétnom prípade obsahuje vždy iba najnepriaznivejší scenár. V takomto nastavení sa hodnota CVaR redukuje na stratu zodpovedajúcu najhoršiemu scenáru.

V numerických experimentoch preto uvažujeme jednu hodnotu $\beta = 0.90$, ktorá patrí do intervalu $(2/3, 1)$, a hodnoty $\lambda^{\text{risk}} \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1\}$. Táto formulácia je však dobre škálovateľná aj pre prípady s väčším počtom scenárov, kde už voľba parametra β umožňuje detailnejšie regulovať, aká časť nepriaznivých scenárov vstupuje do rizikovej miery.

Pri numerickom testovaní sme sa teda zamerali na zmenu parametra λ^{risk}, ktorý určuje,

s akou intenzitou sa riziková zložka založená na miere CVaR premieta do účelovej funkcie. Výsledky pre jednotlivé testované kombinácie parametrov sú zhrnuté v Tab. 6, pričom vývoj celkových investičných nákladov a očakávaného spoločenského blahobytu v závislosti od parametra λ^{risk} ilustrujú Obr. 7 a Obr. 8.

Pri referenčných scenárových váhach (0.50, 0.25, 0.25) sa pre hodnoty $\lambda^{\text{risk}} \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5\}$ potvrdilo rovnaké správanie modelu. Z Tab. 6 vyplýva, že pri týchto hodnotách zostávali nezmenené celkové investičné náklady, očakávaný spoločenský blahobyt aj samotná štruktúra optimálneho investičného plánu. Zmena riešenia nastala až približne pri hodnote $\lambda^{\text{risk}} = 0.98$, ktorú možno interpretovať ako hraničnú hodnotu, pri ktorej sa mení optimálne investičné rozhodnutie.

Keďže v predchádzajúcej citlivostnej analýze scenárových váh sa ukázalo, že zvýraznenie scenára 3 ako jediné viedlo aj k zmene štruktúry optimálneho investičného plánu, rozhodli sme sa v analýze modelu **RA1** doplniť aj alternatívne scenárové váhy (0.40, 0.25, 0.35). Motiváciou bolo overiť, či sa pri takomto nastavení, ktoré kladie väčší dôraz práve na scenár 3, prejaví vplyv rizikovo averznej modifikácie výraznejšie než pri referenčných váhach. Referenčné váhy totiž nemusia byť samy o sebe dostatočné na zachytenie vplyvu rizikovej zložky, najmä ak sa pri danom nastavení nemení poradie scenárov podľa nepriaznivosti.

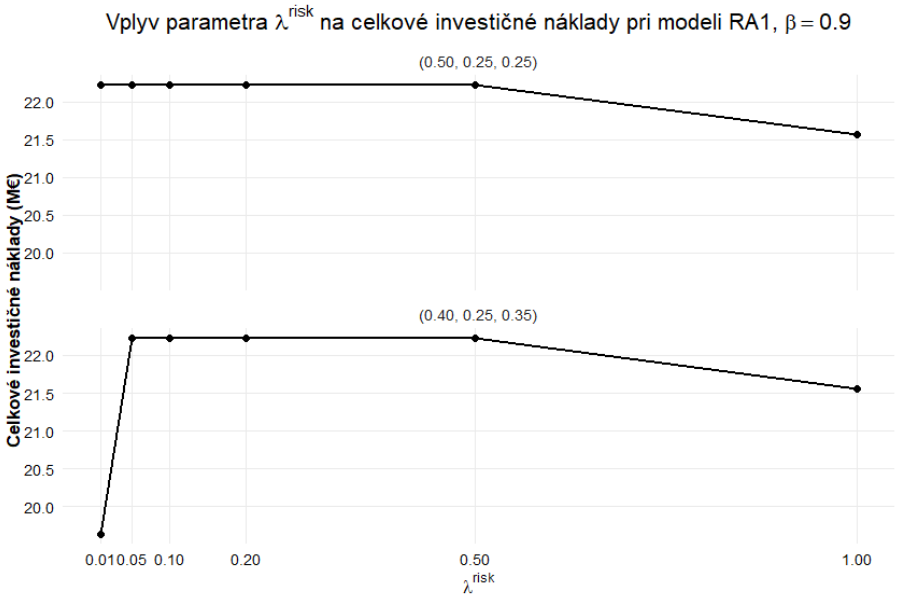
Pri voľbe alternatívnych scenárových váh z Tab. 6 však vidno, že pri zmene λ^{risk} sa objavili tri odlišné režimy správania modelu: osobitné riešenie pre $\lambda^{\text{risk}} = 0.01$, druhé riešenie pre stredné hodnoty $\lambda^{\text{risk}} \in \{0.05, 0.1, 0.2, 0.5\}$ a tretie riešenie pre $\lambda^{\text{risk}} = 1$.

Z Obr. 7 a Obr. 8 vidno, že pri referenčných váhach (0.50, 0.25, 0.25) ostávajú investičné náklady aj očakávaný spoločenský blahobyt stabilné až do $\lambda^{\text{risk}} = 0.5$, pričom zmena nastáva až pri $\lambda^{\text{risk}} = 1$. Pri alternatívnych váhach (0.40, 0.25, 0.35) sa zmena prejaví už pri prechode z $\lambda^{\text{risk}} = 0.01$ na $\lambda^{\text{risk}} = 0.05$, následne ostávajú hodnoty stabilné až do $\lambda^{\text{risk}} = 0.5$, a ďalšia zmena nastáva opäť pri $\lambda^{\text{risk}} = 1$.

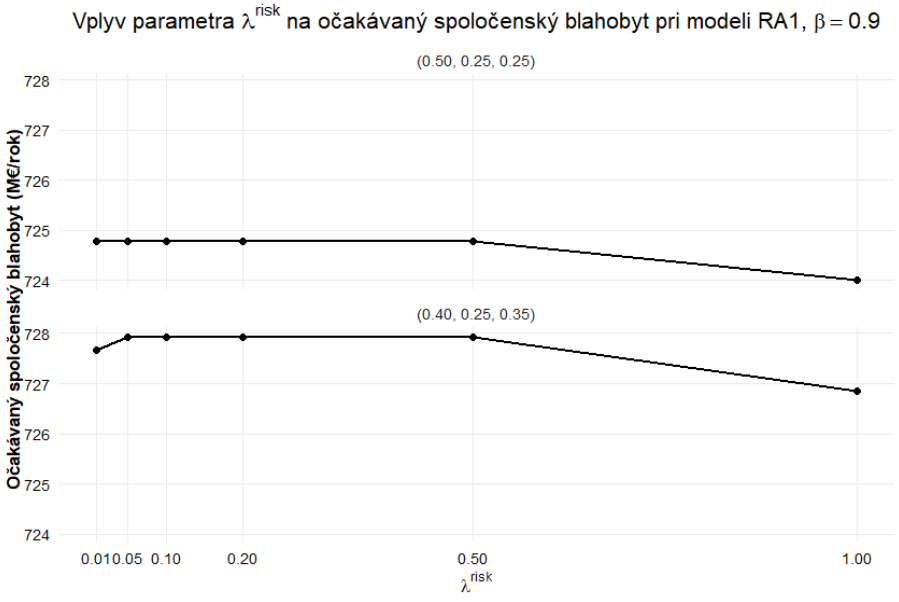
Tieto výsledky súvisia aj s malým počtom uvažovaných scenárov. Pri troch scenároch a hodnote $\beta = 0.90$ je riziková zložka určená najmä najnepriaznivejším scenárom, takže samotná voľba hladiny β má v tomto nastavení obmedzený vplyv. Výraznejšie sa preto prejavuje parameter λ^{risk}, ktorý priamo určuje, akú váhu má riziková zložka v účelovej funkcii.

Tabuľka 6: Súhrn výsledkov modelu RA1 pri rôznych hodnotách λ^{risk} a scenárových váhach

Scenárové váhy $(\delta(w_1), \delta(w_2), \delta(w_3))$	λ^{risk}	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Očakávaný spoločenský blahobyt (M€/rok)
(0.50, 0.25, 0.25)	0.01–0.50	5–10 6–10 7–8 10–12 11–13	22.2234	724.7814
(0.50, 0.25, 0.25)	0.98	6–10 7–8 10–12 11–13 17–18	21.5636	724.0126
(0.40, 0.25, 0.35)	0.01	6–10 7–8 10–12 11–13	19.6324	727.6739
(0.40, 0.25, 0.35)	0.05–0.50	5–10 6–10 7–8 10–12 11–13	22.2234	727.9191
(0.40, 0.25, 0.35)	1	6–10 7–8 10–12 11–13 17-18	21.5636	726.8549



Obr. 7: Vplyv parametra λ^{risk} na celkové investičné náklady v modeli RA1 (Zdroj: vlastná práca)



Obr. 8: Vplyv parametra λ^{risk} na očakávaný spoločenský blahobyt v modeli RA1 (Zdroj: vlastná práca)

Prístup založený na garancii minima

V prípade garancie minima na čistý scenárový výsledok sme vychádzali z najnižšej hodnoty čistého scenárového výsledku dosiahnutej v referenčnom riešení, ktorá zodpove-

dala práve scenáru 2 a predstavovala 706.9403 M€/rok. Testované hodnoty parametra garancie minima v modeli **RA2** sme preto volili v okolí tejto referenčnej hodnoty.

Výsledky uvedené v Tab. 7 ukazujú, že pri postupnom sprísňovaní hranice $C_{\min}$ sa menila nielen prípustnosť modelu, ale aj štruktúra optimálneho investičného plánu. Pri hodnote $C_{\min} = 706.940$ zostávalo ešte referenčné riešenie prípustné, keďže minimálny čistý scenárový výsledok mal hodnotu 706.9403 M€/rok, teda hranicu prevyšoval o malú rezervu. Pri prísnejšej požiadavke $C_{\min} = 706.950$ už model určil nové optimálne riešenie, pri ktorom minimálny čistý scenárový výsledok dosiahol 706.9552 M€/rok. To znamená, že aj po sprísnení požadovanej hranice bolo obmedzenie garancie minima stále splnené s rezervou približne 0.0052 M€/rok.

Pri hodnote $C_{\min} = 706.955$ zostal model stále prípustný, pričom viažucim scenárom bol scenár 2 s čistým scenárovým výsledkom 706.9552 M€/rok, teda už len s veľmi malou rezervou 0.0002 M€/rok. Pri nastavení na $C_{\min} = 706.9552$ sa model dostal presne na hranicu prípustnosti. Pri vyššej hodnote $C_{\min} = 706.9553$ už prípustné riešenie neexistovalo. Hodnotu 706.9552 M€/rok preto možno považovať za maximálnu hranicu čistého scenárového výsledku, ktorú bolo v našich numerických experimentoch ešte možné garantovať.

Optimálny investičný plán pri tejto hraničnej úrovni pozostával z vedení 6–10, 7–8, 10–12, 11–13 a 17–18, pričom celkové investičné náklady dosiahli 21.5636 M€ a očakávaný spoločenský blahobyt 724.0126 M€/rok.

Na základe vykonaných numerických experimentov možno konštatovať, že zavedenie rizikovej averzie neviedlo pri oboch prístupoch k rovnakému správaniu modelu. Pri prístupe založenom na miere CVaR zostalo optimálne riešenie pre väčšinu analyzovaných hodnôt parametra λ^{risk} stabilné, pričom zmena sa prejavila až pri vyšších hodnotách tohto parametra. Naopak, pri prístupe založenom na garancii minima sa pri sprísňovaní požadovanej hranice prejavila aj zmena investičného plánu. Výsledky preto naznačujú, že v prípade *IEEE 24-bus system* mala garancia minima na rozhodovanie investora výraznejší dopad než penalizácia prostredníctvom miery CVaR.

Tabuľka 7: Výsledky pri sprísňovaní garancie minima na čistý scenárový výsledok v IEEE 24-bus system

Hranica $C_{\min}$ (M€/rok)	Investičný plán	Celkové investičné náklady (M€)	Očakávaný spoločenský blahobyt (M€/rok)
706.000	5–10 6–10 7–8 10–12 11–13	22.2234	724.7814
706.940	5–10 6–10 7–8 10–12 11–13	22.2234	724.7814
706.950	6–10 7–8 10–12 11–13 **17–18**	21.5636	724.0126
706.955	6–10 7–8 10–12 11–13 **17–18**	21.5636	724.0126
706.9553	neprípustné	–	–

3.5 Implementačné zhrnutie rozšírení modelu

Rozšírenia modelu na systéme *Garver's six-bus system* sme realizovali predovšetkým pre prípad výpadku existujúceho vedenia. Citlivostnú analýzu vzhľadom na investičný rozpočet sme vykonávali opakovaným spúšťaním skriptu `Single_line_contingency.py`, pričom hodnota dostupného rozpočtu bola upravovaná v základnom skripte `MILP_model.py`. Pri analýze vplyvu váhy poruchového scenára boli scenárové váhy menené manuálne a následne preškálované tak, aby ich súčet zostal rovný jednej.

Zavedenie rizikovej averzie investora bolo implementované v skripte `MILP_model_--contingency` a spúšťané prostredníctvom skriptu `Single_line_contingency.py`. Prístupy založené na miere CVaR a na garancii minima boli do skriptu doplnené pomocou prepínacích parametrov typu `True`/`False`, ktoré umožňovali aktivovať alebo deaktivovať príslušné rozšírenie modelu.

V prípade testovacieho systému *IEEE 24-bus Reliability Test System* sme rizikovú averziu implementovali analogickým spôsobom v skripte `MILP_IEEE.py`. Citlivostnú analýzu vzhľadom na investičný rozpočet a scenárové váhy sme realizovali úpravou vstupných parametrov, najmä hodnoty rozpočtového obmedzenia a scenárových váh $\delta(w)$. Pre každé nastavenie parametrov bol model opakovane spustený a následne boli vyhodnotené optimálny investičný plán, celkové investičné náklady, očakávaný spoločenský blahobyt a prípadná neprípustnosť riešenia.

Záver

Výsledkom tejto diplomovej práce je korektne implementovaný a numericky otestovaný model plánovania rozšírenia prenosovej sústavy v trhovom prostredí. Práca poskytuje základný teoretický prehľad dvojúrovňovej optimalizácie v rozsahu potrebnom pre pochopenie a implementáciu uvažovaného modelu. Spája teda relevantné teoretické poznatky s ich aplikáciou na konkrétny model z oblasti trhov s elektrickou energiou.

V kapitole 1 sme zhrnuli základné pojmy dvojúrovňovej optimalizácie, všeobecnú formuláciu problému, optimistický a pesimistický prístup, vybrané reformulačné postupy a stručný prehľad algoritmických prístupov. Záver kapitoly bol venovaný aplikáciám v energetike. Kapitola 2 sa zamerala na model plánovania rozšírenia prenosovej sústavy podľa článku [9], jeho MILP reformuláciu, implementáciu v Pythone a porovnanie výsledkov na systémoch *Garver's six-bus system* a *IEEE 24-bus Reliability Test System*. V kapitole 3 sme analyzovali citlivosť modelu na zmenu investičného rozpočtu a scenárových váh, následne sme model rozšírili o rizikovo averzné modifikácie.

Pri replikácii modelu na systéme *Garver's six-bus system* sa podarilo reprodukovať referenčný investičný plán aj hodnoty hlavných ukazovateľov. Pri systéme *IEEE 24-bus Reliability Test System* sa získané riešenie od referenčného článku odlišovalo, čo súviselo najmä s neúplnosťou dostupných vstupných údajov a potrebou doplniť niektoré parametre heuristicky. Napriek tomu bola implementácia použiteľná ako východisko pre ďalšie numerické experimenty.

Citlivostná analýza ukázala, že investičný rozpočet má významný vplyv na prípustnosť aj štruktúru riešenia. Pri nižších hodnotách rozpočtu model nenašiel prípustné riešenie, zatiaľ čo pri vyšších hodnotách sa menil rozsah aj charakter optimálneho investičného plánu. Pri zmene scenárových váh sa ukázalo, že model nereaguje na všetky scenáre rovnako. Najvýraznejší vplyv v prípade systému *IEEE 24-bus Reliability Test System* mala zmena váhy tretieho scenára, pri ktorej došlo aj k zmene investičného rozhodnutia.

Za hlavný vlastný prínos práce považujeme rozšírenie referenčného modelu o rizikovo averzné rozhodovanie na hornej úrovni. Takáto modifikácia je prirodzená pri plánovaní prenosovej sústavy, kde rozhodovanie prevádzkovateľa siete nemusí byť založené iba na maximalizácii očakávaného výsledku, ale aj na snahe obmedziť nepriaznivé scenáre. Kým dolná úroveň reprezentuje trhové vyrovnanie, horná úroveň zodpovedá plánovaciemu roz-

hodnutiu, pri ktorom je opatrnejší postoj k riziku realistický.

Rizikovú averziu sme do modelu zaviedli dvoma spôsobmi, pomocou miery CVaR v účelovej funkcii hornej úrovne a pomocou garancie minimálneho čistého scenárového výsledku. Obe modifikácie boli formulované tak, aby nezmenili základnú MILP štruktúru modelu. Model teda zostal riešiteľný rovnakým typom optimalizačných nástrojov, iba s doplnenými pomocnými premennými a lineárnymi obmedzeniami. Navrhnutý spôsob implementácie je zároveň použiteľný aj pri väčšom počte scenárov.

Numerické výsledky ukázali, že oba prístupy vnášajú do rozhodovania odlišný typ opatrnosti. Pri CVaR modifikácii zostávalo riešenie pre väčšinu uvažovaných hodnôt parametra rizikovej averzie stabilné a zmena investičného plánu sa prejavila až pri vyšších hodnotách tohto parametra. Tento výsledok naznačuje, že pri danom scenárovom nastavení CVaR pôsobí skôr ako jemnejšia penalizácia nepriaznivých výsledkov. Naopak, pri garancii minima sa zmena investičného plánu prejavila priamo pri sprísňovaní požadovanej hranice $C_{\min}$. Tento prístup preto pôsobil konzervatívnejšie, keďže explicitne vyžadoval, aby čistý scenárový výsledok neklesol pod stanovenú úroveň. V testovanom IEEE modeli sa tak garancia minima ukázala ako priamočiarejší nástroj na ovplyvnenie investičného rozhodnutia než penalizácia prostredníctvom miery CVaR.

Pri ďalšom skúmaní by bolo vhodné model otestovať na širšej množine scenárov, najmä pri rôznych profiloch dopytu a pri výraznejších stresových situáciách v sieti. Takéto rozšírenie by umožnilo lepšie posúdiť správanie rizikovo averzných modifikácií v situáciách, kde sú rozdiely medzi scenármi výraznejšie.

Zoznam použitej literatúry

[1] Bracken J., McGill J.: *Mathematical programs with optimization problems in the constraints*, Operations Research, 1973, dostupné na internete (7.1.2026): https://pubsonline.informs.org/doi/epdf/10.1287/opre.21.1.37

[2] Bracken J., McGill J.: *Defense applications of mathematical programs with optimization problems in the constraints*, Operations Research, 1974, dostupné na internete (7.1.2026): https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.22.5.1086

[3] Bracken J., McGill J.: *Production and marketing decisions with multiple objectives in a competitive environment.*, Journal of Optimization Theory and Applications 24, 449-458, 1978, dostupné na internete (7.1.2026): https://link.springer.com/article/10.1007/BF00932888

[4] Colson B., Marcotte P., Savard G., článok: *An overview of bilevel optimization*, Annals of Operations Research, Volume 53, 253-256, 2007, dostupné na internete (17.2.2025): https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-007-0176-2

[5] Dempe Stephan, kniha: *Foundations of bilevel programming, Nonconvex optimization and its applications*, Springer New York, NY, 2010, dostupné na internete (7.1.2026): https://doi.org/10.1007/b101970

[6] Bard Jonathan F., kniha: *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications*, Springer New York, NY, 1998, dostupné na internete (11.3.2025): https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-2836-1

[7] Kleinert Thomas, Labbé Martine, Ljubić Ivana, Schmidt Martin: *A Survey on Mixed-Integer Programming Techniques in Bilevel Optimization*, EURO Journal on Computational Optimization, Volume 9, 2021, dostupné na internete (7.1.2026): https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2192440621001349

[8] Dempe S., Zemkoho A., kniha: *Bilevel Optimization: Advances and Next Challenges*, Springer Cham, 2020, dostupné na internete (6.11.2025): https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-52119-6

[9] Garces Lina P. and Conejo Antonio J. and Garcia-Bertrand Raquel and Romero Rubén, článok: *A Bilevel Approach to Transmission Expansion Planning Within a Market Environment*, IEEE Transactions on Power Systems (Volume 24, Issue:3), august 2009, dostupné na internete (29.10.2025): https://ieeexplore.ieee.org/document/4957003

[10] Labbé M., Marcotte, P. and Savard G., článok: *A Bilevel Model of Taxation and Its Application to Optimal Highway Pricing*, Management Science, 44 (12-part-1), 1608-1622, 1998, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1287/mnsc.44.12.1608

[11] Brotcorne L., Labbé M., Marcotte P. and Savard G., článok: *A Bilevel Model for Toll Optimization on a Multicommodity Transportation Network*, Transportation Science 35(4), 345-358, 2001, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1287/trsc.35.4.345.10433

[12] Côté Jean-Philippe, Marcotte Patrice, Savard Gilles : *A bilevel modelling approach to pricing and fare optimisation in the airline industry*, Journal of Revenue and Pricing Management 2, 23-36, 2003, dostupné na internete (6.1.2026): https://link.springer.com/article/10.1057/palgrave.rpm.5170046

[13] Kara B. Y., Verter Vedat, článok: *Designing a road network for hazardous materials transportation*, Transportation Science 38(2), 188-196, 2004, dostupné na internete (6.1.2025): https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/trsc.1030.0065

[14] Ackere Ann van: *The principal/agent paradigm: Its relevance to various functional fields*, European Journal of Operational Research 70(1), 83-103, 1993, dostupné na internete (6.1.2025): https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037722179390234E

[15] Sherali H. D., Soyster A. L., Murphy F. H. : *Stackelberg-Nash-Cournot equilibria: characterizations and computations*, Operations Research 31(2), 253-276, 1983, dostupné na internete (6.1.2025): https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.31.2.253

[16] Hearn D. W., Ramana M. V.: *Solving Congestion Toll Pricing Models. In: Marcotte, P., Nguyen, S. (eds) Equilibrium and Advanced Transportation Modelling. Centre for Research on Transportation*, Springer, Boston, MA, 1998, dostupné na internete (6.1.2025): https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-5757-9_6

[17] Larsson, T., Patriksson, M.: *Side constrained traffic equilibrium models–traffic management through link tolls. In P. Marcotte, S. Nguyen (Eds.), Equilibrium and advanced transportation modelling*, Springer, Boston, MA, 1998, dostupné na internete (6.1.2025):
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-5757-9_7

[18] Florian M., Chen Y.: *A coordinate descent method for the bi-level O-D matrix adjustment problem*, International Transactions in Operational Research, Volume 2, Issue 2, 165-179, 1995, dostupné na internete (6.1.2025): https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/096960169500001N

[19] Jayaswal S. and Sinha A., materiály: *Bilevel Optimization: Applications, Models and Solution Approaches*, Research and Publications, Working Paper No. 2022-05-02, Indian Institute of Management Ahmedabad, 2022, dostupné na internete (25.2.2025): https://www.iima.ac.in/sites/default/files/rnpfiles/7531966492022-05-02.pdf

[20] Boyd, Stephen and Vandenberghe, Lieven, kniha: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge University Press, England, 2004, dostupné na internete (3.5.2026): https://web.stanford.edu/ boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf

[21] Luo Z.-Q., Pang J.-S. and Ralph D., kniha: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1017/CBO9780511983658

[22] Fortuny-Amat J. and McCarl B., článok: *A representation and economic interpretation of a two-level programming problem*, Journal of the Operational Research Society 32, 783–792, 1981, dostupné na internete (3.5.2026): https://link.springer.com/article/10.1057/jors.1981.156

[23] Beale E.M.L. and Tomlin J.A., článok: *Special facilities in a general mathematical programming system for non-convex problems using order sets of variables*,

Operational Research, Volume 69, 447-454, 1969, dostupné na internete (28.03.2026): https://www.researchgate.net/publication/313166553_Special_facilities_in_a_general_mathematical_programming_system_for_nonconvex_problems_using_ordered_sets_of_variables

[24] Tsoukalas, A., Mitsos, A., článok: *Multivariate McCormick relaxations*, Journal of Global Optimization, Volume 59, s. 633–662, 2014, dostupné na internete (28.4.2026): https://doi.org/10.1007/s10898-014-0176-0

[25] Tang Yen, Richard Jean-Philippe P. and Smith J. Cole, článok: *A class of algorithms for mixed-integer bilevel min–max optimization*, Journal of Global Optimization, Volume 66, s. 225–262, 2016, dostupné na internete (30.4.2026): https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10898-015-0274-7.pdf

[26] Som, K., Thirumulanathan, D. and Dutta, J., článok: *Bilevel Programming Problems: A view through Set-valued Optimization*, Annals of Operations Research, 2025, dostupné na internete (30.4.2026): https://doi.org/10.1007/s10479-025-06589-6

[27] Ye, J. J. and Zhu, D., článok: *New necessary optimality conditions for bilevel programs by combining the MPEC and value function approaches*, SIAM Journal on Optimization, Volume 20, Issue 4, 2010, dostupné na internete (30.4.2026): https://doi.org/10.1137/080725088

[28] Moore, J. T. and Bard, J. F., článok: *The Mixed Integer Linear Bilevel Programming Problem*, Operations Research 38(5), 911–921, 1990, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1287/opre.38.5.911

[29] Pujara, Dhaval and Sinha, Ankur, článok: *A Review of Bilevel Optimization: Methods, Emerging Applications, and Recent Advancements*, 2025, dostupné na internete (9.2.2026): https://www.researchgate.net/publication/397321895_A_Review_of_Bilevel_Optimization_Methods_Emerging_Applications_and_Recent_Advancements

[30] Bialas, W. F. and Karwan, M. H., článok: *Two-Level Linear Programming*, Management Science 30(8), 1004–1020, 1984, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1287/mnsc.30.8.1004

[31] Ben-Ayed, O. and Blair, C. E., článok: *Computational Difficulties of Bilevel Linear Programming*, Operations Research 38(3), 556–560, 1990, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1287/opre.38.3.556

[32] Bard, J. F. and Moore, J. T., článok: *A Branch and Bound Algorithm for the Bilevel Programming Problem*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Volume 11, Issue 2, 1990, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1137/0911017

[33] Tahernejad, S., Ralphs, T. K. and DeNegre, S. T., článok: *A Branch-and-Cut Algorithm for Mixed Integer Bilevel Linear Optimization Problems and Its Implementation*, Mathematical Programming Computation 12, 529–568, 2020, dostupné na internete (5.5.2026):https://doi.org/10.1007/s12532-020-00183-6

[34] Sauma, E. E. and Oren, S. S., článok: *Economic criteria for planning transmission investment in restructured electricity markets*, IEEE Transactions on Power Systems, Volume 22, Issue 4, 1394–1405, 2007, dostupné na internete (3.5.2026): https://ieeexplore.ieee.org/document/4349124

[35] Wogrin, S., Centeno, E. and Barquín, J., článok: *Generation capacity expansion in liberalized electricity markets: a stochastic MPEC approach*, IEEE Transactions on Power Systems, Volume 26, Issue 4, 2526–2532, 2011, dostupné na internete (3.5.2026): https://ieeexplore.ieee.org/document/5764851

[36] Nasrolahpour, E., Kazempour, J., Zareipour, H. and Rosehart, W. D., článok: *A bilevel model for participation of a storage system in energy and reserve markets*, IEEE Transactions on Sustainable Energy, Volume 9, Issue 2, 582–598, 2018, dostupné na internete (3.5.2026): https://ieeexplore.ieee.org/document/8036231

[37] Ruiz, C. and Conejo, A. J., článok: *Pool strategy of a producer with endogenous formation of locational marginal prices*, IEEE Transactions on Power Systems, Volume 24, Issue 4, 1855–1866, 2009, dostupné na internete (3.5.2026): https://ieeexplore.ieee.org/document/5272241

[38] Dempe, S., Kalashnikov, V. V. and Ríos-Mercado, R. Z., článok: *Discrete bilevel programming: application to a natural gas cash-out problem*, European Journal of

Operational Research, Volume 166, Issue 2, 469–488, 2005, dostupné na internete (3.5.2026): https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.01.047

[39] Grigg, C., Wong, P. , Allan, R. , Bhavaraju, M., Billinton, R., článok: *The IEEE Reliability Test System–1996*, IEEE Transactions on Power Systems, Volume 14, Issue 3, 1010–1020, 1999, dostupné na internete (5.5.2026): https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/780914

[40] Fang, R. and Hill, D. J., článok: *A new strategy for transmission expansion in competitive electricity markets*, IEEE Transaction Power System, Volume 18, Issue 1,374–380, Feb. 2003, dostupné na internete (5.5.2026): https://ieeexplore.ieee.org/document/1178822

[41] OpenAI, informačný systém umelej inteligencie: *ChatGPT*, Online, 2026, dostupné na internete (5.5.2026): https://openai.com/

[42] Rockafellar, R. Tyrrell and Uryasev, Stanislav, článok: *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking & Finance, Volume 26, Issue 7, s. 1443-1471, 2002, dostupné na internete (21.4.2026): https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6

[43] Rockafellar, R. Tyrrell and Uryasev, Stanislav, článok: *Optimization of Conditional Value-At-Risk*, Journal of Risk, Volume 2, Issue 3, 21-41, 2000, dostupné na internete (21.4.2026): https://www.risk.net/journal-risk/2161159/optimization-conditional-value-risk